



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Die Statik der Hochbau-Constructions**

**Landsberg, Theodor**

**Stuttgart, 1899**

b) Mittelkraftslinie und Seilcurve

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77733)

Wir werden weiter unten sehen, daß es in vielen Fällen, in denen die Aufsuchung der genauen Stützlinie schwierig ist, genügt, gewisse Grenzlagen der Stützlinie zu ermitteln; da aber die Stützlinie leicht aus dem Resultanten-Polygon construirt werden kann, so wird für alle diese Fälle zunächst das Resultanten-Polygon oder die Mittelkraftslinie aufgesucht.

### b) Mittelkraftslinie und Seilcurve.

270.  
Horizontal Schub  
im Gewölbe.

Jede Verbindungslinie zweier Eckpunkte der Mittelkraftslinie (*I II*, *II III*, *III IV* . . . in Fig. 374) giebt nach der Erklärung in Art. 268 (S. 283) Lage und Richtung der Mittelkraft aller an der einen Seite der betreffenden Fuge wirkenden äußeren Kräfte. Es giebt also z. B. *III IV* die Richtung und Lage der Mittelkraft aller rechts von der Fuge *3* wirkenden Kräfte, d. h. der Kräfte  $D_1$ ,  $G_4$ ,  $G_5$ ,  $G_6$ ; da sämtliche äußere Kräfte einander im Gleichgewichte halten, so fällt die Mittelkraft aller links von der Fuge *3* wirkenden Kräfte gleichfalls in die Linie *III IV*; in derselben halten sich demnach die beiden Mittelkräfte im Gleichgewichte. Genau eben so verhält es sich auch mit jeder anderen Fuge.

Betrachtet man nun einen Theil des Gewölbes (Fig. 375) und untersucht seinen Gleichgewichtszustand, so wirken auf denselben nicht nur die Kräfte  $D$ ,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ , sondern auch die Kräfte, welche in der Fuge *33* vom anderen Theile des Gewölbes übertragen werden. Die Mittelkraft der letzteren ist aber nach dem Vorstehenden gleich der Mittelkraft aller auf den anderen Theil wirkenden äußeren Kräfte, d. h. hier von  $D_1$ ,  $G_4$ ,  $G_5$ ,  $G_6$ . Diese fällt in die Linie *III IV* (Fig. 374). Wenn also die Mittelkraftslinie bekannt ist, so sind stets auch Lage, Richtung und (wie weiter unten nachgewiesen wird, auch) GröÙe derjenigen Kraft bekannt, bzw. leicht zu finden, welche in der betreffenden Fuge auf das Gewölbe-Bruchstück übertragen wird. Alles Vorstehende gilt selbstverständlich auch, wenn die einzelnen Gewölbetheile unendlich schmal werden und die Mittelkraftslinie zur Seilcurve wird; dann fällt die Mittelkraft an jeder Stelle in die Richtung der Tangente an die Curve.

Die Kämpferdrücke  $D$  und  $D_1$  haben lothrechte und wagrechte Seitenkräfte; in dieser Beziehung kann man die Gewölbe als Sprengwerksträger ansehen. Diese wagrechten Seitenkräfte, welche auf das Gewölbe nach innen, auf die stützenden Seitenmauern nach außen, also schiebend wirken, gefährden das Bauwerk. Wenn die Belastungen nur lothrecht wirken, so haben diese wagrechten Seitenkräfte im ganzen Bogen bei derselben Belastung gleiche GröÙe. Denn das Gleichgewicht eines beliebigen Bruchstückes (Fig. 376) verlangt, daß die algebraische Summe aller wagrechten Kräfte gleich Null sei. Die beiden einzigen wagrechten Kräfte am Bruchstück sind aber die Seitenkräfte  $H$  und  $H_1$  von  $D$  und  $R$ . Daher muß stattfinden:

$$0 = H - H_1, \text{ woraus } H = H_1.$$

Da Schnitt *mn* beliebig gewählt war, so gilt das Vorstehende ganz allgemein.

Man nennt diese wagrechte Seitenkraft den Horizontal Schub des Bogens, bzw. des Gewölbes. Die

Fig. 375.

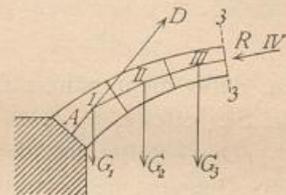
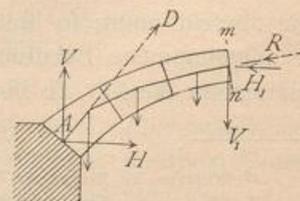


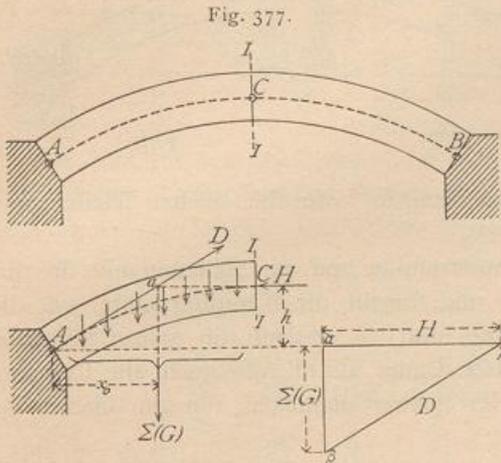
Fig. 376.



Ermittlung der Gröfse und Lage dieses Horizontalschubes ist bei der Berechnung der Gewölbe die wichtigste Aufgabe.

Die Gröfse des Horizontalschubes ist sowohl von der Belaftung, wie auch von der Form und Lage der Mittelkraftlinie, bzw. Seilcurve abhängig. Diese Abhängigkeit stellt sich für das symmetrisch zur Scheitelfuge gestaltete und eben so belaftete Gewölbe folgendermassen dar.

$ACB$  sei (Fig. 377) die Seilcurve. Legt man durch denjenigen Punkt derselben, in welchem die Tangente wagrecht ist, d. h. durch den Scheitel, einen Schnitt  $II$  und untersucht das Gleichgewicht des Gewölbestückes an der einen Seite dieses Schnittes, etwa des Stückes  $AC$ , so mufs, wie eben entwickelt, die Kraft, welche in  $II$  auf das Bogenstück übertragen wird, in die Richtung der Tangente fallen, demnach wagrecht sein.



Diese Kraft ist also das gefuchte  $H$ . Da auch  $A$  ein Punkt der Seilcurve ist, so mufs durch  $A$  die Mittelkraft aller derjenigen Kräfte gehen, welche rechts von der Kämpferfuge wirken, d. h. die Mittelkraft von  $\Sigma(G)$  und  $H$ ; diese Mittelkraft mufs demnach für  $A$  als Drehpunkt das statische Moment Null haben. Da

nun das statische Moment der Mittelkraft stets gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte ist, so mufs auch stattfinden:

$$x_0 \Sigma(G) - Hh = 0,$$

woraus folgt

$$H = \frac{x_0 \Sigma(G)}{h} \dots \dots \dots 389.$$

Auch graphisch ergibt sich die Gröfse von  $H$  leicht.

Man ermittle die Mittelkraft  $\Sigma(G)$  aller an der einen Seite des durch den Scheitel gelegten Schnittes  $II$  wirkenden Lasten (Fig. 377); alsdann wirken auf das Gewölbestück drei Kräfte:  $\Sigma(G)$ ,  $H$  und  $D$ . Da dieselben das Gewölbestück im Gleichgewicht halten, so schneiden sich ihre Richtungslinien in einem Punkte, d. h.  $D$  mufs durch den Punkt  $a$  gehen, in welchem sich die beiden anderen Kräfte,  $H$  und  $\Sigma(G)$  schneiden. Da  $D$  auch durch  $A$  geht, so ist die Richtung von  $D$  durch Linie  $Aa$  bestimmt. Nun halten sich in  $a$  drei Kräfte im Gleichgewicht, deren Richtungen bekannt sind, von deren einer [ $\Sigma(G)$ ] auch die Gröfse bekannt ist. Man trage  $\Sigma(G)$  nach beliebigem Mafsstabe auf ( $= \alpha \beta$ ) und ziehe durch  $\alpha$  und  $\beta$  Parallelen zu bzw. den Richtungen von  $H$  und  $D$ ; alsdann erhält man

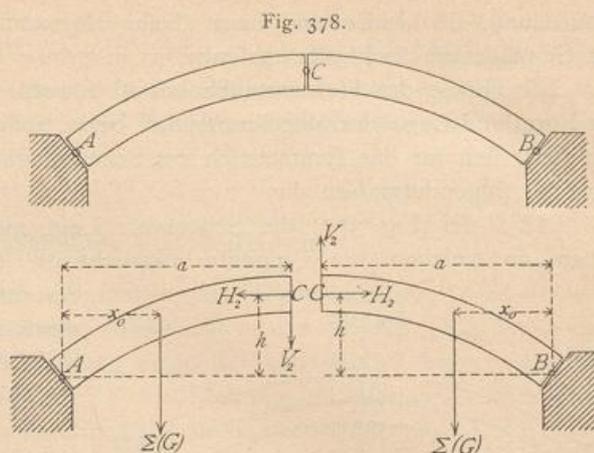
$$H = \gamma \alpha \quad \text{und} \quad D = \beta \gamma.$$

Die Ermittlung von  $H$  für das unsymmetrische, bzw. das unsymmetrisch belaftete Gewölbe wird in Art. 273 u. 275 vorgeführt werden.

Wie in Art. 266 (S. 281) gezeigt, giebt die Statik fester Körper für die Ermittlung der unbekannteren äufseren Kräfte und damit auch der Seilcurve nur drei Gleichungen, während sechs Unbekannte vorhanden sind. Man kann aber die Seilcurve dadurch fest legen, dafs man durch die Construction drei Bedingungen schafft, welche durch drei Gleichungen ausgedrückt werden und so die fehlenden Gleichungen bieten. Am einfachsten geschieht dies, indem man drei Punkte vorschreibt, durch welche die Seilcurve gehen mufs, etwa durch Einlegen von Keilen u. f. w. in drei

271.  
Seilcurve durch drei gegebene Punkte.

Fugen (Fig. 378). Wenn also drei Punkte vorgeschrieben sind, durch welche die Seilcurve verlaufen muß, so ist der ganze Lauf der Seilcurve und damit auch die Größe des Horizontal-schubes gegeben. Auch wenn zwei Punkte der Seilcurve und außerdem in einem dieser Punkte die Richtung bestimmt ist, welche die Tangente an die Curve haben soll, ist Alles bekannt. Wird die Seilcurve in dieser Weise fest gelegt, so wirken die beiden



Theile des Gewölbes auf einander genau eben so, wie die beiden Theile eines Sprengwerkdaches (siehe Art. 210, S. 211<sup>41</sup>).

Wenn bei einem Gewölbe zwei Kämpferpunkte und ein Scheitelpunkt für den Verlauf der Seilcurve vorgeschrieben sind und sowohl die Kämpferpunkte wie die Lasten symmetrisch zur Scheitel-Lothrechten sind, so verläuft die ganze Seilcurve, bzw. Mittellkraftlinie symmetrisch zu dieser Linie, so ist also auch die Tangente an die Seilcurve im Scheitel wagrecht. Es genügt demnach, für ein solches Gewölbe eine Hälfte zu untersuchen.

Betrachtet man nämlich zunächst (Fig. 378) die linke Gewölbehälfte und nimmt dabei allgemein an, daß die von der rechten Hälfte im Scheitel übertragene Kraft die Seitenkräfte  $H_2$  und  $V_2$  habe, so muß, weil die Mittellkraft von  $\Sigma(G)$ ,  $H_2$  und  $V_2$  durch A verläuft,

$$0 = V_2 a - H_2 h + x_0 \Sigma(G)$$

sein. Wird die rechte Gewölbehälfte betrachtet, so wirken auf dieselbe im Scheitel  $H_2$  und  $V_2$  in gleicher Größe, aber in entgegengesetztem Sinne, wie auf die linke Hälfte; der Symmetrie wegen ist die Belastung dieser Hälfte ebenfalls  $\Sigma(G)$  im Abstände  $x_0$  vom Kämpfer B; mithin findet statt:

$$0 = V_2 a + H_2 h - x_0 \Sigma(G).$$

Die Addition beider Gleichungen giebt:  $0 = V_2 \cdot 2a$ , woraus

$$V_2 = 0$$

folgt. Demnach ist die Kraft, welche die beiden Gewölbehälften im Scheitel auf einander übertragen, in der That wagrecht, also ist auch die Tangente an die Mittellkraftlinie im Scheitel wagrecht.

Man findet die Größe von  $H_2 = H$  leicht, wie Gleichung 389:

$$H = \frac{x_0 \Sigma(G)}{h}.$$

Wenn für die Seilcurve drei Punkte oder zwei Punkte und eine Richtung vorgeschrieben sind, so ist nach Vorstehendem der Verlauf der Seilcurve bestimmt; alsdann muß also auch eine graphische Construction dieser Linie möglich sein. Es ist

<sup>41</sup>) Neuerdings ist die Anordnung dreier Gelenke, zweier Gelenke an den Kämpfern und eines Gelenkes im Scheitel, bei den großen Brückengewölben vielfach ausgeführt worden, insbesondere von Köpcke und Leibbrand. — Man vergl. hierüber: Fortschritte der Ingenieurwissenschaften. 2. Gruppe, Heft 7: Gewölbte Brücken. Von K. v. LEIBRAND. Leipzig 1897.



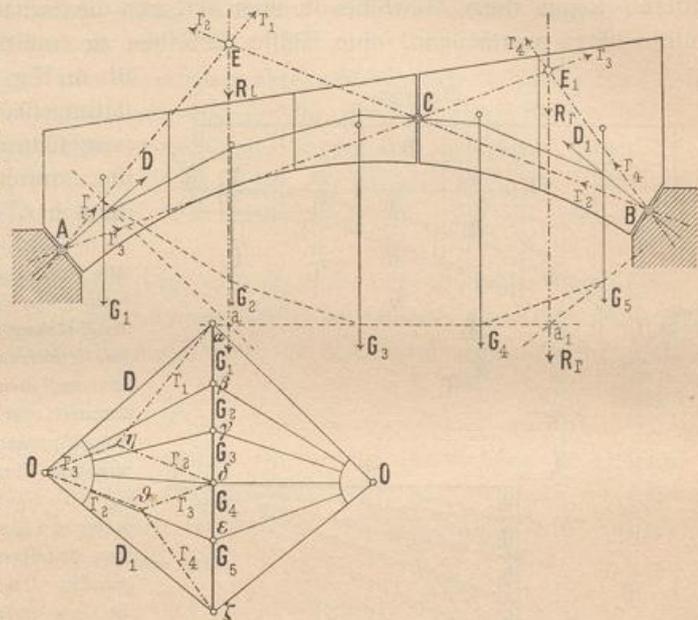
Man erhält nun die Mittelkraftslinie, indem man die in  $C$  angreifende Kraft  $H$  zunächst im Schnittpunkte  $VI$  mit  $G_6$  zu einer Resultirenden zusammensetzt; GröÙe und Richtung derselben sind durch  $O\beta$  im Kraftpolygon gegeben; die durch  $VI$  parallel zu  $O\beta$  gezogene Linie giebt ihre Lage. Wo die Mittelkraft sich mit  $G_5$  schneidet, d. h. in Punkt  $V$ , setzt man sie mit dieser Kraft zusammen. GröÙe und Richtung dieser neuen Mittelkraft giebt  $O\gamma$  im Kraftpolygon; die Lage wird erhalten, indem man durch  $V$  die Parallele zu  $O\gamma$  zieht. Indem man so weiter construirt, erhält man im Kraftpolygon GröÙe und Richtung aller Mittelkräfte, im Seilpolygon  $C, VI, V, IV, III, II, I, A$  die Mittelkraftslinie. Als Controle dient, daß die Mittelkraftslinie durch  $A$  geht.

273.  
Mittelkraftslinie für unsymmetrische Bogen.

Bei einem beliebig gefalteten Bogen mit beliebiger Belastung (Fig. 381) er giebt sich die durch drei vorgeschriebene Punkte  $A, C, B$  verlaufende Mittelkraftslinie, wie folgt.

Man kann die Construction als aus zwei ungleichen Hälften bestehend auffassen, welche einander im Scheitelpunkte  $C$  stützen. Der Kämpferdruck in  $A$  besteht aus zwei Theilen: demjenigen, welcher durch die Belastung nur der linken Hälfte erzeugt wird, und demjenigen, welcher durch die Belastung nur der rechten Hälfte hervorgerufen wird. Eben so verhält es sich mit dem Kämpferdruck in  $B$ . Nimmt man zunächst nur die linke Hälfte belastet, also die rechte Hälfte gewichtslos an, so hat wie beim Dreigelenkdach (siehe Art. 210, S. 211) der Kämpferdruck von  $B$  die Richtung  $BC$ . Eine gleich große und gleich gerichtete Kraft wird von der rechts liegenden Hälfte in  $C$  auf die linke Hälfte übertragen; auf diese Hälfte wirken außerdem noch die Resultirende der Lasten  $G_1, G_2, G_3$  und der Kämpferdruck von  $A$ . Die GröÙe und Lage der Resultirenden von  $G_1, G_2$  und  $G_3$  findet man leicht durch Auftragen der Lasten zu einem Kraftpolygon und Verzeichnen eines Seilpolygons für einen beliebigen Pol. Der Schnittpunkt  $a$  der vor  $G_1$  vorhergehenden und der auf  $G_3$  folgenden Seilpolygonseite giebt einen Punkt der Resultirenden  $R_l$ . Da letztere lothrecht ist, ziehe man eine lothrechte Linie durch  $a$ ; alsdann ist diese die Resultirende  $R_l$ . Die in  $C$  wirkende Kraft mit der Richtung  $BC$  schneidet die Resultirende in Punkt  $E$ ; durch diesen Punkt muß auch die dritte auf die linke Hälfte wirkende Kraft, der Kämpferdruck von  $A$  gehen. Man ziehe  $AE$ ; alsdann wird  $R_l$  im Punkt  $E$  durch die beiden dieser Belastung entsprechenden Kämpferdrücke  $r_1$  und  $r_2$  aufgehoben. Die Zerlegung im Kraftpolygon ergibt  $r_1 = \eta\alpha$  und  $r_2 = \delta\eta$ .

Fig. 381.



In gleicher Weise bestimmt man weiter die Kämpferdrücke  $r_3$  und  $r_4$ , welche in  $A$ , bzw.  $B$  durch die Belastung nur der rechten Hälfte erzeugt werden. Da für diese Belastungsweise die linke Hälfte gewichtslos ist, so fällt  $r_3$  in die Linie  $AC$ ;  $R_r$  geht durch  $a_1$ ;  $r_3$  schneidet sich mit  $R_r$  in  $E_1$ , und durch  $E_1$  muß auch die dritte auf die rechte Hälfte wirkende Kraft, der Kämpferdruck  $r_4$  von  $B$  gehen. Es ist  $\delta\zeta = R_r$ , und die Zerlegung von  $R_r$  ergibt  $\zeta\vartheta = r_4$  und  $\vartheta\delta = r_3$ . In Wirklichkeit sind beide Hälften belastet; demnach wirken im linken Kämpferpunkt  $A$  sowohl  $r_1$  wie  $r_3$ , im rechten Kämpferpunkt  $B$  sowohl  $r_2$  wie  $r_4$ . Die Zusammenfassung von  $r_3$  und  $r_1$  giebt als Kämpferdruck bei  $A$  die Kraft  $A_1 = \overline{O\alpha}$ , diejenige von  $r_2$  und  $r_4$  als Kämpferdruck bei  $B$  die Kraft  $B_1 = \overline{\zeta O}$ . Um eine einfache Figur zu erhalten, ist an  $\eta$ :  $\overline{O\eta} = r_3$  und an  $\vartheta$ :  $\overline{\vartheta O} = r_2$  gelegt und so das Parallelogramm  $O\eta\delta\vartheta$  gezeichnet. Die Mittelkraftslinie er giebt sich nun leicht, indem man der Reihe nach  $A_1$  mit  $G_1, G_2, \dots$  eben so zu

fammenfetzt, wie für das fymmetrifche Gewölbe in Art. 272 (S. 287) gezeigt worden ift. Die Mittelkraftslinie ift das Seilpolygon für den Pol  $O$ . Als Controle diene, dafs die Mittelkraftslinie durch  $C$  und  $B$  verlaufen mufs.

Beim Verzeichnen der Mittelkraftslinie handelt es fich meiftens darum, aus diefer Linie die Stützlinie zu conftruiren, d. h. die Punkte zu finden, in denen die einzelnen Gewölbequerfchnitte von den auf fie wirkenden Mittelkräften gefchnitten werden (fiche Art. 268, S. 283). Da aber die Gewölbequerfchnitte nicht, wie in Fig. 380 u. 381 angenommen war, lothrecht find, fondern radial verlaufen, fo ift eine Verbefferung nöthig. Man kann zunächft auf die wirkliche Querschnittslage dadurch leicht Rückficht nehmen, dafs man die Lamellengrenzen entfprechend der

274.  
Verbefferungen.

Fig. 382.

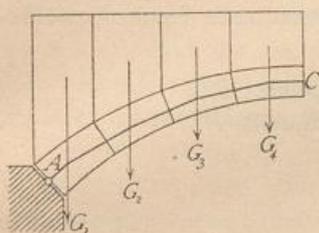


Fig. 383.

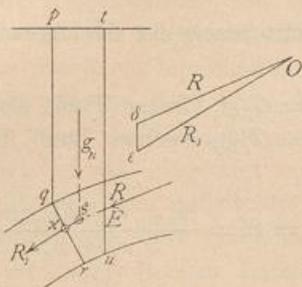
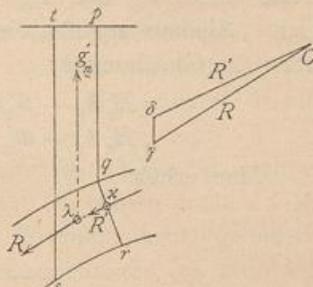


Fig. 384.



Lage der Querschnitte wählt (Fig. 382). Das Verfahren zur Ermittlung der Gleichgewichtslinie bleibt genau, wie oben gezeigt; nur ift die Ermittlung der Schwerpunkte für die einzelnen Lamellen etwas umständlicher als dort.

Es können aber auch die Constructions in Fig. 380 u. 381 benutzt werden, wenn nur die nachstehend beschriebenen Verbefferungen vorgenommen werden.

Die der richtigen Querschnittslage entfprechende Lamellengrenze fei  $pqr$  (Fig. 383); bei der lothrechten Theilung fei  $tu$  als Grenze angenommen und dabei fei die Kraft  $R$ , welche  $tu$  in  $E$  fchneidet, als Mittelkraft aller rechts von  $tu$  wirkenden äußeren Kräfte gefunden. Um nun den Punkt der Stützlinie zu finden, welcher in  $qr$  liegt, braucht man nur die Mittelkraft aller rechts von  $qr$  wirkenden Kräfte aufzufuchen und ihren Schnittpunkt mit  $qr$  zu ermitteln. Diefе gefuchte Kraft ift offenbar die Mittelkraft von  $R$  und dem Gewichte  $g_n$  des Gewölbeheiles  $pqrut$ . Es fei  $R = O\delta$  und  $g_n = \delta\varepsilon$ ; alsdann ift die gefuchte Mittelkraft  $R_1 = O\varepsilon$ , geht durch  $q$  und ift parallel zu  $O\varepsilon$ . Diefе Kraft  $R_1$  ift in Fig. 383 gezeichnet; fie fchneidet die Fuge  $qr$  in  $x$ ; fonach ift  $x$  ein Punkt der richtigen Stützlinie.

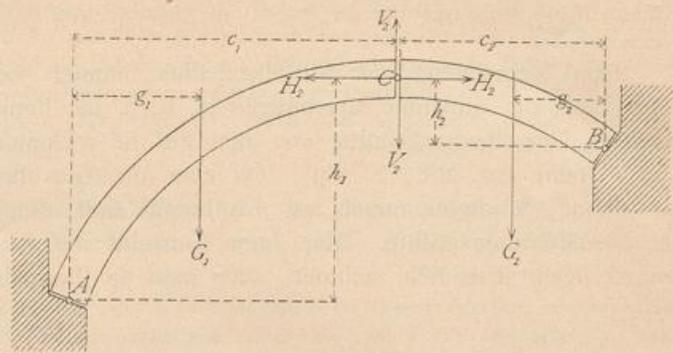
Ganz ähnlich ift zu verfahren, wenn die lothrechte Lamellengrenze an der anderen Seite der wirklichen Fuge liegt (Fig. 384).

Die Mittelkraft aller an der einen Seite von  $ts$  wirkenden Kräfte,  $R$ , enthält das Gewicht des Stückes  $tsrqp$  bereits; um also die Mittelkraft  $R'$ , welche auf die Fuge  $qr$  wirkt, zu erhalten, mufs man  $R$  mit dem negativ genommenen, also nach oben gerichteten Gewichte  $g_n'$  zufammenfetzen. Es fei  $R = O\gamma$  und  $g_n' = \gamma\delta$ ; alsdann wird  $R' = O\delta$ , geht durch den Punkt  $\lambda$ , in welchem fich  $R$  und  $g_n'$  fchneiden, und ift parallel zu  $O\delta$ . Der richtige Punkt der Stützlinie ift  $x$ .

In Art. 270 (S. 285) ift gezeigt worden, wie der Horizontalfchub in einem fymmetrifch zur Scheitelfuge geformten und belasteten Gewölbe durch Rechnung gefunden werden kann. Auch beim unfymmetrifchen Gewölbe macht, wenn drei Punkte für den Verlauf der Mittelkraftslinie vorgefchrieben find, die Berechnung des Horizontalfchubes keine Schwierigkeit. Das Verfahren entfpricht genau demjenigen, welches für die Ermittlung der Auflagerdrücke beim Sprengwerksdach mit drei Gelenken in Art. 210 (S. 211) vorgeführt worden ift.

275.  
Horizontalfchub  
im unfymmetrifchen  
Gewölbe.

Fig. 385.



Die Mittelkräfte der Lasten auf dem linken, bzw. rechten Gewölbetheile seien  $G_1$ , bzw.  $G_2$ ; die Entfernungen dieser Lasten von den Kämpferpunkten seien bzw.  $g_1$  und  $g_2$  (Fig. 385). Die beiden Theile übertragen im Punkte  $C$  auf einander eine Kraft, deren Seitenkräfte bzw.  $V_2$  und  $H_2$  seien. Alsdann ergibt die Betrachtung der Gleichgewichtszustände beider Gewölbetheile die Gleichungen:

$$\begin{aligned} H_2 h_1 + V_2 c_1 &= G_1 g_1 \text{ (linker Theil, Drehpunkt } A); \\ H_2 h_2 - V_2 c_2 &= G_2 g_2 \text{ (rechter Theil, Drehpunkt } B). \end{aligned}$$

Man erhält

$$H_2 = H = \frac{G_1 g_1 c_2 + G_2 g_2 c_1}{h_1 c_2 + h_2 c_1} \dots \dots \dots 390.$$

2. Kapitel.

Tonnen- und Kappengewölbe.

276.  
Stabilität.

Die Zerstörung des Gewölbes kann erfolgen:

- 1) durch Umkanten eines Gewölbetheiles um eine innere oder äußere Kante,
- 2) durch Gleiten einzelner Gewölbetheile längs der Fugen und
- 3) durch Zerdrücken der Wölbsteine.

Wenn die Lage der Stützlinie bekannt ist, so können alle auf die Standfestigkeit des Gewölbes bezügliche Fragen leicht beantwortet werden. Dabei ist zu beachten, daß, falls für den Verlauf der Mittelkraftslinie drei Punkte vorgeschrieben sind, welche in Fugen liegen, dieselben entsprechend der für die Stützlinie gegebenen Erklärung auch Punkte der Stützlinie sind.

Im Hochbau handelt es sich fast stets nur um die Ermittlung des im Gewölbe wirkenden Horizontalschubes, weil diese Kraft hauptsächlich die Mauern, welche das Gewölbe, bzw. den Bogen stützen, gefährdet. Wäre die Stützlinie bekannt, so wäre auch der Horizontalschub bekannt. Die Ermittlung der genauen Lage derselben ist aber nach Art. 266 (S. 281) nur mittels der Elasticitäts-Theorie der Gewölbe möglich, und diese Ermittlung ist sehr umständlich. Es ist aber auch ausreichend, gewisse Grenzlagen für die Stützlinie und damit gewisse Grenzwerte für den Horizontalschub fest zu legen.

277.  
Stabilität  
gegen  
Kanten.

Soll das Gewölbe stabil sein, so muß die Stützlinie ganz im Gewölbe liegen.

Wenn die Resultirende  $R$  aller an der einen Seite des Querschnittes  $NO$  wirkenden Kräfte (Fig. 386) die Verlängerung des Querschnittes etwa im Punkte  $b$  schneidet, so hat diese Kraft in Bezug auf  $O$  ein Moment  $M = R e$ , welches eine