



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik der Hochbau-Constructions**

**Landsberg, Theodor**

**Stuttgart, 1899**

a) Aeussere Kräfte der Balkenträger

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77733)

zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten ( $D_0$  und  $D_1$  in Fig. 159) verfügbar; der Fall ist also statisch bestimmt. Sind dagegen drei Stützpunkte vorhanden, so hat man drei Unbekannte ( $D_0$ ,  $D_1$  und  $D_2$ ), aber nur zwei Gleichungen, also einen statisch unbestimmten Fall.

Man nennt die Träger, welche mehr als zwei Stützpunkte haben, kontinuierliche oder durchgehende Träger; dieselben sind statisch unbestimmte Träger.

#### a) Aeusere Kräfte der Balkenträger.

151.  
Momente  
und  
Querkräfte.

Die Querschnitte der Balken, bzw. der Stäbe, aus denen sich die Balken zusammensetzen, sind so zu bestimmen, daß die zulässigen Beanspruchungen auch unter ungünstigsten Bedingungen in keinem Theile der Querschnittsflächen je überschritten werden. Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde, sind aber für die in den einzelnen Querschnittsstellen entstehenden Beanspruchungen oder Spannungen die äusseren Kräfte maßgebend, insbesondere zwei von den äusseren Kräften abhängige Größen: die Biegemomente, auch kurz Momente genannt, und die Quer- oder Transversalkräfte. Für jeden Querschnitt ergeben sich bei einer gegebenen Belastung ein ganz bestimmtes Moment und eine ganz bestimmte Querkraft. Wir haben bei den lothrecht belasteten Balkenträgern nur mit lothrechten Kräften zu thun und werden demnach zunächst und, falls das Gegentheil nicht besonders bemerkt wird, stets solche voraussetzen.

Es möge hier daran erinnert werden, daß man bei nur lothrechten Kräften als Querkraft eines Querschnittes die Mittelkraft aller an der einen Seite dieses Querschnittes auf den Balken wirkenden Kräfte bezeichnet (siehe Art. 94, S. 70). Die Querkraft hat, absolut genommen, dieselbe GröÙe, möge man den Trägertheil rechts oder denjenigen links vom betreffenden Querschnitt gelegenen Trägertheil der Betrachtung zu Grunde legen; denn die Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden Kräfte muß derjenigen an der anderen Seite, des Gleichgewichtes wegen, genau gleich sein. Nennt man diese Mittelkräfte bzw.  $Q_{links}$  und  $Q_{rechts}$ , so muß, da diese beiden Kräfte alle an dem Körper wirkenden äusseren Kräfte in sich schliessen, stattfinden:

$$Q_{links} + Q_{rechts} = 0, \text{ also } Q_{rechts} = - Q_{links}.$$

Wirkt also die Querkraft auf den Theil links vom Querschnitt auf den Balken nach oben, so wirkt sie auf den Theil rechts vom Querschnitt nach unten und umgekehrt. Oder was dasselbe befragt: Führt man die Querkraft auf den Theil links vom Querschnitt als positiv ein, wenn sie nach oben wirkt, so muß man die Querkraft, welche auf den Theil rechts nach unten wirkt, ebenfalls als positiv einführen; beide Richtungen ergänzen einander. Bei den nachfolgenden Untersuchungen werden die Querkräfte als positiv eingeführt, wenn sie auf den Trägertheil links vom betrachteten Querschnitt nach oben, bzw. auf den Trägertheil rechts vom betrachteten Querschnitt nach unten wirken; als negativ, wenn sie auf den Theil links nach unten, bzw. auf den Theil rechts nach oben wirken. Eben so wird daran erinnert, daß das Biegemoment für einen Querschnitt das resultirende Moment aller an der einen Seite des Querschnittes wirkenden Kräfte, bezogen auf die im Schwerpunkt des Querschnittes senkrecht zur Kräfteebene stehende Axe als Drehaxe bedeutet. Bei den Trägern mit gegliederter Wand liegt die Drehaxe in der oberen oder unteren Gurtung, je nach der Form des Fachwerkes: bei nur lothrechten äusseren Kräften ändert sich dadurch am Werth des Moments nichts. In

Art. 94 (S. 70) ist bereits nachgewiesen, daß es gleichgültig ist, an welcher Seite des Querschnittes man die Kräfte betrachtet; nur muß man mit dem Vorzeichen vorsichtig sein. Weiterhin sollen die Momente als positiv eingeführt werden, wenn sie auf den Theil links vom Querschnitt nach rechts drehend (also in der Richtung des Uhrzeigers), bzw. auf den Theil rechts vom Querschnitt nach links drehend wirken, d. h. den Balken so zu drehen streben, daß er seine convexe Seite nach unten kehrt; als negativ, wenn sie den Balken so zu drehen streben, daß er seine convexe Seite nach oben kehrt.

Die Belastungen sind entweder nach einem bestimmten Gesetze fortlaufend über den Träger vertheilt — im Hochbau meistens gleichmäßig über die wagrechte Projection der Trägeraxe, oder sie greifen in einzelnen Punkten als Einzellaften an. Zu den gleichmäßig über die wagrechte Projection vertheilten Belastungen rechnet man die Eigengewichte der Träger, welche Annahme genügend genau ist.

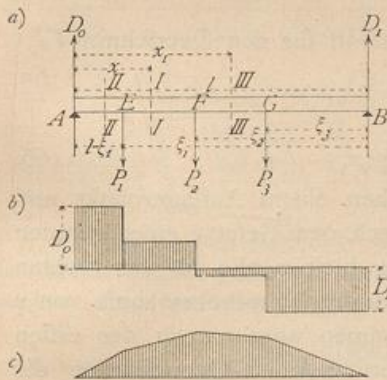
Die Größe des Eigengewichtes von Decken-Constructionen kann nach den Angaben in Art. 23 u. 24 (S. 18) angenommen werden; bezüglich der Annahmen für die Nutzlast sei auf Art. 26 (S. 20) verwiesen. Da die Belastungen bekannt sind, handelt es sich zunächst um die Ermittlung der durch dieselben erzeugten Stützendrücke, Momente und Querkräfte, ferner um die diesen entsprechenden Querschnittsabmessungen. Für jeden Querschnitt ist die ungünstigste mögliche Belastung einzuführen.

In den folgenden Artikeln soll für die wichtigsten Balkenträger und für verschiedene Belastungsarten die Ermittlung der Auflagerdrücke, der Querkräfte und Momente auf dem Wege der Rechnung, bzw. auf demjenigen der Construction gezeigt werden; die Ergebnisse gelten sowohl für vollwandige, wie für Träger mit gegliederter Wand (Fachwerkträger).

1) Balkenträger auf zwei Stützen.

Die Stützweite des Trägers, von Auflagermitte zu Auflagermitte gerechnet, sei  $l$ .  
Erster Belastungsfall: Der Träger wird durch beliebige Einzellaften belastet.

Fig. 162.



Die Laften sind  $P_1, P_2, P_3$ , wie aus neben stehender Fig. 162 ersichtlich; für alle Querschnitte des Balkens sollen die Querkräfte und Momente ermittelt werden.

a) Berechnung. Zunächst sind die nicht gegebenen äußeren Kräfte, die Auflagerdrücke  $D_0$  und  $D_1$ , zu bestimmen. Da Gleichgewicht stattfindet, so ist die algebraische Summe der statischen Momente aller äußeren Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null. Um  $D_0$  zu ermitteln, wählt man zweckmäßig einen Punkt auf der Richtungslinie von  $D_1$  als Drehpunkt, damit die zweite Unbekannte  $D_1$  das statische Moment

Null habe, also nur eine Unbekannte in der Gleichung vorkomme. Alsdann ist, wenn  $B$  als Drehpunkt für die Gleichung der statischen Momente gewählt wird,

$$0 = D_0 l - P_1 \xi_1 - P_2 \xi_2 - P_3 \xi_3,$$

$$D_0 = \frac{P_1 \xi_1}{l} + \frac{P_2 \xi_2}{l} + \frac{P_3 \xi_3}{l} = \sum_0^l \left( \frac{P \xi}{l} \right) \dots \dots \dots 162.$$

152.  
Belastungen.

153.  
Belastung  
durch  
Einzellaften.

Wählt man in gleicher Weise ein zweites Mal  $A$  als Drehpunkt, so ergibt sich

$$D_1 = \frac{P_1(l - \xi_1)}{l} + \frac{P_2(l - \xi_2)}{l} + \frac{P_3(l - \xi_3)}{l} = \sum_0^l \left[ \frac{P(l - \xi)}{l} \right] \quad 163.$$

Der Beitrag, welchen jede Einzellaft zum Gesamtauflagerdruck leistet, ist, wie man aus den Gleichungen 162 u. 163 erfieht, ganz unabhängig von der Gröfse und Art der übrigen Belastungen; die Auflagerdrücke sind die Summen der durch die einzelnen Lasten erzeugten Einzeldrücke.

Nunmehr lassen sich die Querkräfte ermitteln.

Für einen beliebigen Querschnitt  $II$ , im Abstände  $x$  vom linken Auflager  $A$ , ist die Querkraft, als Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden äufseren Kräfte,

$$Q_x = D_0 - P_1 \quad \dots \quad 164.$$

In diesem Ausdrucke kommt die Abscisse  $x$  des Querschnittes gar nicht vor; die Querkraft ist also, so lange der angegebene Ausdruck überhaupt gilt, ganz unabhängig von  $x$ , d. h. constant. Der Ausdruck gilt aber nur für die Querschnitte zwischen  $E$  und  $F$ ; denn für einen Querschnitt links von  $E$ , etwa für  $IIII$ , ist

$$Q_{II} = D_0;$$

für einen solchen rechts von  $F$ , etwa für  $IIIIII$ , ist

$$Q_{III} = D_0 - P_1 - P_2 = \sum_0^l \left( \frac{P\xi}{l} \right) - (P_1 + P_2) = \sum_0^l \left( \frac{P\xi}{l} \right) - \sum_0^{x_1} (P).$$

Daraus folgt: Falls eine Belastung nur durch Einzellaften stattfindet, ist die Querkraft für alle Querschnitte zwischen je zwei Lastpunkten, so wie zwischen einem Auflagerpunkt und einem Lastpunkt constant; eine Aenderung der Querkraft findet nur in den Lastpunkten statt.

Das Gesetz der Aenderung der Querkräfte wird sehr anschaulich, wenn man in jedem Querschnitte die daselbst stattfindende Querkraft als Ordinate nach beliebigem (aber für alle Querschnitte gleichem) Mafsstabe aufträgt und die Endpunkte der Ordinaten verbindet. Hierdurch ergibt sich die in Fig. 162 *b* gezeichnete Linie, in welcher die positiven Werthe von der Abscisse aus nach oben, die negativen Werthe nach unten getragen sind.

Was die Bestimmung der Momente anbelangt, so ist für den Querschnitt  $II$

$$M_1 = D_0 x - P_1(x - l + \xi_1) \quad \dots \quad 165.$$

Für den Querschnitt  $IIIIII$  ist

$$M_{III} = D_0 x_1 - P_1(x_1 - l + \xi_1) - P_2(x_1 - l + \xi_2) \quad \dots \quad 166.$$

Innerhalb je zweier Lastpunkte, so wie zwischen einem Auflagerpunkt und einem Lastpunkt ändert sich demnach das Moment nach dem Gesetze einer geraden Linie; denn für verschiedene Werthe von  $x$ , bzw.  $x_1$  bleiben alle auf den rechten Seiten der Gleichungen 165 u. 166 vorkommenden Ausdrücke mit Ausnahme von  $x$  und  $x_1$  constant; diese einzigen Veränderlichen kommen aber nur in der ersten Potenz vor. Trägt man also auch hier in den verschiedenen Querschnitten die Werthe von  $M$  als Ordinaten auf, so erhält man als Verbindungslinien der Endpunkte gerade Linien; in jedem Lastpunkt ändert sich der Ausdruck für  $M$ , also auch die Gerade. In Fig. 162 *c* ist die Aenderung der Momente graphisch dargestellt.

Da eine Gerade ihre grösste Ordinate nur am Anfangspunkte oder Endpunkte haben kann, diese aber hier mit den Lastpunkten zusammenfallen, so folgt, dafs die

größten Momentenwerthe an den Lastpunkten stattfinden. Dieses Ergebniss ist wichtig. Wenn nur eine Einzellaft  $P$  vorhanden ist, so ist demnach das grösste Moment stets am Lastpunkte. Liegt alsdann  $P$  in den Abständen  $\xi$ , bzw.  $l - \xi$  von den beiden Auflagern, so ist das Moment am Lastpunkte, also das grösste Moment, welches für die Querschnittsbildung massgebend ist,

$$M_{max} = \frac{P(l - \xi)\xi}{l}$$

Liegt  $P$  in der Mitte des Balkens, so ist  $\xi = (l - \xi) = \frac{l}{2}$ , also

$$M_{max} = \frac{Pl}{4}$$

Sind zwei Einzellaften auf dem Balken, so braucht man nur die beiden Momente an den Lastpunkten zu ermitteln; das grösere von beiden ist zugleich das grösste. Wenn beide Lasten gleich gross, und zwar je gleich  $P$  sind und im gleichen Abstände  $\frac{a}{2}$  von der Balkenmitte liegen, so ist das Moment an jedem Lastpunkte

$$M = \frac{P(l - a)}{2}$$

Wenn endlich mehrere Lasten vorhanden sind, braucht man nur die Momente an den Lastpunkten aufzuzuchen. Falls der Balken constanten Querschnitt erhält (wie dies z. B. beim Walzbalken der Fall ist), so ist dieser nach dem grössten überhaupt stattfindenden Momente zu bestimmen.

Beispiel. Ein schmiedeeiserner Unterzug (Fig. 163) von 8 m Stützweite trägt 7 Balken, deren Abstand von Mitte zu Mitte je 1 m beträgt. Jeder Balken belastet den Unterzug mit einem Gewicht von 3000 kg. Die Auflagerdrücke, Querkräfte und Momente sind zu ermitteln. Nach Gleichung 162 ist

$$D_0 = \frac{3000}{8} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 10500 \text{ kg};$$

eben so nach Gleichung 163

$$D_1 = \frac{3000}{8} 28 = 10500 \text{ kg}.$$

In Fällen, wie der vorliegende, wo die Belastungen symmetrisch zur Mitte des Balkens liegen und die Abstände derselben gleich sind, fasst man bequemer alle Lasten zu einer Mittelkraft, hier ihrer Summe, zusammen, die in der Balkenmitte angreift. Alsdann ist

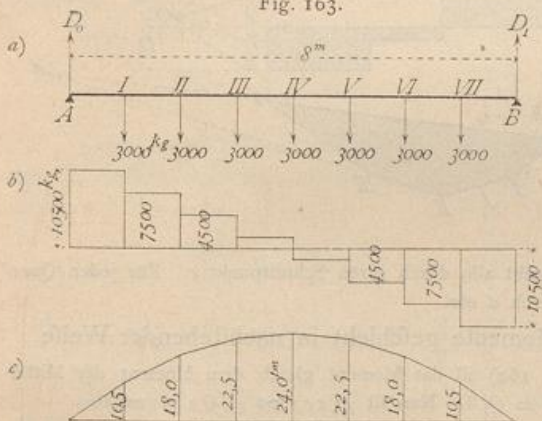
$$R = 7 \cdot 3000 = 21000 \text{ kg} \quad \text{und} \quad D_0 = \frac{21000}{l} \cdot \frac{l}{2} = 10500 \text{ kg} = D_1.$$

Die Querkräfte für die verschiedenen Querschnitte sind:

- |  |  |
|--|--|
| von A bis I = 10500 kg,                  | von IV bis V = 10500 - 4 · 3000 = - 1500 kg, |
| » I » II = 10500 - 3000 = 7500 kg,       | » V » VI = 10500 - 5 · 3000 = - 4500 kg,     |
| » II » III = 10500 - 2 · 3000 = 4500 kg, | » VI » VII = 10500 - 6 · 3000 = - 7500 kg,   |
| » III » IV = 10500 - 3 · 3000 = 1500 kg, | » VII » B = 10500 - 7 · 3000 = - 10500 kg.   |

Im Lastpunkte IV (in der Trägermitte) geht die Querkraft von den positiven zu den negativen Werthen über.

Fig. 163.



Die Momente in den Lastpunkten sind:

$$\begin{aligned} M_I &= 10500 \cdot 1 = 10500 \text{ kgm} = 1050000 \text{ kgcm}, \\ M_{II} &= 10500 \cdot 2 - 3000 \cdot 1 = 18000 \text{ kgm} = 1800000 \text{ kgcm}, \\ M_{III} &= 10500 \cdot 3 - 3000 \cdot 1 - 3000 \cdot 2 = 22500 \text{ kgm} = 2250000 \text{ kgcm}, \\ M_{IV} &= 10500 \cdot 4 - 3000 (1 + 2 + 3) = 24000 \text{ kgm} = 2400000 \text{ kgcm}, \\ M_V &= 10500 \cdot 5 - 3000 (1 + 2 + 3 + 4) = 22500 \text{ kgm} = 2250000 \text{ kgcm} = M_{III}, \\ M_{VI} &= M_{II}, \quad M_{VII} = M_I, \quad M_A = M_B = 0. \end{aligned}$$

Hiernach sind die Momente und Querkräfte in Fig. 163c u. 163b aufgetragen.

β) Graphische Ermittlung. Um die Auflagerdrücke zu ermitteln, construirt man für die gegebenen Kräfte und den beliebigen Pol  $O$  (Fig. 164) das Kraft- und Seilpolygon, ziehe die Schluslinie  $ab$  und parallel zu dieser die Linie  $O\varepsilon$  durch den Pol  $O$ ; dieselbe theilt die Kraftlinie in zwei Theile, von denen  $\overline{\delta\varepsilon} = D_1$  und  $\overline{\varepsilon\alpha} = D_0$  ist (vergl. Art. 19, S. 16). Nun lassen sich die Querkräfte graphisch leicht ermitteln.

Für alle Querschnitte von  $A$  bis  $E$  ist die Querkraft gleich  $D_0$ , d. h. gleich  $\varepsilon\alpha$  (Fig. 164). Zieht man also durch  $\varepsilon$  und  $\alpha$  je eine Wagrechte, so giebt deren Abstand die Größe der Querkraft zwischen  $A$  und  $E$  an. Zwischen  $E$  und  $F$  ist die Querkraft gleich  $D_0 - P_1 = \varepsilon\alpha - \alpha\beta = \varepsilon\beta$ ; man ziehe also durch  $\beta$  eine wagrechte Linie; alsdann giebt deren Abstand von der durch  $\varepsilon$  gezogenen Geraden an jeder Stelle zwischen  $E$  und  $F$  die Größe der Querkraft. Eben so ist zwischen  $F$  und  $G$  die Strecke  $\varepsilon\gamma$ , zwischen  $G$  und  $B$  die Strecke  $\varepsilon\delta$  die Querkraft.

Die Querkraft als Mittelkraft aller an der einen Seite des Querschnittes wirkenden Kräfte geht nach Art. 18 (S. 14) durch den Schnittpunkt derjenigen Seilpolygonseiten, welche bezw. der ersten und letzten dieser Kräfte vorangehen und folgen. Für einen Querschnitt zwischen  $E$  und  $F$  sind  $D_0$  und  $P_1$  die Kräfte,  $ab$  und  $III$  die betreffenden Seilpolygonseiten; die Querkraft geht also durch ihren Schnittpunkt  $c$ . Für jeden Querschnitt zwischen  $II$  und  $III$  geht die Querkraft durch  $d$  etc.

Die graphische Bestimmung der Momente geschieht in nachstehender Weise.

Für einen beliebigen Querschnitt  $II$  (Fig. 164) ist das Moment gleich dem Moment der Mittelkraft, d. h. hier der Querkraft. Demnach ist  $M_1 = Q_1 h$ . Nun ist  $\triangle cef \sim \triangle O\varepsilon\beta$ ; mithin

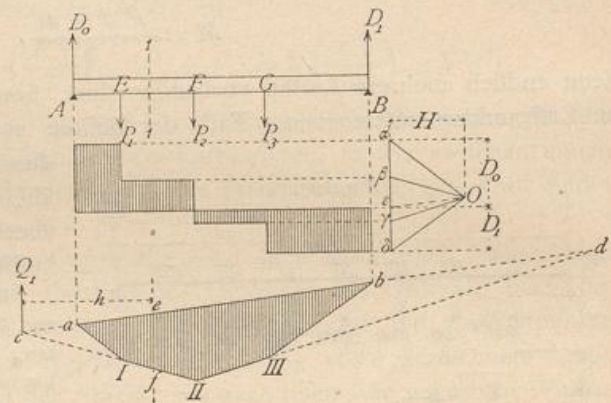
$$\frac{ef}{h} = \frac{\varepsilon\beta}{H}, \quad \text{und, da } \varepsilon\beta = Q_1 \text{ ist, } ef = \frac{Q_1 h}{H} = \frac{M_1}{H}, \quad \text{also } M_1 = H \cdot ef.$$

In vorstehendem Ausdruck für  $M$  ist  $H$ , der wagrechte Abstand des Poles von der Kraftlinie oder der Polabstand, für alle Querschnitte constant; die Größe des Momentes ist also mit  $ef$ , d. h. der lothrechten Höhe des Seilpolygons veränderlich. Daraus folgt:

Das Moment in jedem Querschnitte ist gleich dem Producte aus dem lothrechten Abstände der Seilpolygonseiten in diesem Querschnitte und dem Polabstand. Die vom Seilpolygon gebildete Fläche heisst die Momentenfläche.

Die Momente sind Producte aus Kräften und Längen;  $H$  ist eine Kraft, wie alle Strahlen und Linien im Kraftpolygon, und kann nach Obigem beliebig angenommen werden, etwa mit  $10^t$ ,  $20^t$  etc. Da das Moment in irgend einem Querschnitt einen ganz bestimmten Werth hat, der natürlich von einem beliebig gewählten  $H$  unabhängig ist, so wird die Höhe des Seilpolygons desto größer, je kleiner  $H$  ist, und umgekehrt.

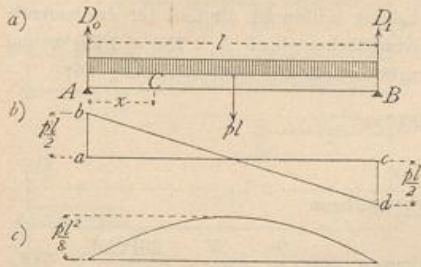
Fig. 164.



Zweiter Belastungsfall: Der Träger ist über seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

154.  
Gleichförmig  
vertheilte  
Belastung.

Fig. 165.



Die Belastung für die Längeneinheit des Trägers (Fig. 165) sei  $p$ ; alsdann ist die Mittelkraft gleich der Gesamtlast, also gleich  $p l$  und greift in der Trägermitte an. Die Gleichung der statischen Momente für  $B$  als Drehpunkt heisst demnach:

$$D_0 l - p l \frac{l}{2} = 0,$$

und es wird

$$D_0 = \frac{p l}{2}; \text{ eben so } D_1 = \frac{p l}{2}. \quad 167.$$

Die Querkraft für einen beliebigen Querschnitt  $C$  im Abstände  $x$  von  $A$  ist

$$Q_x = D_0 - p x = \frac{p l}{2} - p x = \frac{p}{2} (l - 2 x) \dots \dots \dots 168.$$

Die graphische Darstellung der Veränderung der Querkraft ergibt die Linie der Gleichung 168, d. h. eine Gerade. Für  $x = 0$  ist  $Q_0 = \frac{p l}{2}$ ; für  $x = l$  ist  $Q_l = -\frac{p l}{2}$ .  $Q_x$  wird Null für  $l - 2 x = 0$ , d. h. für  $x = \frac{l}{2}$ . Die Ordinaten der Linie  $b d$  (Fig. 165 *b*) sind also die Querkräfte an den verschiedenen Stellen des Balkens.

Das Moment für den Querschnitt  $C$  ist

$$M_x = D_0 x - p x \frac{x}{2} = \frac{p l}{2} x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l x - x^2) \dots \dots \dots 169.$$

Trägt man die Momente in den verschiedenen Querschnitten als Ordinaten auf, so erhält man die Linie der Gleichung 169, d. h. eine Parabel. Für  $x = 0$  ist  $M_0 = 0$ ; für  $x = l$  ist  $M_l = 0$ .  $M_x$  hat seinen Größtwerth für

$$\frac{d M_x}{d x} = \frac{p}{2} (l - 2 x) = 0, \text{ d. h. für } x = \frac{l}{2}; \text{ demnach}$$

$$M_{max} = \frac{p}{2} \left[ l \frac{l}{2} - \left( \frac{l}{2} \right)^2 \right] = \frac{p l^2}{8} \dots \dots \dots 170.$$

Hiernach kann die Parabel leicht construirt werden (Fig. 165 *c*). Man trage  $\frac{p l^2}{8}$  nach beliebig angenommenem Momenten-Maßstabe auf und verzeichne in bekannter Weise die Parabel; alsdann sind alle Ordinaten auf diesem Maßstabe zu messen.

Nennt man die gesammte auf den Träger entfallende Last  $p l = P$ , so kann man auch setzen

$$M_{max} = \frac{P l}{8} \dots \dots \dots 171.$$

Dieser Ausdruck ist oft bequemer, als Gleichung 170. Wenn eine Last  $P$  als Einzelkraft in der Mitte wirkt, so erzeugt sie nach Art. 153 (S. 145) ein Maximalmoment  $M_{max} = \frac{P l}{4}$ , d. h. ein doppelt so großes Moment, als die gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Last  $P$ .

Beispiele. 1) Ein Flurgang von 4 m Lichtweite ist mit einer Decke aus Kappengewölben zwischen eisernen I-Trägern zu überdecken; die Spannweite der Kappen sei 2,2 m; die Träger sollen berechnet werden.

Die Stützweite der Träger, d. h. die Entfernung von Auflagermitte zu Auflagermitte, kann zu 4,2 m, d. i. zu 430 cm angenommen werden; alsdann ist  $l = 430$  cm. Auf das laufende Meter des Trägers kommt eine zu tragende Grundfläche von 2,2 m Breite und 1 m Länge; mithin ist die Last für das laufende Meter Träger, bei einer Größtbelastung von 750 kg für 1 qm Grundfläche, gleich  $2,2 \cdot 750 = 1650$  kg und für das laufende Centimeter Träger  $p = 16,5$  kg. Die Auflagerdrücke sind also nach Gleichung 167

$$D_0 = D_1 = \frac{16,5 \cdot 430}{2} = 3547 \text{ kg,}$$

und das Größtmoment nach Gleichung 170

$$M_{max} = M_{mitte} = \frac{16,5 \cdot 430^2}{8} = 381356 \text{ kgcm.}$$

Nun ist der Querschnitt nach Art. 97 (S. 76) so zu bestimmen, daß  $\frac{\gamma}{a} = \frac{M}{K} = \frac{381356}{700} = 544,8$  ist. Falls ein I-Querschnitt gewählt wird, ist Nr. 28 der »Deutschen Normal-Profile« zu wählen, da bei demselben  $\frac{\gamma}{a} = 547$  ist<sup>32)</sup>.

2) Es sollen die Abmessungen bestimmt werden, welche einem Deckenbalken aus Kiefernholz bei einer Lichtweite von 6 m zu geben sind, wenn die Balkenentfernung von Mitte zu Mitte 0,9 m und die Gesamtbelastung der betreffenden Decke (Eigengewicht und Nutzlast) 500 kg für 1 qm beträgt.

Das laufende Meter Balken hat eine Grundfläche von 0,9 m Breite zu tragen, d. h. eine Last von  $0,9 \cdot 500 = 450$  kg; mithin beträgt die Belastung für das laufende Centimeter des Balkens  $p = 4,5$  kg. Die von Auflagermitte zu Auflagermitte zu rechnende Stützweite  $l$  nehmen wir zu  $6,3$  m = 630 cm an. Das größte Moment, welches hier, da der Balkenquerschnitt constant ist, der Berechnung des ganzen Balkens zu Grunde gelegt werden muß, findet in der Balkenmitte statt und ist nach Gleichung 170

$$M_{max} = \frac{4,5 \cdot 630^2}{8} = 223256 \text{ kgcm;}$$

mithin nach Art. 100 (S. 79)

$$\frac{\gamma}{a} = \frac{M_{max}}{K} = \frac{223256}{60} = 3721.$$

Da nun nach Gleichung 19 (S. 35):  $\gamma = \frac{b h^3}{12}$ , ferner  $a = \frac{h}{2}$  ist, wird  $\frac{b h^2}{6} = 3721$ , und wenn  $b = 25$  cm angenommen wird,

$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 3721}{25}} = 29,9 \text{ cm} \approx 30 \text{ cm.}$$

Sonach genügt ein Querschnitt von  $25 \times 30$  cm.

Dritter Belastungsfall: Der Träger ist auf einen Theil seiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Eine Last  $P$  im Abstände  $x$  vom linken Auflager  $A$  (Fig. 166) erzeugt die Auflagerdrücke

$$D_0 = \frac{P(l-x)}{l} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P x}{l}.$$

Die Querkraft ist für jeden Querschnitt  $E$  links vom Lastpunkte  $C$

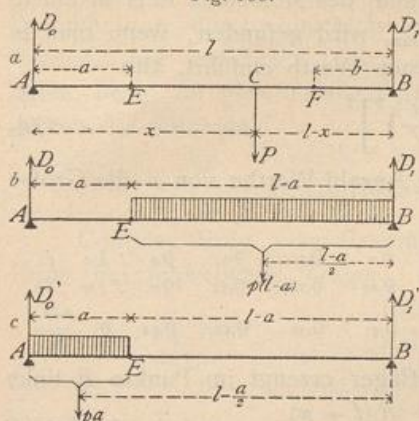
$$Q = D_0 = \frac{P(l-x)}{l}, \text{ d. h. positiv;}$$

für jeden Querschnitt  $F$  rechts vom Lastpunkt  $C$ :

<sup>32)</sup> Man muß beim Einsetzen der Zahlenwerthe für  $p$  und  $l$  vorsichtig sein. Es ist eigentlich selbstverständlich, daß, wenn man  $l$  in Metern einführt,  $p$  die Belastung für das laufende Meter Träger bedeutet, und wenn  $l$  in Centimetern eingeführt wird,  $p$  die Belastung für das laufende Centimeter Träger bedeutet. Giebt man ferner  $K$ , die zulässige Beanspruchung, in Kilogramm für 1 qm und das Moment  $M$  in Kilogramm-Centimetern an, so sind in der Gleichung  $\frac{\gamma}{a} = \frac{M}{K}$  die Werthe für  $\gamma$  und  $a$  für Centimeter bezogen einzusetzen. Dennoch dürfte es nicht überflüssig sein, hier besonders darauf aufmerksam zu machen, da von Anfängern und Ungeübten oft in dieser Hinsicht Fehler gemacht werden. Es empfiehlt sich, stets Alles auf Centimeter und Kilogramm bezogen einzuführen.



Fig. 166.



$$Q_1 = D_0 - P = \frac{P(l-x)}{l} - P = -\frac{Px}{l},$$

d. h. negativ. Daraus folgt der Satz: In einem Querschnitt erzeugt jede rechts liegende Last eine positive, jede links liegende Last eine negative Querkraft. Demnach wird in irgend einem Querschnitte, etwa E, die grösste Querkraft ( $Q_{max}$ ) stattfinden, wenn die ganze Trägerabtheilung rechts von E belastet, der übrige Trägertheil (AE) unbelastet ist (Fig. 166 b). Die kleinste Querkraft ( $Q_{min}$ ) wird in E eintreten, wenn die Abtheilung AE links von E belastet, die Abtheilung EB rechts von E unbelastet ist (Fig. 166 c).

Man erhält die Werthe von  $Q_{max}$ , bezw.  $Q_{min}$  für den Querschnitt E, welcher um a vom linken Auflager entfernt liegt und für die Belastung p auf das laufende Meter, wie folgt. Für die Belastung nach Fig. 166 b ist

$$D_0 = Q_{max} = \frac{p(l-a)^2}{2l}; \dots \dots \dots 172.$$

für die Belastung nach Fig. 166 c ist

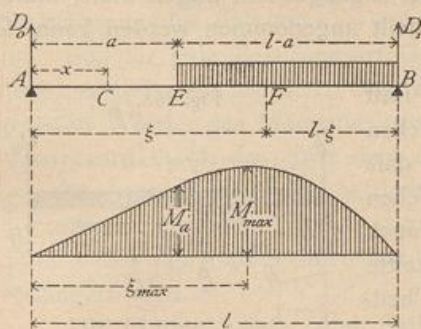
$$D_0' = \frac{pa}{l} \left( l - \frac{a}{2} \right) = pa - \frac{pa^2}{2l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = D_0' - pa;$$

sonach

$$Q_{min} = -\frac{pa^2}{2l} \dots \dots \dots 173.$$

Die Belastung nach Fig. 166 kommt im Hochbau sehr häufig vor, z. B. bei Trägern unter Mauern, in welchen sich Fenster- oder Thüröffnungen befinden. Für die Querschnittsbemessung ist das grösste Moment maßgebend, welches demnach aufgefucht werden soll.

Fig. 167.



Für irgend einen Punkt C der Strecke AE (Fig. 167) ist das Moment

$$M_x = D_0 x = \frac{p(l-a)^2}{2l} x;$$

die graphische Darstellung ergibt eine Gerade. Für einen Punkt F der Strecke CB ist das Moment bequem durch Betrachtung des rechts von F gelegenen Trägertheiles zu finden. Es ist

$$M_\xi = D_1 (l - \xi) - \frac{p(l-\xi)^2}{2}, \quad \text{woraus} \quad M_\xi = \frac{p}{2l} (l - \xi) (l\xi - a^2).$$

Auf dieser Strecke ergibt also die graphische Darstellung des Momentes eine Parabel. Dieselbe hat ihr Maximum für

$$\xi_{max} = \frac{l}{2} + \frac{a^2}{2l}.$$

Aus der Formel ergibt sich, daß das Maximum des Momentes stets in einem Punkte der belasteten Strecke  $EB$  stattfindet.  $M_{max}$  wird gefunden, wenn man in den Ausdruck für  $M_\xi$  statt  $\xi$  den für  $\xi_{max}$  gefundenen Werth einführt, also

$$M_{max} = \frac{p l^2}{8} \left[ 1 - \left( \frac{a}{l} \right)^2 \right]^2 \dots \dots \dots 174.$$

Nachstehende kleine Tabelle ergibt für eine Anzahl Werthe von  $a$  die Größe von  $M_{max}$  und von  $\xi_{max}$ :

Für	$a = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	$l$
	$\xi_{max} = 0,5$	0,505	0,52	0,545	0,55	0,625	0,68	0,745	0,82	0,9	1,0	$l$
	$M_{max} = 1$	0,98	0,92	0,83	0,71	0,56	0,41	0,26	0,13	0,04	0	$\frac{p l^2}{8}$

156.  
Größte Momente durch gleichförmig vertheilte Lasten.

Eine Last  $P$  im Abstände  $x$  vom linken Auflager erzeugt im Punkte  $E$  links vom Lastpunkte (Fig. 166 a) ein Moment  $M_a = \frac{P(l-x)}{l} a$  und im Punkte  $F$  rechts vom Lastpunkte das Moment  $M_b = \frac{P x}{l} b$ . Beide Momentenwerthe sind positiv; also erzeugt eine jede Einzellast in allen Trägerquer schnitten positive Momente. Die größten Momente in den einzelnen Trägerquer schnitten werden demnach stattfinden, wenn alle Trägerpunkte belastet sind, d. h. bei voller Belastung des Trägers. Ist also volle Belastung eines Trägers mit gleichmäÙig vertheilter Last  $p$  möglich, so ruft diese die größten Momente hervor und ist deshalb der Berechnung zu Grunde zu legen. Bei dieser Belastung ist nach Gleichung 169 für einen Querschnitt mit der Abscisse  $x$

$$M_x = \frac{p}{2} (l x - x^2) \dots \dots \dots 175.$$

157.  
Gleichförmig vertheilte Last und Einzellasten, bezw. theilweise Belastung.

Vierter Belastungsfall: Der Träger wird auf seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last und außerdem durch Einzellasten oder auf einen Theil seiner Länge durch eine weitere gleichförmig vertheilte Last belastet.

Da jeder Träger außer der Nutzlast noch das Eigengewicht tragen muß, dieses aber als gleichförmig über die ganze Länge vertheilt angenommen werden kann, so ist dieser Fall der am häufigsten vorkommende.

In Art. 153 ist nachgewiesen, daß jede Last einen von den sonst noch auf dem Balken befindlichen Lasten unabhängigen Stützdruck erzeugt, und daß der Gesamt-Stützdruck gleich der algebraischen Summe der Einzeldrucke ist. Daraus folgt, daß auch die Querkräfte und Momente für alle Querschnitte gleich den algebraischen Summen der bez. Theil-Querkräfte und Momente sind.

Demnach brauchen im vorliegenden Falle nur die Stützdrücke, Querkräfte und Momente, welche bei den einzelnen bereits betrachteten Belastungen, derjenigen durch Einzellasten und derjenigen durch gleichförmig vertheilte Last u. s. w., sich ergeben haben, algebraisch addirt zu werden, was sowohl auf dem Wege der Rechnung, wie graphisch geschehen kann.

Fig. 168.

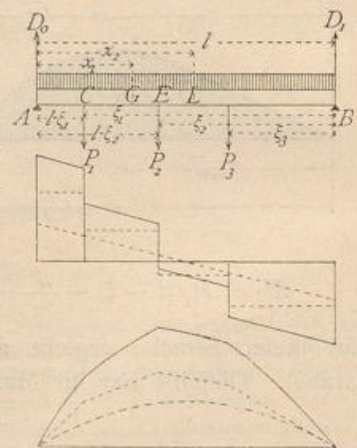


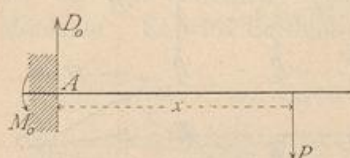
Fig. 168 stellt die Querkräfte und Momente dar, welche in den verschiedenen Querschnitten durch gleichförmig vertheilte Last und Einzellaften hervorgerufen werden. Die punktirten Linien geben die Werthe von  $Q$  und  $M$  nur für Einzellaften, bezw. für gleichförmig vertheilte Last an; die voll ausgezogenen Linien bedeuten die Summen.

2) Console-, Krag- oder Freitträger.

Console-, Krag- oder Freitträger sind am einen Ende unterstützte, am anderen Ende frei schwebende Träger. Als äußere Kräfte wirken auf dieselben die Belastungen und die Auflagerdrücke der Unterstützungsstelle. Letztere lassen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln. Damit der Träger im Gleichgewicht sei, muß zunächst die algebraische Summe der lothrechten Kräfte gleich Null sein, d. h. wenn die lothrechte Seitenkraft des Auflagerdruckes bei  $A$  (Fig. 169) gleich  $D_0$  ist, wird  $0 = D_0 - P$  oder

158.  
Erklärung.

Fig. 169.



(Fig. 169) gleich  $D_0$  ist, wird  $0 = D_0 - P$  oder

$$D_0 = P \dots \dots \dots 176.$$

Eine äußere wagrechte Belastung sei nicht vorhanden; daher wird der Auflagerdruck keine wagrechte Seitenkraft haben. Es muß aber auch die algebraische Summe der statischen Momente für einen beliebigen Punkt der Ebene, also etwa für  $A$ , gleich Null sein; mithin muß, da das Moment der gegebenen Kräfte für  $A$  nicht gleich Null ist,  $D_0$  aber für den Drehpunkt  $A$  kein statisches Moment hat, an der Unterstützungsstelle noch eine Anzahl von Kräften wirken, deren resultirendes Moment mit demjenigen der Belastungen zusammen die Summe Null ergibt. Bei  $A$  wirkt also ein Moment  $M_0$ , dessen Größe sich bei dem in Fig. 169 gezeichneten Dreh Sinn aus der Gleichung ergibt:

$$Px - M_0 = 0, \text{ d. h. } M_0 = + Px \dots \dots \dots 177.$$

Dieses Moment, dessen Dreh Sinn demjenigen von  $P$  entgegengesetzt ist, kann auf verschiedene Weise erzeugt werden, am einfachsten durch Einmauerung, bezw. Einspannung des Balkens.

Soll für jede Belastungsart Gleichgewicht vorhanden sein, so muß der Balken derart eingemauert werden, daß das von der Mauer geleistete Moment auch die größten Werthe des Momentes der Belastungen aufheben kann. Das Moment der Mauer wird durch das über dem eingemauerten Balkentheil liegende Mauergewicht geleistet, wonach dieses zu bestimmen ist.

Auch in anderer Weise kann ein Moment in  $A$  erzeugt werden, z. B. dadurch, daß der Balken über den Punkt  $A$  hinaus, bis zu einer zweiten Stütze  $B$ , verlängert wird.

Die Console-Träger sind statisch bestimmt, da die beiden Unbekannten: der Auflagerdruck  $D_0$  und das Moment  $M_0$ , nach den Gesetzen der Statik fester Körper ermittelt werden können. Im Folgenden werden der Auflagerdruck, die Querkräfte und die Momente, wie beim Balkenträger auf zwei Stützen gesucht; daher werden bezüglich der Belastungsart drei Fälle unterschieden:

Erster Fall: Der Console-Träger wird durch beliebige Einzellaften belastet.

159.  
Belastung  
durch  
Einzellaften.

Die freie Balkenlänge  $AB$  (Fig. 170) sei gleich  $l$ ; alsdann ist der Stützdruck

$$D_0 = P_1 + P_2 + P_3 = \sum_0^l (P) \dots \dots \dots 178.$$

und das Moment

$$M_0 = -(P_1 \xi_1 + P_2 \xi_2 + P_3 \xi_3) = -\sum_0^l (P \xi) \dots \dots \dots 179.$$

Für einen beliebigen Querschnitt  $C$  zwischen  $A$  und  $E$  beträgt die Querkraft  $Q = D_0 = \Sigma (P)$ ; diesen Werth hat  $Q$  für alle Punkte zwischen  $A$  und  $E$ . Für irgend einen Querschnitt  $L$  zwischen  $E$  und  $F$  ist  $Q_1 = D_0 - P_1$ , und es ist allgemein

$$Q = \sum_0^l (P) - \sum_0^x (P) = \sum_x^l (P) \dots \dots \dots 180.$$

Die Querkraft in jedem Querschnitte ist also gleich der Summe der zwischen diesem Querschnitte und dem freien Ende befindlichen Lasten. Dies folgt schon aus der Erklärung der Querkraft. Als graphische Darstellung der Veränderung der Querkräfte ergibt sich die neben stehende Construction (Fig. 170 *b*).

Für einen beliebigen Punkt  $L$  mit der Abscisse  $x$  wird das Moment  $M = - [P_3 (\xi_3 - x) + P_2 (\xi_2 - x)]$ ; allgemein wird fonach

$$M = - \sum_x^l [P (\xi - x)] \dots \dots \dots 181.$$

Die graphische Darstellung der Momente zwischen je zwei Lastpunkten ergibt also eine Gerade, wie in Fig. 170 *c* gezeichnet ist.

Die Momente sind als negativ einzuführen, weil die Kräfte das Bestreben haben den Balken so zu biegen, das er seine convexe Seite nach oben kehrt (vergl. Art. 151, S. 142).

Sowohl Querkraft, wie Moment ist bei dieser, demnach auch bei jeder Belastung, am Auflager-, bzw. Einspannungspunkte am grössten; diese Stelle ist also bei den Console-Trägern die am meisten gefährdete. Wird, wie im Hochbau meistens, der Balken mit constantem Querschnitt ausgeführt, so ist der am Einspannungspunkte nöthige Querschnitt der Ausführung zu Grunde zu legen.

Zweiter Fall: Der Console-Träger wird durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Für den Auflagerpunkt  $A$  (Fig. 171) ergeben sich der Auflagerdruck und das Moment zu

$$D_0 = p l \text{ und } M_0 = - \frac{p l^2}{2}; \dots \dots \dots 182.$$

für einen Punkt  $C$  mit der Abscisse  $x$  betragen die Querkraft und das Moment

$$Q_x = p (l - x) \text{ und } M_x = - \frac{p (l - x)^2}{2} \dots \dots \dots 183.$$

Die graphische Darstellung der Werthe von  $Q$  ergibt eine Gerade; für  $x = 0$  ist

Fig. 170.

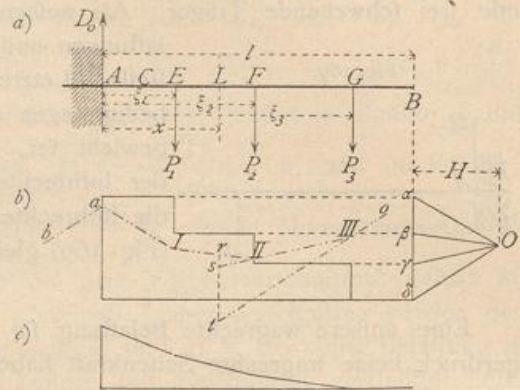
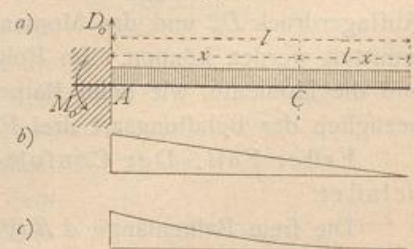


Fig. 171.



160.  
Gleichförmig  
vertheilte  
Belastung.

$Q_0 = p l$ , für  $x = l$  ist  $Q_l = 0$ . Diejenige der Werthe von  $M$  ergibt eine Parabel; für  $x = 0$  ist  $M_0 = -\frac{p l^2}{2}$ ; für  $x = l$  ist  $M_l = 0$ . Da ferner für  $x = l$  auch  $\frac{dM_x}{dx} = +p(l-x)$  Null wird, so ist die Abscissenaxe im Punkte  $x = l$  eine Tangente an die Parabel. Die Momente und Querkräfte sind in Fig. 171 c und 171 b graphisch dargestellt. Der grösste Werth des Momentes und der Querkraft findet an derselben Stelle, an der Einspannungsstelle, statt.

Dritter Fall: Der Console-Träger wird durch eine gleichförmig vertheilte Belastung und durch Einzellaften belastet.

Die Stützendrücke, Querkräfte und Momente ergeben sich als die Summen der bei den einzelnen Belastungen stattfindenden Stützendrücke, Querkräfte und Momente. Es wird deshalb genügen, hier die Werthe anzugeben (Fig. 172):

161.  
Gleichförmig  
vertheilte  
Last und  
Einzellaften.

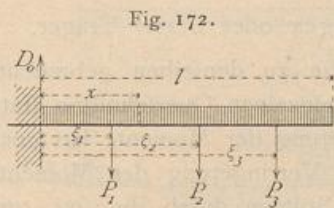


Fig. 172.

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= P_1 + P_2 + P_3 + p l = \sum_0^l P + p l \\ Q_x &= \sum_x^l P + p(l-x) \\ M_x &= -\sum_x^l [P(\xi-x)] - \frac{p(l-x)^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad 184.$$

Eben so wird die Veränderlichkeit der  $Q$  und  $M$  durch graphische Addition der für die Einzelbelastungen sich ergebenden Werthe von  $Q$  und  $M$  graphisch dargestellt.

Beispiel. Ein schmiedeeiserner Balcon-Träger von 2 m freier Länge hat als Eigengewicht eine gleichmässig vertheilte Belastung von 500 kg für das laufende Meter und eine Nutzlast von 800 kg für das laufende Meter zu tragen, ausserdem noch das Gewicht der Brüstung mit 800 kg in 1,8 m Abstand von der Wand. Demnach ist, wenn Alles in Centimetern angegeben wird,  $g = 5$  kg,  $p = 8$  kg,  $P = 800$  kg,  $\xi = 180$  cm und  $l = 200$  cm.

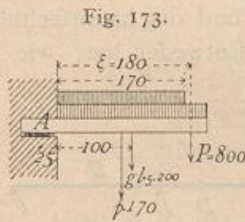


Fig. 173.

Die Nutzlast habe nur eine Länge von 170 cm.

Als Berechnungsweite darf man nicht die freie Länge bis zur Wand einführen, sondern muss diejenige bis zur Auflagermitte nehmen, welche hier etwa 25 cm hinter der Mauerkannte liegen möge. Alsdann ist für den Punkt A (Fig. 173), wenn  $M_g$  das Grösstmoment für ruhende,  $M_p$  dasjenige für bewegliche Last bezeichnet, absolut genommen

$$M_g = P(\xi + 25) + g l \left( \frac{l}{2} + 25 \right) = 800 \cdot 205 + 1000 \cdot 125 = 289\,000 \text{ kgcm},$$

$$M_p = p \cdot 170 \left( \frac{170}{2} + 25 \right) = 8 \cdot 170 \cdot 110 = 149\,600 \text{ kgcm}.$$

Der Querschnitt an der Stelle A ist so zu bestimmen, dass, wenn als zulässige Beanspruchung  $K = 800$  kg gewählt wird, stattfindet:

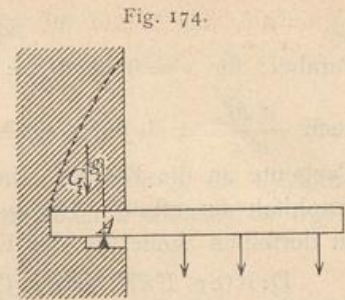
$$\frac{\gamma}{a} = \frac{M}{K} = \frac{289\,000 + 149\,600}{800} = 548.$$

Profil Nr. 28 der »Deutschen Normal-Profile für I-Eisen« hat ein Widerstandsmoment  $\frac{\gamma}{a} = 547$ , dürfte also für den vorliegenden Fall genügen.

Es möge hier noch einmal besonders darauf hingewiesen werden, dass die Console-Träger hauptsächlich dann gefährdet sind, wenn das am Einspannungspunkte von der Mauer geleistete Moment nicht die genügende Grösse hat. Damit Gleichgewicht bestehe, muss dieses Moment wenigstens so gross sein, wie das grösstmögliche

Moment der äußeren Kräfte für  $A$ . Auch hier ist aber ein Sicherheits-Coefficient  $n$  nöthig, und wenn beispielsweise dieses Einspannungsmoment durch das Gewicht des auf dem hinteren Balkentheile ruhenden Mauerwerkes geleistet wird (Fig. 174), so muß  $G_1 g_1 = n M_0$  sein. Es dürfte sich empfehlen,  $n$  nicht kleiner als 4 zu nehmen.

Dabei ist aber auch zu beachten, daß die Art der Construction dafür Gewähr bieten muß, daß das Gewicht  $G_1$  wirklich zur Wirksamkeit kommt — etwa durch angemessene Unterlagsplatten, Verband, Cementmörtel u. dergl. Unter Umständen kann man auch das Gewicht des unterhalb gelegenen Mauerwerkes durch Anker und Ankerplatten am Balkenende aufhängen und dadurch für die Stabilität des ConSOLE-Trägers nutzbar machen. Zu beachten ist auch, ob nicht ein Ausreißen nach der punktirten Linie in Fig. 174 möglich ist.



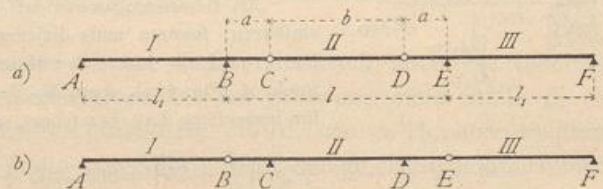
### 3) Continuirliche Gelenkträger, Auslegerträger oder Gerber-Träger.

162.  
Princip.

Die Querschnittsgröße der Träger und damit die zu denselben gebrauchte Stoffmenge ist wesentlich von der Größe der in den einzelnen Querschnitten stattfindenden größten Momente abhängig. Eine Verminderung der Momente hat auch eine Querschnittsverringernng zur Folge. Eine solche Verringerung der Momente wird gegenüber den gewöhnlichen Trägern auf zwei Stützen durch die fog. continurlichen Gelenkträger oder Auslegerträger erreicht, bei denen die Stützpunkte eines Theiles der Träger durch die übergekragten Enden der Nachbarträger gebildet werden. Man erhält dadurch für die verschiedenen Oeffnungen verschiedene Trägerarten, und zwar wechselt immer ein Träger mit einem, bzw. zwei Auslegern an den Enden und ein solcher ohne Ausleger ab.

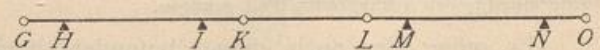
Für drei neben einander liegende Oeffnungen  $I, II, III$  sind die hauptsächlich vorkommenden Anordnungen in Fig. 175  $a$  u.  $b$  dargestellt. Entweder hat, wie in Fig. 175  $a$  gezeichnet ist, jeder Seitenträger  $I$  und  $III$  einen über das Auflager  $B$ , bzw.  $E$  vorragenden Ausleger  $BC$ , bzw.  $DE$ , auf deren Enden der Mittelträger  $CD$  frei aufruhet, oder der Mittelträger  $CD$  hat, wie in Fig. 175  $b$ , jederseits ein Kragstück  $BC$ , bzw.  $DE$ , und die Seitenträger  $AB$  und  $EF$  ruhen einerseits auf den Endstützpunkten  $A$ , bzw.  $F$ , andererseits auf den Enden  $B$  und  $E$  der erwähnten Kragstücke oder Ausleger.

Fig. 175.



Die Pfetten der größeren eisernen Dächer werden neuerdings meistens als solche Träger nach Fig. 176 hergestellt, wo immer ein Träger mit zwei Auslegern an den Enden und ein auf diesen Auslegern frei aufgelagerter Träger abwechseln. Die Beanspruchung in diesem Falle stimmt genau mit derjenigen der in Fig. 175  $b$  angegebenen Anordnung überein; jeder Träger mit zwei Consolen an den Enden wird wie Träger  $BCDE$  in Fig. 175  $b$  beansprucht; jeder andere Träger wie  $AB$ ,

Fig. 176.



bezw. *EF* dieser Figur. Es genügt deshalb, die beiden Anordnungen in Fig. 175 *a* u. *b* in das Auge zu fassen.

Erste Anordnung: Die Kragstücke befinden sich an den Seitenträgern (Fig. 175 *a*).

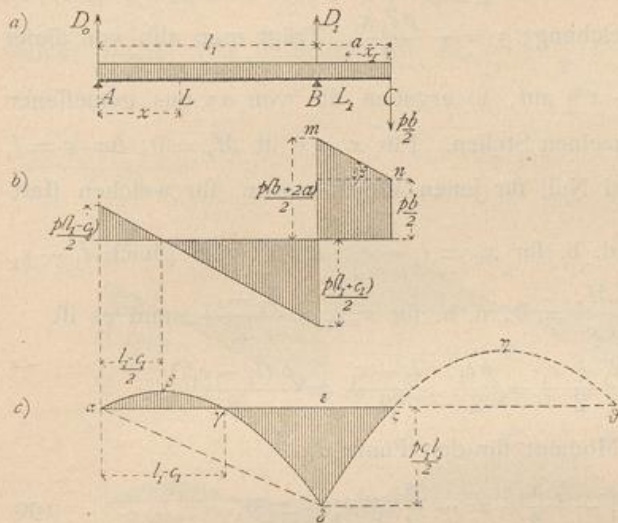
163-  
Erste  
Anordnung.

*a*) Erster Belastungsfall: Der Träger ist über seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

*a*) Seitenträger mit einseitigem Kragstück. Es sei  $AB = l_1$ ,  $BE = l$ ,  $BC = DE = a$  und  $CD = b$ , also  $l = 2a + b$ ; ferner sei die Belastung für die Längeneinheit des Trägers  $p$ . Alsdann wirkt außer dieser Belastung auf den

Seitenträger in *C* eine Kraft nach unten, welche dem im Punkte *C* auf den Balken *CD* nach oben wirkenden Auflagedruck (nach dem Gesetze der Wechselwirkung, vgl. Art. 9, S. 10) genau gleich ist, d. h. eine Kraft  $\frac{pb}{2}$ . Der Stützendruck im Auflagerpunkte *A* (Fig. 177 *a*) ergibt sich durch Aufstellung der Gleichung der statischen Momente für Punkt *B* zu

Fig. 177.



$$D_0 = \frac{pl_1}{2} - \frac{p}{2} \cdot \frac{ab + a^2}{l_1}$$

Setzt man die nur von den Längen abhängige Constante  $\frac{ab + a^2}{l_1} = c_1$ , so ist

$$D_0 = \frac{p}{2} (l_1 - c_1) \quad \dots \quad 185.$$

Weiters ist der Stützendruck im Auflagerpunkte *B*

$$D_1 = \frac{pl_1}{2} + \frac{pb}{2} \cdot \frac{l_1 + a}{l_1} + pa \frac{l_1 + \frac{a}{2}}{l_1} = \frac{p}{2} (l_1 + c_1 + 2a + b) \quad \dots \quad 186.$$

In der Strecke *AB* beträgt die Querkraft für einen Punkt *L* mit der Abscisse *x*, von *A* aus gerechnet,

$$Q_x = D_0 - px = \frac{p}{2} (l_1 - c_1 - 2x), \quad \dots \quad 187.$$

d. h. die graphische Darstellung ergibt eine Gerade. Für  $x = 0$  ist  $Q_0 = \frac{p}{2} (l_1 - c_1)$ ; für  $x = l_1$  ist  $Q_1 = -\frac{p}{2} (l_1 + c_1)$ ; die Querkraft wird Null für  $x_0 = \frac{l_1 - c_1}{2}$ .

In der Strecke *BC* ist die Querkraft für einen Punkt *L*<sub>1</sub> mit der Abscisse *x*<sub>1</sub>, von *C* aus gerechnet,

$$Q_{x_1} = \frac{p}{2} (b + 2x_1), \quad \dots \quad 188.$$

d. h. die graphische Darstellung derselben ergibt eine Gerade. Für  $x_1 = 0$  ist  $Q_0 = \frac{p b}{2}$ ; für  $x_1 = a$  ist  $Q_a = \frac{p}{2} (b + 2a)$ . Die Querkräfte sind in Fig. 177 b graphisch dargestellt.

In der Strecke AB ist das Moment für den Punkt L

$$M_x = D_0 x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l_1 - c_1) x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l_1 x - x^2) - \frac{p c_1 x}{2} \quad . \quad . \quad 189.$$

Der erste Theil dieses Ausdruckes ist das Moment, welches in einem frei aufliegenden Balken AB von der Länge  $l_1$  entstehen würde; in Folge des Auslegers und seiner Belaftung erhält man demnach hier an jeder Stelle ein um  $\frac{p c_1 x}{2}$  kleineres Moment. Die graphische Darstellung ergibt eine Parabel  $\alpha\beta\gamma\delta$  (Fig. 177 c); die Linie  $\alpha\delta$  ist die Linie der Gleichung:  $y = -\frac{p c_1 x}{2}$ . Trägt man also von dieser

aus die Ordinaten  $z = \frac{p}{2} (l_1 x - x^2)$  auf, so ergeben die von  $\alpha\epsilon$  aus gemessenen Ordinaten die Momente an den einzelnen Stellen. Für  $x = 0$  ist  $M_x = 0$ ; für  $x = l_1$  ist  $M_{l_1} = -\frac{p c_1 l_1}{2} = \epsilon\delta$ .  $M_x$  wird Null für jenen Werth von  $x$ , für welchen stattfindet:  $0 = \frac{p}{2} (l_1 - x) - \frac{p c_1}{2}$ , d. h. für  $x_0 = l_1 - c_1$ ;  $\alpha\gamma$  ist also gleich  $l_1 - c_1$ .

$M_x$  hat seinen Größtwerth für  $\frac{dM_x}{dx} = 0$ , d. h. für  $x_{max} = \frac{l_1 - c_1}{2}$ , und es ist

$$M_{max} = \frac{p}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} \cdot \frac{l_1 + c_1}{2} - \frac{p c_1}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} = \frac{p (l_1 - c_1)^2}{8}.$$

In der Strecke BC ist das Moment für den Punkt  $L_1$

$$M_{x_1} = -\frac{p b}{2} x_1 - \frac{p x_1^2}{2} = -\frac{p}{2} (b x_1 + x_1^2), \quad . \quad . \quad . \quad 190.$$

d. h. die graphische Darstellung liefert eine Parabel.  $M_{x_1}$  wird Null für  $x_1 = 0$  und für  $b + x_1 = 0$ , d. h. für  $x_1 = -b$ , also für Punkt C, und wenn die Curve über den Nullpunkt C nach rechts auf die negative Seite der Abscissenaxe fortgesetzt wird, für den Punkt D (Fig. 175 a). Ferner wird  $M_{x_1}$  ein Größtwerth für  $0 = b + 2x_1$ , d. h. es wird  $x_{1max} = -\frac{b}{2}$ . Für  $x_1 = a$ , d. h. für den Auflagerpunkt B, wird

$M_{x_1} = -\frac{p}{2} (a b + a^2) = -\frac{p}{2} c_1 l_1$ , wie bereits oben gefunden. Hiernach ist die Parabel  $\delta\zeta\eta\theta$  in Fig. 177 c construiert.

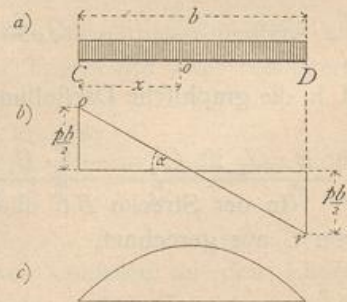
b) Balkenträger auf den beiden Kragstücken. Für diesen Träger CD (Fig. 178) gilt das unter 1 für den Träger auf zwei Stützen Gefundene. Daher ist für einen Punkt mit der Abscisse  $x$

$$Q_x = \frac{p}{2} (b - 2x) \quad \text{und} \quad M_x = \frac{p}{2} (b x - x^2). \quad 191.$$

Die graphischen Darstellungen der Querkräfte und Momente giebt Fig. 178.

c) Ganzer Träger. Betrachtet man nun den ganzen Träger (Fig. 179), so sieht man zunächst, daß

Fig. 178.



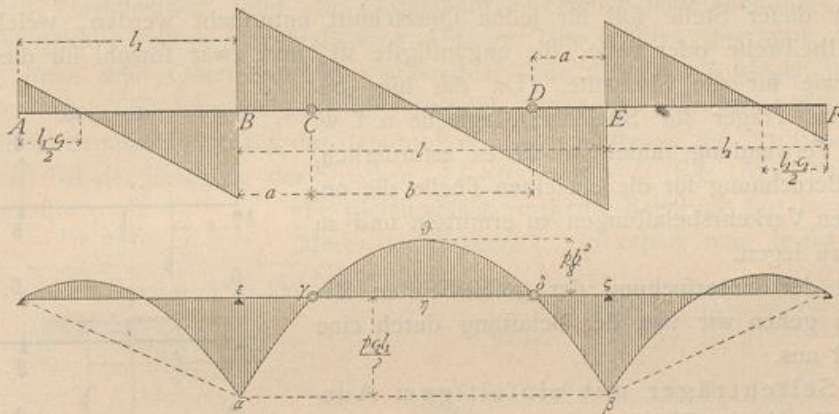


die Querkräfte und Momente in  $C$  gleiche GröÙe haben, ob man vom Träger  $ABC$  oder vom Träger  $CD$  ausgeht. Auch die Neigung der Linie  $or$ , welche die Querkraft auf  $CD$  darstellt (Fig. 178), stimmt mit derjenigen von  $mn$  (Fig. 177), welche die Querkraft der Strecke  $BC$  darstellt, überein; denn es ist (Fig. 178)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{p b}{2}}{\frac{b}{2}} = p \quad \text{und (Fig. 177 b)} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{p a}{a} = p, \quad \text{d. h. } \beta = \alpha;$$

demnach bilden die beiden Linien  $or$  und  $mn$  eine einzige Linie. Auch die Momenten-Curven beider Theile stimmen überein; denn für die Abtheilung  $BC$  ist nach Gleichung 190:  $M_{x_1} = -\frac{p}{2} (b x_1 + x_1^2)$  und für negative  $x_1$ , d. h. für Punkte, welche rechts von  $C$  liegen, ist  $M_{x_1} = -\frac{p}{2} (-b x_1 + x_1^2) = +\frac{p}{2} (b x_1 - x_1^2)$ .

Fig. 179.



Dies ist aber nach Gleichung 191 der Werth, welcher sich für das Moment auf der Strecke  $CD$  ergibt. Die in Fig. 177 c gezeichnete Curve  $\delta\zeta\eta\vartheta$  ist also die richtige Momenten-Curve.

In Fig. 179 sind die Momente und Querkräfte für den ganzen Träger angegeben.

b) Vergleich mit dem Träger auf zwei Stützen. Für den mittleren Theil  $BCDE$  (Fig. 179) sind die Querkräfte genau, wie bei einem frei aufliegenden Träger von der Spannweite  $l = 2a + b$ ; für die Seitenträger sind die Querkräfte an jeder Stelle um  $\frac{p c_1}{2}$  kleiner, als beim einfachen, auf den Stützen  $A$  und  $B$  aufliegenden Balkenträger. Die absoluten Werthe der Querkräfte sind also auf der positiven Seite um  $\frac{p c_1}{2}$  kleiner, auf der negativen Seite um  $\frac{p c_1}{2}$  größer, als dort.

Was die Momente anbelangt, so ist für die Seitenträger oben bereits nachgewiesen, daß das Moment an jeder Stelle um  $\frac{p c_1 x}{2}$  kleiner ist, als beim frei aufliegenden Balkenträger von der Spannweite  $l_1$ . Falls der Mittelträger in  $B$  und  $E$  frei aufläge, würde an einer beliebigen Stelle mit der Abcisse  $\xi$ , von  $B$  aus gemessen, das Moment  $M_\xi = \frac{p}{2} (l \xi - \xi^2) = \frac{p}{2} [(b + 2a) \xi - \xi^2] = p a \xi + \frac{p}{2} b \xi - \frac{p \xi^2}{2}$  sein,

oder, wenn man des bequemeren Vergleiches halber die Abcissen vom Punkt  $C$  aus rechnet und mit  $x$  bezeichnet (nach rechts positiv), so wird  $\xi = a \pm x$  und nach einigen Umformungen

$$M_x = \frac{p}{2} (bx - x^2) + \frac{p}{2} c_1 l_1.$$

Für den Mittelträger  $B C D E$  mit den Gelenken in  $C$  und  $D$  ist, wie oben gezeigt, das Moment  $M_x = \frac{p}{2} (bx - x^2)$ , also um  $\frac{p}{2} c_1 l_1$  kleiner, als wenn die Auflagerung in gewöhnlicher Weise in  $B$  und  $E$  erfolgte. Nun ist aber diese Differenz  $\frac{p}{2} c_1 l_1$  gerade das negative Moment an den Stützen  $B$  und  $E$ ; die von der Wagrechten  $\alpha\beta$  in Fig. 179 aus gemessenen Ordinaten ergeben daher die Momente des in  $B$  und  $E$  frei aufliegenden Trägers. Construirt man demnach die Parabel der Gleichung  $\frac{p}{2} (l\xi - \xi^2)$  in gewöhnlicher Weise und zieht durch die Punkte  $\gamma$  und  $\delta$ , in welchen die Lothrechten der Auslegerenden die Parabel schneiden, eine Wagrechte  $\varepsilon\zeta$ , so sind die von dieser Linie aus gemessenen Ordinaten die Momente.

Es empfiehlt sich, die Auslegerlänge  $so$  zu bestimmen, daß das negative Moment über den Stützen abfolut genommen genau  $so$  groß ist, wie das positive Moment in der Mitte. Man theile zu diesem Zwecke einfach die Pfeilhöhe der Parabel  $\alpha\beta$  in zwei gleiche Theile und ziehe durch den Theilpunkt eine Wagrechte; alsdann geben die Längen  $\varepsilon\gamma$ , bzw.  $\delta\zeta$  die Längen der Ausleger.

$\beta$ ) Zweiter Belastungsfall: Der Träger ist auf einen Theil seiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

An dieser Stelle soll für jeden Querschnitt untersucht werden, welche Belastung, theilweise oder volle, die ungünstigste ist, und zwar sowohl für die Querkraften, wie für die Momente. Da die hier besprochenen Träger für Speicher, Magazine u. f. w. vielfach Verwendung finden, so ist es erforderlich, bei der Berechnung für die einzelnen Theile die ungünstigsten Verkehrsbelastungen zu ermitteln und zu Grunde zu legen.

Bei der Untersuchung der gefährlichsten Belastungen gehen wir von der Belastung durch eine Einzellaft aus.

a) Seitenträger mit einseitigem Ausleger. Es ist die Belastung zu ermitteln, welche in einem Querschnitt  $L$  im Abstände  $x$  vom linken Auflager  $A$  die größte Querkraft und das größte Moment hervorruft. Liegt eine Last  $P$  links von  $L$  im Abstände  $\xi$  von  $A$  (Fig. 180 a), so erzeugt sie die Auflagerdrücke

$$D_0 = \frac{P(l_1 - \xi)}{l_1} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P\xi}{l_1},$$

ferner

$$Q = -\frac{P\xi}{l_1} \quad \text{und} \quad M = \frac{P\xi}{l_1} (l_1 - x).$$

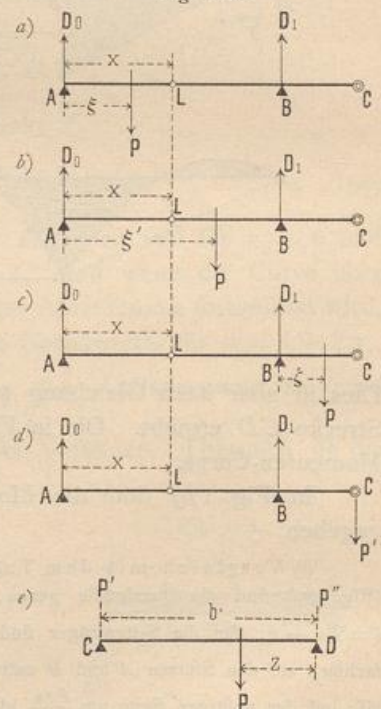
Liegt die Einzellaft  $P$  rechts vom Querschnitt  $L$  und links vom Auflager  $B$  (Fig. 180 b), so ist

$$D_0 = \frac{P(l_1 - \xi')}{l_1}, \quad D_1 = \frac{P\xi'}{l_1},$$

und für den Querschnitt  $L$

$$Q = \frac{P(l_1 - \xi')}{l_1}, \quad M = \frac{P(l_1 - \xi')}{l_1} x.$$

Fig. 180.



Liegt die Einzellaft auf dem Ausleger um  $\zeta$  von  $B$  entfernt (Fig. 180c), so ist

$$D_0 = -\frac{P\zeta}{l_1}, \quad D_1 = \frac{P(l_1 + \zeta)}{l_1},$$

und für den Querschnitt  $L$

$$Q = -\frac{P\zeta}{l_1}, \quad M = -\frac{P\zeta}{l_1} x.$$

Liegt endlich die Einzellaft auf dem Zwischenträger  $CD$  im Abstände  $z$  vom rechten Auflager  $D$  (Fig. 180e), so überträgt sie im Lastpunkte  $C$  eine Last auf den Ausleger im Werthe von  $P_1 = \frac{Pz}{b}$  und erzeugt die Auflagerdrücke (Fig. 180d):

$$D_0 = -\frac{Pz}{b} \frac{a}{l_1} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{Pz}{b} \frac{(a + l_1)}{l_1};$$

im Querschnitt  $L$  treten dadurch

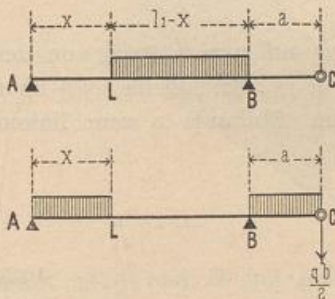
$$Q = -\frac{Pz}{b} \frac{a}{l_1} \quad \text{und} \quad M = -\frac{Pz}{b} \frac{a}{l_1} x$$

auf. Eine Belastung des Seitenträgers  $DEF$  ist ohne Einfluss auf die Momente und Querkräfte im Querschnitt  $L$ .

Aus Vorstehendem folgt: Im Querschnitt  $L$  erzeugt jede Belastung zwischen dem Querschnitt und dem rechtsseitigen Auflager eine positive Querkraft, jede Belastung links vom Querschnitt und außerdem jede auf dem Ausleger und dem Zwischenträger  $CD$  liegende Last eine negative Querkraft. Größte positive Querkraft findet demnach statt bei der Belastung der ganzen Strecke  $BL$ , grösste negative Querkraft bei der Belastung der Strecken  $AL$ ,  $BC$  und  $CD$  (Fig. 181). Nennt man

die gleichmäÙig vertheilte Belastung für das laufende Meter des Trägers  $q$ , so erhält man leicht für den Querschnitt  $L$ :

Fig. 181.



$$Q_{xmax} = \frac{q(l_1 - x)^2}{2l_1} \dots 192.$$

$$Q_{xmin} = -\frac{qx^2}{2l_1} - \frac{q}{2} \frac{(a^2 + ab)}{l_1},$$

oder, da  $\frac{a^2 + ab}{l_1} = c_1$  ist,

$$Q_{xmin} = -\frac{qx^2}{2l_1} - \frac{q}{2} c_1 \dots 193.$$

Ferner ergibt sich aus dem Vorstehenden: Jede Belastung der Strecke  $AB$  erzeugt im Querschnitt  $L$  ein positives Moment; jede Belastung des Auslegers  $BC$  und des Zwischenträgers erzeugt ein negatives Moment im Querschnitt  $L$ . Demnach findet statt: Größtes positives Moment in  $L$  bei voller Belastung des Seitenträgers  $AB$ , grösstes negatives Moment bei Belastung des Auslegers  $BC$  und des Zwischenträgers  $CD$ . Man erhält für Querschnitt  $L$ :

$$M_{max} = \frac{q}{2} (l_1 x - x^2) \dots 194.$$

$$M_{min} = -\frac{q}{2} \frac{(ab + a^2)}{l_1} x = -\frac{qc_1 x}{2} \dots 195.$$

Für einen Querschnitt  $O$  auf dem Ausleger (Fig. 182) ergibt sich: Eine Last  $P$  zwischen  $A$  und  $B$  ist ohne Einfluss auf den Querschnitt  $O$ , da die Kräfte  $P$ ,  $D_0$  und  $D_1$

einander im Gleichgewicht halten; das Gleiche gilt von einer Last zwischen  $B$  und dem Querschnitt  $O$ . Liegt  $P$  rechts von  $O$ , so ist in  $O$ :

$$Q = P \quad \text{und} \quad M = -P(x - \xi).$$

Liegt endlich die Last auf dem Zwischenträger  $CD$  im Abstände  $z$  vom rechten Auflager  $D$ , so wird im Lastpunkte  $C$  ein Druck auf den Ausleger übertragen,  $P' = \frac{Pz}{b}$ , und für Querschnitt  $O$  ist

$$Q = \frac{Pz}{b} \quad \text{und} \quad M = -\frac{Pz}{b}x.$$

Es folgt: Jede Belastung links von  $O$  ist ohne Einfluss auf  $Q$  und  $M$  in  $O$ ; jede Last rechts von  $O$  auf Ausleger und Zwischenträger ruft in  $O$  positive Querkraft und negatives Moment hervor. Größtes positives  $Q$  und größtes negatives Moment werden demnach in  $O$  (und in jedem Querschnitte des Auslegers) stattfinden, wenn der Ausleger rechts vom Querschnitt und der Zwischenträger voll mit  $q$  belastet ist. Da aber die übrige Belastung des Trägers ohne Einfluss ist, so kann man auch sagen: Für alle Querschnitte  $O$  des Auslegers finden größte positive Querkraft und größtes negatives Moment bei voller Belastung des Balkens statt. Man erhält für Querschnitt  $O$ :

$$\left. \begin{aligned} Q_{max} &= \frac{q}{2}(b + 2x) \\ M_{max} &= -\frac{q}{2}(bx + x^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 196.$$

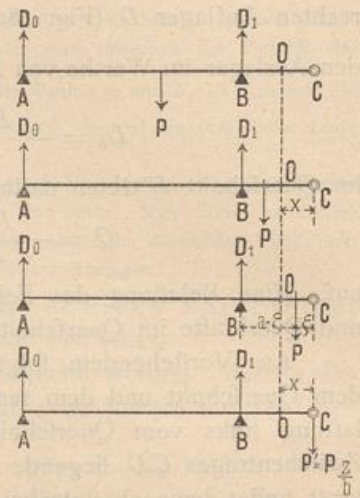
b) Zwischenträger  $CD$ . Derselbe ist ein Träger auf zwei Stützen von der Stützweite  $b$ ; es gilt von ihm dasselbe, was in Art. 151 u. 152 (S. 148 bis 150) über diesen Träger vorgeführt ist. Für einen Querschnitt im Abstände  $x$  vom linken Auflager ist also

$$\left. \begin{aligned} Q_{max} &= \frac{q(b-x)^2}{2b} \\ Q_{min} &= -\frac{qx^2}{2b} \\ M_{max} &= \frac{q}{2}(bx - x^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 197.$$

Für alle Querschnitte des Balkens sind in Fig. 183a u. 183b die Werthe  $Q_{max}$  und  $Q_{min}$ ,  $M_{max}$  und  $M_{min}$  in Folge der gleichförmig vertheilten Verkehrslast  $q$  zusammengestellt; die Curven ergeben sich aus den vorstehend vorgeführten Gleichungen.

Aus den Gleichungen 192 u. 193 ergibt sich, dass auf dem Seitenträger in der Oeffnung  $AB$  die positiven Größtwerthe von  $Q$  genau so sind, wie bei einem in  $A$  und  $B$  frei gelagerten Träger (vergl. Art. 151, S. 148), die negativen Größtwerthe von  $Q$  dagegen um das für alle Querschnitte gleich große Stück  $\frac{qc_1}{2}$ , absolut genommen, größer sind, als jene. Auf dem Ausleger  $BC$  kann die Querkraft durch Verkehrslast nach Gleichung 196 nur positiv sein; ermittelt man die größte durch

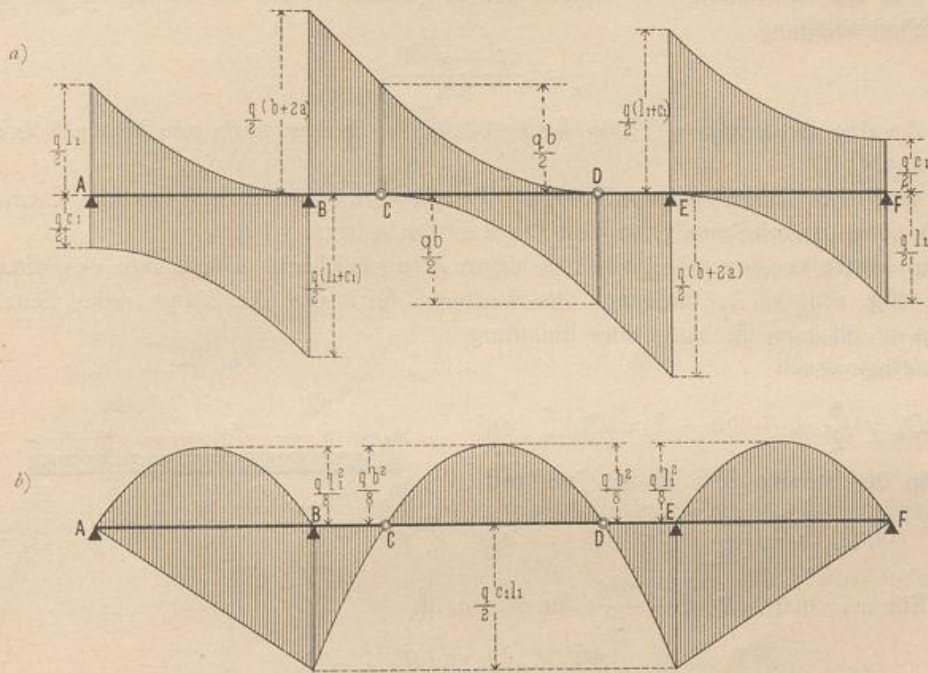
Fig. 182.



Verkehrslast hervorgerufene Querkraft für alle Querschnitte des Auslegers und trägt sie als Ordinaten in den bezw. Querschnitten auf, so ergibt sich eine Gerade. Im Zwischenträger  $CD$  ist wieder Alles wie beim Träger auf zwei Stützen. Beim rechtsseitigen Seitenträger ergeben sich dieselben Werthe, wie beim linksseitigen Seitenträger; nur kehren sich mit Rücksicht auf die Erläuterungen in Art. 151 (S. 142) die Vorzeichen um.

Was die positiven und negativen Größtmomente durch die angegebene Belastungsart anlangt, so ersieht man aus Gleichung 194, daß das positive Größtmoment im Seitenträger auf der Strecke  $AB$  genau dieselben Größen hat, wie bei

Fig. 183.



einem in  $A$  und  $B$  frei gelagerten Träger; die negativen Größtmomente in den einzelnen Querschnitten ändern sich geradlinig; der absolute Größtwert findet bei  $B$  statt und hat die Größe  $\frac{q c_1 l_1}{2}$ . Auf dem Ausleger  $BC$  kann nach Gleichung 196 nur ein negatives Größtmoment, im Zwischenträger  $CD$  nur ein positives Größtmoment stattfinden (siehe Gleichung 197). Vom Größtmoment auf der Strecke  $BCDE$  gilt Alles, was in Art. 163 (S. 157) über die Momente durch volle Belastung  $p$  vorgeführt ist. Der rechte Seitenträger befindet sich in genau gleicher Lage, wie der linke.

Bei den im Hochbau verwendeten Auslegerträgern ist vielfach der Querschnitt für jeden der drei Einzelbalken constant gebildet; derselbe muß demnach unter Zugrundelegung des im betreffenden Theile möglichen größten Momentes, absolut genommen, bestimmt werden. Führt man das Eigengewicht als gleichförmig über den ganzen Balken vertheilte Last  $p$  auf das lauf. Meter ein, die Nutzlast eben so

als Last  $q$ , so ist für den Seitenträger gewöhnlich das Moment über der Stütze  $B$  maßgebend, d. h.

$$M_{B_{min}} = - \left( \frac{p}{2} c_1 l_1 + \frac{q}{2} c_1 l_1 \right) = - \frac{c_1 l_1}{2} (p + q).$$

Alsdann müßte die Querschnittsgröße und -Form nach der Gleichung bestimmt werden:

$$\frac{\gamma}{a} = \frac{(p + q) c_1 l_1}{2 K}.$$

Ob das größte positive Moment auf der Strecke  $AB$ , absolut genommen, größer ist, als  $M_{B_{min}}$ , wird leicht durch Auftragen von Fig. 179 u. 183 und durch Zusammenrechnen der für  $p$  und  $q$  erhaltenen Werthe ermittelt.

Für das Mittelfstück  $CD$  ergibt sich in gleicher Weise als Bedingung für die Querschnittsbildung:

$$\frac{\gamma}{a} = \frac{(p + q) b^2}{8 K}.$$

164.  
Zweite  
Anordnung.

Zweite Anordnung: Die Kragstücke befinden sich am Mittelträger (Fig. 175 *b*).

$\alpha$ ) Erster Belastungsfall: Der Träger ist über seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belaftet.

$\alpha$ ) Mittelträger mit beiderseitigen Kragstücken. Die Länge des Mittelfeldes (Fig. 184) sei  $l_1$ , diejenige des Auslegers sei  $a$  und die Länge jedes Seitenträgers  $b$ ; alsdann ist bei voller Belaftung der Auflagerdruck

$$D_0 = \frac{p}{2} (l_1 + 2a + b) = D_1 \quad 198.$$

In der Strecke  $BC$  ist die Querkraft

$$Q_x = - \frac{pb}{2} - px \quad 199. \quad \frac{pb}{2} \downarrow$$

Für  $x = 0$  ist  $Q_0 = - \frac{pb}{2}$ ; für  $x = a$  ist

$$Q_a = - \frac{pb}{2} - pa = - \frac{p}{2} (b + 2a).$$

In der Strecke  $CD$  ist die Querkraft

$$Q_{x_1} = D_0 - \frac{pb}{2} - pa - px_1 = \frac{p}{2} (l_1 - 2x_1), \dots \dots \dots 200.$$

d. h. genau so groß, wie ohne Ausleger. Für  $x_1 = 0$  ist  $Q_0 = \frac{pl_1}{2}$ ; für  $x_1 = l_1$

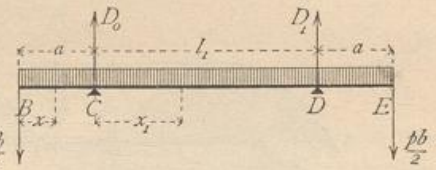
ist  $Q_{l_1} = - \frac{pl_1}{2}$ .

In der Strecke  $DE$  ist die Querkraft eben so groß, wie in  $BC$ ; nur ist hier positiv, was dort negativ ist. Die graphische Darstellung der Querkräfte ergibt Fig. 185 *a*.

In den Strecken  $BC$  und  $DE$  haben die Momente die gleichen Werthe, wie bei den in Art. 163 (S. 155) behandelten Auslegern. Demnach ist, vom Punkte  $B$  aus gerechnet,

$$M_x = - \frac{pb}{2} x - \frac{px^2}{2} = - \frac{p}{2} (bx + x^2) \quad \dots \dots \dots 201.$$

Fig. 184.



Für  $x = 0$  ist  $M_0 = 0$ ; für  $x = a$  ist  $M_a = -\frac{p}{2} (ab + a^2) = -\frac{p}{2} c_1 l_1$ .

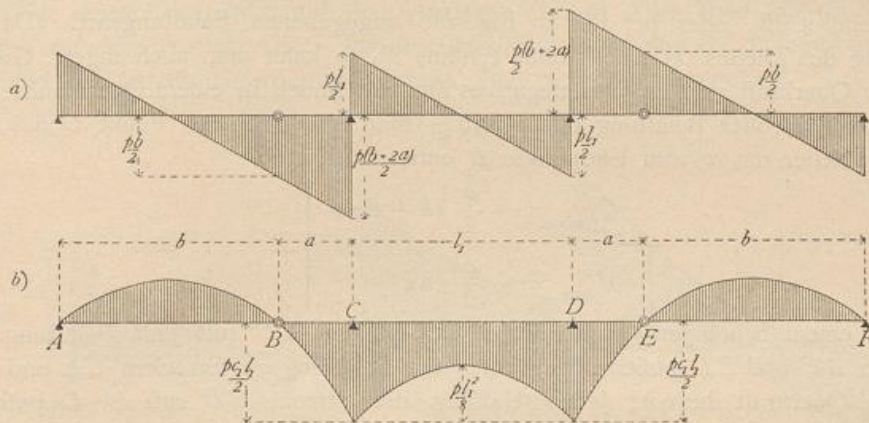
In der Strecke  $CD$  ist das Moment

$$M_{x_1} = D_0 x_1 - \frac{p x_1^2}{2} - p a \left( \frac{a}{2} + x_1 \right) - \frac{p b}{2} (a + x_1) = \frac{p}{2} (l_1 x_1 - x_1^2) - \frac{p}{2} c_1 l_1 \quad . \quad 202.$$

Der erste Theil des Momentes ist das Moment für einen frei aufliegenden Balken von der Stützweite  $l_1$ ; der zweite Theil ist das Moment über der Stütze  $C$ , bzw.  $D$ .

Also auch hier gilt dasselbe, was im vorhergehenden Artikel über den dortigen Mittelträger ( $BCDE$ ) gesagt wurde. Die graphische Darstellung der Momente ist in Fig. 185 *b* gegeben.

Fig. 185.



b) Seitenträger. Die Seitenträger sind frei auf zwei Stützpunkten gelagerte Träger, für welche Alles gilt, was in Art. 154 (S. 147) entwickelt wurde. Demnach ist, wenn der linke Auflagerpunkt hier als Anfangspunkt der Coordinaten gewählt wird,

$$Q_x = \frac{p}{2} (b - 2x) \quad \text{und} \quad M_x = \frac{p}{2} (bx - x^2), \quad . \quad . \quad . \quad 203.$$

und es ergibt sich leicht, wie in Art. 163, daß die Curven für die Momente und die Querkräfte dieselben sind, wie die für die Console  $BC$  gefundenen.

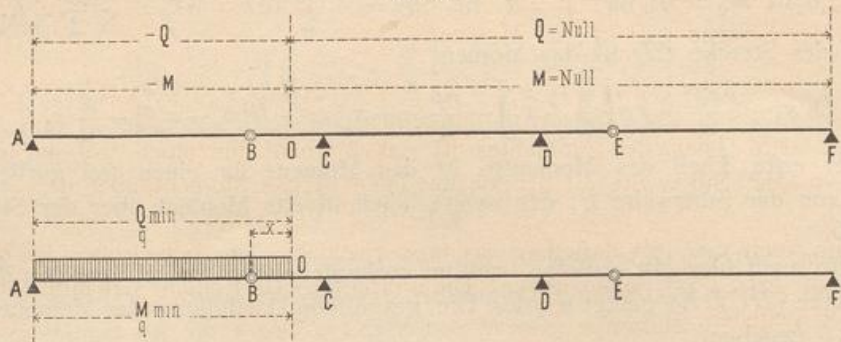
Die Momente und Querkräfte für die verschiedenen Querschnitte sind in Fig. 185 graphisch aufgetragen.

β) Zweiter Belastungsfall: Der Träger ist auf einen Theil seiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Geht man in derselben Weise, welche bei der ersten Anordnung gezeigt ist, vom Einflusse einer an verschiedenen Stellen des Trägers liegenden Einzellaft aus, so ergibt sich:

In einem beliebigen Querschnitt  $O$  des Auslegers  $BC$  (Fig. 186) erzeugt eine auf der Strecke  $AO$  befindliche Last negative Querkraft und negatives Moment; jede Belastung der anderen Trägertheile, also der Strecke  $OCDE$ , hat auf die Querkraft und das Moment in  $O$  keinen Einfluß. In Fig. 186 ist dem entsprechend die Strecke  $AO$  mit  $-Q$ , bzw.  $-M$  überschrieben, der übrige Theil des Trägers mit  $Q = \text{Null}$ , bzw.  $M = \text{Null}$ . Größte negative Querkraft und größtes negatives

Fig. 186.

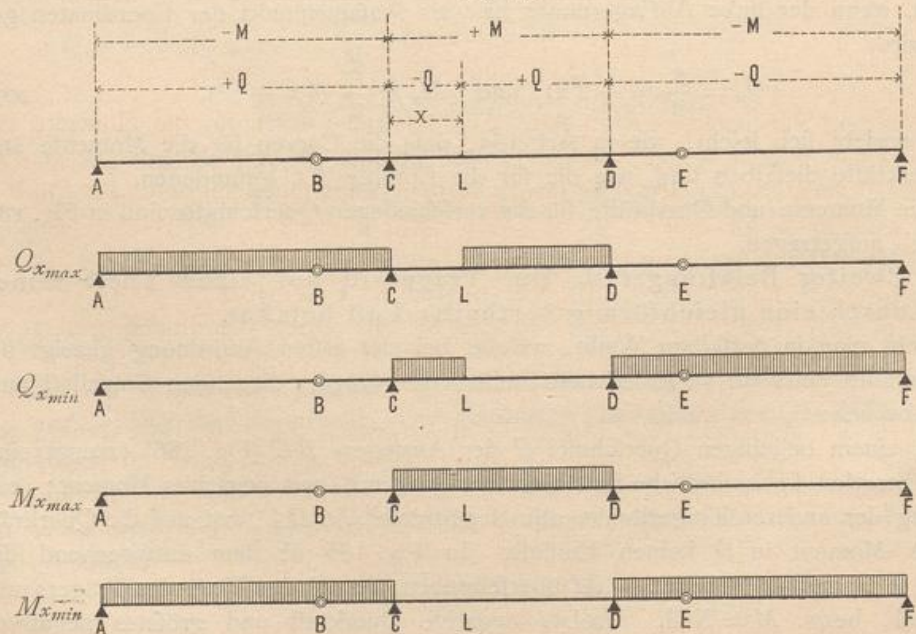


Moment finden demnach in  $O$  statt, wenn die Strecke  $\overline{AO}$  belaftet, alles Andere nicht belaftet ist, oder bei der in Fig. 186 angegebenen Belaftungsart. (Da die Belaftung des Theiles  $OCDEF$  ohne Einfluss ist, so kann man auch sagen: Größte negative Querkraft und größtes negatives Moment finden in einem Querschnitt des Auslegers bei voller Belaftung mit  $q$  statt.) Man erhält für den Punkt  $O$  des Auslegers, welcher um  $x$  vom Endpunkte  $B$  entfernt ist,

$$\left. \begin{aligned} Q_{qmin} &= -\frac{q}{2} (b + 2x) \\ M_{qmin} &= -\frac{q}{2} (bx + x^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 204.$$

In einem beliebigen Querschnitt  $L$  des Balkens  $CD$  ruft jede Belaftung der Strecken  $AC$  und  $LD$  positive Querkraft, jede Belaftung der Strecken  $CL$  und  $DF$  negative Querkraft hervor; jede Belaftung der Strecke  $CD$  ruft in  $L$  positives Moment, jede Belaftung der Seitenöffnungen  $AC$  und  $DF$  erzeugt dagegen in  $L$  negatives Moment. In Fig. 187 find die betreffenden Strecken durch die Ueber-

Fig. 187.





schriften  $+Q$  und  $-Q$ , bzw.  $+M$  und  $-M$  bezeichnet. Die sich demnach ergebenden ungünstigsten Belastungen, welche bzw.  $+Q_{max}$  und  $-Q_{max}$ ,  $+M_{max}$  und  $M_{min}$  erzeugen, sind in Fig. 187 schematisch dargestellt.

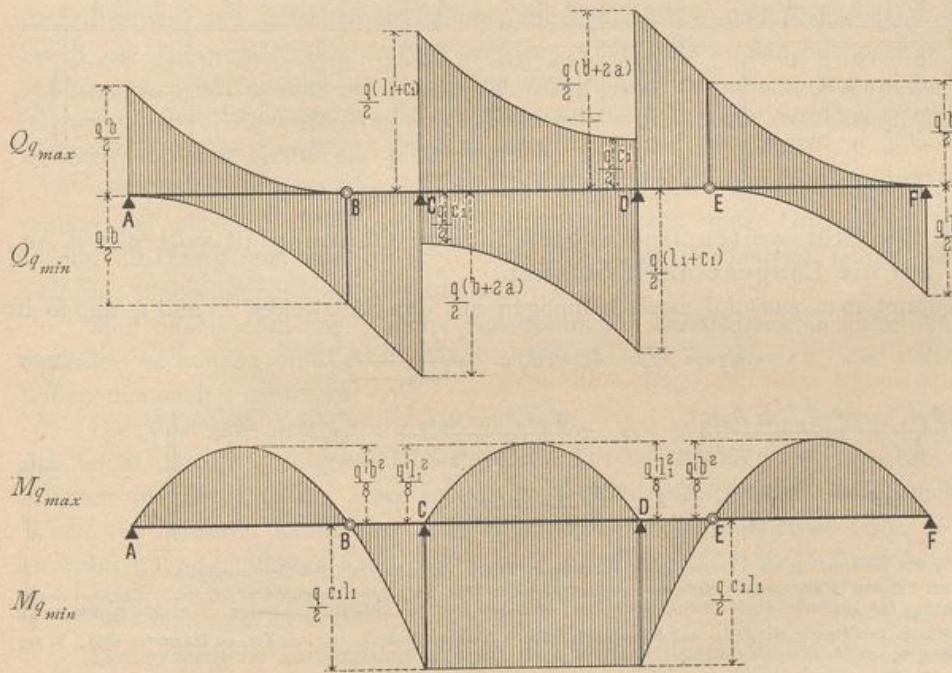
Man erhält für den Punkt  $L$ , welcher um  $x$  vom Stützpunkt  $C$  entfernt liegt,

$$\left. \begin{aligned} Q_{max} &= \frac{q}{2l_1} (l_1 - x)^2 + \frac{q}{2} c_1 \\ Q_{min} &= -\frac{qx^2}{2l_1} - \frac{q}{2} c_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 205.$$

$$\left. \begin{aligned} M_{max} &= \frac{q}{2} (l_1 x - x^2) \\ M_{min} &= -\frac{q}{2} c_1 l_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 206.$$

Für einen Querschnitt auf dem Ausleger  $DE$  ist Alles eben so, wie für denjenigen auf dem Ausleger  $BC$ ; für die Querschnitte auf den frei gelagerten Balken  $AB$  und  $EF$  ist das Erforderliche bereits oben mehrfach angegeben.

Fig. 188.



Ermittelt man nunmehr für jeden Querschnitt der ganzen Anordnung die Werthe  $Q_{max}$  und  $Q_{min}$  und eben so  $M_{max}$  und  $M_{min}$  und trägt die gefundenen Werthe als Ordinaten an den betreffenden Querschnitten auf, so ergeben sich die Zusammenstellungen in Fig. 188.

4) Continuirliche oder durchgehende Träger.

Die continuirlichen Träger oder Träger auf mehr als zwei Stützpunkten sind nach Art. 150 (S. 140) statisch unbestimmt. Die Stützendrücke werden mit Hilfe der Elasticitätslehre ermittelt. Bei der verhältnißmäfsig geringen Verwendung dieser

165.  
Princip.

Träger im Hochbau und weil der Raum für die eingehende Besprechung im vorliegenden »Handbuch« nicht ausreicht, soll nur für eine Reihe von gewöhnlichen Belastungsfällen die Gröfse der Stützendrücke, der Momente und Querkräfte angegeben werden. Wegen des eingehenden Studiums wird auf die unten stehenden Werke<sup>32)</sup> verwiesen.

Im Folgenden bezeichnen:  $D_0, D_1, D_2 \dots$  die Auflagerdrücke in den verschiedenen Stützpunkten  $0, 1, 2 \dots$ ;  $M_0, M_1, M_2 \dots$  die Momente an diesen Stützpunkten;  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3 \dots$  die Größtmomente in den Oeffnungen  $1, 2, 3 \dots$ ;  $l$  die Stützweite jeder Oeffnung, falls alle Stützweiten gleich grofs sind;  $l_1, l_2, l_3 \dots$  die Stützweiten der Oeffnungen  $1, 2, 3 \dots$ , falls nicht alle Stützweiten gleich grofs sind;  $p_1, p_2, p_3 \dots$  die gleichförmig vertheilten Belastungen für die Längeneinheit in den Oeffnungen  $1, 2, 3 \dots$  des Trägers.

$\alpha$ ) Sämmtliche Oeffnungen haben die gleiche Stützweite  $l$  und die gleiche volle Belastung  $p$  für die Längeneinheit zu tragen. Die mafsgebenden Werthe von  $M, D$  und  $\mathfrak{M}$  sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Anzahl der Oeffnungen:																	
2			3			4			2			3			4		
$M_0 =$	0	0	0	}	$p l^2$	$D_0 =$	0,375	0,400	0,3929	}	$p l$	$\mathfrak{M}_1 =$	0,07031	0,08	0,0772	}	$p l^2$
$M_1 =$	0,125	0,10	0,10714			$D_1 =$	1,250	0,100	1,1428			$\mathfrak{M}_2 =$	0,07031	0,025	0,0363		
$M_2 =$	0	0,10	0,0714			$D_2 =$	0,375	0,100	0,9186			$\mathfrak{M}_3 =$	—	0,08	0,0363		
$M_3 =$	—	0	0,10714			$D_3 =$	—	0,400	1,1428			$\mathfrak{M}_4 =$	—	—	0,0772		
$M_4 =$	—	—	0			$D_4 =$	—	—	0,3929								

$\beta$ ) Die Stützweiten sind ungleich; jede Oeffnung ist voll mit  $p_1, p_2, p_3 \dots$  auf die Längeneinheit belastet.

Nimmt man zunächst zwei Oeffnungen mit den Stützweiten  $l_1$  und  $l_2$  an, so ist

$$M_0 = M_2 = 0, \quad M_1 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)}, \dots \dots \dots 207.$$

$$D_0 = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_1 (l_1 + l_2)}, \quad D_1 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_1 l_2} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2}, \quad D_2 = \frac{p_2 l_2}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_2 (l_1 + l_2)}. \dots \dots \dots 208.$$

<sup>32)</sup> Für das Studium der »Theorie der continuirlichen Träger« seien folgende Schriften empfohlen:  
 CLAPEYRON. *Calcul d'une poutre elastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés.* Comptes rendus, Bd. 45, S. 1076.  
 MOHR. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisen-Construction. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1860, S. 323; 1858, S. 19.  
 CULMANN, K. Die graphische Statik. Zürich 1866. S. 273.  
 WINKLER, E. Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit etc. Theil I. Prag 1867. S. 112.  
 RITTER, W. Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken. 2. Aufl. Zürich 1883.  
 OTT, K. v. Grundzüge der graphischen Statik. Prag 1870. — 4. Aufl. 1885.  
 LIPPICH, F. Theorie des continuirlichen Trägers constanten Querschnittes. Allg. Bauz. 1871, S. 104 u. 175. (Auch als Sonderdruck erschienen: Wien 1871.)  
 WEYKAUCH, J. J. Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.  
 WINKLER, E. Vorträge über Brückenbau. Theorie der Brücken. Heft I: Aeusere Kräfte gerader Träger. 3. Aufl. Wien 1886.  
 LAISSE, F. & A. SCHÜBLER. Der Bau der Brückenträger mit besonderer Rücksicht auf Eisen-Constructionen. Theil I. 4. Aufl. Stuttgart 1867. S. 161.  
 GRASHOF, F. Theorie der Elasticität und Festigkeit etc. 2. Aufl. Berlin 1878. S. 100.  
 CANOVETTI. *Théorie des poutres continues etc.* Paris 1882.  
 STELZEL, K. Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf die continuirlichen Träger. Graz 1882.  
 CASTIGLIANO, A. *Théorie de l'équilibre des systèmes elastiques.* Turin. — Deutsch von E. HAUFF. Wien 1886.

Bei drei Oeffnungen mit den Stützweiten  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_1$  ergeben sich folgende Werthe:

$$M_0 = M_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4(3l_2 + 2l_1)}, \quad \dots \quad 209.$$

$$D_0 = D_3 = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4l_1(3l_2 + 2l_1)}, \quad D_1 = D_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4l_1(3l_2 + 2l_1)} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2}. \quad 210.$$

Aus diesen allgemeinen Gleichungen kann man in besonderen Fällen die betreffenden Werthe leicht finden. Wenn z. B. eine ganze Oeffnung unbelastet ist, so ist einfach in den obigen Ausdrücken das entsprechende  $p$  gleich Null zu setzen.

### b) Innere Kräfte der Gitterträger.

Die Balkenträger sind entweder vollwandige Träger oder gegliederte Träger, letztere gewöhnlich Gitterträger genannt. Bei den ersteren bildet der ganze Querschnitt eine zusammenhängende Fläche; bei den letzteren besteht derselbe aus zwei getrennten Theilen, den sog. Gurtungsquerschnitten; beide Gurtungen sind durch Stäbe mit einander verbunden.

Die Ermittlung der Spannungen, welche in den vollwandigen Trägern, wozu die hölzernen und gusseisernen Balken, die Walzbalken und Blechträger gehören, durch die äußeren Kräfte erzeugt werden, ist bereits in Abschn. 2, Kap. 4 vorgeführt worden; dafelbst ist auch die Querschnittsbestimmung für diese Balken gezeigt. Im vorliegenden Kapitel sollen deshalb nur die in den Gitterträgern entstehenden inneren Kräfte entwickelt werden.

Gitterträger sind aus einzelnen Stäben zusammengesetzte Träger. Die Kreuzungspunkte der einzelnen Stäbe heißen Knotenpunkte. Jeder Gitterträger hat eine obere Gurtung und eine untere Gurtung. Zur Verbindung beider dient das zwischen ihnen angeordnete Gitterwerk.

Man nennt jedes aus Stäben, welche in den Schnittpunkten ihrer Axen mit einander verbunden sind, bestehende Stabwerk ein Fachwerk; die Gitterträger bilden demnach Fachwerke.

Die Vortheile der Gitterträger gegenüber den vollwandigen Trägern ergeben sich leicht durch die folgende Ueberlegung. Die auf Biegung beanspruchten Träger erleiden in allen Punkten eines jeden Querschnittes verschiedene Beanspruchungen. Wenn die äußeren Kräfte nur senkrecht zur Balkenaxe gerichtet sind, so ist im einfachsten und häufigsten Falle die Spannung eines in der Höhe  $z$  über, bezw. unter der wagrechten Schwerpunktsaxe liegenden Punktes nach Gleichung 56:  $\sigma = \frac{M}{\mathcal{F}} z$ .

Die graphische Darstellung der an den verschiedenen Stellen des Querschnittes auftretenden Spannungen  $\sigma$  ist die durch Fig. 189 veranschaulichte, da  $\frac{M}{\mathcal{F}}$  für irgend einen Querschnitt constant ist. Im Punkte  $C$  des Querschnittes  $II$  ist die Spannung  $\sigma_D$  (Druck), in  $E$  ist sie  $\sigma_Z$  (Zug); in allen anderen Punkten des Querschnittes hat sie geringere Werthe. Da aber die Beanspruchungen  $\sigma_D$  und  $\sigma_Z$  die zulässigen Grenzen  $K''$  für Druck und  $K'$  für Zug nicht überschreiten dürfen, so ist  $\sigma_D = K''$  und  $\sigma_Z = K'$  zu setzen und danach die Querschnittsfläche zu bestimmen. Die zulässige Beanspruchung

Fig. 189.

