



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik der Hochbau-Constructions

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

5. Kap. Kuppel-, Zelt- und Thurmdächer

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77733)

5. Kapitel.

Kuppel-, Zelt- und Thurmdächer.

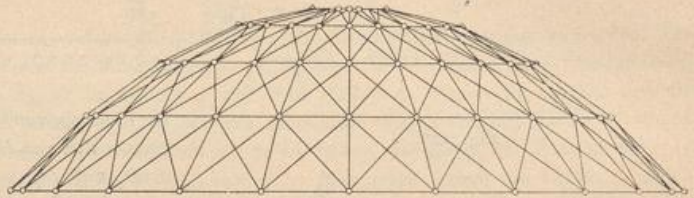
a) Kuppeldächer.

240.
Allgemeines.

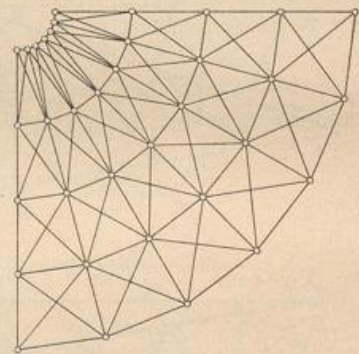
Die Kuppelfläche entsteht durch Drehung einer Curve um eine lothrechte Mittelaxe; sie ist also eine Umdrehungsfläche.

Während man früher die Kuppeldächer aus einer Anzahl radial gestellter Binder construirte, sind bei den neueren, von *Schwedler* erfundenen und vielfach mit bestem Erfolg ausgeführten Kuppeldächern sämmtliche Constructionstheile in die Kuppelfläche verlegt. Eine Anzahl von Sparren wird in der Richtung der Meridiane der Kuppelfläche angeordnet

Fig. 328.



und in verschiedenen Höhen durch wagrechte Ringe mit einander verbunden; letztere sind den Parallelkreisen der Kuppelfläche eingeschriebene Vielecke. In den so entstehenden Vierecken sind alsdann, wegen der ungleichmäßigen Belastung, noch Diagonalen angeordnet, und zwar meistens gekreuzte Zugdiagonalen. Gewöhnlich ist eine Belastung der Kuppelmitte durch eine fog. Laterne vorhanden. Die ganze Construction bildet demnach ein der Kuppelfläche eingeschriebenes Polyeder; in Fig. 328 sind Ansicht und Grundriss derselben dargestellt (letzterer nur für ein Viertel der Kuppel). Man nennt solche Kuppeln *Schwedler'sche* oder Flechtwerkkuppeln.



Die von *Schwedler*³⁵⁾ angegebene Berechnungsweise dieser Kuppeln kann nur als eine Annäherungsrechnung betrachtet werden: sie legt nur lothrechte Lasten und der Hauptfläche nach gleichförmig vertheilte Belastung ganzer oder halber Ringzonen zu Grunde. Bei diesen Annahmen wird die Berechnung sehr einfach, führt aber trotzdem zu Ergebnissen, welche sich in einer großen Zahl ausgeführter Constructionen seit einer längeren Reihe von Jahren vollauf bewährt und allen Kräfteangriffen gewachsen gezeigt haben. Deshalb soll diese Berechnungsweise, welche in den allermeisten Fällen für die Praxis genügt, nachstehend vorgeführt werden (Art. 241 bis 245).

Eine neuere, auf der Theorie des Raumfachwerkes beruhende Berechnungs-

³⁵⁾ In: Die Construction der Kuppeldächer. Zeitschr. f. Bauw. 1866, S. 7.

weise der Flechtwerkkuppeln, und zwar für ganz beliebige Belastungen, ist von Müller-Breslau³⁶⁾ aufgestellt worden.

Nach Vorführung der Schwedler'schen Berechnungsweise sollen in Art. 246 bis 249 die Grundlagen derjenigen von Müller-Breslau angegeben werden.

1) Berechnungsweise von Schwedler.

a) Belastungen und Auflagerdrücke.

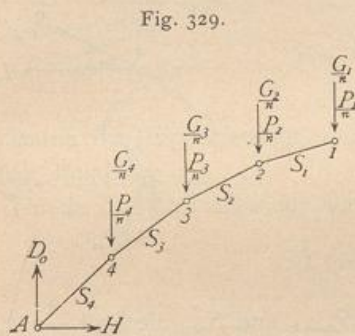
Die hier zu betrachtenden Kuppeln sind so flach, daß der Winddruck nur von geringer Bedeutung ist; derselbe soll deshalb, unter Zugrundelegung einer mittleren Dachneigung, in allen Theilen der Kuppel constant angenommen werden. Hier wird nur die lothrechte Seitenkraft ν (vergl. Art. 30, S. 23) des Winddruckes berücksichtigt; die in die Dachfläche fallende Seitenkraft kann vernachlässigt werden. Endlich ist es empfehlenswerth, alle Belastungen auf das Quadr.-Meter der Grundfläche, also der wagrechten Projection des Daches, zu beziehen.

Die Lasten greifen in den Knotenpunkten der Construction an; demnach sind die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden Flächen zu berechnen und mit diesen die Belastungen für die Einheit der Grundfläche zu multipliciren.

Wären keine Ringe angeordnet, so würden die einzelnen Sparren schiefe Drücke auf die Auflager ausüben und von diesen erleiden; durch einen Ring, gegen

241.
Belastungen.

242.
Auflager-
drücke.



welchen sich sämtliche Sparrenfüße setzen, den fog. Mauerring oder Fußring, werden die wagrechten Seitenkräfte der in den untersten Sparrenstäben (S_4 in Fig. 329) vorhandenen Spannungen aufgehoben, so daß bei den angenommenen Belastungen als Auflagerdrücke nur lothrechte Kräfte wirken. Entsprechend den im folgenden Artikel vorzuführenden Annahmen braucht die Berechnung der Auflagerdrücke nur für Belastungen vorgenommen zu werden, bei welchen ganze Ringzonen belastet sind. Wenn der Grundriß der Kuppel ein regelmäßiges n -Eck ist, und demnach n Sparren vorhanden sind, so kann angenommen werden, daß bei den erwähnten Belastungen alle Sparren gleiche Lasten tragen. Die Kuppel trage eine Laterne, deren Gewicht im Eigengewicht der ersten Ringzone mit enthalten sei. Die Eigengewichte der ganzen Ringzonen seien bezw. (Fig. 329) $G_1, G_2, G_3, G_4 \dots$ und die zufälligen Lasten der ganzen Ringzonen $P_1, P_2, P_3, P_4 \dots$; alsdann ist, wenn der Stützendruck auf jeden Sparren D_0 beträgt, für volle Belastung der ganzen Dachfläche

$$nD_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \dots + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots = \Sigma(G) + \Sigma(P).$$

Wenn etwa nur die drei obersten Zonen voll belastet sind, so wird

$$nD_0' = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \dots + P_1 + P_2 + P_3$$

sein. Auf diese Art sind die Auflagerdrücke leicht zu ermitteln.

³⁶⁾ In: Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralbl. d. Bauverw. 1892, S. 207. (Auch als Sonderabdruck erschienen.) — Vergl. auch:

KOFAHL. Beitrag zur Theorie der Kuppeldächer. Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1896, S. 1133; 1898, S. 713.

HÜBNER. Bemerkungen über das räumliche Fachwerk. Ebendaf. 1897, S. 477, 632, 634.

MÜLLER-BRESLAU, H. Beitrag zur Theorie der Kuppel- und Thurmdächer etc. Ebendaf. 1898, S. 1205, 1233.

β) Stabspannungen.

243.
Berechnung
der Stab-
spannungen.

2) Ungünstigste Beanspruchung der einzelnen Stäbe. Es sollen, nach *Schwedler*, für die Grenzen der Spannungen die folgenden vereinfachenden Annahmen gemacht werden:

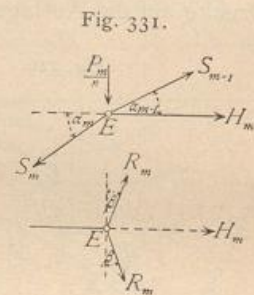
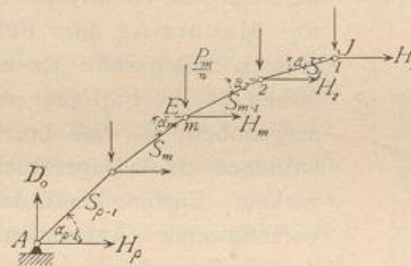
a) die Sparren erhalten den größten Druck, wenn die ganze Kuppel voll belastet ist;

b) ein Ring erhält seinen größten Zug, wenn der innerhalb desselben befindliche Kuppeltheil voll belastet, der Ring selbst mit seiner Zone aber unbelastet ist; bei der entgegengesetzten Belastungsart treten die entgegengesetzten Grenzen ein;

c) die Diagonalen zwischen zwei Sparren erhalten ihren größten Zug, wenn die halbe Kuppel auf einer Seite des durch die Mitte der Diagonalen gehenden Durchmessers voll, die andere halbe Kuppel nur durch das Eigengewicht belastet ist.

3) Spannungen in den Sparren. Wir betrachten nur zwei Belastungsarten, nämlich die Belastung der ganzen Kuppel durch zufällige Last und die Belastung der Kuppel durch Eigengewicht. Die zweite Belastungsart ergibt die Minimalspannungen. Die Maximalspannungen der Sparren sind die Summen der bei den beiden angeführten Belastungsarten sich ergebenden Spannungen. Die Formeln für beide Belastungsarten unterscheiden sich nur durch die Größe der Lasten.

Was zunächst die zufällige Belastung betrifft, so sind im m -ten Knotenpunkte (vom Laternenringe an gerechnet) in E (Fig. 330 u. 331) folgende



Kräfte im Gleichgewicht: die Spannungen der Sparren S_{m-1} und S_m , die Last $\frac{1}{n} P_m$, endlich die beiden Ringspannungen R_m . Letztere sind einander, der Symmetrie wegen, gleich und haben in der wagrechten Ebene des m -ten Ringes die Mittelkraft H_m . Die algebraische Summe der lothrechten Kräfte für den Punkt E ist gleich Null; mithin

$$0 = \frac{1}{n} P_m + S_m \sin \alpha_m - S_{m-1} \sin \alpha_{m-1},$$

woraus

$$S_m = \frac{S_{m-1} \sin \alpha_{m-1}}{\sin \alpha_m} - \frac{1}{n} \frac{P_m}{\sin \alpha_m}.$$

Für den ersten Knotenpunkt, den Knotenpunkt am Laternenringe, für \mathcal{J} , ist $S_{m-1} = 0$; mithin folgt der Reihe nach für $m = 1, 2, 3 \dots$

$$S_1 = -\frac{1}{n} \frac{P_1}{\sin \alpha_1}; \quad S_2 = -\frac{1}{n} \frac{P_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} - \frac{1}{n} \frac{P_2}{\sin \alpha_2} = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2};$$

$$S_3 = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} - \frac{1}{n} \frac{P_3}{\sin \alpha_3} = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3};$$

oder allgemein

$$S_m = - \frac{1}{n \sin \alpha_m} \sum_1^m (P) \dots \dots \dots 334.$$

Eben so ergibt sich die Spannung in den Sparren für eine Belaftung durch das Eigengewicht zu

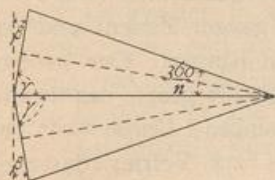
$$S_1' = - \frac{G_1}{n \sin \alpha_1}; S_2' = - \frac{(G_1 + G_2)}{n \sin \alpha_2}; \dots S_m' = - \frac{\sum_1^m (G)}{n \sin \alpha_m} \dots 335.$$

© Spannungen in den Ringen. Die Gleichgewichtsbedingung, nach welcher die algebraische Summe der wagrechten Kräfte im Punkte *E* gleich Null ist, lautet (Fig. 331):

$$0 = H_m + S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - S_m \cos \alpha_m, \text{ woraus } H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}.$$

Da *H_m* die Mittelkraft der beiden Ringspannungen *R_m* ist, so ergibt sich $H_m = 2 R_m \sin \beta$, woraus $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \beta}$. Nun ist (Fig. 332) $\beta = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{\pi}{n}$,

Fig. 332.



sonach $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$. Wird in diese Gleichung der

für *H_m* gefundene Werth eingesetzt, so folgt

$$R_m = \frac{S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \dots 336.$$

Wir bestimmen nach Gleichung 336 die Ringspannung durch das Eigengewicht und die Maximal- und Minimal-Ringspannung durch zufällige Belaftung.

Durch das Eigengewicht wird

$$R_m^g = \frac{- \frac{\sum_1^m (G) \cos \alpha_m}{n \sin \alpha_m} + \frac{\sum_1^{m-1} (G) \cos \alpha_{m-1}}{n \sin \alpha_{m-1}}}{2 \sin \frac{\pi}{n}},$$

$$R_m^g = - \frac{\sum_1^m (G) \cotg \alpha_m - \sum_1^{m-1} (G) \cotg \alpha_{m-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 337.$$

Man erhält

für den Laternenring (<i>m</i> = 1): $R_1^g = - \frac{G_1 \cotg \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}};$	} 338.
für den Ring 2 (<i>m</i> = 2): $R_2^g = - \frac{(G_1 + G_2) \cotg \alpha_2 - G_1 \cotg \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}};$	
für den Ring 3 (<i>m</i> = 3): $R_3^g = - \frac{(G_1 + G_2 + G_3) \cotg \alpha_3 - (G_1 + G_2) \cotg \alpha_2}{2 n \sin \frac{\pi}{n}};$	
etc.	

Für den Mauerring ist S_m , also das erste Glied im Zähler gleich Null; mithin, wenn für den Auflagerpunkt $m = \rho$ ist,

$$R_\rho^s = \frac{\sum_1^{\rho-1} (G) \cotg \alpha_{\rho-1}}{2n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{(G_1 + G_2 + \dots + G_{\rho-1}) \cotg \alpha_{\rho-1}}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \dots \quad 339.$$

Um die durch zufällige Belastung erzeugten Ringspannungen zu ermitteln, setzen wir in die Gleichung 336 die Werthe für S_m und S_{m-1} ein. Es soll $\mathfrak{S}_1^m(P)$ die zwischen den Knotenpunkten 1 und m befindlichen zufälligen Lasten bezeichnen, wobei \mathfrak{S} ausdrückt, dass nicht alle Knotenpunkte 1 — m belastet zu sein brauchen; im Gegensatz dazu soll $\sum_1^m (P)$ andeuten, dass alle Knotenpunkte von 1 bis m belastet sind. Man erhält demnach allgemein für zufällige Belastung aus Gleichung 336

$$R_m = - \frac{\mathfrak{S}_1^m(P) \cotg \alpha_m - \mathfrak{S}_1^{m-1}(P) \cotg \alpha_{m-1}}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \dots \quad 340.$$

Diese Gleichung ermöglicht die Feststellung der für die einzelnen Ringe ungünstigsten Belastungen (unter Voraussetzung der Belastung ganzer Zonen) und die Ermittlung der größten Druck- und Zugspannungen in den Ringen. Der größte Druck wird stattfinden, wenn im Zähler das erste Glied möglichst groß, das zweite Glied möglichst klein ist. Jede Belastung eines der Knotenpunkte 1 bis $(m-1)$ hat sowohl ein Wachsen des ersten, wie des zweiten Gliedes zur Folge; da aber $\cotg \alpha_{m-1}$ stets größer ist, als $\cotg \alpha_m$, so wächst das zweite Glied mehr, als das erste, d. h. jede Belastung des Knotenpunktes 1 bis $(m-1)$ verringert den Druck, vergrößert also den Zug. Die Belastung des Knotenpunktes m vergrößert nur das erste Glied, also den Druck. Die Belastung der außerhalb des m -ten Ringes liegenden Ringe ist nach der Gleichung ohne Einfluss auf die Spannung im m -ten Ringe. Daraus folgt, dass in den Stäben eines Ringes (des m -ten) der größte Druck stattfindet, wenn die Knotenpunkte 1 bis $(m-1)$ unbelastet, die zum Ringe gehörigen Knotenpunkte dagegen belastet sind. Da die Belastung der äußeren Ringe ohne Einfluss ist, so kann man sagen: Größter Druck findet statt, wenn der innere Kuppeltheil unbelastet, der äußere Kuppeltheil, einschliesslich des betrachteten Ringes, belastet ist. Daraus folgt dann weiter, dass größter Zug in den Stäben des m -ten Ringes auftritt, wenn nur der innere Kuppeltheil, ausschliesslich der Zone, zu welcher der m -te Ring gehört, belastet ist. Die hier gefundenen Ergebnisse stimmen demnach mit den in Art. 243 (S. 248) gemachten Annahmen über die ungünstigsten Belastungen überein.

Man erhält

$$R_m^{\text{min}} = - \frac{P_m \cotg \alpha_m}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_m^{\text{max}} = \frac{\sum_1^{m-1} (P) (\cotg \alpha_{m-1} - \cotg \alpha_m)}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \dots \quad 341.$$

Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \text{für den Laternenring } (m=1): R_1^{\ell_{min}} &= -\frac{P_1 \cotg \alpha_1}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_1^{\ell_{max}} = 0; \\ \text{für } m=2: R_2^{\ell_{min}} &= -\frac{P_2 \cotg \alpha_2}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_2^{\ell_{max}} = \frac{P_1 (\cotg \alpha_1 - \cotg \alpha_2)}{2n \sin \frac{\pi}{n}}; \\ \text{für } m=3: R_3^{\ell_{min}} &= -\frac{P_3 \cotg \alpha_3}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_3^{\ell_{max}} = \frac{(P_1 + P_2) (\cotg \alpha_2 - \cotg \alpha_3)}{2n \sin \frac{\pi}{n}}, \end{aligned} \right\} 342.$$

etc.

$$\text{für den Mauerring: } R_p^{\ell_{min}} = 0 \quad \text{und} \quad R_p^{\ell_{max}} = \frac{(P_1 + P_2 + \dots + P_{p-1}) \cotg \alpha_{p-1}}{2n \sin \frac{\pi}{n}}. \quad 343.$$

ⓓ) Spannungen in den Diagonalen. Neben dem Durchmesser, welcher für die ungünstigste Diagonalenbelastung die belastete und unbelastete Kuppelhälfte trennt, liegt ein belasteter und ein unbelasteter Sparren. Nehmen wir nun an, daß die Spannung im ersteren so groß ist, als wenn die ganze Kuppel voll belastet wäre, im zweiten so groß, als wenn die ganze Kuppel nur durch das Eigengewicht belastet wäre, und machen wir die im Knotenpunkte anschließende Diagonale stark genug, um den ganzen Spannungsunterschied zu übertragen, so wird dieselbe jedenfalls zu stark, ist also als ausreichend zu betrachten.

Im obersten Sparrenstück sind die größten und kleinsten Druckspannungen bezw.

$$S_{1max} = -\frac{P_1 + G_1}{n \sin \alpha_1} \quad \text{und} \quad S_{1min} = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}.$$

Die Differenz beider Spannungen ist $\Delta_1 = -\frac{P_1}{n \sin \alpha_1}$. Dieselbe soll durch die Diagonale übertragen werden. Bezeichnet man die wirkliche Länge der Diagonale und des Sparrens bezw. mit d und s , so ist allgemein

$$Y = -\Delta \frac{d}{s};$$

mithin

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \frac{P_1}{n \sin \alpha_1} \cdot \frac{d_1}{s_1}, & Y_2 &= \frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} \cdot \frac{d_2}{s_2}, \\ Y_3 &= \frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3} \cdot \frac{d_3}{s_3}, & Y_4 &= \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n \sin \alpha_4} \cdot \frac{d_4}{s_4}, \end{aligned} \right\} \dots 344.$$

Auf graphischem Wege lassen sich die Spannungen in den einzelnen Stäben einer Kuppel in folgender Weise ermitteln.

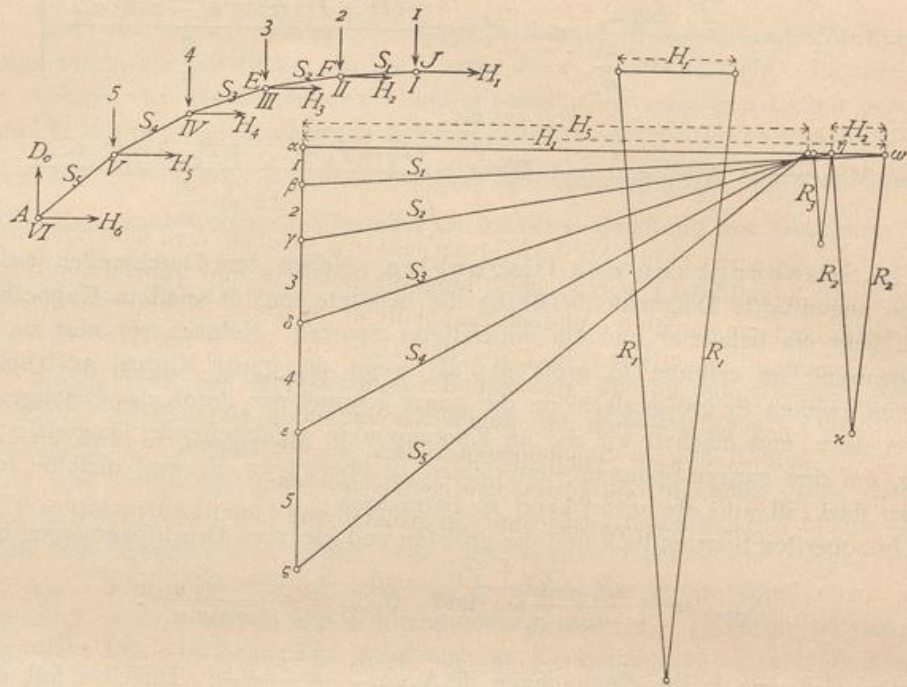
a) Sparrenspannungen durch das Eigengewicht. Die Lasten in den einzelnen Knotenpunkten seien $1, 2, 3, 4, 5$ (Fig. 333); man trage dieselben zu einem Kraftpolygon $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \zeta$ an einander. Im Knotenpunkte γ wirken 1 , die Sparrenspannung S_1 und die Mittelkraft H_1 der Ringspannungen R_1 . Die Zerlegung der Kraft 1 nach den beiden Richtungen von S_1 und H_1 ergibt $\beta \omega = S_1$, $\omega \alpha = H_1$. Am Knotenpunkt F wirken nun $2, S_1, S_2$ und H_2 ; bekannt sind jetzt 2 und S_1 ; man erhält $\gamma \eta = S_2$, $\eta \omega = H_2$. Eben so ergeben sich die übrigen Sparrenspannungen.

b) Spannungen in den Sparren durch zufällige Belastung. Die Construction ist in gleicher Weise, wie unter a vorzunehmen, nachdem die in den einzelnen Knotenpunkten wirkenden zufälligen Lasten genau wie oben aufgetragen und behandelt sind.

244.
Graphische
Ermittelung
der Stab-
spannungen.

c) Ringspannungen durch das Eigengewicht. Die Zerlegung der für diese Belastung gefundenen Werthe von H ergibt ohne Schwierigkeit die Werthe für R_1^g, R_2^g, \dots , wie in Fig. 333 gezeichnet. Die Construction empfiehlt sich für die vorliegende Ermittlung nicht sehr, weil sie der spitzen Schnittwinkel wegen nur ungenaue Resultate giebt, die Schnittpunkte vielfach nicht mehr auf die Zeichen-

Fig. 333.



fläche fallen. So ist H_1 in Fig. 333 im fünfmal verkleinerten Maßstab aufgetragen, um R_1 zu construieren.

b) Ringspannungen durch zufällige Belastung. Maximalspannung im Ringe II findet statt, wenn nur die Ringzone I belastet ist. Es sei (Fig. 334 a) $ab = \frac{P_1}{n}$; alsdann wird $bf = S_1 = H_1$.

Im Knotenpunkt F (Fig. 335) sind S_1, S_2 und H_2 im Gleichgewicht, d. h. das Kräfte-dreieck für Punkt F wird bgf . Darin ist $H_2 = gf$ und $gi = if = R_2^g \max$.

Im Ringe III ist Maximalspannung, wenn die Zonen zu den Ringen I und II belastet sind; alsdann wirken in F die Kräfte $S_1 = fb, z = bc = \frac{P_2}{n}, S_2'$ und H_2' . Man erhält leicht $H_2' = hf, S_2' = ch$. In E sind dann S_2', S_3 und H_3 im Gleichgewicht und $H_3 = kh$, woraus $R_3^g \max = kl = lh$. Eben so wird $R_4^g \max = on = mo$ etc.

Minimalspannung im Ringe I findet bei voller Kuppelbelastung statt; alsdann wirkt in F die Kraft $i = \frac{P_1}{n}$, und es wird, wenn (Fig. 334 b) $ab = i$ ist, $ia = H_1$. Die Zerlegung in die beiden Ringspannungen ist dann in gleicher Weise wie oben vorzunehmen. Für Ring II findet Minimalspannung bei einer Belastung der Zonen II, III, IV statt; I ist unbelastet; mithin ist S_1 alsdann gleich Null (siehe Gleichung 334). Ist $bc = \frac{P_2}{n} = z$, so wird $hb = H_2$. Eben so wird weiter für die Minimalbelastungen der einzelnen Ringe $H_3 = kc, H_4 = md, H_5 = ne$.

e) Die Construction der Spannungen in den Diagonalen ist so einfach, daß dieselbe nicht weiter gezeigt zu werden braucht.

Fig. 334.

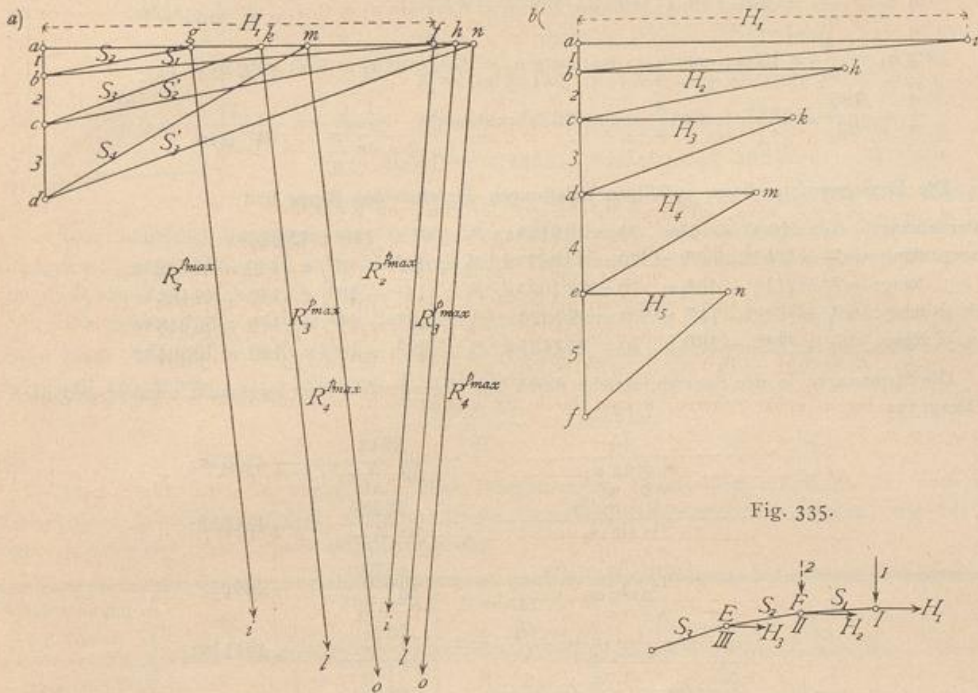


Fig. 335.

Beispiel. Ein Kuppeldach von nachfolgenden Hauptmaßen und Belastungen ist zu konstruieren: Durchmesser des zu überdachenden kreisförmigen Raumes gleich 47 m, demnach der Durchmesser des dem Mauerring umschriebenen Parallelkreises $2L = 48\text{m}$; Scheitelhöhe der Kuppel $h = 8\text{m}$; es sind 6 Ringe mit den Halbmessern 4, 8, 12, 16, 20 und 24 m und $n = 32$ Sparren anzuordnen. Das Eigengewicht ist zu 70 kg für 1 qm Grundfläche anzunehmen; als mittlere Dachneigung ist $\frac{h}{2L} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$ einzuführen, und es ergibt sich hieraus nach Art. 28 (S. 21 ff.) als Belastung durch Schnee für 1 qm Grundfläche

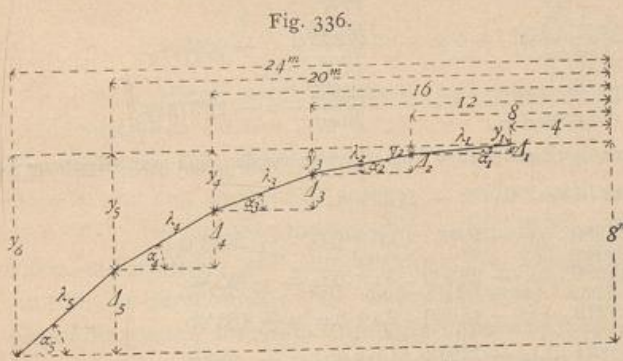
245.
Beispiel.

75 kg, als Belastung durch Winddruck (siehe Art. 30, S. 23) für 1 qm Grundfläche $v = 64\text{kg}$, so dass die gefamnte zufällige Belastung für 1 qm Grundfläche abgerundet 140 kg beträgt; die Laterne wiegt 2000 kg.

Die Kuppelfläche sei durch Umdrehung einer cubischen Parabel der Gleichung

$$y = \frac{hx^3}{r^3} = \frac{8}{24^3} x^3 = 0,00038 x^3$$

entstanden. Man erhält für die verschiedenen, durch die Ringe vorgeschriebenen Eckpunkte des Vieleckes (Fig. 336):



$x =$	4	8	12	16	20	24 m
$y =$	0,04	0,30	1,00	2,38	4,64	8,0
$h - y = z =$	7,96	7,70	7,00	5,62	3,36	0

Ferner ist

$$\Delta_1 = y_2 - y_1 = 0,26\text{ m}; \Delta_2 = y_3 - y_2 = 0,7\text{ m}; \Delta_3 = y_4 - y_3 = 1,38\text{ m}; \Delta_4 = y_5 - y_4 = 2,26\text{ m}; \Delta_5 = y_6 - y_5 = 3,36\text{ m}.$$

$$\lambda_1 = \sqrt{4^2 + \Delta_1^2} = 4,01 \text{ m}; \lambda_2 = 4,06 \text{ m}; \lambda_3 = 4,23 \text{ m}; \lambda_4 = 4,59 \text{ m}; \lambda_5 = 5,22 \text{ m}.$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\lambda_1} = 0,0648; \sin \alpha_2 = 0,1724; \sin \alpha_3 = 0,32; \sin \alpha_4 = 0,492; \sin \alpha_5 = 0,644.$$

$$\cotg \alpha_1 = \frac{4}{\Delta_1} = 15,38; \cotg \alpha_2 = 5,7; \cotg \alpha_3 = 2,9; \cotg \alpha_4 = 1,77; \cotg \alpha_5 = 1,19.$$

$$\frac{\pi}{n} = \frac{180}{32} = 5^{\circ}37,5'; \sin \frac{\pi}{n} = \sin 5^{\circ}37,5' = 0,098; \frac{1}{2n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{64 \cdot 0,098} = 0,16.$$

Die Eigengewichte, bzw. zufälligen Belastungen der einzelnen Ringe sind:

Laternenring: $G_1 = 2000 + 6^2 \pi \cdot 70 = 9913 \text{ kg}, P_1 = 6^2 \pi \cdot 140 = 15826 \text{ kg};$
 2. Ring: $G_2 = (10^2 - 6^2) \pi \cdot 70 = 14067 \text{ kg}, P_2 = (10^2 - 6^2) \pi \cdot 140 = 28122 \text{ kg};$
 3. Ring: $G_3 = (14^2 - 10^2) \pi \cdot 70 = 21100 \text{ kg}, P_3 = (14^2 - 10^2) \pi \cdot 140 = 42186 \text{ kg};$
 4. Ring: $G_4 = (18^2 - 14^2) \pi \cdot 70 = 28133 \text{ kg}, P_4 = (18^2 - 14^2) \pi \cdot 140 = 56243 \text{ kg};$
 5. Ring: $G_5 = (22^2 - 18^2) \pi \cdot 70 = 35168 \text{ kg}, P_5 = (22^2 - 18^2) \pi \cdot 140 = 70304 \text{ kg}.$

Die Spannungen in den Sparren, welche durch das Eigengewicht hervorgebracht werden, sind nach Gleichung 335:

$$S_1^g = - \frac{G_1}{n \sin \alpha_1} = - \frac{9913}{32 \cdot 0,065} = - 4766 \text{ kg};$$

$$S_2^g = - \frac{G_1 + G_2}{n \sin \alpha_2} = - \frac{23980}{32 \cdot 0,1724} = - 4346 \text{ kg};$$

$$S_3^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3}{n \sin \alpha_3} = - \frac{45080}{32 \cdot 0,32} = - 4402 \text{ kg};$$

$$S_4^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}{n \sin \alpha_4} = - \frac{73213}{32 \cdot 0,492} = - 4651 \text{ kg};$$

$$S_5^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5}{n \sin \alpha_5} = - \frac{108381}{32 \cdot 0,644} = - 5258 \text{ kg}.$$

Die durch zufällige Belastung erzeugten Sparrenspannungen betragen:

$$S_1^p = - \frac{P_1}{n \sin \alpha_1} = - \frac{15826}{2,08} = - 7608 \text{ kg};$$

$$S_2^p = - \frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} = - \frac{43948}{5,517} = - 7966 \text{ kg};$$

$$S_3^p = - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3} = - \frac{86130}{10,24} = - 8400 \text{ kg};$$

$$S_4^p = - \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n \sin \alpha_4} = - \frac{142373}{15,74} = - 9045 \text{ kg};$$

$$S_5^p = - \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5}{n \sin \alpha_5} = - \frac{212677}{20,61} = - 10319 \text{ kg}.$$

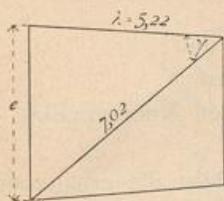
Die Ringspannungen, welche durch das Eigengewicht hervorgerufen werden, sind nach Gleichung 338:

Laternenring: $R_1^g = - 9913 \cdot 15,38 \cdot 0,16 = - 24396 \text{ kg};$
 2. Ring: $R_2^g = - (23980 \cdot 5,7 - 9913 \cdot 15,38) \cdot 0,16 = + 2524 \text{ kg};$
 3. Ring: $R_3^g = - (45080 \cdot 2,9 - 23980 \cdot 5,7) \cdot 0,16 = + 953 \text{ kg};$
 4. Ring: $R_4^g = - (73213 \cdot 1,77 - 45080 \cdot 2,9) \cdot 0,16 = + 183 \text{ kg};$
 5. Ring: $R_5^g = - (108381 \cdot 1,19 - 73213 \cdot 1,77) \cdot 0,16 = + 98 \text{ kg};$
 Mauerring: $R_6^g = 108381 \cdot 1,19 \cdot 0,16 = 20636 \text{ kg}.$

Die Maximal- und Minimalspannungen in den Ringen, durch zufällige Belastung erzeugt, betragen nach Gleichung 342:

Laternenring: $R_1^p \text{ min} = - 15826 \cdot 15,38 \cdot 0,16 = - 38932 \text{ kg}$ und $R_1^p \text{ max} = 0;$
 2. Ring: $R_2^p \text{ min} = - 28122 \cdot 5,7 \cdot 0,16 = - 25647 \text{ kg},$
 $R_2^p \text{ max} = 15826 (15,38 - 5,7) \cdot 0,16 = + 24514 \text{ kg};$

Fig. 337.



3. Ring: $R_2^{f_{min}} = -42182 \cdot 2,9 \cdot 0,16 = -19572 \text{ kg}$,

$R_2^{f_{max}} = 43948 \cdot 2,8 \cdot 0,16 = +19689 \text{ kg}$;

4. Ring: $R_3^{f_{min}} = -56243 \cdot 1,77 \cdot 0,16 = -15926 \text{ kg}$,

$R_3^{f_{max}} = 86130 \cdot 1,13 \cdot 0,16 = +15589 \text{ kg}$;

5. Ring: $R_4^{f_{min}} = -70304 \cdot 1,19 \cdot 0,16 = -13386 \text{ kg}$,

$R_4^{f_{max}} = 142373 \cdot 0,58 \cdot 0,16 = +13212 \text{ kg}$;

Mauerring: $R_5^{f_{min}} = 0$ und $R_5^{f_{max}} = 212677 \cdot 1,19 \cdot 0,16 = +40494 \text{ kg}$.

Was schließlich die Spannungen in den Diagonalen betrifft, so braucht nur die am stärksten beanspruchte Diagonale berechnet zu werden, weil selbst diese noch sehr schwach wird. Gewöhnlich macht man dann alle Diagonalen gleich stark.

Die größte durch zufällige Belastung erzeugte Sparrenspannung ist durch die Diagonale zu übertragen (siehe Art. 243, S. 251); dieselbe ist $S_5^f = -10319 \text{ kg}$, und eine Diagonale hat demnach höchstens diese Kraft aufzunehmen. Die Spannung in den Diagonalen wird daher

$$Y_5 = \frac{10319 \cdot 7,02}{5,22} = 13877 \text{ kg}$$

fein.

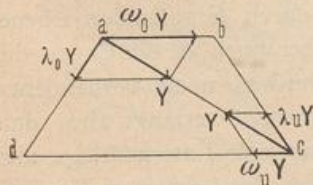
Man könnte noch für einige der oberen Diagonalen die Spannungen auffuchen, was nach dem Vorstehenden keine Schwierigkeit macht. Für die Querschnittsbestimmungen kann nun, wie bei den früheren Beispielen, eine Tabelle aufgestellt werden.

Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	P_2
Sparren:			Ringe:			
S_1	-4766	-7608	R_1	-24396	-38932	0
S_2	-4346	-7966	R_2	+2524	+24514	-25647
S_3	-4402	-8400	R_3	+953	+19689	-19572
S_4	-4651	-9045	R_4	+183	+15589	-15926
S_5	-5258	-10319	R_5	+98	+13212	-13386
Diagonalen:			R_6	+20636	+40494	0
Y	0	13877				
	Kilogramm			Kilogramm		

2) Verfahren von Müller-Breslau.

In jedem durch zwei Sparren- und zwei Ringstäbe gebildeten Trapez des Kuppelflechtwerkes sei nur eine Diagonale vorhanden, welche sowohl Zug wie Druck aufnehmen kann. Handelt es sich um eine Construction mit gekreuzten Diagonalen, deren jede nur Zug aufnehmen kann, so nimmt man genau, wie in Art. 186 (S. 187) bei den Trägern mit Gegendiagonalen gezeigt ist, zunächst nur eine, die bei der betreffenden Belastung auf Zug beanspruchte, Diagonale als vorhanden an. Ergiebt sich durch die Berechnung, dass diese Diagonale Druck erhält, so tritt an ihre Stelle die Gegendiagonale, und das Ergebnis kann durch eine Verbesserungsrechnung leicht richtig gestellt werden.

Fig. 338.



Die in der Diagonale ac auftretende Spannung Y (Fig. 338) wird in der Ebene des betreffenden Feldes in jedem der beiden Knotenpunkte in zwei Seitenkräfte zerlegt, welche bezw. in die Richtung des anschließenden Ringstabes und diejenige des anschließenden Sparrenstabes fallen. Diese Seitenkräfte stehen in ganz bestimmtem,

246.
Vor-
bemerkungen.

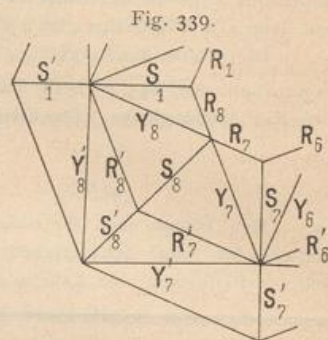
durch die Form des Trapezes vorgeschriebenem Verhältnifs zu Y . Im oberen Knotenpunkte a zerlegt sich Y in die Seitenkräfte:

- $\omega_0 Y$, welche in die Richtung des Ringstabes ab , und
- $\lambda_0 Y$, welche in die Richtung des Sparrenstabes ad

fällt. Eben so bezeichnen wir die Seitenkräfte von Y am unteren Knotenpunkte c mit $\omega_n Y$, bezw. $\lambda_n Y$.

Verfährt man in dieser Weise mit jeder Diagonale und addirt die erhaltenen Seitenkräfte zu den in den Ring-, bezw. Sparrenstäben wirkenden Spannungen $R_1, R_2 \dots, S_1, S_2 \dots$, so hat man bei den Untersuchungen, zunächst wenigstens, nur mit Kräften in den Ring- und Sparrenstäben zu thun; die Diagonalen sind vorläufig ausgeschaltet. Die Summenspannungen in den Sparrenstäben sollen mit \mathfrak{S} , diejenigen in den Ringstäben mit \mathfrak{R} bezeichnet werden, wobei die Zeiger die gleichen sind, wie bei den mit lateinischen Buchstaben bezeichneten Spannungen. Demnach ist (Fig. 339)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_8 &= S_8 + \lambda_0 Y_8 + \lambda_0 Y_7 \\ \mathfrak{S}'_8 &= S'_8 + \lambda'_n Y'_8 + \lambda'_n Y'_7 \\ \mathfrak{R}_8 &= R_8 + \omega_0 Y_8 \\ \mathfrak{R}'_8 &= R'_8 + \omega_n Y_8 + \omega'_n Y'_8 \end{aligned} \right\} \dots 345.$$



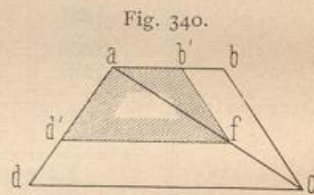
Die Werthe von ω und λ kann man leicht durch Rechnung oder Zeichnung finden; graphisch, indem man das Trapezfeld in wahrer Gröfse aufzeichnet, auf der Diagonale eine beliebige Länge für Y abträgt (etwa \overline{af} in Fig. 340) und das dem Felde ähnliche Trapez $ad'fb'$ mit \overline{af} als Diagonale konstruirt; alsdann sind seine Seiten:

$$ab' = \omega_n Y, \quad fd' = \omega_0 Y, \quad d'a = \lambda_0 Y$$

und

$$b'f = \lambda_n Y,$$

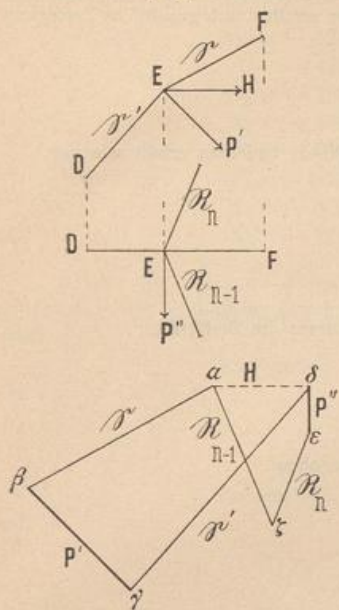
ω und λ haben in den Feldern der verschiedenen Zonen und allgemein auch in den Feldern derselben Zone verschiedene Werthe; diesem Umfande ist in Gleichung 345 durch die Zeiger Rechnung getragen.



247.
Ermittelung
der Stab-
spannungen.

Im Knotenpunkte E (Fig. 341) wirke eine äußere Kraft P in beliebiger Richtung. Man zerlegt P in eine Seitenkraft, welche in die lothrechte Ebene des betrachteten Sparrenzuges $DEF \dots$ fällt, die Kraft P' und in eine zu dieser Ebene senkrechte Seitenkraft P'' (in Fig. 341 im Grundrifs angegeben). Fig. 341 zeigt den Sparrenzug DEF im Grundrifs und Aufrifs. Die Aufrifsebene ist durch DEF gelegt. Auch weiterhin, insbesondere bei der Berechnung des Beispiels in Art. 248, soll jeder Sparrenzug vor der graphischen Zerlegung der Kräfte in die Zeichenebene gedreht werden, wodurch sich die Arbeit wesentlich vereinfacht. Im Punkte E halten einander nunmehr die Kräfte \mathfrak{S} , \mathfrak{S}' , P' und H im Gleichgewicht; H ist die Mittelkraft der im Punkte E wirkenden Ringstabspannungen \mathfrak{R}_n und \mathfrak{R}_{n-1} und der Seitenkraft P'' ; diese drei Kräfte wirken in einer wagrechten, durch E gehenden Ebene, also auch ihre Mittelkraft H . Diese Mittelkraft H muß aber auch in die Ebene des Sparrenzuges DEF fallen; denn die sämtlichen außerdem noch vorhandenen Kräfte \mathfrak{S} , \mathfrak{S}' und P' fallen in diese Ebene; das Gleichgewicht verlangt also, daß auch die letzte Kraft H in diese Ebene falle. Geht man nun vom Laternenringe aus, so ist für den obersten Punkt \mathfrak{S} gleich Null; mithin sind aus der bekannten Kraft P'

Fig. 341.



leicht durch Zerlegung H und \mathfrak{S}' zu finden. Im Grundriss kennt man jetzt H und P'' ; daher können auch hier die beiden fehlenden Kräfte (\mathfrak{R}_n und \mathfrak{R}_{n-1}) durch Construction eines Kraftpolygons gefunden werden. Bei den weiter unten folgenden Knotenpunkten ist aber \mathfrak{S} nach Vorstehendem bereits ermittelt, und man hat wiederum für jedes Kraftpolygon nur zwei Unbekannte.

In Fig. 341 ist $\overline{\alpha\beta} = \mathfrak{S}$ und $\overline{\beta\gamma} = P'$ durch vorherige Construction gefunden, bzw. gegeben; die zu \mathfrak{S}' und H gezogenen Parallelen vervollständigen das Kraftpolygon. Es ist $\gamma\delta = \mathfrak{S}'$ und $\delta\alpha = H$. An H ist nunmehr in δ die Kraft $P'' = \delta\varepsilon$ gelegt und da die Mittelkraft von H und P'' gleich derjenigen von \mathfrak{R}_{n-1} und \mathfrak{R}_n ist, so geben die durch α und ε gezogenen Parallelen zu \mathfrak{R}_{n-1} und \mathfrak{R}_n die Kräfte $\mathfrak{R}_n = \varepsilon\zeta$ und $\mathfrak{R}_{n-1} = \zeta\alpha$. Das Kraftpolygon $\alpha\zeta\varepsilon\delta\alpha$ gehört zum Grundriss; man kann aber beide Kraftpolygone, wie in Fig. 341 geschehen ist, vereinen, wobei man das

eine um die Linie $\alpha\delta$ in die Ebene des anderen gedreht denkt.

Aus den Werthen \mathfrak{S} , \mathfrak{R} , λ und ω können nun die Werthe S , R und Y ermittelt werden, indem man zunächst für die Knotenpunkte ohne Diagonalen die Werthe

für S und R auffucht und so eine Reihe von bekannten Gröfsen erhält, durch deren Einführung in die Gleichungen 345 alle Unbekannten bestimmbar werden.

Das vorgeführte Verfahren soll an einem Beispiele gezeigt werden.

Beispiel. Die in Fig. 342 im Grundriss und Aufriss dargestellte Kuppel über achteckiger Grundfläche, bei welcher der Durchmesser des umschriebenen Kreises 20m beträgt, sei links der lothrechten Schnittebene AA nur mit dem Eigengewicht, rechts von der Ebene AA voll belastet. Die Knotenpunktlasten betragen

248.
Beispiel.

durch Eigengewicht allein insgesamt
im Laternenring: $G_1 = 500 \text{ kg}$, $G_1 + P_1 = 1500 \text{ kg}$;
im mittleren Ring: $G_2 = 800 \text{ kg}$, $G_2 + P_2 = 2500 \text{ kg}$.

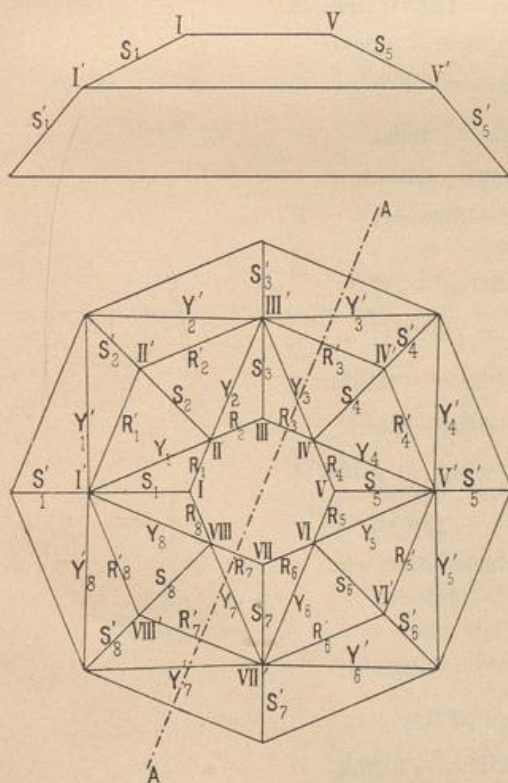
Die Lasten werden als lothrecht angenommen; die dieser Belastung entsprechenden Stabspannungen sind zu ermitteln.

Zunächst sind nach Fig. 340 die Zahlenwerthe für $\omega_0, \lambda_n, \omega_n, \lambda_n$ der oberen Felder und $\omega'_0, \lambda'_n, \omega'_n, \lambda'_n$ der unteren Felder ermittelt. Man erhält

$\omega_0 = 0,94,$	$\lambda_0 = 0,8,$
$\omega_n = 0,39,$	$\lambda_n = 0,8,$
$\omega'_0 = 0,96,$	$\lambda'_0 = 6,6,$
$\omega'_n = 0,67,$	$\lambda'_n = 0,6,$

Stäbe der oberen Felder. In den Knotenpunkten I, III, V, VII des Laternenringes

Fig. 342.



treffen nur je drei Stäbe zusammen; die Zerlegung wird ganz, wie in Art. 247 gezeigt ist, vorgenommen. In jedem der Knotenpunkte *I* und *III* wirkt die Last $G = 500 \text{ kg}$, und man erhält durch graphische Zerlegung

$$S_1 = S_3 = -1050 \text{ kg}$$

und

$$R_1 = R_8 = R_2 = R_3 = -1230 \text{ kg}.$$

In den Knotenpunkten *V* und *VII* wirkt die Belastung $G_1 + P_1 = 1500 \text{ kg}$, und man erhält wie vor

$$S_5 = S_7 = -3150 \text{ kg}$$

und

$$R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = -3700 \text{ kg}.$$

Nunmehr sind die Knotenpunkte mit Diagonalen zu betrachten.

Knotenpunkt II. Es wirken: Knotenpunktlast $G_1 = 500 \text{ kg}$; ferner die Stabkräfte

$$\mathfrak{S}_2 = S_2 + \lambda_0 Y_1 + \lambda_0 Y_2,$$

$$\mathfrak{R}_1 = R_1 + \omega_0 Y_1,$$

$$\mathfrak{R}_2 = R_2 + \omega_0 Y_2.$$

Die graphische Zerlegung von G_1 in \mathfrak{S}_2 , \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 ergibt wie oben

$$\mathfrak{S}_2 = -1050 \text{ kg}$$

und

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = -1230 \text{ kg}.$$

Hieraus folgt

$$\omega_0 Y_1 = \mathfrak{R}_1 - R_1 = 0, \quad Y_1 = 0,$$

$$\omega_0 Y_2 = \mathfrak{R}_2 - R_2 = 0, \quad Y_2 = 0.$$

$$S_2 = \mathfrak{S}_2 = -1050 \text{ kg}.$$

Eben so ergibt sich durch Betrachtung des Knotenpunktes VI:

$$Y_6 = Y_5 = 0 \quad \text{und} \quad S_6 = -3150 \text{ kg}.$$

Knotenpunkt IV. Knotenpunktlast $G_1 + P_1 = 1500 \text{ kg}$; demnach

$$\mathfrak{S}_4 = S_4 + \lambda_0 Y_4 + \lambda_0 Y_3 = -3150 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{R}_3 = R_3 + \omega_0 Y_3 = -3700 \text{ kg}$$

und

$$\mathfrak{R}_4 = R_4 + \omega_0 Y_4 = -3700 \text{ kg}.$$

Oben war gefunden: $R_3 = -1230 \text{ kg}$ und $R_4 = -3700 \text{ kg}$; demnach ist

$$\omega_0 Y_4 = -3700 + 3700 = 0,$$

$$Y_4 = 0;$$

$$\omega_0 Y_3 = -3700 + 1230 = -2470 \text{ kg},$$

$$Y_3 = -\frac{2470}{0,94} = -2627 \text{ kg};$$

$$S_4 = -3150 + 0,8 \cdot 2627 = -1050 \text{ kg}.$$

Knotenpunkt VIII. Knotenpunktlast $G_1 = 500 \text{ kg}$; mithin

$$\mathfrak{S}_8 = S_8 + \lambda_0 Y_8 + \lambda_0 Y_7 = -1050 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{R}_8 = R_8 + \omega_0 Y_8 = -1230 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{R}_7 = R_7 + \omega_0 Y_7 = -1230 \text{ kg}.$$

Oben ist gefunden: $R_8 = -1230 \text{ kg}$ und $R_7 = -3700 \text{ kg}$; daher wird

$$\omega_0 Y_8 = -1230 + 1230 = 0,$$

$$Y_8 = 0;$$

$$\omega_0 Y_7 = -1230 + 3700 = +2470 \text{ kg},$$

$$Y_7 = \frac{2470}{0,94} = +2627 \text{ kg};$$

$$S_8 = -1050 - 0,8 \cdot 2627 = -3150 \text{ kg}.$$

Demnach ist in den oberen Feldern

$$\begin{array}{lll}
 R_1 = -1230 \text{ kg}, & S_1 = -1050 \text{ kg}, & Y_1 = 0; \\
 R_2 = -1230 \text{ kg}, & S_2 = -1050 \text{ kg}, & Y_2 = 0; \\
 R_3 = -1230 \text{ kg}, & S_3 = -1050 \text{ kg}, & Y_3 = -2627 \text{ kg}; \\
 R_4 = -3700 \text{ kg}, & S_4 = -1050 \text{ kg}, & Y_4 = 0; \\
 R_5 = -3700 \text{ kg}, & S_5 = -3150 \text{ kg}, & Y_5 = 0; \\
 R_6 = -3700 \text{ kg}, & S_6 = -3150 \text{ kg}, & Y_6 = 0; \\
 R_7 = -3700 \text{ kg}, & S_7 = -3150 \text{ kg}, & Y_7 = +2627 \text{ kg}; \\
 R_8 = -1230 \text{ kg}, & S_8 = -3150 \text{ kg}, & Y_8 = 0.
 \end{array}$$

Stäbe der unteren Felder. In den Knotenpunkten II' , IV' , VI' , $VIII'$ setzen keine Diagonalen an. Die graphische Zerlegung erfolgt hier, genau wie in Art. 247 (S. 256) gezeigt ist. Man erhält

$$\text{Knotenpunkt } II': S_2 = -1050 \text{ kg}, \quad G_2 = 800 \text{ kg}$$

und

$$S_2' = -1700 \text{ kg};$$

$$R_1' = -150 \text{ kg} \quad \text{und} \quad R_2' = -150 \text{ kg}.$$

$$\text{Knotenpunkt } VIII': S_8 = -3150 \text{ kg}, \quad G_2 = 800 \text{ kg}$$

und

$$S_8' = -2800 \text{ kg};$$

$$R_7' = +1350 \text{ kg} \quad \text{und} \quad R_8' = +1350 \text{ kg}.$$

$$\text{Knotenpunkt } IV': S_4 = -1050 \text{ kg}, \quad G_2 + P_2 = 2500 \text{ kg}$$

und

$$S_4' = -3880 \text{ kg};$$

$$R_3' = -1950 \text{ kg} \quad \text{und} \quad R_4' = -1950 \text{ kg}.$$

$$\text{Knotenpunkt } VI': S_6 = -3150 \text{ kg}, \quad G_2 + P_2 = 2500 \text{ kg}$$

und

$$S_6' = -5050 \text{ kg};$$

$$R_5' = -550 \text{ kg} \quad \text{und} \quad R_6' = -550 \text{ kg}.$$

In den Knotenpunkten mit Diagonalen ergibt sich das Folgende.

$$\text{Knotenpunkt } I': S_1 = -1050 \text{ kg}, \quad Y_1 = 0, \quad Y_8 = 0$$

und

$$G_2 = 800 \text{ kg};$$

$$\mathfrak{S}_1' = S_1' + \lambda_0' Y_1' + \lambda_0' Y_8' = -1700 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{R}_1' = R_1' + \omega_0' Y_1' = -150 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{R}_8' = R_8' + \omega_0' Y_8' = -150 \text{ kg}.$$

Oben war gefunden: $R_1' = -150 \text{ kg}$ und $R_8' = +1350 \text{ kg}$; demnach ist

$$\omega_0' Y_1' = -150 + 150 = 0$$

und

$$Y_1' = 0;$$

$$\omega_0' Y_8' = -150 - 1350 = -1500 \text{ kg},$$

$$Y_8' = -\frac{1500}{0,96} = -1560 \text{ kg};$$

$$S_1' = -1700 + 0,96 \cdot 1560 = -760 \text{ kg};$$

daher

$$Y_1' = 0 \quad \text{und} \quad Y_8' = -1560 \text{ kg}.$$

$$\text{Knotenpunkt } V': S_5 = -3150 \text{ kg}, \quad G_2 + P_2 = 2500 \text{ kg}$$

und

$$Y_5 = Y_4 = 0;$$

$$\mathfrak{S}_5' = S_5' + \lambda_0' Y_4' + \lambda_0' Y_5' = -5050 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{R}_4' = R_4' + \omega_0' Y_4' = -550 \text{ kg},$$

$$\mathfrak{R}_5' = R_5' + \omega_0' Y_5' = -550 \text{ kg}.$$

Oben war gefunden: $R_5' = -550$ kg; demnach $Y_5' = 0$;
 $R_4' = -1950$ kg;

also

$$\begin{aligned}\omega_0' Y_4' &= -550 + 1950 = +1400 \text{ kg,} \\ Y_4' &= \frac{1400}{0,96} = +1460 \text{ kg;} \\ S_5' &= -5050 - 0,6 \cdot 1460 = -5930 \text{ kg.}\end{aligned}$$

Knotenpunkt III': $\mathcal{E}_3 = -1050$ kg $+ \lambda_u Y_3 = -1050 - 0,8 \cdot 2627 = -3150$ kg,
 $G_2 = 800$ kg,

fomit

$$\begin{aligned}Y_2 &= 0 \text{ und } Y_3 = -2627 \text{ kg;} \\ \mathcal{E}_3' &= S_3' + \lambda_0' Y_2' + \lambda_0' Y_3' = -2800 \text{ kg,} \\ \mathfrak{R}_2' &= R_2' + \omega_u Y_2 + \omega_0' Y_2' = +1350 \text{ kg,} \\ \mathfrak{R}_3' &= R_3' + \omega_u Y_3 + \omega_0' Y_3' = +1350 \text{ kg.}\end{aligned}$$

Es ist

$$\omega_u Y_2 = 0$$

und

$$\omega_u Y_3 = -0,39 \cdot 2627 = -1025 \text{ kg.}$$

Oben war gefunden: $R_2' = -150$ kg und $R_3' = -1950$ kg; daher ist

$$\omega_0' Y_2' = 1350 + 150 = +1500 \text{ kg}$$

und

$$\begin{aligned}Y_2' &= \frac{1500}{0,96} = +1560 \text{ kg;} \\ \omega_0' Y_3' &= +1350 + 1950 + 1025 = +4325 \text{ kg,} \\ Y_3' &= \frac{4325}{0,96} = +4510 \text{ kg;} \\ S_3' + 0,6 \cdot 1560 + 0,6 \cdot 4510 &= -2800 \text{ kg,} \\ S_3' &= -6410 \text{ kg.}\end{aligned}$$

Knotenpunkt VII': $Y_6 = 0$, $Y_7 = 2627$ kg

und

$$G_2 + P_2 = 2500 \text{ kg;}$$

demnach

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_7 &= S_7 + \lambda_u Y_6 + \lambda_u Y_7 = -3150 + 0,8 \cdot 2627 = -1050 \text{ kg,} \\ \mathcal{E}_7' &= S_7' + \lambda_0' Y_7' + \lambda_0' Y_6' = -3880 \text{ kg,} \\ \mathfrak{R}_6' &= R_6' + \omega_u Y_6 + \omega_0' Y_6' = -1950 \text{ kg,} \\ \mathfrak{R}_7' &= R_7' + \omega_u Y_7 + \omega_0' Y_7' = -1950 \text{ kg.}\end{aligned}$$

Oben ist gefunden: $R_6' = -550$ kg, $R_7' = +1350$ kg und $Y_7 = 2627$ kg; also

$$Y_7 = 0,39 \cdot 2627 = 1025 \text{ kg;}$$

fomit wird

$$\omega_0' Y_6' = -1950 + 550 = -1400 \text{ kg}$$

und

$$\begin{aligned}Y_6' &= -\frac{1400}{0,96} = -1460 \text{ kg;} \\ 1350 + 1025 + \omega_0' Y_7' &= -1950 \text{ kg,} \\ \omega_0 Y_7' &= -1950 - 2375 = -4325 \text{ kg,} \\ Y_7' &= -\frac{4325}{0,96} = -4510 \text{ kg;} \\ S_7' &= -3880 + 0,6 (4510 + 1460) = -300 \text{ kg.}\end{aligned}$$

Die Spannungen in den unteren Feldern sind daher:

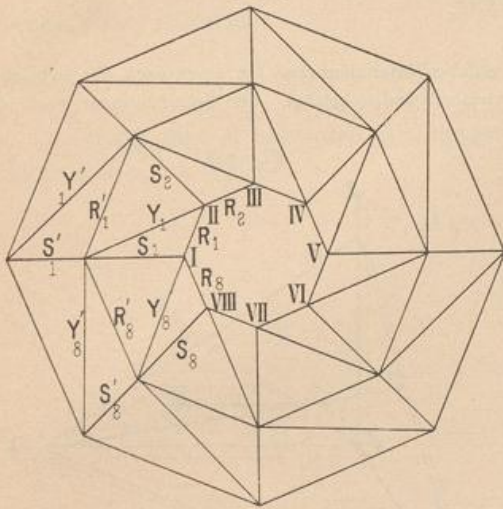
$R_1' = -150$ kg,	$S_1' = -760$ kg,	$Y_1' = 0$,
$R_2' = -150$ kg,	$S_2' = -1700$ kg,	$Y_2' = +1560$ kg,
$R_3' = -1950$ kg,	$S_3' = -6410$ kg,	$Y_3' = +4510$ kg,
$R_4' = -1950$ kg,	$S_4' = -3880$ kg,	$Y_4' = +1460$ kg,
$R_5' = -550$ kg,	$S_5' = -5930$ kg,	$Y_5' = 0$,
$R_6' = -550$ kg,	$S_6' = -5050$ kg,	$Y_6' = -1460$ kg,
$R_7' = +1350$ kg,	$S_7' = -300$ kg,	$Y_7' = -4510$ kg,
$R_8' = +1350$ kg,	$S_8' = -2800$ kg,	$Y_8' = -1560$ kg.

Die Spannungen im Fufsring können auf den gefundenen Werthen leicht ermittelt werden. Es wird empfohlen, von den 8 Auflagern eines um das andere als festes Auflager zu construiren.

Wenn kein Knotenpunkt ohne Diagonalen vorhanden ist, wenn z. B. die Anordnung nach Fig. 343 vorliegt, so ist die Ermittlung der Diagonalen-Spannungen auf gleichem Wege leicht durchführbar.

249.
Andere
Anordnung
der
Diagonalen.

Fig. 343.



Man zerlege die Knotenlast im Knotenpunkte *I* in die Stabkräfte

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_8 &= R_8 + \omega_0 Y_8, \\ \mathfrak{S}_1 &= S_1 + \lambda_0 Y_8 \quad \text{und} \quad R_1; \end{aligned}$$

ferner die im Knotenpunkte *II* wirkende Belastung in die Stabkräfte

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= R_1 + \omega_0 Y_1, \\ \mathfrak{S}_2 &= S_2 + \lambda_0 Y_1 \quad \text{und} \quad R_2. \end{aligned}$$

Man kennt also \mathfrak{R}_1 aus der Zerlegung am Knotenpunkt *II*, R_1 aus der Zerlegung am Knotenpunkte *I*; mithin kann man Y_1 aus der Gleichung

$$\omega_0 Y_1 = \mathfrak{R}_1 - R_1$$

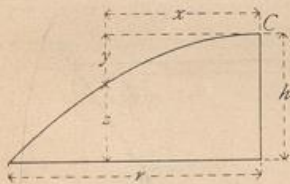
finden. In gleicher Weise ergeben sich alle Diagonalspannungen.

3) Erzeugende Kuppelcurve.

Die erzeugende Curve ist in den meisten Fällen eine Parabel (Fig. 344) der Gleichung $y = \frac{hx^2}{r^2}$, bei welcher der Anfangspunkt der Coordinaten im Scheitel *C* liegt, die halbe Spannweite gleich *r*, die Pfeilhöhe gleich *h* gesetzt ist, oder eine cubische Parabel der Gleichung $y = \frac{hx^3}{r^3}$.

250.
Parabel-
Kuppel.

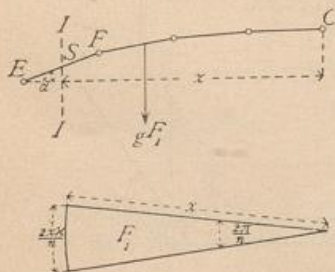
Fig. 344.



Letztere Curvenform hat den Vortheil, dass in den Zwischenringen bei gleichmäßig verteilter Belastung die Spannung Null herrscht und dass die Spannungen in den Sparren nahezu constant sind, was sich folgendermaßen ergibt.

Die Spannung im Sparrenstab *EF* (Fig. 345) ist durch Betrachtung des Theiles zwischen dem Scheitel *C* und dem durch die Sparrenmitte gelegten Schnitte *II* zu ermitteln. Die algebraische Summe der auf dieses Stück wirkenden lothrechten Kräfte ist gleich Null, daher, wenn die belastende Grundfläche mit F_1 und die Belastung für 1 qm der Grundfläche mit *g* bezeichnet wird, $S \sin \alpha = g F_1$. Nun ist

Fig. 345.



$$F_1 = \frac{x^2 \pi}{n}, \quad \text{mithin} \quad S \sin \alpha = \frac{g x^2 \pi}{n} = S \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

Wird statt des Vieleckes die stetig gekrümmte Curve der Berechnung zu Grunde gelegt, so ist

$$y = \frac{hx^3}{r^3} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{3hx^2}{r^3};$$

mithin

$$S \cos \alpha \frac{3hx^2}{r^3} = \frac{g x^2 \pi}{n}, \quad \text{woraus} \quad S \cos \alpha = \frac{g \pi r^3}{3n h}, \quad 346.$$

d. h. $S \cos \alpha$ ist constant. Da aber wegen der flachen Neigung der Kuppel der Winkel α sehr klein ist, so ändert sich auch $\cos \alpha$ sehr wenig; die Spannung ist daher im ganzen Sparren nahezu constant.

Betrachtet man nun einen Knotenpunkt E (Fig. 331) und setzt die algebraische Summe der in ihm wirkenden wagrechten Kräfte gleich Null, so wird

$0 = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - H_m$, woraus $H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} = 0$, da nach Gleichung 346 $S \cos \alpha$ constant ist. Die Ringspannung ist dann

$$R = \frac{H}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = 0 \dots \dots \dots 347.$$

Die obigen Angaben sind damit bewiesen.

Noch möge bemerkt werden, daß der theoretische Materialaufwand bei einer nach der cubischen Parabel gekrümmten Kuppel nur $\frac{2}{3}$ desjenigen Materialaufwandes beträgt, der sich bei einer nach der gemeinen Parabel gekrümmten Kuppel ergibt.

4) Winddruck auf die Kuppel.

251.
Winddruck
auf die
Kuppel.

Bei steilen Kuppeln ist es nicht angängig, nur die lothrechte Komponente v des Winddruckes (vergl. Art. 30, S. 23) zu berücksichtigen; man muß in solchen Fällen die wirklich auf die Kuppel übertragenen Windkräfte kennen.

Der Winddruck gegen eine beliebige Ebene (Tangentenebene an die Kuppel) ergibt sich folgendermaßen (Fig. 346). Durch einen Punkt A im Raume werden drei Coordinatenachsen gelegt, welche senkrecht zu einander stehen; die X -Axe sei wagrecht und parallel zu der gleichfalls wagrecht angenommenen Windrichtung gelegt. Im Punkte P der Ebene wird die Normale \overline{PN} errichtet, außerdem die Linie \overline{PW} parallel zur Windrichtung gezogen. Die durch \overline{PN} und \overline{PW} gelegte Ebene schneide die gegebene Ebene in der Linie \overline{TT} ; der Winkel \overline{WPT} werde φ genannt. Alsdann ist nach Art. 29 (S. 22) der Winddruck auf die Flächeneinheit der Ebene

$$n = p \sin \varphi = p \cos \psi;$$

n ist normal zur Ebene gerichtet.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der Kuppelfläche seien x, y, z (Fig. 347); die X -Axe liege parallel zur Windrichtung. Der Normalschnitt mit der Fläche, welcher im Punkte P durch die Normale \overline{PN} und \overline{PW} geht, habe den Krümmungshalbmesser ρ und den Krümmungsmittelpunkt O mit den Coordinaten a, b, c . Die Coordinaten des

Fig. 346.

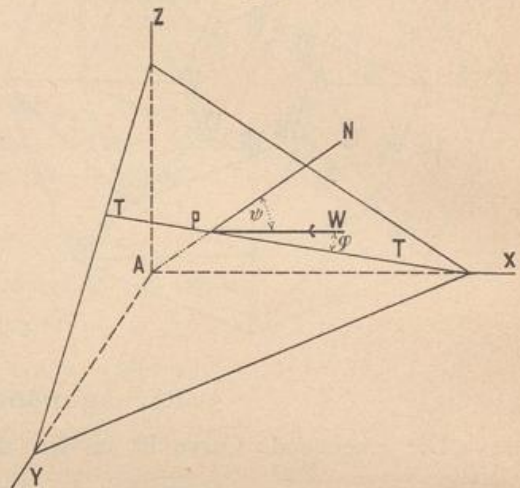
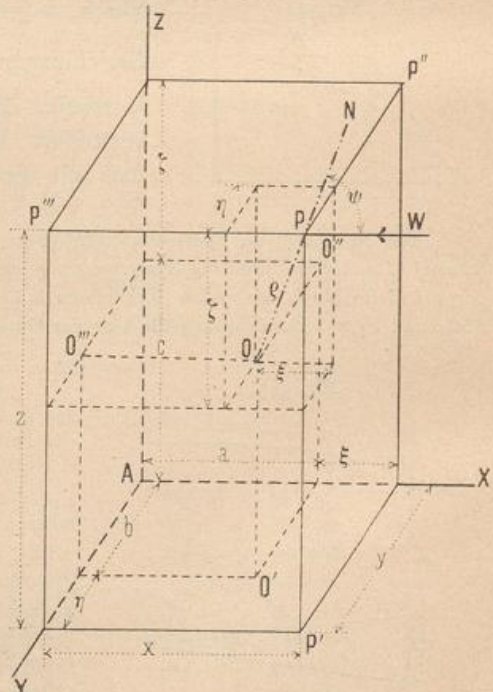


Fig. 347.



Punktes P , bezogen auf den Punkt O , seien ξ, η, ζ ; endlich bilde die Normale und der Krümmungshalbmesser \overline{OP} mit den Coordinaten-Axen die Winkel bzw. α, β, γ . Alsdann ist nach Fig. 347

$$\cos \alpha = \frac{\xi}{\rho}, \quad \cos \beta = \frac{\eta}{\rho}, \quad \cos \gamma = \frac{\zeta}{\rho};$$

ferner $\psi = \alpha$, also hier

$$n = p \cdot \cos \alpha = p \frac{\xi}{\rho}.$$

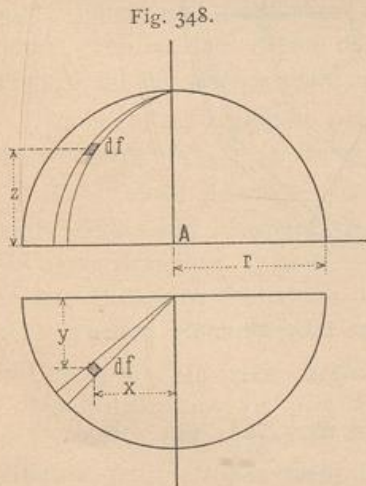
Zerlegt man n nach den Richtungen der Coordinaten-Axen, so erhält man als Seitenkräfte von n

$$\left. \begin{aligned} n_x &= n \cos \alpha = p \frac{\xi^2}{\rho^2} \\ n_y &= n \cos \beta = p \frac{\xi \eta}{\rho^2} \\ n_z &= n \cos \gamma = p \frac{\xi \zeta}{\rho^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 348.$$

und, da $\xi = x - a, \quad \eta = y - b \quad \text{und} \quad \zeta = z - c$ ist,

$$\left. \begin{aligned} n_x &= \frac{p}{\rho^2} (x - a)^2 \\ n_y &= \frac{p}{\rho^2} (x - a)(y - b) \\ n_z &= \frac{p}{\rho^2} (x - a)(z - c) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 349.$$

Die Gleichungen 348 u. 349 geben die Seitenkräfte des Winddruckes an einem beliebigen Punkte P der Kuppelfläche, bezogen auf die Flächeneinheit, ausgedrückt in den Coordinaten des Punktes P und des Krümmungsmittelpunktes des in Betracht kommenden Normalschnittes, so wie dem betreffenden Krümmungshalbmesser ρ . Durch Integration können die auftretenden Winddrücke ermittelt werden.



Um den auf einen Knotenpunkt des Kuppelfachwerkes entfallenden Winddruck zu ermitteln, genügt es, die GröÙe n desselben für die Flächeneinheit im Knotenpunkte selbst zu ermitteln und dieses n mit dem Inhalt der Kuppelfläche zu multipliciren, welche diesem Knotenpunkte zugewiesen ist. Ist die Abcisse des betreffenden Knotenpunktes x , so ist

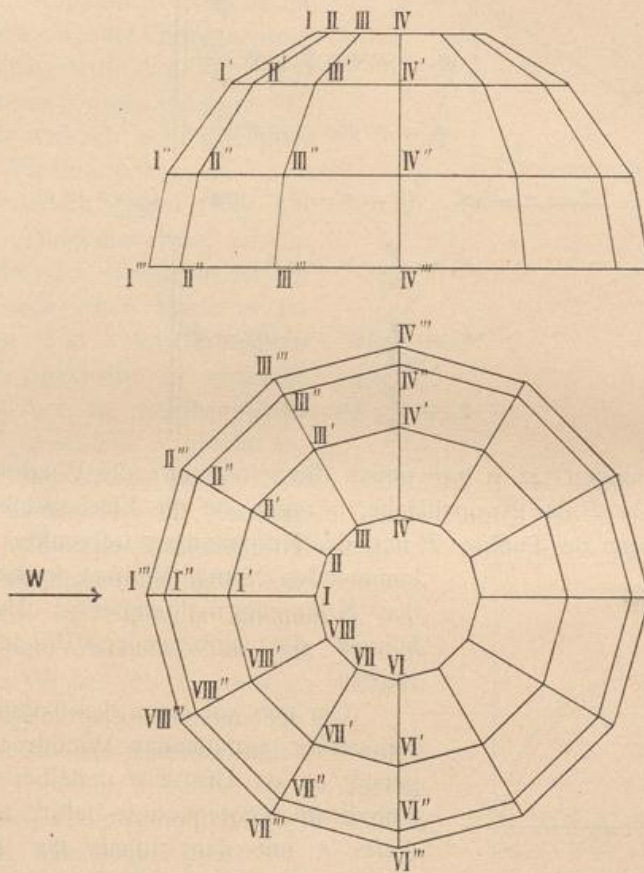
$$n = p \frac{(x - a)}{\rho}$$

Für die Kugelkuppel (Fig. 348) sind alle Normalschnitte gröÙte Kreise der Kugel; alle ρ sind gleich dem Kugelhalbmesser r . Wählt man den Mittelpunkt der Kuppel als Anfangspunkt der Coordinatenaxen, so werden $a = b = c = 0$, und es werden

$$\left. \begin{aligned} n &= \rho \frac{x}{r} \\ n_x &= \frac{\rho}{r^2} x^2 \\ n_y &= \frac{\rho}{r^2} (xy) \\ n_z &= \frac{\rho}{r^2} (xz) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 350.$$

Beispiel. Für das in Fig. 349 dargestellte, einer Halbkugelkuppel eingeschriebene Polyeder über einem Zwölfeck sei $r = 10$ m, der Wind komme von links. Dann sind die Werthe von n für die bezeichneten Punkte wie in nachstehender Tabelle angegeben (für $\rho = 120$ kg für 1 qcm):

Fig. 349.



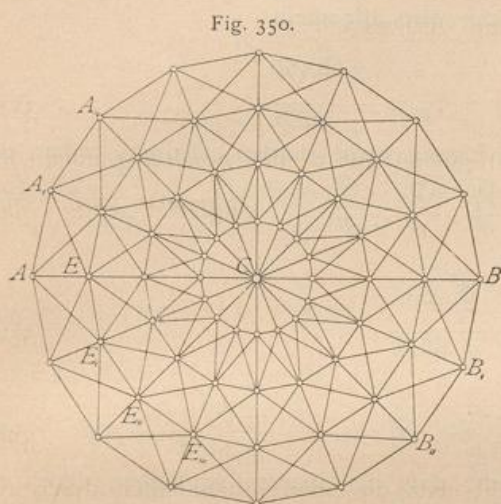
Punkt I	I'	I''	I'''	Punkt II	II'	II''	II'''
$\frac{x}{r} = 0,32$	0,71	0,94	1	$\frac{x}{r} = 0,29$	0,62	0,82	0,88
$n = \frac{\rho x}{r} = 38$	85	113	120 kg	$n = \frac{\rho x}{r} = 35$	74	98	106 kg.
		Punkt III	III'	III''	III'''		
		$\frac{x}{r} = 0,17$	0,36	0,47	0,5		
		$n = \frac{\rho x}{r} = 20$	43	56	60 kg.		

Danach kann man leicht die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden, senkrecht zur Kuppeloberfläche gerichteten Winddrücke berechnen. Näher ist auf diesen Gegenstand in der unten genannten Abhandlung des Verf.³⁷⁾ eingegangen.

b) Flache Zeldächer.

Die Zeldächer bilden Pyramiden, in den meisten Fällen regelmässige Pyramiden. Man kann sie aus einer Anzahl radial gestellter Binder, welche unter die sog. Grate kommen, construiren; alsdann wird die Berechnung eines jeden Binders unter Zugrundelegung der auf ihn entfallenden Belastungen so vorgenommen, wie bei den Balkendächern gezeigt ist. Neuerdings legt man auch bei den Zeldächern — zumal den flachen — alle Constructionstheile in die Dachflächen, wie bei den Schwedler'schen Kuppeln, so dass sich eine entsprechende Construction ergibt. In diesem Falle

252.
Zeldächer.



(Fig. 350) werden eine Anzahl Binder-sparren $AC, A_1C, A_2C, B_1C, B_2C, B_3C, \dots$ angeordnet; zwischen denselben befinden sich wagrechte Ringe E, E_1, E_2, E_3, \dots und in den viereckigen Feldern der Dachflächen, wegen der ungleichmässigen Belastungen, Diagonalen. Auch hier wird oft in der Dachmitte eine Laterne angeordnet, welche sich auf einen Laternenring stützt, gegen den sich die oberen Sparrenenden lehnen. Wir werden hier nur die der Kuppelconstruction entsprechende Anordnung betrachten. Obgleich die grössere oder geringere Neigung der Dachflächen keinen grundlegenden Unterschied bedingt, sollen die Zeldächer dennoch in flache und steile Zeldächer eingetheilt werden, weil bei den ersteren die Belastung durch Schnee, bei den letzteren diejenige durch Wind die maassgebende zufällige Belastung ist.

Zu den flachen Zeldächern gehören die Circus- und Theaterdächer, die Dächer über Panoramen, Locomotivschuppen etc., zu den steilen hauptsächlich die Thurmdächer.

Die flachen Zeldächer der vorgeschriebenen Anordnung sind weiter nichts, als Kuppeldächer mit gleichem Neigungswinkel α in der ganzen Dachfläche. Man erhält also unter denselben Voraussetzungen für die Belastungen, wie in Art. 243 (S. 248) die hier geltenden Stabkräfte, indem man in die dort gefundenen Werthe statt der veränderlichen Winkelwerthe $\alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_{m+1} \dots$ den constanten Winkelwerth α einsetzt.

Spannungen in den Sparren. Wiederum mögen $G_1, G_2 \dots G_m \dots$ die Eigengewichte der ganzen Ringzonen, $P_1, P_2 \dots P_m \dots$ die zufälligen Belastungen derselben sein; alsdann sind, falls n Sparren vorhanden sind, die Belastungen der einzelnen Knotenpunkte bezw. $\frac{G_1}{n}, \frac{G_2}{n} \dots \frac{G_m}{n} \dots$ und $\frac{P_1}{n}, \frac{P_2}{n} \dots \frac{P_m}{n} \dots$

253.
Berechnung
der Stab-
spannungen.

³⁷⁾ Winddruck auf Kuppeln. Centralbl. d. Bauverw. 1898, S. 217.

Fig. 351.

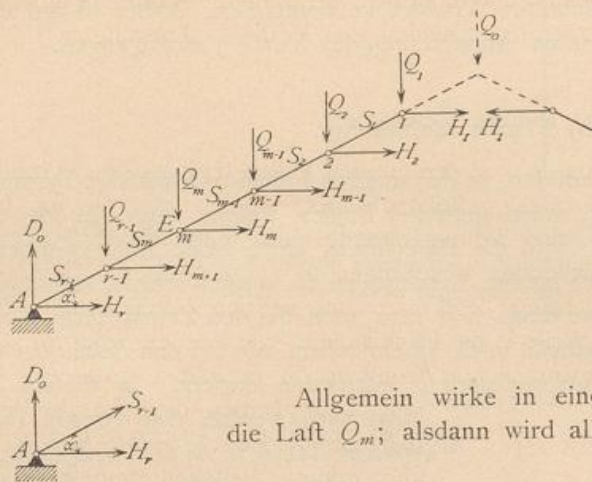
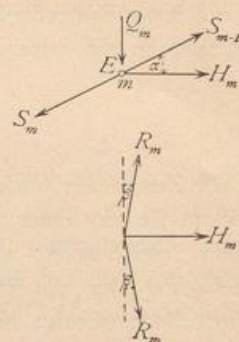


Fig. 352.



Allgemein wirke in einem Knotenpunkte m (Fig. 351) die Last Q_m ; alsdann wird allgemein

$$S_m = -\frac{\sum_1^m (Q)}{\sin \alpha} \dots \dots \dots 351.$$

Die Sparrenspannungen durch das Eigengewicht werden erhalten, indem der Reihe nach für $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ bzw. $\frac{G_1}{n}, \frac{G_2}{n}, \frac{G_3}{n} \dots$ eingesetzt wird. Man erhält

$$S_m^g = -\frac{\sum_1^m (G)}{n \sin \alpha} \dots \dots \dots 352.$$

Für $m = 1, 2, 3 \dots$ wird

$$S_1^g = -\frac{G_1}{n \sin \alpha}; S_2^g = -\frac{G_1 + G_2}{n \sin \alpha}; S_3^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3}{n \sin \alpha} \text{ etc. } 353.$$

Aus der Gleichung 340 ergibt sich, daß die Sparrenspannungen durch zufällige Last am größten bei voller Belaftung sind, und zwar wird

$$S_m^p \text{ max} = -\frac{\sum_1^m (P)}{n \sin \alpha} \dots \dots \dots 354.$$

und für $m = 1, 2, 3 \dots$

$$S_1^p \text{ max} = -\frac{P_1}{n \sin \alpha}; S_2^p \text{ max} = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha}; S_3^p \text{ max} = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha} \text{ etc. } 355.$$

Falls keine Laterne vorhanden ist, gelten die Gleichungen 351 bis 354 ebenfalls; nur ist überall in die Summen auch Q_0 aufzunehmen, d. h. der Theil der Firstbelaftung, welcher auf den Sparren entfällt. (Allerdings gilt dies nur für angenäherte Berechnung.)

Spannungen in den Ringen. Die algebraische Summe der in E (Fig. 352) wirkenden wagrechten Kräfte ist gleich Null; bezeichnet H_m die Mittelkraft der beiden Ringspannungen R_m , so ist daher

$$0 = H_m + S_{m-1} \cos \alpha - S_m \cos \alpha,$$

woraus folgt:

$$H_m = (S_m - S_{m-1}) \cos \alpha = -\frac{\sum_1^m (Q) - \sum_1^{m-1} (Q)}{\sin \alpha} \cos \alpha = -Q_m \cotg \alpha.$$

Nun ist $H_m = 2 R_m \sin \beta$ und, da nach Art. 243 (S. 249) $\beta = \frac{\pi}{n}$ ist,

$$R_m = \frac{H_m}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = - \frac{Q_m \cotg \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 356.$$

Die Belastung durch das Eigengewicht erzeugt demnach eine Spannung

$$R_m^g = - \frac{G_m \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 357.$$

Falls ein Laternenring vorhanden ist, so gilt die Gleichung 357 auch für diesen. Für denselben ist $m = 1$ und $\sum_1^{m-1} (Q) = 0$, so wie $\sum_1^m (Q) = Q_1$. Wir erhalten demnach für $m = 1, 2, 3 \dots$

$$R_1^g = - \frac{G_1 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \quad R_2^g = - \frac{G_2 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \text{ etc.} \dots \dots \dots 358.$$

Die Gleichungen 357 u. 358 ergeben, dass in sämtlichen Ringen durch das Eigengewicht Druck erzeugt wird; die Gleichung 356 gilt aber nicht für den Mauerring. Am Knotenpunkt *A* (Fig. 351) wirken die Kräfte $D_0 = \sum (Q)$, H_r und S_{r-1} ; mithin ist $S_{r-1} \cos \alpha + H_r = 0$, woraus $H_r = - S_{r-1} \cos \alpha$. Ferner ist

$$D_0 + S_{r-1} \sin \alpha = 0, \text{ woraus } S_{r-1} = - \frac{\sum_1^{r-1} (Q)}{\sin \alpha}. \text{ Daher wird } H_r = \sum_1^{r-1} (Q) \cotg \alpha$$

und da $R_r = \frac{H_r}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$ ist, wird

$$R_r = \frac{\sum_1^{r-1} (Q) \cotg \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 359.$$

Der Mauerring erhält also Zug.

Das Eigengewicht erzeugt in demselben die Spannung

$$R_r^g = \frac{(G_1 + G_2 + \dots + G_{r-1}) \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 360.$$

Die größte durch zufällige Belastung erzeugte Spannung findet in einem Ringe nach Gleichung 356 statt, wenn Q_m seinen größten Werth hat. Da Q , aufser beim Mauerring, nie negativ wird, so ist die Ringspannung durch zufällige Belastung, abgesehen vom Mauerring, stets Druck. Demnach wird

$$R_1^{l \min} = - \frac{P_1 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \quad R_2^{l \min} = - \frac{P_2 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \text{ etc.};$$

allgemein

$$R_m^{l \min} = - \frac{P_m \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 361.$$

Weiters ist $R_1^{lmax} = R_2^{lmax} = R_m^{lmax} = 0$. Die größte Druckspannung in einem Ringe findet also schon statt, wenn nur die betreffende Zone belastet ist; die Belastung der übrigen Zonen ist auf die Ringspannung ohne Einfluss. Man kann demnach auch sagen, dass die größte Ringspannung in allen Ringen bei zufälliger Belastung des ganzen Daches stattfindet.

Im Mauerring findet der größte Zug durch zufällige Belastung bei voller Belastung statt; derselbe ist

$$R_r^{lmax} = \frac{(P_1 + P_2 \dots + P_{r-1}) \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 362.$$

Druck findet in demselben nicht statt.

Spannungen in den Diagonalen. Für dieselbe Belastungsart, welche bei den Kuppeln zu Grunde gelegt ist, ergibt sich der Spannungsunterschied in zwei benachbarten Sparren, zwischen denen die Belastungsgrenze liegt, zu

$$\Delta = - \frac{\sum_1^m (P)}{n \sin \alpha}$$

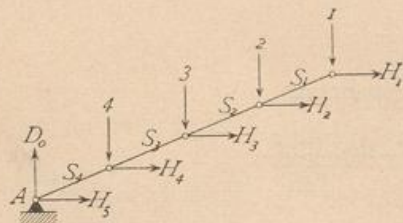
und die Spannung in der Diagonalen, welche dieselbe übertragen soll, zu

$$Y = \frac{\sum_1^m (P)}{n \sin \alpha} \cdot \frac{d}{s},$$

in welchem Ausdruck d , bzw. s die Längen der Diagonale und des Sparrens bezeichnen. Demnach wird

$$Y_1 = \frac{P_1}{n \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{d_1}{s_1}, \quad Y_2 = \frac{P_1 + P_2}{n \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{d_2}{s_2} \text{ etc.} \dots \dots \dots 363.$$

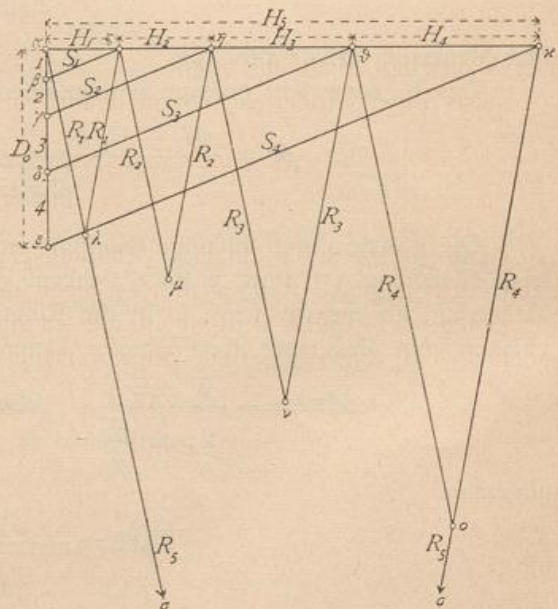
Fig. 353.



Die Berechnung kann auch nach dem Verfahren von Müller-Breslau vorgenommen werden, welches in Art. 246 bis 249 (S. 255) für die Kuppelflechtwerke vorgeführt ist.

Um die Stabspannungen mittels Zeichnung (Fig. 353 u. 354) zu ermitteln, seien die Belastungen der einzelnen Knotenpunkte 1, 2, 3, 4; alsdann ergibt sich leicht, wenn $\alpha\beta = 1$, $\beta\gamma = 2$, $\gamma\delta = 3$, $\delta\varepsilon = 4$ gemacht wird, $\beta\zeta = S_1$, $\zeta\alpha = H_1$,

Fig. 354.



254.
Graphische
Ermittlung
der Stab-
spannungen.

$\gamma \eta = S_2, \eta \zeta = H_2, \delta \theta = S_3, \theta \eta = H_3, \varepsilon \alpha = S_4, \alpha \beta = H_4$; ferner $\varepsilon a = D_0, \alpha z = H_5, \zeta \lambda = \lambda a = R_1, \eta \mu = \mu \zeta = R_2, \theta \nu = \nu \eta = R_3, \alpha o = o \theta = R_4$ und $a \sigma = \sigma z = R_5$ (= Mauerringspannung).

Je nachdem nun die Kräfte $\lambda, \mu, \nu, \sigma$ die Eigengewichte oder die zufälligen Lasten bedeuten, erhält man die durch die eine oder andere Belastung erzeugten Spannungen. Die Spannungen in den Diagonalen sind leicht zu construiren.

c) Steile Zeldächer oder Thurmdächer.

Als lothrechte Belastung ist hier nur das Eigengewicht einzuführen. Eine Belastung durch Schnee findet nicht statt, weil wegen der großen Steilheit des Daches der Schnee nicht liegen bleibt. Diese lothrechte Belastung erzeugt, da die Construction eben so, wie bei den flachen Zeldächern, aus Sparren und Ringen zusammengesetzt wird, Spannungen, welche genau, wie dort gezeigt wurde, zu berechnen sind. Auf diese Berechnung soll deshalb hier nicht weiter eingegangen werden. Dagegen spielt der Winddruck hier eine große Rolle, und die durch diesen erzeugten Spannungen sollen berechnet werden. Zunächst soll die Berechnung für ein vierseitiges Pyramidendach, alsdann für ein achtseitiges Pyramidendach gezeigt werden.

1) Vierseitiges Pyramidendach.

Der Winddruck auf eine Pyramidenseite ist am größten, wenn die Windrichtung im Grundriss senkrecht zur betreffenden Rechteckseite steht. Alsdann ist der Winddruck für 1 qm schräger Dachfläche (Fig. 355 u. 356) nach Gleichung 7:

255.
Belastung.

$v = 120 \sin(\alpha + 10^\circ)$; die vom Winde getroffene schräge Dachfläche ist

$$F = \frac{a \lambda}{2} = \frac{a h}{2 \sin \alpha},$$

mithin der Gesamtdruck gegen eine Pyramidenseite

$$N = \frac{a h v}{2 \sin \alpha} \quad 364.$$

Wir denken uns nun in der Symmetrie-Ebene *II* einen ideellen Binder *ABC* (Fig. 355) und bestimmen die darin durch den Winddruck entstehenden Spannungen; wir nehmen vorläufig die Wagrechten und Diagonalen, wie in Fig. 356 gezeichnet,

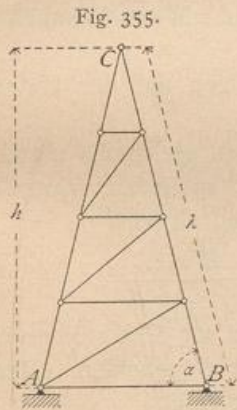
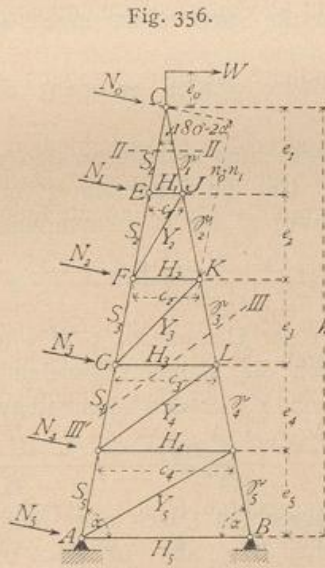
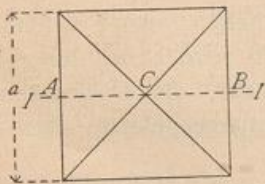


Fig. 357.



an. Auf ein oben befindliches Kreuz wirke ein Winddruck *W* in der Höhe e_0 über dem Firstpunkt *C*; außerdem wirken in den Knotenpunkten *C, E, F, G, ...* die Kräfte $N_0, N_1, N_2, N_3, ...$ senkrecht zur Dachfläche; die Größe dieser Kräfte ist leicht aus den auf die bezüglichen Knotenpunkte entfallenden Dachflächen zu ermitteln.

256.
Berechnung
der
Spannungen
im ideellen
Binder.

α) Berechnung der Spannungen im ideellen Binder.
Um die Sparrenspannung S_1 (Fig. 356) an der Windseite zu erhalten, lege man einen beliebigen Schnitt durch CE , etwa nach $II II$, und betrachte das Bruchstück oberhalb des Schnittes. Wählt man \mathcal{F} als Momentenpunkt, so heisst die Gleichung der statischen Momente (Fig. 358):

$$0 = S_1 c_1 \sin \alpha - W(e_0 + e_1) - N_0 n_0.$$

Nun ist

$$\overline{C\mathcal{F}} = \frac{e_1}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad \cos(180 - 2\alpha) = \frac{n_0}{C\mathcal{F}} = -\cos 2\alpha, \quad \text{daher}$$

$$n_0 = -\overline{C\mathcal{F}} \cos 2\alpha = -\frac{e_1}{\sin \alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{e_1 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Man erhält hiernach

$$S_1 = \frac{W(e_0 + e_1)}{c_1 \sin \alpha} + \frac{N_0 e_1 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{c_1 \sin^2 \alpha}.$$

Für irgend einen Sparren FG ist K der Momentenpunkt, und für S_3 ergibt sich der Werth

$$S_3 = \frac{1}{c_2 \sin \alpha} \left[W(e_0 + e_1 + e_2) + N_0(n_0 + n_1) + N_1 n_1 \right] - N_2 \cotg \alpha.$$

Für irgend einen Sparren KL auf der Unterwindseite ist G der Momentenpunkt und

$$\mathfrak{S}_3 = -\frac{1}{c_3 \sin \alpha} \left[W(e_0 + e_1 + e_2 + e_3) + \frac{N_0(e_1 + e_2 + e_3) + N_1(e_2 + e_3) + N_2 e_3}{\sin \alpha} \right].$$

Eben so ergeben sich leicht alle Sparrenspannungen, sowohl auf der Windseite, wie auf der Unterwindseite.

Die Sparren auf der Windseite werden gezogen; diejenigen auf der Unterwindseite werden gedrückt.

Die Spannungen in den Wagrechten und Diagonalen werden gleichfalls mittels der Momentenmethode ermittelt. Um die Spannung H_3 in GL zu finden, schneide man schräg nach $III III$; alsdann ist C der Momentenpunkt, und es wird

$$H_3 = -\frac{N_1 e_1 + N_2(e_1 + e_2) + N_3(e_1 + e_2 + e_3)}{(e_1 + e_2 + e_3) \sin \alpha} + \frac{W e_0}{e_1 + e_2 + e_3}.$$

Die Spannung Y_3 endlich in der Diagonalen GK wird, da für GK wiederum C der conjugirte Punkt ist, durch die Momentengleichung für C gefunden. Man erhält, wenn y_3 der Hebelsarm von Y_3 für den Momentenpunkt C ist,

$$Y_3 = \frac{1}{y_3} \frac{N_1 e_1 + N_2(e_1 + e_2)}{\sin \alpha} - \frac{W e_0}{y_3}.$$

Ob die Diagonalen und Wagrechten Druck oder Zug erhalten, hängt wesentlich von der Grösse des Moments $W e_0$ ab. Ist $W = 0$, so werden bei der gezeichneten Richtung der Diagonalen die Wagrechten gedrückt, die Diagonalen gezogen. Bei der entgegengesetzten Windrichtung findet entgegengesetzte Beanspruchung statt.

257.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen
im ideellen
Binder.

β) Graphische Ermittlung der Spannungen im ideellen Binder.
Wird zunächst von der Kraft W abgesehen, so ergibt sich ohne Schwierigkeit der in Fig. 359 gezeichnete Kräfteplan, worin alle Stabspannungen, welche durch Winddruck erzeugt werden, enthalten sind.

Fig. 358.

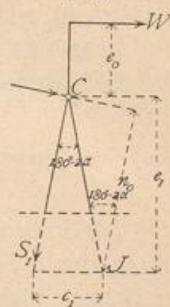


Fig. 359.

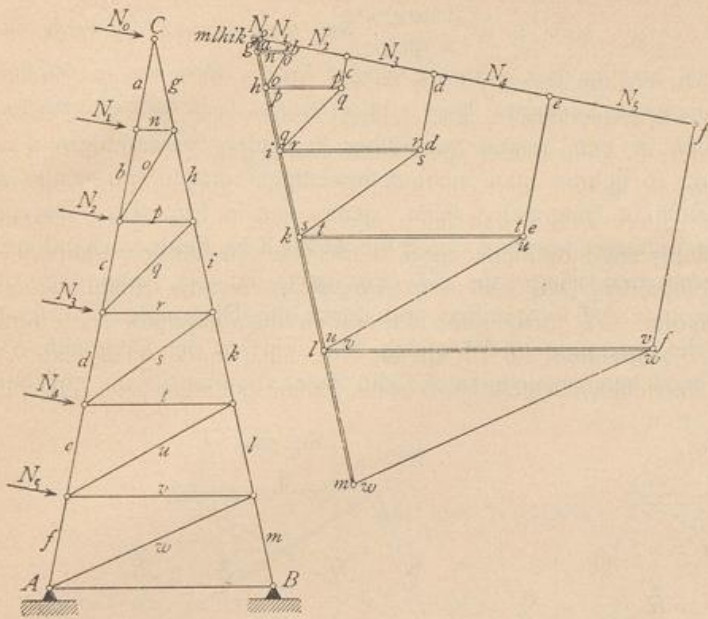
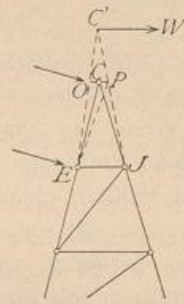


Fig. 360.



Falls noch ein Winddruck W vorhanden ist, so empfiehlt es sich, für die graphische Bestimmung der Spannungen statt der wirklich vorhandenen Stäbe EC und $ƳC$ zwei Stäbe EC' und $ƳC'$ einzuführen, wobei C' der Schnittpunkt der Kraft W mit der Mittel-

Lothrechten (Fig. 360) ist; die Ermittlung kann dann für den Thurm mit der Spitze $EOC'PƳ$ nach der Cremona'schen Methode erfolgen. Die Spannungen in EC und $ƳC$ können mit geringem Fehler denjenigen, welche sich für EO und $PƳ$ ergeben haben, gleich gesetzt werden.

γ) Zurückführung der Spannungen im ideellen Binder auf die wirklichen Stabspannungen. Die bisher berechneten Spannungen finden im ideellen Binder ACB (Fig. 361) statt. Jede Spannung in einem Stabe des ideellen

258.
Wirkliche
Stab-
spannungen.

Fig. 361.

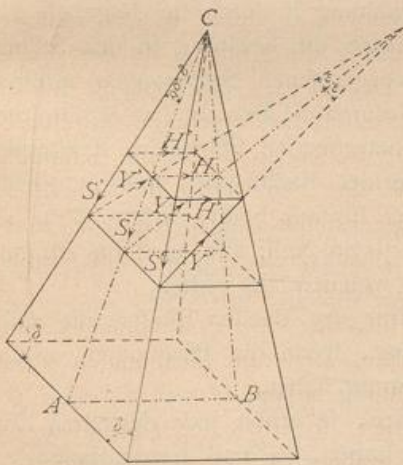
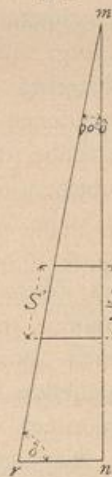


Fig. 362.



Binders wird nun durch zwei Stabspannungen der beiden wirklichen Binder geleistet, deren Ebenen mit derjenigen des ideellen Binders den Winkel $(90 - \alpha)$ einschließen.

Die Spannung S in irgend einem Sparren des ideellen Binders wird durch zwei Spannungen S' ersetzt; demnach ist

$$S = 2 S' \cos (90 - \delta) = 2 S' \sin \delta,$$

woraus

$$S' = \frac{S}{2 \sin \delta}; \quad \dots \quad 365.$$

eben so

$$S' = \frac{S}{2 \sin \delta} \quad \dots \quad 366.$$

Ferner wird $H = 2 H'$, woraus

$$H' = \frac{H}{2}; \quad \dots \quad 367.$$

$$Y = 2 Y' \cos \epsilon,$$

woraus

$$Y' = \frac{Y}{2 \cos \epsilon} \quad \dots \quad 368.$$

Auch auf graphischem Wege ist die Zurückführung leicht. Man construirt (Fig. 362) den Winkel $(90 - \delta)$, bzw. ε . Ist $\angle r m n = 90 - \delta$, so ist $m r = \frac{m n}{\sin \delta}$. Man trage demnach die Werthe für $\frac{S}{2}$ und $\frac{S}{2}$ auf der Linie $m n$ ab, projicire diese Abschnitte auf $m r$; alsdann erhält man in den Projectionen die gefachten wirklichen Sparrenspannungen. Eben so ist die Division durch $\cos \varepsilon$ vorzunehmen.

Wenn die Diagonalen in den beiden gegenüber liegenden Seitenfeldern verschiedene Richtung haben, so nehme man nichtsdestoweniger zunächst an, daß in beiden Feldern gleich gerichtete Diagonalen seien, genau wie in Fig. 361. Darauf ersetze man die nur vorläufig angenommene durch die wirklich im Felde vorhandene. In der vorläufig angenommenen Diagonale $\overline{b d}$ (Fig. 363) sei die Spannung zu Y' ermittelt; soll die Diagonale $\overline{b d}$ fortgelassen und durch die Diagonale $\overline{a c}$ ersetzt werden können, so muß die Spannung in $\overline{b d}$ gleich Null sein; in der Diagonale $\overline{a c}$ muß also eine Kraft Z herrschen, welche in $\overline{b d}$ die Zusatzspannung von gleicher

Fig. 363.

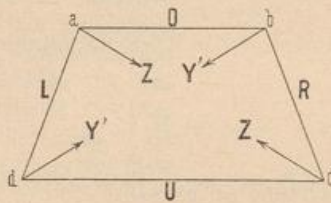
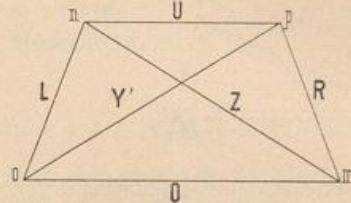


Fig. 364.



Größe Y' , aber entgegengesetztem Sinne mit der bereits in $\overline{b d}$ herrschenden Spannung erzeugt. Bringt man in a und c je die Kraft $Z = \overline{m n}$ an (Fig. 364), so erhält man die Größe der in den Stäben des Trapezes wirkenden Spannungen aus dem Kräfteplan. Es ist $L = \overline{o n}$, $O = \overline{m o}$, $U = \overline{n p}$ und $R = \overline{p m}$, und wegen der Gleichheit der Diagonalen des Trapezes ist $Z = Y'$ (absolut genommen). Ersetzt man also die Diagonale $\overline{b d}$ mit der berechneten Spannung Y' durch die Diagonale $\overline{a c}$, so herrscht in letzterer der gleiche Zug. Die durch die Kräfte Z in den Stäben des Trapezes und des übrigen Fachwerkes hervorgerufenen Spannungen addiren sich zu den bereits in denselben vorhandenen und durch die Berechnung ermittelten. Diese Zusatzspannungen sind für die Stäbe des betreffenden Feldes im Kräfteplan der Fig. 364 verzeichnet, für alle übrigen Stäbe des Fachwerkes sind sie gleich Null. Denn für jeden dieser übrigen Stäbe ist der Einfluß beider Kräfte Z zu berücksichtigen. Die Resultierende beider Z ist aber gleich Null, also auch ihr Einfluß auf die Stabspannungen außerhalb des Feldes, in welchem sie wirken.

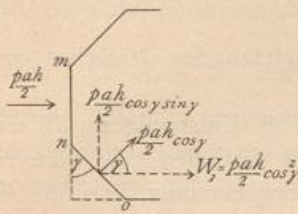
Das vorstehend angegebene Verfahren, mit Hilfe des ideellen Binders die Stabspannungen zu ermitteln, ist also auch anwendbar, wenn die Diagonalen zweier gegenüber liegender Felder entgegengesetzte Richtung haben.

Wenn einfache Diagonalen angeordnet werden, so erhält jede derselben Zug und Druck; will man nur gezogene Diagonalen haben, so sind Gegendiagonalen anzuordnen, worüber das Erforderliche bereits mehrfach gesagt ist.

2) Achteitiges Pyramidendach.

Wir nehmen hier die Windrichtung, der einfachen Rechnung halber, wagrecht an und berechnen aus demselben Grunde den Winddruck so, als wenn die Seitenflächen lothrecht ständen. Der dabei gemachte Fehler ist gering. Wenn die Wind-

Fig. 365.



richtung im Grundrifs senkrecht zur Seite mn (Fig. 365) angenommen wird, die Seitenlänge des regelmäßigen Achteckes an der Unterkante der Pyramide mit a , die Höhe der Pyramide mit h und der Druck für die Flächeneinheit mit p bezeichnet wird, so ist der Druck gegen die Fläche F demnach

$$W = \frac{p a h}{2} \dots \dots \dots 369.$$

Der Winddruck auf die Fläche F_1 (Fig. 366) ergibt sich unter obigen vereinfachenden Annahmen folgendermaßen. Die (lothrecht gedachte) Fläche schließt mit der angenommenen Windrichtung (Fig. 365) einen Winkel $(90 - \gamma)$ ein; mithin ist der senkrechte Winddruck auf die Fläche für die Flächeneinheit nach Art. 31 (S. 24)

$$n = p \sin (90 - \gamma)$$

oder

$$n = p \cos \gamma,$$

und der Winddruck auf die ganze Fläche

$$\frac{p a h}{2} \cos \gamma.$$

Diese Kraft zerlegt sich nun in eine Seitenkraft, welche dieselbe Richtung hat, wie W , und in eine senkrecht hierzu stehende. Die erstere ist (Fig. 365)

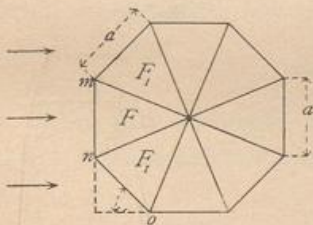
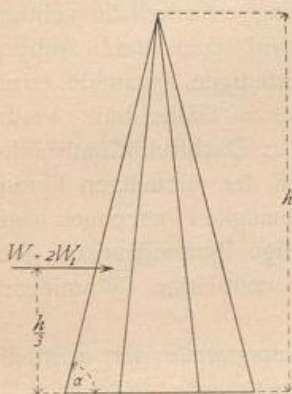
$$W_1 = \frac{p a h \cos^2 \gamma}{2} \dots \dots \dots 370.$$

Ein genau gleicher Winddruck wirkt (Fig. 366) auf die andere Fläche F_1 ; mithin ist der gefamnte auf Umkanten der Pyramide wirkende Winddruck

$$\begin{aligned} W + 2 W_1 &= \frac{p a h}{2} (1 + 2 \cos^2 45^\circ) \\ &= \frac{p a h}{2} \left(1 + \frac{2}{2}\right) = p a h. \dots \dots 371. \end{aligned}$$

Der Angriffspunkt dieser Kraft liegt in der Höhe $\frac{h}{3}$ über der Grundfläche der Pyramide.

Fig. 366.



Für irgend einen Pyramidentheil (Fig. 367) von der Höhe z erhält man, wenn die Seite des Achteckes, welches für diesen Theil die Grundfläche bildet, mit x und die ganze Breite der Grundfläche mit y bezeichnet wird,

$$W_z = p x z \dots \dots \dots 372.$$

W_z greift in der Höhe $\frac{z}{3}$ über dieser Grundfläche an.

Nun ist $\frac{x}{z} = \frac{a}{h}$, also $x = \frac{a}{h} z$ und

$$W_z = p \frac{a}{h} z^2 \dots \dots \dots 373.$$

Der Zuwachs der Kraft W_z , welcher auf einen Streifen von der Höhe dz entfällt, ist demnach $dW_z = 2 p \frac{a}{h} z dz$, und die Windbelastung für die Höheneinheit wird

$$\frac{d W_z}{d z} = 2 p \frac{a}{h} z \dots \dots \dots 374.$$

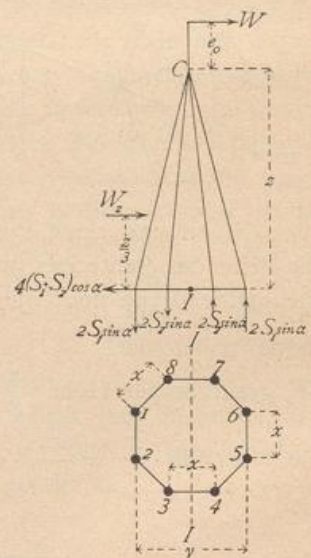
Daraus folgt, daß die Lastvertheilung nach dem Gefetze des Dreieckes von der Spitze bis zur Basis des Thurmes stattfindet.

260.
Thurm-
Fachwerk.

Das achteitige Pyramidendach mit 8 Sparren auf 8 Fußpunkten ist ein statisch unbestimmtes Fachwerk. Könnte man die Spitze fortlaffen, so wäre es statisch bestimmt; die Berechnung würde dann genau so vorgenommen, wie dies in Art. 246 bis 248 (S. 255 bis 257) für die Kuppel gezeigt ist. Durch das Aufbringen der Spitze mit 8 Sparren wird das Fachwerk fünffach statisch unbestimmt (es erhält 5 überzählige Unbekannte). Diese vielfache statische Unbestimmtheit kann man dadurch vermindern, daß man die Spitze nur aus 4 Sparren construiert, indem man also im obersten Theile des Thurmes nur immer einen um den anderen Sparren bis zur Spitze reichen läßt. Der oberste Theil des Thurmfachwerkes bildet dann eine vierseitige Pyramide. Die für die äußere Erscheinung erforderliche achteitige Pyramide auch in dem obersten Theile des Thurmes wird dann durch Anbringen entsprechend geformter Holzfutter auf die Ringe der vierseitigen Pyramide erreicht. Eine solche Construction ist bei den Thürmen des Domes zu Halberstadt (construiert von *Cramer*) ausgeführt und in Theil III, Band 2, Heft 4: Dachstuhl-Constructionen (Art. 234, S. 315) dieses »Handbuches« zu finden. Die in der vierseitigen Pyramide wirkenden Spannungen können dann mit genügender Genauigkeit berechnet werden, wie in Art. 255 bis 258 (S. 269 bis 271) für das vierseitige Pyramidendach gezeigt ist; diese Spannungen werden darauf als äußere, das achteitige Pyramidendach belastende Kräfte eingeführt.

Die in nachstehenden Artikeln vorgeführte Berechnungsweise der achteitigen Thurmpyramide nimmt auf die statische Unbestimmtheit keine Rücksicht. Die Sparrenberechnung ist möglich, wenn man annimmt, daß in einem wagrecht genommenen Querschnitt durch den Thurm (Fig. 367) in den einzelnen Querschnittspunkten die Spannungen auf die Flächeneinheit sich verhalten, wie die Abstände der betreffenden Querschnittspunkte von der Null-Linie des Querschnittes. Da die Querschnittsflächen aller 8 Sparren naturgemäß gleich groß gemacht werden, so kann man auch sagen: Es wird die Annahme gemacht, daß die Sparrenspannungen sich verhalten, wie die Abstände der Schwerpunkte der Sparrenquerschnitte von der Null-Linie des ganzen Thurmquerschnittes.

Fig. 367.



261.
Spannungen
in den
Sparren.

Stabspannungen. Aufser W_z wirke auf das Thurmkreuz (Fig. 367) noch ein Winddruck W in der Höhe e_0 über der Spitze; alsdann ist das Moment des Windes, bezogen auf die wagrechte, in der Grundfläche des betreffenden Thurmstückes gelegene Schwerpunktsaxe II des Querschnittes (in der Höhe z unter der Spitze)

$$M_z = W_z \frac{z}{3} + W (e_0 + z) \dots \dots \dots 375.$$

Dieses Moment muß durch die Spannung der Sparren an der betrachteten Stelle aufgehoben werden.

Sind die Spannungen in den vier Sparren 1, 2, 5, 6, welche um $\frac{y}{2}$ von der Axe II abstehen, S_1 , diejenigen in den vier um $\frac{x}{2}$ von der Axe II abstehenden Sparren 3, 4, 7, 8 gleich S_2 , so ist, wenn mit geringem Fehler der Sparrenwinkel gegen die wagrechte Ebene gleich α gesetzt wird, das Moment der Sparrenspannungen für die Axe II (die Null-Linie des Gesamtquerschnittes) $2 S_1 y \sin \alpha + 2 S_2 x \sin \alpha$. Demnach muß

$$M_z = 2 S_1 y \sin \alpha + 2 S_2 x \sin \alpha$$

sein. Nach Art. 260 wird angenommen, daß stattfindet:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \frac{x}{y}, \quad \text{d. h.} \quad S_2 = S_1 \frac{x}{y};$$

daher wird

$$M_z = 2 S_1 \sin \alpha \left[y + \frac{x^2}{y} \right] = \frac{2 S_1 \sin \alpha}{y} (x^2 + y^2)$$

sein, woraus folgt:

$$S_1 = \frac{M_z y}{2 (x^2 + y^2) \sin \alpha} \dots \dots \dots 376.$$

$$S_2 = \frac{M_z x}{2 (x^2 + y^2) \sin \alpha} \dots \dots \dots 377.$$

Für M_z sind der Reihe nach die Werthe einzuführen, welche sich bei den verschiedenen Höhen z ergeben. Diese Spannung kann in jedem Sparren sowohl als Zug, wie als Druck stattfinden, da der Wind von allen Seiten kommen kann. S_1 ist stets größer als S_2 . Die größte Spannung, welche durch Winddruck in allen Sparren erzeugt wird, hat also den Werth

$$S_{p \max} = \pm \frac{M_z y}{2 (x^2 + y^2) \sin \alpha} \dots \dots \dots 378.$$

Wenn die Pyramide über einem regelmäßigen Achteck errichtet ist, so ist $y = x + 2 x \cos 45^\circ = x \cdot 2,414$, und es wird dann

$$\left. \begin{aligned} S_{p \max} &= \pm \frac{M_z \cdot 0,177}{x \sin \alpha} \\ S_{p \max} &= \pm \frac{M_z \cdot 0,427}{y \sin \alpha} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 379.$$

Auf einen beliebigen Theil der vom Winde voll getroffenen Pyramidenseite $OB'C'$ (Fig. 368a) entfalle der Winddruck N ; auf die entsprechenden Theile der angrenzenden Seitenfläche $OA'B'$ und $OC'D'$ entfalle je der Winddruck N' . Nach Früherem ist $N' = N \cos 45^\circ = \frac{N}{\sqrt{2}}$. In B wirkt dann $\frac{N}{2}$, bzw. $\frac{N'}{2}$, wie in Fig. 368b gezeichnet ist; desgleichen in C .

Die Lasten $\frac{N}{2}$ und $\frac{N'}{2}$ zerlegen sich in B , bzw. in C in Seitenkräfte, welche in die Ebenen $OB'A'$, $OB'C'$ und $OC'D'$ fallen. Aus Fig. 368c ergibt sich im Punkte B , wenn $\alpha\beta = \frac{N}{2}$ und $\beta\delta = \frac{N'}{2}$ ist, die Größe der Seitenkräfte T , bzw. T' und T'' :

262.
Spannungen
in den
Ringen und
Diagonalen.

$$T_0' = \overline{\varepsilon\beta} + \overline{\beta\gamma} = \frac{N'}{2} + \frac{N}{2 \cos 45^\circ} = \frac{N}{2\sqrt{2}} + \frac{N\sqrt{2}}{2} = \frac{N}{2\sqrt{2}} [1+2] = 1,06 N$$

$$T = \overline{\gamma\alpha} + \overline{\delta\varepsilon} = \frac{N}{2} + \frac{N'}{2 \cos 45^\circ} = \frac{N}{2} + \frac{N\sqrt{2}}{2} = N.$$

Für Punkt A erhält man:

$$T_u' = \overline{\zeta\beta} = \frac{N'}{2} = \frac{N}{2\sqrt{2}} = 0,354 N,$$

$$T'' = \overline{\delta\zeta} = \frac{N'}{2 \cos 45^\circ} = \frac{N'\sqrt{2}}{2} = \frac{N}{2}.$$

380.

In der Seitenfläche $OB'C'$, welche vom Winde voll getroffen wird, sind die Spannungen der Ringfläche von B und C aus je gleich T . Die Größe von T hängt von der Größe der Kraft N , d. h. von der Größe der auf den betreffenden Stab entfallenden, vom Winde getroffenen Fläche ab. Die Diagonalen in dieser Seitenfläche werden bei dieser Belastung nicht beansprucht.

In der Seitenfläche $OA'B'$ wirkt von der Seite des Grates OB' (des Windgrates) aus die Belastung T_0' , von der Seite des Grates OA' (des Unterwindgrates) aus die negative Belastung T_u' auf das Fachwerk. Diese Belastungen müssen durch das in der Seitenfläche

Wind-
richtung

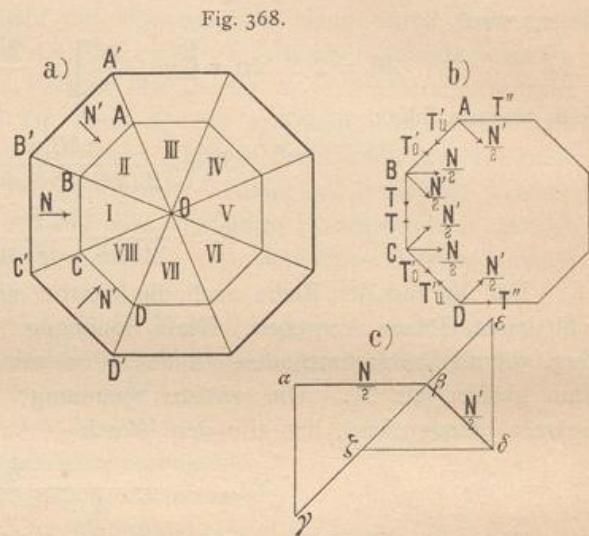


Fig. 368.

$OB'A'$ liegende Fachwerk auf die festen Auflagerpunkte $A'B'$ gebracht werden. Das Fachwerk dieser Seitenfläche wirkt dabei wie ein Freitragter (siehe Art. 158, S. 151³⁸⁾. Die Belastungen, sowohl von der Seite des Grates OB' (des Windgrates), wie des Grates OA' (des Unterwindgrates), nehmen von der Spitze nach dem Auflager entsprechend dem Gesetze des Dreieckes (linear) zu (siehe Art. 259, S. 273). Der Winddruck gegen die Fläche I von der Spitze bis zu einer Höhe z unter derselben ist mit den Bezeichnungen in Fig. 367: $N_z = p \frac{xz}{2}$ und, da $x = \frac{a}{h} z$ ist,

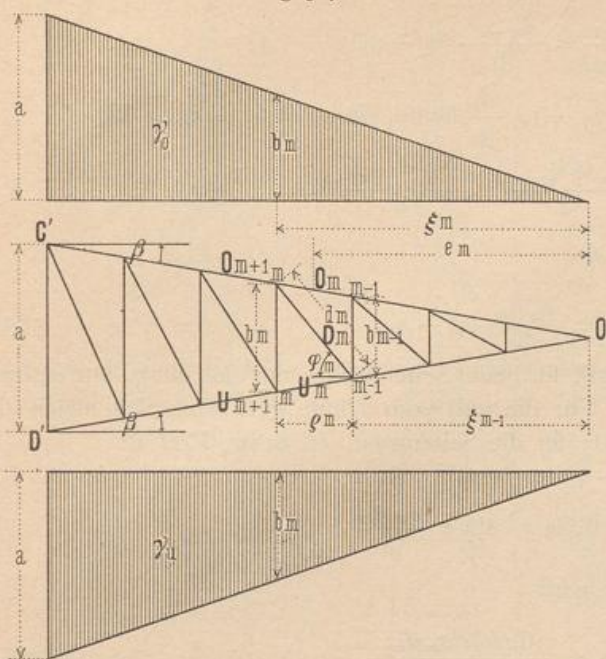
$$N_z = \frac{pa}{2h} z^2.$$

Sonach ist die positive Belastung des Fachwerkes in der Seitenfläche II , bzw. $VIII$ auf die Höhe z unter der Spitze mit Rücksicht auf Gleichung 380

$$T_{0z}' = 1,06 \frac{pa}{2h} z^2, \dots \dots \dots 381.$$

³⁸⁾ Siehe bezüglich nachstehender Ableitung: MÜLLER-Breslau, H. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralbl. d. Bauverw. 1892, S. 257. — Auch als Sonderabdruck erschienen: Berlin 1892.

Fig. 369.



die negative Belastung desselben Fachwerkes

$$T_{u_s}' = 0,354 \frac{p a}{2 h} z^2 \quad 382.$$

In Fig. 369 ist das Fachwerk der Seitenfläche VIII ($O C' D'$) des leichteren Verständnisses halber mit wagrechter Axe als Freitträger gezeichnet. Die Belastungen sind nach Größe und Vertheilung darüber, bzw. darunter angegeben; dabei ist die auf die Einheit der schraffirten Flächen entfallende Belastung (γ_0 , bzw. γ_u) so gewählt, dass die Abmessungen b und ξ der Belastungsdreiecke dieselben sind, wie diejenigen des Freitragers. Die gefammte Belastung von der Seite des Windgrates folgt aus

Gleichung 381 für $z = h$; sie ist $T_{0_h}' = 1,06 \frac{p a h}{2}$. Die Einheitsbelastung γ_0 folgt dann aus der Bedingungsgleichung:

$$\gamma_0 \frac{a h}{2 \sin \alpha} = 1,06 \frac{p a h}{2},$$

$$\gamma_0 = 1,06 p \sin \alpha; \quad \dots \quad 383.$$

eben so ergibt sich die Einheitsbelastung der unteren Fläche zu

$$\gamma_u = 0,354 p \sin \alpha \quad \dots \quad 384.$$

Das Gleichgewicht am m -ten Knotenpunkte der oberen Gurtung bedingt:

$$D_m \cos \varphi_m = O_{m+1} \cos \beta - O_m \cos \beta.$$

Bedeutet M_m , bzw. M_{m-1} die Momente der äußeren Kräfte für die Knotenpunkte m , bzw. $m-1$, so ist nach Fig. 369

$$O_{m+1} \cos \beta = \frac{M_m}{b_m} \quad \text{und} \quad O_m \cos \beta = \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}};$$

mithin

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{b_m} - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}}.$$

Bezeichnet d_m die Länge der Diagonale, ρ_m die Höhe des betreffenden Feldes in der Dachschräge gemessen, so ist $\cos \varphi_m = \frac{\rho_m}{d_m}$, also

$$D_m = \frac{d_m}{\rho_m} \left(\frac{M_m}{b_m} - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} \right).$$

Ferner ist

$$M_m = \frac{b_m \xi_m}{2} \cdot \frac{\xi_m}{3} (\gamma_0 - \gamma_u), \quad \text{also} \quad \frac{M_m}{b_m} = \frac{\xi_m^2}{6} (\gamma_0 - \gamma_u),$$

und eben so

$$\frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} = \frac{\xi_{m-1}^2}{6} (\gamma_0 - \gamma_u);$$

mithin $D_m = \frac{(\xi_m^2 - \xi_{m-1}^2)}{6} (\gamma_0 - \gamma_u) \frac{d_m}{\rho_m}$ und, da $\rho_m = \xi_m - \xi_{m-1}$ ist,

$$D_m = \frac{(\xi_m + \xi_{m-1})}{2} \cdot \frac{(\gamma_0 - \gamma_u)}{3} d_m.$$

Mit $e_m = \frac{\xi_m + \xi_{m-1}}{2}$ wird

$$D_m = \frac{e_m d_m}{3} (\gamma_0 - \gamma_u) \dots \dots \dots 385.$$

Vorstehende Entwicklung gilt für jede Seitenfläche; nur sind für γ_0 und γ_u die bezüglichen Werthe einzusetzen. Für die voll vom Winde getroffene Seitenfläche I ist $\gamma_0 - \gamma_u = \text{Null}$, also alle $D = 0$; für die Seitenwand II, bzw. VIII ist

$$(\gamma_0 - \gamma_u) = 0,706 p \cdot \sin \alpha;$$

also

$$D_m = 0,706 p \cdot \sin \alpha \cdot \frac{e_m d_m}{3}.$$

Setzt man $e_m = \frac{z_m}{\sin \alpha}$, so wird

$$D_m = \frac{0,706 p z_m d_m}{3} \dots \dots \dots 386.$$

Ringspannungen. Um die Ringspannungen (d. h. die Spannungen der Pfosten im Freitragger der Fig. 369) zu bestimmen, ermittelt man zweckmäÙig getrennt die Beiträge, welche durch die Belastungen γ_0 und diejenigen, welche durch die Lasten γ_u erzeugt werden. Für $\gamma_u = 0$ sei im m -ten Ringstabe die Spannung R_m' ; das Gleichgewicht am m -ten Knotenpunkte der unteren Gurtung führt zum Kraftpolygon in Fig. 370b. Es ergibt sich $-\frac{R_m}{D_{m+1}} = \frac{b_{m+1}}{d_{m+1}}$. Nach

Gleichung 385 ist für $\gamma_u = 0$: $D_{m+1} = \frac{e_{m+1} d_{m+1}}{3} \gamma_0$;

also

$$R_m' = -\frac{e_{m+1} b_{m+1} \gamma_0}{3}.$$

Für $\gamma_0 = 0$ ergibt die Betrachtung des m -ten Knotenpunktes der oberen Gurtung aus dem Kraftpolygon in Fig. 370b $\frac{R_m''}{-D_m} = \frac{b_{m-1}}{d_m}$. Nach Gleichung 385 ist

für $\gamma_0 = 0$: $D_m = -\frac{e_m d_m \gamma_u}{3}$; somit

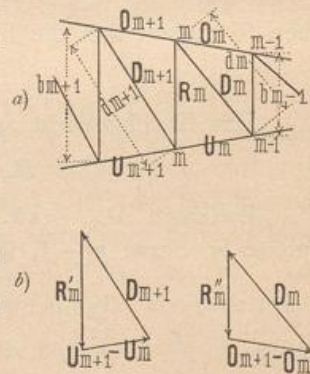
$$R_m'' = \frac{e_m b_{m-1} \gamma_u}{3}.$$

Somit wird die Ringspannung durch die gemeinsame Belastung γ_0 und γ_u

$$R_m = -\frac{1}{3} \left[b_{m+1} e_{m+1} \gamma_0 - e_m b_{m-1} \gamma_u \right] \dots \dots \dots 387.$$

Da der Wind von allen Seiten kommen kann, so ist zu untersuchen, in welcher Seitenfläche die Diagonal- und Ringspannungen am größten werden können; die erhaltenen Werthe sind der Construction der Diagonalen und Ringstäbe in allen Seitenflächen zu Grunde zu legen.

Fig. 370.



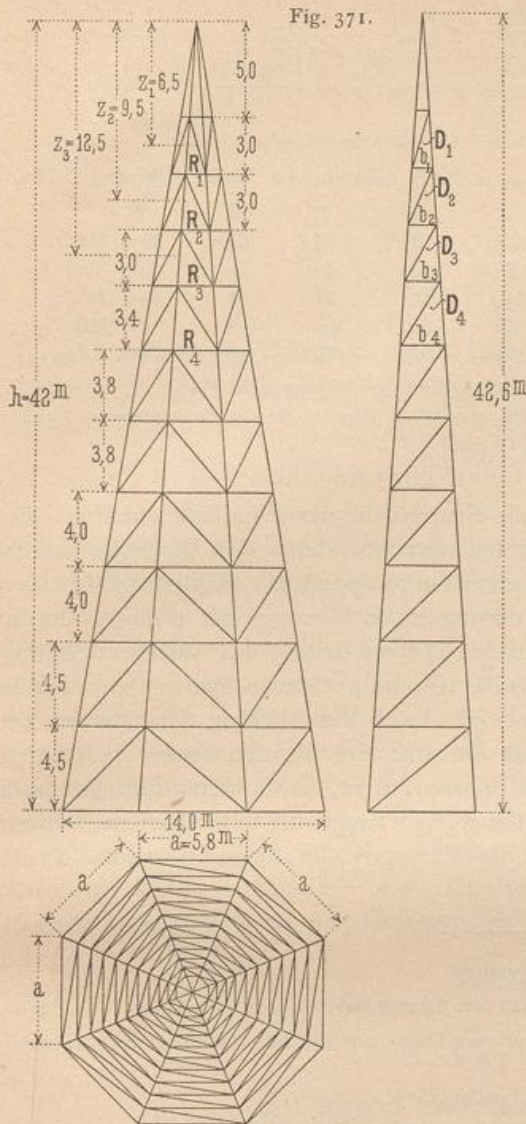


Fig. 371.

Zu den vorstehend ermittelten, durch den Wind hervorgerufenen Stabspannungen kommen noch diejenigen durch das Eigengewicht; diese sind nach Art. 253 u. 254 (S. 265) leicht zu finden.

Beispiel. Der in Fig. 371 im Grundriss und Aufriss dargestellte Thurm über einem regelmäßigen Achteck hat eine Höhe $h = 42\text{ m}$; die Seite der achteckigen Grundfläche ist $a = 5,8\text{ m}$. Die Spannungen der Sparren, der Ring- und Diagonalfäbe sind bei einem Winddruck $p = 120\text{ kg}$ auf das Quadr.-Meter normal getroffener Fläche zu ermitteln.

263.
Beispiel.

a) Sparrenspannungen. Die Felder werden von der Spitze nach der Grundfläche hin mit 1, 2, 3... 9, 10 bezeichnet, die zu den einzelnen Feldern gehörigen Werthe z bis zur Mitte der Höhe des betreffenden Feldes gerechnet. Man erhält nach Gleichung 375 die GröÙe des Windmoments, welches die Sparrenspannungen erzeugt, zu

$$M_z = W_z \frac{z}{3} + W(e_0 + z).$$

Nach Gleichung 373 ist aber:

$$W_z = \frac{p a z^2}{h};$$

der Winddruck auf das Thurmkreuz wird zu $W = 250\text{ kg}$ und die Höhe desselben über der Spitze zu $e_0 = 4,0\text{ m}$ angenommen. Alsdann ist

$$M_z = \frac{p a}{h} \frac{z^3}{3} + 1000 + 250 z$$

und mit $\frac{p a}{3 h} = \frac{120}{3} \cdot \frac{5,8}{42} = 5,52$

$$M_z = (5,52 z^3 + 250 z + 1000)\text{ kgm.}$$

Die Berechnung ergibt folgende Tabelle:

$z = 6,5$	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	39,75	Met.;
$M_z = 4140$	8100	14900	26300	45500	74800	116400	173200	251700	357620	Kilogr.-Met.;
$x = 0,90$	1,31	1,73	2,17	2,7	3,19	3,73	4,28	4,86	5,5	Met.;
$S = 828$	1113	1548	2178	3032	4212	5616	7284	9320	11700	Kilogr.

Diese Werthe können sämtlich sowohl Zug wie Druck bedeuten.

β) Diagonalen. Größte Beanspruchung der Diagonalen findet in den Seitenflächen II und VIII (Fig. 368) statt. Nach Gleichung 386 ist

$$D_m = \frac{0,706 p}{3} z_m d_m = \frac{0,706 \cdot 120}{3} z_m d_m,$$

fomit

$$D_m = \infty 28 z_m d_m.$$

Das Verzeichnen der Seitenfläche ergab folgende Werthe für d_m , woraus dann die ebenfalls in der Tabelle verzeichneten Werthe von D sich ergaben:

$z_m = 6,5$	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	39,75	Met.;
$d_m = 3,2$	3,4	3,5	4,1	4,8	5,0	5,5	5,95	6,2	7,1	Met.;
$D = 588$	912	1230	1815	2610	3240	4190	5200	6170	7960	Kilogr.

Auch diese Werthe können, falls nicht Gegendiagonalen angeordnet sind, Zug und Druck bedeuten.

γ) Ringspannungen. Nach Gleichung 387 ist $R_m = -\frac{1}{3} (b_{m+1} e_{m+1} \gamma_0 - e_m b_{m-1} \gamma_m)$.

In der Seitenfläche VIII ist $\gamma_0 = 1,06 p \sin \alpha$, $\gamma_m = 0,354 p \sin \alpha$, $e_{m+1} = \frac{z_{m+1}}{\sin \alpha}$ und $e_m = \frac{z_m}{\sin \alpha}$; also

$$R_m = -\frac{p}{3} (1,06 b_{m+1} z_{m+1} - 0,354 b_{m-1} z_m).$$

Man erhält für die verschiedenen Werthe von m die in nachstehender Tabelle stehenden Zahlen:

$m =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_{m+1} =$	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	39,75 Met.;
$b_{m+1} =$	1,55	1,95	2,4	3,0	3,5	4,05	4,6	5,2	5,8 Met.;
$z_m =$	6,5	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25 Met.;
$b_{m-1} =$	0,72	1,1	1,55	1,95	2,4	3,0	3,5	4,05	4,6 Met.;
$R_m =$	-558	-888	-1327	-2026	-2780	-3666	-4723	-6036	-7484 Kilogr.

Die Ringspannungen in Fläche I sind wesentlich kleiner, als diejenigen in Fläche II, bezw. VIII; mithin sind diese, d. h. die in vorstehender Tabelle ermittelten Werthe für die Berechnung zu Grunde zu legen.

3) Standfestigkeit der Thurmdächer.

264.
Verankerung.

Durch die Windbelastung werden die Sparren an der Windseite auf Zug, diejenigen an der Unterwindseite auf Druck beansprucht; durch das Eigengewicht erhalten alle Sparren Druck. Wenn der im untersten Sparrenstück mögliche grösste Zug in Folge des Winddruckes grösser ist, als der durch das Eigengewicht erzeugte Druck, so ist Gleichgewicht nur möglich, wenn auf den Sparren Seitens des Auflagers ein Zug ausgeübt wird, welcher wenigstens so gross ist, wie der grösste im Sparren herrschende Zug. Dieser Zug Seitens des Auflagers wird durch Verankerung der Sparren mit dem Thurmmauerwerk erzeugt, und das Gewicht des an den Anker gehängten Mauerwerkes, welches als Zug auf den Sparren wirkt, muss wenigstens so gross sein, wie der grösstmögliche Zug in demselben. Es empfiehlt sich, die Verankerung weiter hinabzuführen, etwa so weit, dass das Mauergewicht doppelt so gross ist, als der grösste Zug im Sparren.

Literatur.

Bücher über »Statik der Dachstühle«.

- RITTER, A. Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructionen. Hannover 1863. — 5. Aufl. 1894.
- UNWIN, W. *Wrought-iron bridges and roofs etc.* London 1870.
- CORDIER, E. *Equilibre stable des charpentes en fer, bois et fonte.* Paris 1872.
- FABRÉ, V. *Théorie des charpentes, donnant des règles pratiques pour la construction des fermes et autres appareils en bois et en fonte.* Paris 1873.
- CARGILL, TH. *The strains upon bridge girders and roof trusses etc.* London 1873.
- SCHREVE, S. *A treatise on the strength of bridges and roofs etc.* New-York 1873.
- TETMAJER, L. Die äusseren und inneren Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhl-Constructionen. Zürich 1875.
- NICOUR, CH. *Calcul d'un comble en fer du système Polonceau.* Paris 1875.
- SCHWEDLER, W. Die Construction der Kuppeldächer. 2. Aufl. Berlin 1878.
- TRÉLAT, E. *La rigidité dans les combles.* Paris 1878.
- Deutsche bautechnische Taschenbibliothek. Heft 10: Berechnung der Dachwerke. Von W. JEEP. Leipzig 1876.
- WEYRAUCH, J. J. Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1888.
- MÜLLER-Breslau, H. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Berlin 1892.
- FOEPL, A. Das Fachwerk im Raume. Leipzig 1892.