



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik der Hochbau-Constructions**

**Landsberg, Theodor**

**Stuttgart, 1899**

b) Gedrückte Stäbe unter Berücksichtigung der Zerknickungsgefahr

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77733)

erften Wiederholung der Construction ein genügend genaues Zusammenfallen der Punkte  $E$  und  $V$ .

Vorstehende Unterfuchung ist für die Ermittlung der Standficherheit von Gewölbepeilern, durchbrochenen Mauern, Schornsteinen etc. von großer Wichtigkeit.

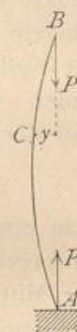
b) Gedrückte Stäbe unter Berücksichtigung der Zerknickungsgefahr.

1) Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken.

133.  
Voraus-  
setzungen.

Wenn auf einen Stab mit gerader Axe zwei Zugkräfte  $P$  wirken, deren Richtungslinien genau mit der Stabaxe zusammenfallen, so findet in den einzelnen Punkten des Stabes nur eine Zugbeanspruchung statt. Wirken auf einen eben solchen Stab zwei Druckkräfte  $P$  ebenfalls genau in der Richtung der Axe und einander entgegengesetzt, so müßten nach Früherem an den einzelnen Stellen gleichfalls nur Druckbeanspruchungen stattfinden, welche bei überall gleichem Stabquerschnitt in allen Punkten für die Flächeneinheit gleich wären. In Wirklichkeit kann man darauf nicht immer rechnen. Wenn die Länge des Stabes im Vergleich zu seiner Querschnittsfläche groß ist, so wird unter dem Einflusse der drückenden Kräfte ein Ausbiegen stattfinden, und auf jeden Querschnitt  $C$  (Fig. 135) wirkt alsdann aufer der Axialkraft  $P$  noch ein Moment  $P y$ . In diesem Falle findet Beanspruchung des Stabes auf Zerknicken statt, und derselbe ist mit Rücksicht auf diese Beanspruchungsweise zu berechnen.

Fig. 135.



Es kann auffallen, daß hier scheinbar ein Widerspruch zwischen der Theorie und Praxis obwaltet; in Wirklichkeit ist derselbe aber nicht vorhanden. So lange die Druckkräfte ganz genau in der Stabaxe und in deren Richtung wirken, findet ein Ausbiegen nicht statt; sobald aber in Folge von unvermeidlichen Fehlern die Kräfte auferhalb der Axe angreifen, bezw. von der Richtung der Axe abweichen, entsteht für jeden Querschnitt des Stabes ein Biegemoment, welches unter Umständen ein Ausbiegen zur Folge hat. Man kann daher in diesem Falle von einem labilen Gleichgewichtszustande sprechen.

Ein Ausbiegen der Stabaxe kann nicht nur in der in Fig. 135 gezeichneten Richtung stattfinden, sondern ist nach allen möglichen Richtungen denkbar; es ist demnach zu unterfuchen, nach welcher Richtung ein solches Ausbiegen am leichtesten stattfindet, und der Querschnitt des Stabes danach anzuordnen. Für die folgenden Unterfuchungen soll angenommen werden, daß 1) als äußere Kräfte nur die Axialkräfte  $P$  wirken, 2) die Axialkräfte in den Schwerpunkten der Endflächen angreifen und 3) der Stab überall gleichen Querschnitt habe.

134.  
Elastische  
Linie.

Unter Einwirkung der Kraft  $P$  möge der Stab (Fig. 136), dessen Axe ursprünglich mit  $AX$  zusammenfiel, in die Lage  $AB$  gekommen sein; die Bildebene  $XAY$ , in welcher  $AB$  liegt, schneide alle Querschnitte in Hauptaxen; der Axenpunkt  $B$  habe nach der Formänderung die Ordinate  $y_0$ . Für irgend einen Punkt  $C$  mit der Abscisse  $x$  sei die Ordinate  $y$ ; das Moment für diesen Punkt ist  $M = P(y_0 - y)$  und die elastische Linie demnach aus der Gleichung 100 zu ermitteln. Danach wird

Fig. 136.



$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P(y_0 - y)}{E \mathcal{J}} \dots \dots \dots 114.$$

Hierin ist  $\mathcal{J}$  das Trägheitsmoment des Querschnittes bei  $C$ , bezogen auf diejenige Schwerpunktsaxe desselben, welche senkrecht zur Kraftebene, also zur  $XY$



Ebene, steht. Der Querschnitt ist nach obiger Voraussetzung constant, also auch  $\mathcal{F}$  für die Integration constant; da  $P$  und  $E$  gleichfalls constant sind, so hat bei der Integration  $\frac{P}{E\mathcal{F}}$  einen constanten Werth. Abkürzungsweise werde

$$\frac{P}{E\mathcal{F}} = a^2 \dots\dots\dots 115.$$

gesetzt, so dass die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 (y_0 - y) \dots\dots\dots 116.$$

Die zweimalige Integration ergibt als Gleichung der elastischen Linie:

$$y = y_0 + A \sin ax + B \cos ax \dots\dots\dots 117.$$

Die beiden Constanten  $A$  und  $B$  sind für die verschiedenen Arten der Stabunterstützung verschieden.

Bekanntlich ist

$\sin \alpha = \sin (2\pi + \alpha) = \sin (2n\pi + \alpha)$  und  $\cos \alpha = \cos (2\pi + \alpha) = \cos (2n\pi + \alpha)$ , worin  $n$  eine beliebige ganze Zahl oder Null bedeutet, also gleich 0, 1, 2, 3... gesetzt werden kann. Es ist also auch

$$\sin ax = \sin (ax + 2\pi) = \sin \left[ a \left( x + \frac{2\pi}{a} \right) \right]$$

und

$$\cos ax = \cos (ax + 2\pi) = \cos \left[ a \left( x + \frac{2\pi}{a} \right) \right].$$

Die Gleichung 117 kann daher auch geschrieben werden:

$$y = y_0 + A \sin \left[ a \left( x + \frac{2\pi}{a} \right) \right] + B \cos \left[ a \left( x + \frac{2\pi}{a} \right) \right] \dots\dots 118.$$

Man erhält ferner gleich große Werthe für  $y$ , wenn man  $x$  und wenn man  $x + \frac{2\pi}{a}$  einsetzt, d. h. die Ordinaten je zweier Punkte, deren Abscissen um  $\frac{2\pi}{a}$  von einander verschieden sind, haben gleiche Werthe. Die elastische Linie ist demnach eine Wellenlinie; die Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{a}, \dots\dots\dots 119.$$

und, da nach Gleichung 115:  $a = \sqrt{\frac{P}{E\mathcal{F}}}$  ist,

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{E\mathcal{F}}{P}} \dots\dots\dots 120.$$

Aus dieser Gleichung kann man, falls  $E$ ,  $\mathcal{F}$  und  $P$  gegeben sind, die Wellenlänge berechnen. Ist dagegen  $\lambda$  gegeben, so kann man aus Gleichung 120 diejenige Kraft  $P$  berechnen, welche die Durchbiegungen  $y$  erzeugen kann. Die Größe von  $P$  folgt aus Gleichung 120 zu:

$$P = \frac{4\pi^2 E\mathcal{F}}{\lambda^2} \dots\dots\dots 121.$$

Noch auf eine wichtige Eigenthümlichkeit der allgemeinen Gleichung 116 ist



hinzuweisen. Dieselbe bleibt giltig, wenn man beiderseits mit der beliebigen Zahl  $m$  multiplicirt; sie heisst alsdann:

$$m \frac{d^2 y}{d x^2} = m a^2 (y_0 - y) = a^2 (m y_0 - m y).$$

Es sei  $m y_0 = \eta_0$  und  $m y = \eta$ ; alsdann ist auch  $m \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d^2 \eta}{d x^2}$ , also

$$\frac{d^2 \eta}{d x^2} = a^2 (\eta_0 - \eta) \dots \dots \dots 122.$$

Die Gleichung 116 gilt daher für beliebig grofse Werthe von  $y$ . Sind also unter der Einwirkung einer Kraft  $P$  die Durchbiegungen  $y$  möglich, so sind auch  $m$ -mal so grofse, d. h. beliebig grofse Durchbiegungen möglich, also auch so grofse, dafs der Stab zerknickt wird.

Der Werth von  $P$  in Gleichung 121, welcher die Durchbiegungen  $y$  erzeugen kann, kann also auch den Stab zerknicken.

Bei der vorstehenden Ableitung ist angenommen worden, dafs die Ausbiegung in der  $XY$ -Ebene erfolge; dieselbe kann aber auch in der senkrecht zu ersterer stehenden  $XZ$ -Ebene stattfinden, welche die zweiten Hauptaxen der Querschnitte enthält. Die Entwicklung für diesen Fall bleibt genau dieselbe, wie die obige, und man erhält für  $P$  denselben Ausdruck, wie dort; nur ist alsdann unter  $\mathcal{F}$  das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die zur  $XZ$ -Ebene senkrechte Schwerpunktsaxe, zu verstehen, welche Axe parallel zur  $Y$ -Axe ist. Nennen wir dasselbe  $\mathcal{F}_1$ , die entsprechenden Werthe von  $P$  und  $\lambda$  aber  $P_1$  und  $\lambda_1$ , so ist

$$P_1 = \frac{4 \pi^2 E \mathcal{F}_1}{\lambda_1^2} \dots \dots \dots 123.$$

Ein Ausbiegen des Stabes kann nun sowohl in der  $XY$ -Ebene, wie in der  $XZ$ -Ebene stattfinden; die wirkliche dem Stabe zuzumuthende Belastung darf den Grenzwert nicht erreichen. Die Gleichungen 121 u. 123 geben zwei Grenzwerte, und naturgemäfs ist der kleinere von beiden als maßgebend einzuführen. Nimmt man in beiden Richtungen gleiche  $\lambda$  an, so unterscheiden sich beide Grenzwerte nur durch die Werthe der Trägheitsmomente. In den Ausdruck für  $P$  ist demnach von den beiden Hauptträgheitsmomenten das kleinere einzusetzen.

Wenn die Ausbiegung nach allen Richtungen möglich ist, so nimmt man an, dafs dieselbe senkrecht zu derjenigen Hauptaxe erfolgt, welcher das kleinere Hauptträgheitsmoment entspricht; denn dieses ist nach Art. 62 (S. 41) das kleinste der für alle Schweraxen möglichen Trägheitsmomente.

Für die weiteren Betrachtungen sind die verschiedenen möglichen Fälle in das Auge zu fassen.

135.  
Einfseitig  
eingespannter  
Stab.

a) Einfseitig eingespannter, an einem Ende in der Richtung der Axe belasteter Stab (Fig. 137). Aus der allgemeinen Gleichung 117 für die elastische Linie:

$$y = y_0 + A \sin a x + B \cos a x$$

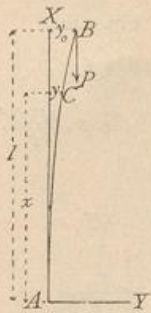
folgt

$$\frac{d y}{d x} = A a \cos a x - B a \sin a x \dots \dots \dots 124.$$

Die Constanten  $A$  und  $B$  werden aus den besonderen Bedingungen für diesen Fall bestimmt.



Fig. 137.



Für  $x = 0$  ist  $\frac{dy}{dx} = 0$ , weil der Stab an dieser Stelle wegen der Einspannung stets die Richtung der X-Axe hat; demnach ist in Gleichung 124

$$A a = 0,$$

oder, da  $a$  nicht gleich Null ist,  $A = 0$ . Eben so ist für  $x = 0$  auch  $y = 0$ , daher in Gleichung 117:  $0 = y_0 + B$  oder  $B = -y_0$ . Sonach lautet die Gleichung der elastischen Linie für diesen Fall:

$$y = y_0 - y_0 \cos a x = y_0 (1 - \cos a x) \dots 125.$$

Für  $x = l$  wird  $y = y_0$ ; demnach  $y_0 = y_0 (1 - \cos a l)$ . Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn

$$\cos a l = 0 \dots 126.$$

ist. Soll also der Stab unter Einwirkung der Kraft  $P$  sich so durchbiegen, wie Fig. 137 zeigt, also im Punkte  $C$  die Ordinate  $y$ , im Endpunkte die Ordinate  $y_0$  haben können, so muß  $\cos a l = 0$  sein; es muß also

$$a l = 90^\circ, \text{ bzw. } 270^\circ, \text{ bzw. } 450^\circ \text{ u. f. w.,}$$

oder allgemein

$$a l = \frac{\pi}{2} (2n + 1) \dots 127.$$

sein, worin  $n$  die Werthe 0, 1, 2, 3... annehmen kann. Daraus folgt auch der Werth von  $P$ , welcher den Stab in der angegebenen Weise biegt, also nach den Erklärungen in Art. 134 (S. 122) auch zerknicken kann. Für diesen

Fig. 138.



Fall ist nach Gleichung 127:  $a = \frac{\pi}{2l} (2n + 1)$ , und,

da  $a = \sqrt{\frac{P}{E \mathcal{J}}}$  ist,  $\sqrt{\frac{P}{E \mathcal{J}}} = \frac{\pi}{2l} (2n + 1)$ ; also

$$P = \frac{E \mathcal{J} \pi^2}{4 l^2} (2n + 1)^2 \dots 128.$$

Die zugehörige Wellenlänge  $\lambda$  folgt aus Gleichung 119. Es ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{a} = \frac{l}{2n + 1} \dots 129.$$

Die beiden Gleichungen geben Aufschluss über die Gröfse der Grenzwerte  $P$ , welche bei den verschiedenen Anordnungen des eingespannten Stabes einzuführen sind.

Bei dem in Fig. 137 u. 138 vorgeführten Falle ist die ganze Wellenlänge  $\lambda$  viermal so groß, als die freie Länge  $l$ , d. h. es ist  $\lambda = 4l$ ; demnach folgt für diesen Fall aus der Gleichung 129:

$n = 0$ , und damit aus Gleichung 128

$$P = \frac{E \mathcal{J} \pi^2}{4 l^2} \dots 130.$$

Wird ein Punkt  $E$  im Abstände  $\frac{l}{3}$  vom Einspannungspunkte fest gelegt, so muß die Formänderung so erfolgen, daß  $l = \frac{3}{4} \lambda$  (Fig. 140) wird; dafür folgt aus



Gleichung 129:  $\lambda = \frac{3\lambda}{2n+1}$  die Gröfse  $n = 1$ , ferner aus Gleichung 128 als zerknickende Kraft

$$P = \frac{9 E \mathcal{F} \pi^2}{4 l^2} \dots 131.$$

Werden endlich zwei Punkte  $E$  und  $F$  in den Abständen  $\frac{l}{5}$  und  $\frac{3}{5} l$  vom Einspannungspunkte fest gehalten (Fig. 139), so wird  $\lambda = \frac{4}{5} l$  und aus Gleichung 129:  $n = 2$ ; alsdann ist die zerknickende Kraft

$$P = \frac{25}{4} \frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$$

Man sieht, wie wesentlich der Grenzwert durch angemessene Construction erhöht werden kann.

β) Stab mit beiderseits frei drehbaren Enden (Fig. 141). Die symmetrische Belastung des Stabes wird zur Folge haben, dafs beide Stabhälften, oberhalb und unterhalb der Stabmitte, sich genau gleich verhalten; man kann demnach diesen Fall auf den vorhergehenden dadurch zurückführen, dafs man den Anfangspunkt des Coordinatensystems in die Stabmitte legt. Jede Hälfte verhält sich dann genau eben so, wie der Stab im vorigen Artikel; die zerknickende Kraft  $P$ , d. h. der Grenzwert von  $P$ , ist demnach aus der Gleichung 128 zu entnehmen, jedoch mit der Aenderung, dafs statt des dortigen  $l$  hier  $\frac{l}{2}$  einzusetzen ist, weil die dort mit  $l$  bezeichnete Länge hier nur  $\frac{l}{2}$  beträgt.

Für den vorliegenden Fall ist also

$$P = \frac{E \mathcal{F} \pi^2 (2n+1)^2}{4 \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2} (2n+1)^2$$

und

$$\lambda = \frac{4 \frac{l}{2}}{2n+1} = \frac{2l}{2n+1} \dots 132.$$

Bei dem in Fig. 142 dargestellten Falle ist  $\lambda = 2l$ , d. h.  $n = 0$ , mithin

$$P = \frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$$

Wird ein Punkt  $E$  in der Mitte des Stabes fest gehalten, so findet die Durch-

Fig. 139.

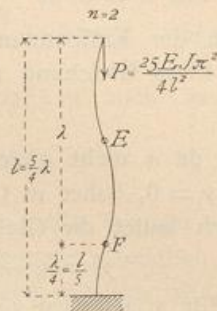


Fig. 140.

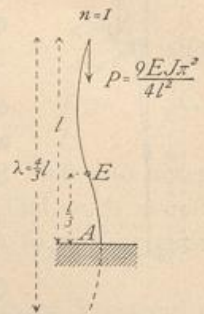
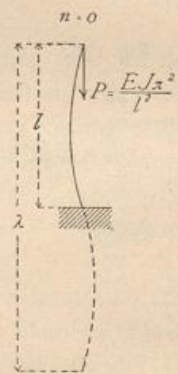


Fig. 141.



Fig. 142.



136.  
Stab  
mit freien  
Enden.



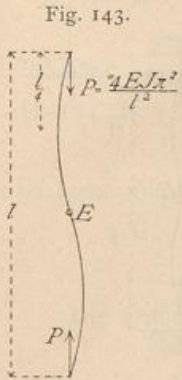


Fig. 143.

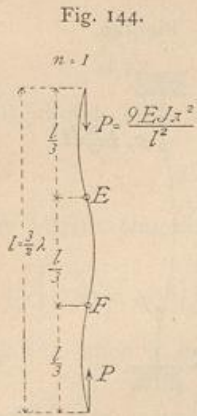


Fig. 144.

biegung nach Fig. 143 so statt, dass  $l = \lambda$ , also  $n = \frac{1}{2}$  wird; alsdann hat  $P$  den Werth:

$$P = \frac{4 E J \pi^2}{l^2}.$$

Sind endlich zwei Punkte  $E$  und  $F$  in den Abständen  $\frac{l}{3}$  von den Endpunkten fest gehalten, so dass die Formänderung nach Fig. 144 eintreten muss, so wird  $l = \frac{3}{2} \lambda$ , also  $n = 1$  und

$$P = \frac{9 E J \pi^2}{l^2}.$$

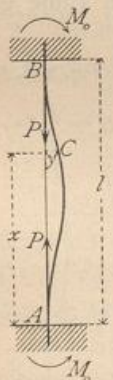
Die Formänderung kann auch unter Beibehaltung der Punkte  $E, F$  und der Endpunkte so eintreten, dass die Bogenlinien auf diejenige Seite der ursprünglichen Axe fallen, welche der gezeichneten entgegengesetzt ist.

γ) Stab mit eingespannten Enden (Fig. 145). Beide Endpunkte des Stabes verbleiben in Folge der Einspannung in der Lothrechten der Axe  $XX$ ; die Tangente an die Axe in diesen Punkten, d. h. die Axenrichtung, kann sich nicht verändern. An jedem Einspannungspunkte muss demnach ein Kräftepaar wirken, dessen Moment stets genügend groß ist, um den Stab in der ursprünglichen Richtung zu erhalten; dieses Moment möge  $M_0$  genannt werden. Für einen beliebigen Punkt  $C$  mit der Abscisse  $x$  ist das Biegemoment

137.  
Stab mit  
eingespannten  
Enden.

$$M = M_0 - P y = \left( \frac{M_0}{P} - y \right) P.$$

Fig. 145.



Demnach lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie hier:

$$E J \frac{d^2 y}{d x^2} = P \left( \frac{M_0}{P} - y \right) \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P}{E J} \left( \frac{M_0}{P} - y \right).$$

Abkürzungsweise werde wieder  $\frac{P}{E J} = a^2$  gesetzt; alsdann ist

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a^2 \left( \frac{M_0}{P} - y \right).$$

Als Gleichung der elastischen Linie ergibt sich

$$y = \frac{M_0}{P} + A \sin a x + B \cos a x; \dots \dots \dots 133.$$

ferner

$$\frac{d y}{d x} = A a \cos a x - B a \sin a x \dots \dots \dots 134.$$

Die Constanten  $A$  und  $B$  ergeben sich in folgender Weise. Für  $x = 0$  ist  $y = 0$ , demnach in Gleichung 133:  $0 = \frac{M_0}{P} + B$  und  $B = -\frac{M_0}{P}$ . Für  $x = 0$  wird  $\frac{d y}{d x} = 0$ , folglich in Gleichung 134:  $0 = A a$  und, da  $a$  nicht gleich Null ist,  $A = 0$ . Die Gleichung der elastischen Linie lautet sonach im vorliegenden Falle:

$$y = \frac{M_0}{P} - \frac{M_0}{P} \cos a x = \frac{M_0}{P} (1 - \cos a x). \dots \dots \dots 135.$$



Für  $x = l$  ist  $y = 0$ , demnach

$$0 = \frac{M_0}{P} (1 - \cos a l) \text{ oder } \cos a l = 1.$$

Damit diese Gleichung erfüllt werde, muß

$$a l = 2 n \pi$$

sein, worin  $n$  die Werthe 0, 1, 2, 3 . . . haben kann.

Aus Gleichung 119 folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2 \pi l}{2 n \pi} = \frac{l}{n} \text{ oder } \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{n}.$$

Ferner wird nach Gleichung 119

$$a^2 = \frac{P}{E \mathcal{F}} = \frac{4 \pi^2}{\lambda^2} \text{ und } P = \frac{4 E \mathcal{F} \pi^2}{\lambda^2}.$$

Diese beiden Gleichungen geben über die GröÙe von  $P$  Aufschluss. Es ist

für $n = 1$ :	für $n = 2$ :
$\frac{\lambda}{l} = 1 \text{ oder } \lambda = l;$	$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2} \text{ oder } \lambda = \frac{l}{2};$
$P = \frac{4 E \mathcal{F} \pi^2}{l^2};$	$P = \frac{16 E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$

Der erstere Fall ist durch Fig. 146, der zweite durch Fig. 147 dargestellt; letzterer tritt ein, wenn der Punkt  $E$  in der Stabmitte fest gehalten wird.

δ) Stab mit einem eingespannten und einem in der Lothrechten geführten Ende (Fig. 148). Wenn der Punkt  $B$  nicht in der lothrechten Linie geführt wäre, würde er etwa die punktirte Lage eingenommen haben; die Führung muß also durch eine wagrechte Kraft  $H$  verursacht werden, welche stets genügend groß ist, um ein Ausweichen von  $B$  zu verhüten. Diese Kraft  $H$  ist ihrer GröÙe nach nicht bekannt.

Das Biegemoment für irgend einen Punkt  $C$  des Stabes mit der Abscisse  $x$  ist nun

$$M = H(l - x) - P y = P \left[ \frac{H}{P} (l - x) - y \right],$$

und die Differentialgleichung der elastischen Linie (siehe Gleichung 100)

$$E \mathcal{F} \frac{d^2 y}{d x^2} = P \left[ \frac{H}{P} (l - x) - y \right]$$

oder

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P}{E \mathcal{F}} \left[ \frac{H}{P} (l - x) - y \right] \dots \dots \dots 136.$$

Man setzt, um diese Gleichung aufzulösen,  $\frac{d^2 y}{d x^2} = z$ ; wieder sei abkürzungsweise  $\frac{P}{E \mathcal{F}} = a^2$ ; alsdann ist

$$z = a^2 \left[ \frac{H}{P} (l - x) - y \right] \text{ und } \frac{d z}{d x} = a^2 \left( - \frac{H}{P} - \frac{d y}{d x} \right);$$

Fig. 146.

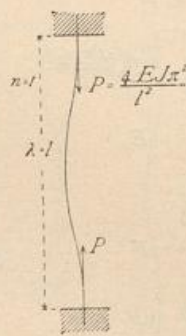
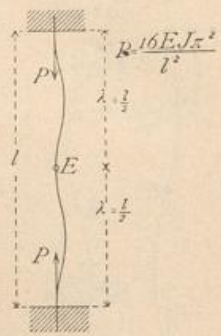
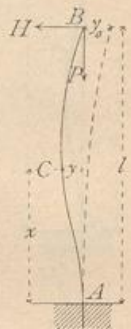


Fig. 147.



138.  
Stab mit einem  
eingespannten  
und einem  
geführten Ende.

Fig. 148.





ferner

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = - a^2 \frac{d^2 y}{d x^2} = - a^2 z.$$

Die Auflöfung dieser Differentialgleichung ergibt wiederum genau, wie in Art. 134 (S. 123)

$$z = A \sin a x + B \cos a x, \dots \dots \dots 137.$$

und wenn für  $z$  der Werth eingeführt wird,

$$a^2 \left[ \frac{H}{P} (l - x) - y \right] = A \sin a x + B \cos a x \dots \dots \dots 138.$$

Die Differentiation nach  $x$  ergibt

$$- a^2 \left( \frac{H}{P} + \frac{d y}{d x} \right) = A a \cos a x - B a \sin a x \dots \dots \dots 139.$$

Aus den beiden Gleichungen 138 u. 139 ergeben sich die Werthe der Constanten  $A$  und  $B$ , wie folgt.

Für  $x = 0$  ist  $y = 0$ , also nach Gleichung 138:  $\frac{a^2 H}{P} l = B$ ; für  $x = 0$  ist  $\frac{d y}{d x} = 0$ , also nach Gleichung 139:  $-\frac{a^2 H}{P} = A a$  und  $-\frac{a H}{P} = A$ . Endlich ist für  $x = l$  auch  $y = 0$ , weil der Endpunkt des Stabes in der Lothrechten geführt wird, also nach Gleichung 138

$$0 = A \sin (a l) + B \cos (a l), \text{ woraus } \operatorname{tg} a l = -\frac{B}{A}$$

folgt, und wenn für  $B$  und  $A$  die foeben gefundenen Werthe eingefetzt werden,

$$\operatorname{tg} a l = a l \dots \dots \dots 140.$$

Diese Beziehung findet statt für  $a l = 0$ , auferdem aber auch für den Winkel  $257^\circ 27' 12''$ ; für diesen Winkel ist  $\operatorname{tg} a l = a l = 4,4934$ , also  $a = \frac{4,4934}{l}$  und da  $a^2 = \frac{P}{E \mathcal{F}}$  ist, so wird

$$P = \frac{E \mathcal{F} (4,4934)^2}{l^2} = 20,19 \frac{E \mathcal{F}}{l^2} \dots \dots \dots 141.$$

Dies ist der Werth von  $P$ , für welchen Gleichung 140 erfüllt ist und einen Sinn hat; der Werth  $a l = 0$  ist nicht zu verwerthen. Dieses  $P$  vermag sonach die in Fig. 148 gezeichnete Formänderung hervorzurufen, also nach Früherem auch den Stab zu zerknicken.

In Art. 135 bis 138 sind diejenigen Werthe der zerknickenden Kraft entwickelt worden, welche für die Praxis hauptsächlich von Bedeutung sind. Nachstehend sind dieselben in Fig. 149 bis 152 übersichtlich zusammengestellt, wobei überall der Stab auf seine ganze Länge frei angenommen ist; der Werth von  $P$  im vierten Falle ist des bequemen Vergleiches wegen ebenfalls als Product mit dem Factor  $\frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}$  dargestellt.

Die Tragfähigkeit der Stäbe verhält sich demnach

in den Fällen	1	2	4	3
wie	$\frac{1}{4}$	: 1	: 2,048	: 4.

139.  
Zusammen-  
stellung.



Fig. 149.  
Fall 1.

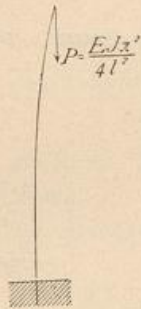


Fig. 150.  
Fall 2.



Fig. 151.  
Fall 3.

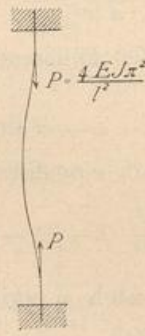
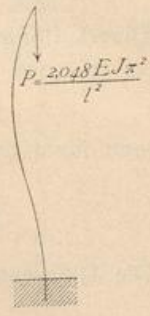


Fig. 152.  
Fall 4.



Durch entsprechende Endanordnung würde man also die Tragfähigkeit des Stabes verfehzhnfachen können. Die angegebenen Kräfte sind thatfächlich im Stande, den Stab zu zerknicken, und deshalb sind Sicherheits-Coefficienten einzuführen.

2) Querschnittsermittlung bei centrischer Druckbelastung.

140.  
Zulässige  
Beanspruchung.

Die unter 1 entwickelten Formeln geben die Gröfse derjenigen Kraft  $P$  an, welche im Stande ist, den Stab oder die Stütze zu zerknicken. Die dem Stabe wirklich zuzumuthende Last darf naturgemäfs diesen Werth niemals erreichen; sie darf nur einen Bruchtheil des ermittelten Knickwerthes betragen. Versteht man unter  $s$  den fog. Sicherheits-Coefficienten, unter  $C$  einen von der Endbefestigung des Stabes abhängigen Coefficienten, so ist die Kraft, welche mit Rücksicht auf die Zerknickungsgefahr auf den Stab wirken darf,

$$P = \frac{C E \mathcal{F}}{s l^2} \dots \dots \dots 142.$$

Dieser Werth ist aber nicht ohne Weiteres für alle Fälle anwendbar. Wenn die Stablänge  $l$ , also auch die im Nenner vorkommende Gröfse  $l^2$ , sehr klein ist, so ergeben sich für  $P$  sehr grofse Werthe, gröfsere Werthe, als die einfache Druckbeanspruchung des Stabes gestattet. Wird die zulässige Druckbeanspruchung für die Flächeneinheit des Querschnittes mit  $K$ , die Querschnittsfläche mit  $F$  bezeichnet, so darf höchstens sein

$$P = F K \dots \dots \dots 143.$$

Gröfser, als der Werth in Gleichung 143 ist, darf  $P$  mit Rücksicht auf die zulässige Druckbeanspruchung nicht werden; gröfser, als der Werth in Gleichung 142 ist, darf  $P$  der Zerknickungsgefahr halber nicht werden; deshalb ist stets der kleinere dieser beiden Werthe für diejenige Belastungsgröfse maßgebend, welche dem Stabe zugemuthet werden darf. Bei grofser Stablänge  $l$  ergibt die Gleichung 142, bei geringer Stablänge  $l$  die Gleichung 143 kleinere Werthe für  $P$ . Der Grenzwert von  $l$ , etwa  $l_1$ , wird derjenige sein, für welchen aus beiden Gleichungen derselbe Werth von  $P$  folgt. Dieser Grenzwert ergibt sich durch Gleichsetzung der beiden Werthe von  $P$  in den Ausdrücken 142 u. 143 zu

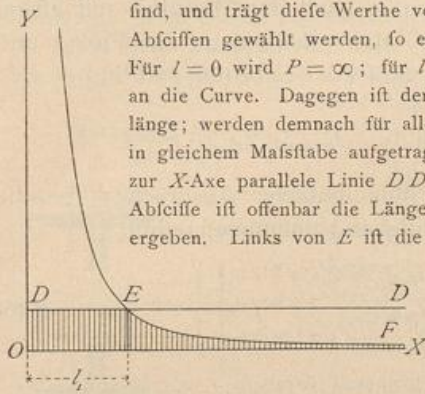
$$l_1 = \sqrt{C} \sqrt{\frac{E}{K s}} \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{F}} \dots \dots \dots 144.$$



Zerknickungsgefahr tritt erst auf, wenn  $l > l_1$  ist; demnach ist, falls die Stablänge kleiner als  $l_1$  ist, die Gleichung 143, falls sie größer als  $l_1$  ist, die Gleichung 142 anzuwenden.

Klaren Einblick in die hier maßgebenden Verhältnisse verschafft die graphische Darstellung der Veränderlichkeit von  $P$  in Fig. 153. Ermittelt man diejenigen Werthe von  $P$ , welche ein Stab bei verschiedenen Längen mit Rücksicht auf die Zerknickungsgefahr ertragen kann, falls Material,

Fig. 153. Querschnittsform und Querschnittsgröße, so wie Befestigungsweise der Enden stets dieselben sind, und trägt diese Werthe von  $P$  als Ordinaten auf, während die zugehörigen Längen als Abscissen gewählt werden, so erhält man eine Curve, offenbar die Curve der Gleichung 142. Für  $l = 0$  wird  $P = \infty$ ; für  $l = \infty$  wird  $P = 0$ ; die  $Y$ - und  $X$ -Axe sind also Asymptoten an die Curve. Dagegen ist der Werth für  $P$  aus Gleichung 143 unabhängig von der Stablänge; werden demnach für alle möglichen Längen diese Werthe ermittelt und als Ordinaten in gleichem Maßstabe aufgetragen, wie die Werthe aus Gleichung 142, so ergibt sich eine zur  $X$ -Axe parallele Linie  $DD$ . Im Punkte  $E$  schneiden sich beide Linien; die zugehörige Abscisse ist offenbar die Länge  $l_1$ , für welche beide Gleichungen denselben Werth von  $P$  ergeben. Links von  $E$  ist die Linie  $DE$ , rechts von  $E$  die Curve  $EF$  maßgebend. Die schraffierte Fläche deutet dies an.



Wenn, wie gewöhnlich, die Last  $P$  und die Länge  $l$  gegeben sind, so handelt es sich um die Ermittlung von Form und Größe des Stabquerschnittes. Für diese Bestimmung

141.  
Querschnitts-  
ermittlung.

stehen die beiden Gleichungen 142 u. 143 zur Verfügung.  $F$  und  $\mathcal{F}$  müssen wenigstens die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe haben, so daß sich die Bedingungen für die Querschnittsbildung ergeben zu

$$F \geq \frac{P}{K} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{min} \geq \frac{P s l^2}{C E} \dots \dots \dots 145.$$

Dabei ist zu bemerken, daß, wenn Ausbiegen nach allen Richtungen möglich ist, das kleinste für eine Schwerpunktsaxe des Querschnittes sich ergebende Trägheitsmoment zum mindesten die verlangte Größe haben muß; deshalb wurde in Gleichung 145:  $\mathcal{F}_{min}$  gesetzt. Ist Ausbiegen nur nach bestimmten Richtungen möglich, so muß das kleinste in Betracht kommende Schweraxen-Trägheitsmoment die berechnete Größe haben.

Die in obigem Ausdruck vorkommenden Constanten  $C$ ,  $E$ ,  $K$  und  $s$  bedeuten bestimmte Zahlenwerthe; für die in Fig. 149 bis 152 dargestellten vier Fälle ist  $C$ :

Fall 1:	Fall 2:	Fall 3:	Fall 4:
$C = \frac{\pi^2}{4}$	$= \pi^2$	$= 4 \pi^2$	$= 2 \pi^2$ (genügend genau)
$\sqrt{C} = 1,57$	$= 3,14$	$= 6,28$	$= 4,44$ .

Die Coefficienten  $E$ ,  $K$  und  $s$  haben für alle Stäbe aus demselben Material gleiche Werthe; wird als Flächeneinheit das Quadrat-Centimeter, als Kräfteinheit das Kilogramm angenommen, so kann man für  $K$ ,  $E$  und  $s$  nachstehende Werthe setzen:

für Schweifseifen und Flusseifen:	für Gußeisen:	für Holz:
$E = 2000000$	$1000000$	$120000 \text{ kg für } 1 \text{ qcm}$
$K = 700$	$500$	$65 \text{ » »}$
$s = 5$	$8$	$10$



Alsdann wird auch  $P$  in Kilogr. eingeführt werden müssen;  $F$  wird in Quadr.-Centim. und  $\mathcal{F}$  in  $\text{cm}^4$  erhalten. Die Formel ergibt für Fall 2 und Schweifseifen

$$\mathcal{F}_{min} \geq \frac{P \text{kg} \cdot 5 \text{ lcm}^2}{\pi^2 \cdot 2000000}$$

Wesentlich bequemer werden die Ausdrücke für  $\mathcal{F}_{min}$ , wenn man  $P$  und  $E$  in Tonnen,  $l$  in Met. einführt und  $\pi^2 = 10$  fetzt; letzteres ist nicht ganz genau, aber der Fehler kommt gar nicht in Betracht, da man je nach dem Baustoff mit einem Sicherheitscoefficienten 5, 8, bzw. 10 arbeitet. Man erhält dann für Fall 2 und Schweifseifen, da  $P \text{kg} = 1000 Pt$ ,  $l \text{cm} = 100 l^m$  und  $l \text{cm}^2 = 10000 l^m^2$  ist,

$$\mathcal{F}_{min} \geq \frac{1000 Pt \cdot 5 \cdot 10000 \cdot l^m^2}{10 \cdot 2000000}, \text{ d. h. } \mathcal{F}_{min} \geq 2,5 Pt l^m^2.$$

Eben so ergeben sich für Holz und Gufseifen sehr einfache Ausdrücke; für die Hauptstoffe sind diese Ausdrücke für Fall 2 nachstehend zusammengestellt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Schweifs- und Flufseifen } \mathcal{F}_{min} \geq 2,5 Pt l^m^2 \\ \text{für Gufseifen } \mathcal{F}_{min} \geq 8 Pt l^m^2 \\ \text{für Holz } \mathcal{F}_{min} \geq 83 Pt l^m^2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots 146.$$

Die Zusammenstellung für alle vier Fälle ergibt die nachstehende Tabelle.  $\mathcal{F}_{min}$  muß sein  $\geq$ :

Constructions-material	Fall 1 (Fig. 149)	Fall 2 (Fig. 150)	Fall 3 (Fig. 151)	Fall 4 (Fig. 152)
Schweifseifen und Flufseifen .	10	2,5	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{4}$
Gufseifen . . . . .	32	8	2	4
Holz . . . . .	332	83	20	41

$P$  Tonnen  $\times l$  (Meter)<sup>2</sup>

Je mehr sich der Flächeninhalt des Querschnittes, welcher dem nothwendigen Trägheitsmomente entspricht, dem zulässigen Kleinstwerth  $\frac{P}{K}$  nähert, desto zweckmäßiger ist die Construction. Man nimmt gewöhnlich zunächst einen Querschnitt an, für welchen  $F = \frac{P}{K}$  stattfindet und ermittelt das Trägheitsmoment desselben. Genügt letzteres nicht, so ist die Querschnittsfläche entsprechend zu vergrößern, bis das verlangte  $\mathcal{F}$  vorhanden ist. Dieses Verfahren soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

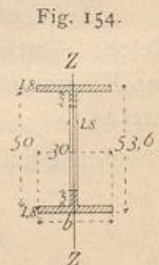
Beispiele.  $\alpha$ ) In einer gufseisernen Stütze sei der größte Druck  $P = 50000 \text{ kg} = 50$  Tonnen; die Länge der Stütze sei  $l = 4,5 \text{ m}$ ; die Enden sollen als bewegliche vorausgesetzt werden; die Querschnittsform sei die neben stehende (Fig. 154); die Querschnittsmaße sind zu ermitteln.

Für einfachen Druck muß  $F = \frac{50000}{500} = 100 \text{ qcm}$  und nach Gleichung 146 muß  $\mathcal{F}_{min} = 8 \cdot 50 \cdot 4,5^2 = 8100$  sein.

Die Höhe des Querschnittes sei durch bauliche Rücksichten zu  $53,6 \text{ cm}$  vorgeschrieben, die Stärke des Steges und der Gurte sei  $1,8 \text{ cm}$ ; alsdann findet, wenigstens bei nicht aufsergewöhnlich großer Breite der Gurtungen, das Minimal-Trägheitsmoment für die Axe  $ZZ$  statt, und es ist

$$\mathcal{F}_Z = \frac{2 \cdot 1,8 \cdot b^3}{12} + \frac{50 \cdot 1,8^3}{12} = 0,3 b^3 + 24,3.$$

Hiermit ist das erforderliche Trägheitsmoment als Function von  $b$  dargestellt, und da nach Obigem auch





$$J_{min} = 8100$$

fein muß, so lautet die Bedingungsgleichung für  $b$ :

$$0,3 b^3 + 24,3 = 8100,$$

woraus sich für  $b = \infty 30$  cm ergibt.

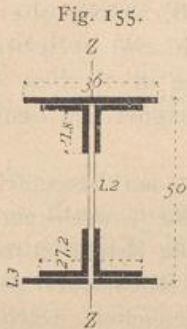
Die Querschnittsfläche wird  $F = 2 \cdot 1,8 \cdot 30 + 50 \cdot 1,8 = 198$  qcm, während nur 100 qcm Querschnittsfläche nöthig sind. Daraus folgt, daß unbedenklich ein Theil des Steges auf einzelne Theile der Höhe fortfallen kann; alsdann bleibt als Querschnittsfläche der schraffierte Theil übrig, und zwar in diesem Falle  $F = 2 \cdot 30 \cdot 1,8 + 2 \cdot 5 \cdot 1,8 = 126$  qcm, und diese Querschnittsgröße genügt. Auch das Trägheitsmoment wird durch Fortfall des Steges nur unwesentlich beeinflusst.

2) In einem schmiedeeisernen Stabe herrscht ein Druck  $P = 130000$  kg = 130 Tonnen; die Stablänge betrage 6,0 m, der Stab sei beiderseits eingespannt.

Nach obiger Tabelle muß

$$J = \frac{5}{8} \cdot 130 \cdot 6^2 = 2925 \text{ cm}^4,$$

ferner  $F = \frac{130000}{700} = 196$  qcm fein.



Der Querschnitt in Fig. 155 wurde vorläufig, wie folgt, zusammengesetzt:

4	Winkleisen zu $13 \times 13 \times 1,2$ cm	= 29,8 qcm	. . . . .	= 119,2 qcm
1	obere Deckplatte $36 \times 1,3$ cm	. . . . .	= 46,8 »	
1	untere Deckplatte $34,8 \times 1,3$ cm	. . . . .	= 45,2 »	
	Summe des Brutto-Querschnittes			211,2 qcm
ab für 4	Nietlöcher $4 \times 2,5 \times 2,3$ cm	. . . . .	= 23,0 »	
	bleibt Netto-Querschnitt			188,2 qcm,

der allerdings etwas kleiner als  $F$  ist, aber genügen dürfte.

Für diesen Querschnitt findet  $J_{min}$  für die ZZ-Axe statt, und es ist

$$J_Z = \frac{1}{12} [2 \cdot 1,3 \cdot 36^3 + 2 \cdot 1,2 \cdot 27,2^3 + 2 \cdot 11,8 \cdot 3,6^3 - (2 \cdot 13 + 1,3) 1,2^3] - 4 \cdot 2,5 \cdot 2,3 \cdot 7^2 = 13094.$$

Das Trägheitsmoment ist also bei ausreichender Querschnittsfläche wesentlich größer, als es zu fein braucht, der Querschnitt sonach genügend.

Sehr einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn man den Querschnitt aus den »Deutschen Normal-Profilen für Walzeisen« bildet, für welche die Minimal-Trägheitsmomente im vorhergehenden Halbband dieses »Handbuches« (Abth. I: Die Technik der wichtigeren Baustoffe) angegeben sind. Man berechnet das nothwendige Trägheitsmoment und die nöthige Querschnittsfläche aus den Ausdrücken 145 und sucht aus den Tabellen ein Profileisen, bzw. einen aus Profileisen zusammengesetzten Querschnitt, dessen Minimal-Trägheitsmoment und Querschnittsfläche den verlangten zum mindesten gleich sind.

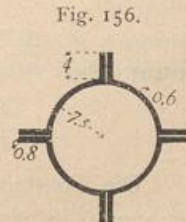
Beispiel. In einem schmiedeeisernen Stabe herrsche ein Druck  $P = 18000$  kg = 18 Tonnen; die Stablänge sei  $l = 5,0$  m; die Stabenden seien drehbar; mithin ist Fall 2 zu Grunde zu legen.

Nach Gleichung 146 muß  $J = 2,5 \cdot 18 \cdot 5^2 = 1125$  cm<sup>4</sup> und nach Gleichung 143:  $F = \frac{18000}{700} = 26$  qcm fein.

Soll der Stab aus einem I-förmigen Walzbalken gebildet werden, so ist das Profil Nr. 38 (siehe die angezogenen Tabellen) zu wählen; bei demselben ist  $J_{min} = 1138$ ,  $F$  (nach Abzug für Niete) =  $107,5 - 4 \cdot 2 \cdot 2,05 = 91,1$  qcm und das Gewicht für 1 m 83,9 kg.

Wollte man statt dessen einen aus 4 kreuzförmig gestellten Winkleisen gebildeten Querschnitt verwenden, so könnte man 4 Winkleisen Nr. 9 (siehe die angezogenen Tabellen) zu  $9 \times 9 \times 1,3$  cm verwenden, deren  $J = 1284$  ist, also genügt; dabei ist der Netto-Querschnitt  $F = 4 \cdot 21,7 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1,3$  (für Niete) = 76,4 qcm und das Gewicht  $4 \cdot 16,9$  kg = 67,6 kg. Zweckmäßiger ist die Verwendung von 4 Winkleisen Nr. 10 zu  $10 \times 10 \times 1$  cm mit  $J = 1346$ ,  $F = 4 \cdot 19 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 68$  qcm und einem Gewicht für 1 m von  $4 \cdot 14,8$  kg = 59,2 kg.

Würde endlich der Querschnitt aus 4 Quadranteisen (nach Fig. 156) konstruirt, so wird bei neben stehendem Querschnitt (siehe die angezogenen Tabellen)  $J = 2046$ ,  $F = 54,9 - 4 \cdot 2 \cdot 0,8$  (für Niete) = 48,9 qcm und das Gewicht für das laufende Meter 42,9 kg.





Am ungünstigsten ist demnach im vorliegenden Falle das I-Profil mit 83,9 kg Gewicht; günstiger ist das kreuzförmige Profil mit 59,2 kg, und am günstigsten ist das aus Quadranteifen zusammengesetzte, röhrenförmige Profil mit 42,9 kg Gewicht.

3) Querschnittsermittlung bei excentrischer Druckbelastung.

142.  
Zulässige  
Beanspruchung.

Man ist neuerdings vielfach bestrebt gewesen, Grösse und Form des Querschnittes auf Knicken axial beanspruchter Stäbe aus der Bedingung zu bestimmen, dafs die grösste, wirklich auftretende Beanspruchung  $\sigma$  an keiner Stelle die für das Material als zulässig erachtete Beanspruchung überschreite. Die Spannung  $\sigma$  ist, sobald die Kraft für den Querschnitt ein Moment hat, in hohem Mafse von der Grösse der Ausbiegung  $y$  abhängig; da aber diejenige axial wirkende Kraft, welche überhaupt eine Ausbiegung  $y$  hervorrufen kann, nach Obigem auch ein beliebig grosses  $y$  und damit auch ein beliebig grosses  $\sigma$  erzeugen kann, so ist  $\sigma$ , eben so wie  $y$ , bei der oben betrachteten Aufgabe eine unbestimmte Grösse, eignet sich demnach nicht als Grundlage für die Querschnittsbestimmung.

Man darf weiter nicht erwarten, dafs die Versuchsergebnisse mit den theoretisch entwickelten Werthen der zerknickenden Kraft genau übereinstimmen; auch eine kleinere Kraft kann bereits Zerknicken herbeiführen, wenn etwa die Kräfte etwas excentrisch wirken oder nicht genau in die Richtung der Stabaxe fallen oder der Baustoff des Stabes nicht ganz gleichmäfsig ist. Allen diesen Möglichkeiten, welche theoretisch nicht gut verfolgt werden können, wird am besten dadurch Rechnung getragen, dafs man einen Sicherheits-Coefficienten  $n$  einführt, also nur den  $n$ -ten Theil derjenigen Kraft auf den Stab wirken läfst, welche denselben nach der Formel zerknicken könnte. Es ist gut, dafs man die Stelle ganz genau kennt, an welcher alle Unsicherheiten zusammentreffen und diese ganz klar bezeichnet.

143.  
Querschnitts-  
ermittlung.

Wenn das Mafs der Excentricität der wirkenden Kräfte bekannt wäre, so würde auch eine genaue Berechnung möglich sein; denn dann hätte der Pfeil einen ganz bestimmten Werth, und damit würden sich auch für  $\sigma$  gewisse, von der Grösse der Kraft  $P$  abhängige Werthe ergeben. Da unter Umständen die Grösse der Excentricität bekannt ist, bzw. angenommen werden kann, so soll die Berechnung hier vorgeführt werden.

Für irgend einen Punkt  $C$  des Stabes  $AB$  (Fig. 157), welcher ursprünglich mit der Axe  $AX$  zusammenfiel, ist

$$M = P(p + y_0 - y) = E \mathcal{J} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{E \mathcal{J}} (p + y_0 - y),$$

und wenn wieder, wie oben, abkürzungsweise  $\frac{P}{E \mathcal{J}} = a^2$  gesetzt wird,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 (p + y_0 - y).$$

Die zweimalige Integration dieser Gleichung ergibt

$$y = (p + y_0) + A \sin ax + B \cos ax \quad \dots \quad 147.$$

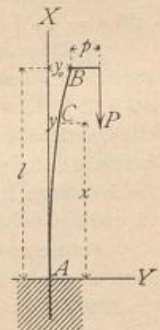
Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = A a \cos ax - B a \sin ax \quad \dots \quad 148.$$

Die Constanten  $A$  und  $B$  ergeben sich folgendermassen.

Für  $x = 0$  ist  $y = 0$ , also  $0 = p + y_0 + B$  und  $B = -(p + y_0)$ ;

Fig. 157.





für  $x = 0$  ist  $\frac{dy}{dx} = 0$ , also  $0 = A a$  und  $A = 0$ ; demnach heißt die Gleichung der elastischen Linie:

$$y = (p + y_0) (1 - \cos a x) \dots \dots \dots 149.$$

Für  $x = l$  ist  $y = y_0$ , d. h.  $y_0 = (p + y_0) (1 - \cos a l)$  oder

$$y_0 = p \frac{1 - \cos a l}{\cos a l} \dots \dots \dots 150.$$

$y_0$  ist also eine ganz bestimmte Gröfse. Das gröfste Moment findet am Einspannungspunkte  $A$  statt, wo es den Werth

$$P(p + y_0) = P p \left( 1 + \frac{1 - \cos a l}{\cos a l} \right) = \frac{P p}{\cos a l}$$

hat. In diesem Querschnitte wird der gröfste Druck den Werth haben

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{P p r}{\mathcal{F} \cos a l} \dots \dots \dots 151.$$

In dieser Gleichung ist  $r$  der Abstand des meist gespannten Querschnittspunktes von der Axe,  $\mathcal{F}$  das in Betracht kommende Trägheitsmoment. Stellt man die Bedingung, dafs  $\sigma_{max}$  höchstens gleich  $K$  sein solle, so ergibt sich

$$K = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{F p r}{\mathcal{F} \cos a l} \right), \dots \dots \dots 152.$$

und die zulässige Belastung der Stütze vom Querschnitt  $F$  und dem Trägheitsmomente  $\mathcal{F}$

$$P = \frac{F K}{1 + \frac{F p r}{\mathcal{F} \cos a l}} \dots \dots \dots 153.$$

Da  $a = \sqrt{\frac{P}{E \mathcal{F}}}$  eine Gröfse ist, welche fowohl vom Drucke  $P$ , wie von der Querschnittsgealtung, also von Werthen abhängt, welche meistens von vornherein nicht gleichzeitig gegeben sind, so kann der Ausdruck für  $P$  aus Gleichung 153 nicht in geschlossener Form entwickelt werden; denn  $a$  kommt auch auf der rechten Seite vor. Man wird deshalb zunächst eine angenäherte Rechnung vornehmen, auf welche die genauere zu folgen hat. Aehnlich ist es, wenn  $P$  und das Mafs der Excentricität gegeben sind und der Querschnitt gefucht wird. Dann ist aus Gleichung 153, wenn mit  $R$  der Trägheitsradius bezeichnet wird, also  $\mathcal{F} = F R^2$  gesetzt wird,

$$F = \frac{P}{K} \left( 1 + \frac{p r}{R^2 \cos a l} \right) \dots \dots \dots 154.$$

Die Anwendung dieses Ausdruckes soll an einem einfachen Beispiele gezeigt werden.

144.  
Beispiel.

Die Stütze sei eine Holzstütze von der Länge  $l = 5 \text{ m} = 500 \text{ cm}$ ; der Querschnitt sei quadratisch und habe die Seitenlänge  $d$ ; die Excentricität soll so weit gehen können, dafs die Kraft  $P$  ungünstigstenfalls in der Kante des Quadrates angreift. Dann ist

$$p = \frac{d}{2}, \quad F = d^2, \quad r = \frac{d}{2}, \quad \mathcal{F} = F R^2 = \frac{d^4}{12} = d^2 R^2,$$

$$R^2 = \frac{d^2}{12}, \quad E = 120000 \text{ kg}, \quad K = 65 \text{ kg}, \quad p r = \frac{d^2}{4}.$$



Ferner solle eine Kraft  $P = 16000$  kg ertragen werden. Es ist also

$$a = \sqrt{\frac{P}{E \mathcal{J}}} = \sqrt{\frac{16000 \cdot 12}{120000 d^4}} = \frac{1,265}{d^2}, \text{ ferner } al = \frac{632,5}{d^2}; \text{ ferner}$$

$$F = \frac{16000}{65} \left( 1 + \frac{d^2 \cdot 12}{4 d^2 \cos al} \right) = 246 \left( 1 + \frac{3}{\cos \frac{632,5}{d^2}} \right).$$

Zunächst werde  $d = 25$  cm angenommen; dann wird  $F = 246 (1 + 5,66) = 1638$  qcm; demnach müßte  $d = \text{ca. } 40$  cm sein. Wählt man  $d = 35$  cm, so wird

$$F = 246 (1 + 3,45) = 1095 \text{ qcm.}$$

Dieser Werth würde einer Seitenlänge  $d = 33$  cm entsprechen; 35 cm ist also ein angemessener Werth.

4) Empirische Formeln.

145.  
Allgemeine  
Formel

Der Umstand, daß man je nach der größeren oder geringeren Länge des Stabes mit verschiedenen Formeln rechnen muß, ist eine Unbequemlichkeit, der man durch Einführung empirischer Formeln abzuwehren gestrebt hat. Eine solche Formel muß für  $P$  bei kleinen Werthen von  $l$  nahezu oder genau die für einfachen Druck entwickelte Gleichung 143, dagegen bei großen Werthen von  $l$  die mit Rücksicht auf Zerknicken gefundene Gleichung 142 ergeben. Diesen Anforderungen entspricht folgende Formel<sup>30)</sup>:

$$P = \frac{K F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \frac{K s F l^2}{C E}} \quad \dots \quad 155.$$

in welcher alle Buchstaben die früheren Bedeutungen haben.

Für  $l = 0$  wird entsprechend der für kurze Stäbe aufgestellten Gleichung 143 auch hier  $P = K F$ ; für den Werth  $l = \infty$  mag obiger Formel die Gestalt

$$P = \frac{K F}{1 + \frac{K s F l^2}{C \mathcal{J} E}} \quad \dots \quad 156.$$

gegeben werden. Ist  $l$  sehr groß, bzw.  $= \infty$ , so ist das erste Glied im Nenner verschwindend klein gegen das zweite; die Formel lautet alsdann:

$$P = \frac{K F}{\frac{K s F l^2}{C E \mathcal{J}}} = \frac{C E \mathcal{J}}{s l^2},$$

demnach übereinstimmend mit der Formel 142 für lange Stäbe. Die Gleichung 155 kann also als empirische Formel angewendet werden und giebt auch ziemlich gut mit den Versuchen übereinstimmende Werthe. Aus derselben folgt

$$\frac{P}{K} = \frac{F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \frac{K s}{C E} F l^2},$$

und wenn der nur vom Material des Stabes und der Endbefestigung abhängige Factor  $\frac{K s}{C E} = \alpha$  gesetzt wird,

$$\frac{P}{K} = \frac{F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \alpha F l^2} \quad \dots \quad 157.$$

<sup>30)</sup> Siehe: SCHÄFFER, Bestimmungen der zulässigen Spannung und der Querschnitte für Eifenconstructions. Deutsche Bauz. 1877, S. 498.



$\frac{P}{K}$  ist diejenige Querschnittsfläche, welche der Stab haben müsste, wenn er einfachen Druck zu erleiden hätte. Wir bezeichnen dieselbe mit  $f$ ; alsdann ist

$$f = \frac{F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \alpha f l^2} \dots \dots \dots 158.$$

Die Gleichung 158 kann benutzt werden, um die wirklich nöthige Querschnittsfläche zu berechnen. Denn nach derselben ist

$$F = \frac{f \mathcal{J}}{\mathcal{J} - \alpha f l^2} \dots \dots \dots 159.$$

Das zur Ermittlung der nothwendigen Querschnittsform und -Größe einzuschlagende Verfahren ist nun folgendes. Der größte Druck  $P$ , welcher auf den Stab wirken kann, ist bekannt, durch Rechnung oder Zeichnung gefunden; alsdann ist  $f = \frac{P}{K}$  ebenfalls leicht zu ermitteln. Man construirt nun einen dieser Querschnittsfläche entsprechenden Querschnitt und ermittle das kleinste Trägheitsmoment desselben für eine Schweraxe, also  $\mathcal{J}$ . Bekannt sind jetzt die Größen  $f$ ,  $\mathcal{J}$ ,  $\alpha$  und  $l$ , und die Gleichung 159 ergibt nun die dem Querschnitt wirklich zu gebende Flächengröße  $F$ . Fällt dieselbe größer aus, als die angenommene Querschnittsfläche, so ist letztere entsprechend zu vergrößern, das neue Trägheitsmoment einzusetzen,  $F$  aus Gleichung 159 aufs Neue zu berechnen und dieses Verfahren so lange zu wiederholen, bis eine genügende Uebereinstimmung der wirklichen Querschnittsfläche mit der nöthigen stattfindet. Dabei hat man sich jedoch vor dem Fehler zu hüten, bei den späteren Berechnungen den neuen Werth der Querschnittsfläche für  $f$  einzuführen, da ja  $f$  nicht die wirkliche Querschnittsfläche, sondern den für einen bestimmten Stab unveränderlichen Werth  $\frac{P}{K}$  anzeigt. Bei einiger Uebung ist es leicht, bereits bei der zweiten Rechnung eine entsprechende Querschnittsfläche zu finden.

Tabelle für die Werthe von  $\alpha = \frac{Ks}{CE}$ .

Constructions- material	Allgemeine Formel	Fall 1: Ein Ende ein- gespannt, das andere frei drehbar	Fall 2: Beide Enden frei drehbar	Fall 3: Beide Enden eingespannt	Fall 4: Ein Ende ein- gespannt, das andere lothrecht geführt
Schweißseifen } Flußseifen }	$\frac{0,00175}{C}$	0,00072	0,00018	0,000045	0,00009
Gußseifen . . . . .	$\frac{0,004}{C}$	0,0016	0,0004	0,0001	0,0002
Holz . . . . .	$\frac{0,0054}{C}$	0,0022	0,00054	0,00013	0,00026

146  
Beispiele.

Die Anwendung obiger Formel soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

a) Für einen gußeisernen Stab mit drehbaren Enden und kreuzförmigem Querschnitt (Fig. 158) sei  $P = 4800 \text{ kg}$  und  $l = 200 \text{ cm}$ . Alsdann ist  $f = \frac{4800}{500} = 9,6 \text{ qcm}$  und bei vorläufig, wie in Fig. 158 angenommenem Querschnitt:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{12} (1,5 \cdot 12^3 + 10,5 \cdot 1,5^3) = \approx 219 \text{ cm}^4.$$



Ferner ist  $\alpha = 0,0004$  (vergl. die umstehende Tabelle); mithin müßte

$$F = \frac{219 \cdot 9,6}{219 - 0,0004 \cdot 9,6 \cdot 200^2} = 32 \text{ qcm}$$

fein. Der gewählte Querschnitt hat

$$1,5 \cdot 2 \cdot 12 = 1,5 \cdot 1,5 = 33,75 \text{ qcm},$$

ist also etwas größer, als er zu fein braucht; er empfiehlt sich für die Ausführung.

Die genauere Berechnung nach Formel 145 u. 146 ergibt auf wenigstens eben so einfachem Wege: es muß  $F \geq 9,69 \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{J} \geq 8 \cdot 4,8 \cdot 2^3$ , d. h.  $\mathcal{J} \geq 153,6 \text{ cm}^4$  fein. Der gewählte Querschnitt ist also sehr reichlich.

β) Es sei  $P = 3300 \text{ kg}$ ,  $l = 100 \text{ cm}$ ; der Stab werde durch ein einfaches gleichschenkeliges Winkel-eisen gebildet; der Fall 4 kann angenommen werden. Zunächst ist  $f = \frac{3300}{700} = \infty 4,7 \text{ qcm}$ . Gewählt werde ein Winkel-eisen von  $5,5 \times 5,5 \times 0,8 \text{ cm}$ ; das  $\mathcal{J}_{\min}$  dieses Winkel-eisens ist nach dem Normal-Profil-buch  $9,38 \text{ cm}^4$ , ferner  $\alpha = 0,00009$ . Demnach muß

$$F = \frac{4,7 \cdot 9,38}{9,38 - 0,00009 \cdot 4,7 \cdot 100^2} = 8,55 \text{ qcm}$$

fein. Das gewählte Winkel-eisen hat eine Querschnittsfläche von  $8,16 \text{ qcm}$ .

Die genauere Berechnung nach Formel 145 u. 146 erweist, daß

$$\mathcal{J}_{\min} \geq \frac{5}{4} \cdot 3,3 \cdot 1^2, \text{ also } \mathcal{J}_{\min} \geq 4,125 \text{ cm}^4 \text{ und } F \geq 4,7 \text{ qcm}$$

fein muß. Das Winkel-eisen mit  $F = 8,16 \text{ qcm}$  und  $\mathcal{J}_{\min} = 9,38 \text{ cm}^4$  würde demnach reichlich genügen.

γ) In einem Holzstabe mit quadratischem Querschnitt und nicht beweglichen Enden, bei welchem Fall 4 vorausgesetzt werden kann, herrscht ein Druck  $P = 9500 \text{ kg}$ ; ferner sei  $l = 300 \text{ cm}$ . Es ist  $F = \frac{9500}{65} = 146 \text{ qcm}$ . Wird vorläufig die Querschnittsseite mit  $18 \text{ cm}$  gewählt, so ist

$$\mathcal{J} = \frac{18^4}{12} = 8748 \text{ cm}^4, \quad \alpha = 0,00026 \quad \text{und} \quad F = \frac{146 \cdot 8748}{8748 - 0,00026 \cdot 146 \cdot 300^2} = \infty 240 \text{ qcm}.$$

Der angenommene Querschnitt hat  $18 \times 18 = 324 \text{ qcm}$ , ist also zu groß.

Wird  $h = 17 \text{ cm}$  gewählt, so wird

$$\mathcal{J} = \frac{17^4}{12} = 6960 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad F = \frac{146 \cdot 6960}{6960 - 0,00026 \cdot 146 \cdot 300^2} = 286 \text{ qcm};$$

der gewählte Querschnitt hat  $17 \times 17 = 289 \text{ qcm}$ , ist also sehr passend.

Die genauere Berechnung ergibt, daß

$$\mathcal{J}_{\min} \geq 41 \cdot 9,5 \cdot 3^2, \text{ d. h. } \mathcal{J}_{\min} \geq 3505 \text{ cm}^4$$

fein muß; demnach würde schon ein quadratischer Querschnitt genügen, dessen Seitenlänge  $d$  aus der Bedingung folgt:

$$\frac{d^4}{12} = 3505 \quad \text{oder} \quad d = 14,32 \text{ cm}.$$

Da dieser Querschnitt außerdem eine Fläche  $d^2 = 204,5 \text{ qcm}^2$  aufweist, während  $f$  nur gleich  $146 \text{ qcm}$  zu fein braucht, so ist er ausreichend.

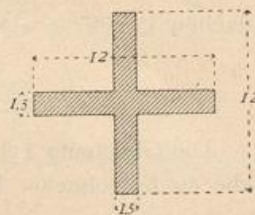
Aus vorstehenden Beispielen erhellt zur Genüge, daß das Bedürfnis für empirische Formeln nicht groß ist; die Berechnung nach den genauen Ausdrücken 145 u. 146 ist durchaus nicht schwierig.

Die üblen Erfahrungen, welche man neuerdings bei verschiedenen großen Bränden mit eisernen Stützen gemacht hat, führten zur Untersuchung der Frage, in welcher Weise die Tragfähigkeit solcher Stützen bei erhöhter Temperatur verändert werde, und zur Aufstellung von Formeln für diese Tragfähigkeit. Die nachstehend aufgeführten Formeln sind von Möller<sup>31)</sup> auf Grund von Versuchen unter

147.  
Tragfähigkeit  
der Stützen  
bei erhöhter  
Temperatur.

31) Siehe: MÖLLER, M. u. R. LÜHMANN. Ueber die Widerstandsfähigkeit auf Druck beanspruchter eiserner Baukonstruktionsteile bei erhöhter Temperatur. Berlin 1888.

Fig. 158.





folgenden Annahmen aufgestellt. Die dem Feuer zugewendete Seite der Stütze zeigt schwache Rothgluth; die andere Seite hat eine bis zu 600 Grad C. geringere Temperatur, welche durch Anspritzen der Säule mit kaltem Wasser herbeigeführt ist; die Beanspruchung der Stützen erfolgt um 1 cm excentrisch, zwischen Gelenken (Fall 2). Die Stütze soll die Last  $P$  noch mit einiger Sicherheit tragen. Die allgemeine Formel, in welcher alle Buchstaben die frühere Bedeutung haben, lautet (vergl. Art. 145, S. 136)

$$P = KF \frac{1}{1 + \alpha \frac{Fl^2}{\gamma}}$$

Die Zahlenwerthe  $K$  und  $\alpha$  ergeben sich aus nachstehenden Formeln:

$$\text{für Schmiedeeisen: } P = 1000 F \frac{1}{1 + 0,0004 \frac{Fl^2}{\gamma}} \dots \dots \dots 160.$$

$$\text{für Gufseisen: } P = 1200 F \frac{1}{1 + 0,0004 \frac{Fl^2}{\gamma}} \dots \dots \dots 161.$$

In diesen Ausdrücken ist  $l$  die freie Länge zwischen den Gelenken; wenn die Stützung als zwischen parallelen Enden erfolgend angenommen werden kann, so ist statt  $l$  nur  $\frac{2}{3}$  der wirklich vorhandenen freien Länge einzuführen.

## 2. Kapitel.

### Träger.

Wie bereits im Eingange zum vorliegenden Abschnitte gefagt wurde, versteht man unter Trägern solche Bau-Constructions, bei denen die Belastungen ausschließlich oder vorwiegend senkrecht zur Richtung der Längsaxe wirken. Die Längsaxe kann sowohl eine gerade, wie eine gebrochene, bezw. krumme Linie sein. Demnach rechnen wir zu den Trägern im weiteren Sinne auch die Dachstühle, die Sprengwerke u. A., bei denen die Längsaxe nicht so deutlich vor die Augen tritt, wie bei den gewöhnlichen Balken; ferner auch die Gewölbe, bei denen die Längsaxe eine krumme Linie ist.

148.  
Allgemeines.

Um die obige Erklärung der Träger auch für diese Constructions unbedingt richtig zu stellen, könnte man in die Erklärung statt der Längsaxe die Verbindungslinie der Auflagerpunkte einführen und demnach die Träger folgendermaßen erklären: Träger sind Bau-Constructions, bei denen die Belastungen ausschließlich oder vorwiegend senkrecht zur Verbindungslinie der Auflager, d. h. der Stützpunkte der Construction, wirken. Im vorliegenden Kapitel sollen nur die Träger im engeren Sinne, welche man gewöhnlich als Balken bezeichnet, behandelt werden, während die Dachstühle und die Gewölbe in den beiden nächsten Abschnitten besprochen werden. Von den Sprengwerken wird bei den Dachstühlen eine besondere Form vorgeführt werden.

Die auf die Bau-Constructions wirkenden äußeren Kräfte sind nach Art. 2 (S. 6):  
1) die Belastungen, d. h. die Eigengewichte und die Nutzlasten, und 2) die Auf-

149.  
Äußere  
Kräfte.