Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

2) Druckvertheilung in Querschnitten, welche nur Druck aufzunehmen vermögen, falls die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneidet

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

Da auf die ſämmtlichen für e_1 und e_2 maſsgebenden Gröſsen $\mathfrak{J}$, F, a_1 und a_2 ausſchlieſslich die Querſchnittsgeſtaltung Einfluſs hat, ſo iſt die Lage der Kernpunkte nur von der Form und Gröſse des Querſchnittes abhängig.

Für das Rechteck iſt $\mathfrak{J} = \frac{b h^3}{12}$, $F = b h$ und $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$; mithin $e_1 = e_2 = \frac{h}{6}$. Soll alſo nur Druck im Querſchnitt ſtattfinden, ſo darf die Kraft den Querſchnitt in keinem gröſseren Abſtande von der Axe ſchneiden, als $\frac{h}{6}$; mit anderen Worten: ſie muſs den Querſchnitt im inneren Drittel ſchneiden (vergl. auch Art. 109, S. 91).

Für den Kreisquerſchnitt iſt $e_1 = e_2 = \frac{d}{8}$, d. h. die Kraft darf das innere Viertel nicht verlaſſen, wenn nur Druck auftreten ſoll. (Vergl. Art. 110, S. 92.)

Für den Kreisringquerſchnitt bei geringer Ringſtärke iſt $e_1 = e_2 = \frac{d}{4}$; die Kraft muſs alſo in der inneren Hälfte verbleiben.

2) Druckvertheilung in Querſchnitten, welche nur Druck aufzunehmen vermögen, falls die Kraftebene alle Querſchnitte in Hauptaxen ſchneidet.

Die für die Druckvertheilung unter 1 entwickelten Geſetze gelten auch für Conſtructionen, welche nur Druck aufnehmen können, ſo lange die Kraft eine derartige Lage hat, daſs im ganzen Querſchnitt wirklich nur Druckſpannungen auftreten, ſo lange alſo die Kraft innerhalb der Kernpunkte liegt. 129. Druckvertheilung.

Wenn daher z. B. beim rechteckigen Querſchnitte die Kraft im inneren Drittel liegt, ſo kann die Lage der Null-Linie, ſo wie die Druckvertheilung genau ſo ermittelt werden, wie in Fig. 125 gezeigt iſt. Dieſe Conſtruction findet häufige Anwendung nicht nur bei Freiſtützen mit rechteckigem Querſchnitt, ſondern auch bei Stützmauern, in Gewölben etc.

Als Maſs ſenkrecht zur Bildfläche wählt man zweckmäſsig die Einheit (gewöhnlich 1 m), ſo daſs die gedrückte Fläche — der Querſchnitt — ein Rechteck von der Breite (ſenkrecht zur Bildfläche) gleich der Einheit iſt. Die zweite Abmeſſung des Rechteckes iſt bei den Gewölben (Fig. 128) die Gewölbſtärke d an der betreffenden Stelle, bei den Stützmauern die Mauerſtärke d (Fig. 129).

In den beiden neben ſtehenden Figuren ſchneidet die Mittelkraft die betreffende Fuge innerhalb der Kernpunkte, ſo daſs alſo nur Druck im Querſchnitt entſteht und der ganze Querſchnitt wirkſam iſt. Die angewandte Conſtruction iſt ohne weitere Erläuterung verſtändlich.

Fig. 128.

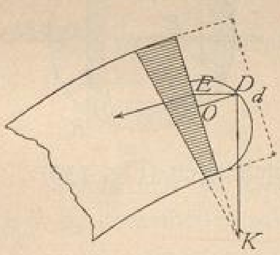
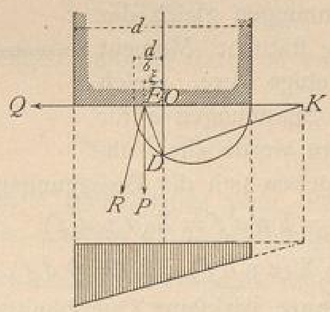


Fig. 129.



Es möge noch bemerkt werden, daſs dieſelbe bei den Gewölben nur annäherungsweiſe richtig iſt, weil die Vorausſetzung der geraden Axe nicht zutrifft. Der Fehler iſt aber bei einigermaſsen groſsem Halbmeſſer des Gewölbes unerheblich.

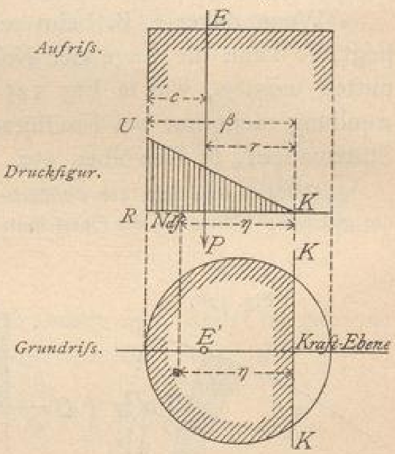
Wenn aber die Kraft den Querſchnitt auſserhalb der Kernpunkte ſchneidet, ſo fällt die Null-Linie in den Querſchnitt, und an der einen Seite derſelben würden Zugſpannungen entſtehen, falls der Bauſtoff dieſelben aufnehmen könnte. Da dies nach obiger Annahme hier nicht möglich iſt, ſo wird auf dieſem ganzen Querſchnittstheile kein Uebertragen von Spannungen ſtattfinden können; die ganze Spannungsübertragung findet auf der Druckſeite der Null-Linie ſtatt. Man nennt dieſen Theil des Querschnittes den wirksamen Querschnitt. Gröfse und Form des wirksamen Querschnittes und die gröfste in demselben stattfindende Spannung sind zu ermitteln.

Der für die Spannung σ gefundene Ausdruck (Gleichung 102) ist hier nicht ohne Weiteres anwendbar, weil bei Aufstellung desselben Spannungsvertheilung über die ganze Querschnittsfläche angenommen war. Hier jedoch ist nur ein Theil des Querschnittes als vorhanden anzusehen, indem der andere Theil an der Kraftübertragung nach der Annahme nicht theilnimmt. Mit kleiner Aenderung kann aber die Gleichung 102 auch hier der Berechnung zu Grunde gelegt werden: man mufs nur unter F die Fläche des wirksamen Querschnittstheiles, unter M das Moment von P, bezogen auf die im Schwerpunkt des wirksamen Querschnittstheiles senkrecht zur Kraftebene liegende Axe YY, und unter $\mathcal{J}$ das Trägheitsmoment des wirksamen Querschnittes für diese Axe verstehen. Dann ist, wenn zum Unterschiede die Bezeichnungen F', M', $\mathcal{J}'$ eingeführt werden,

$$\sigma = \frac{P}{F'} + \frac{M'\,z'}{\mathcal{J}'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 106.$$

Die Spannung σ in den verschiedenen Querschnittspunkten ändert sich wiederum nach dem Gesetze einer Geraden, weil die einzigen Veränderlichen der Gleichung 106, σ und z', nur in der ersten Potenz vorkommen. Diese Gerade (Fig. 130), deren Ordinaten in den verschiedenen Punkten die Druckgröfsen für die Flächeneinheit angeben, schneide die Abscissenaxe in K; alsdann ist für irgend einen Punkt C im senkrecht gemessenen Abstand η vom Nullpunkte K die Spannung $\sigma = a\,\eta$, worin a eine noch zu bestimmende Constante ist. Das Gleichgewicht zwischen der äufseren Kraft P und den inneren Spannungen σ verlangt, dafs die Summe der im Querschnitt wirkenden Druckspannungen gleich der Kraft P sei, so wie dafs das statische Moment von P, bezogen auf eine beliebige Axe, gleich der Summe der Momente der Spannungen σ für dieselbe Axe sei. Als Drehaxe werde die Null-Linie KK gewählt; alsdann ergeben sich die Bedingungsgleichungen (Fig. 130):

Fig. 130.



$$P = \Sigma\,\sigma\,df = \Sigma\,(a\,\eta\,df)$$

und

$$P\,r = \Sigma\,(\sigma\,\eta\,df) = \Sigma\,(a\,\eta^2\,df).$$

Die Summirung ist über die ganze wirksame Querschnittsfläche auszudehnen. Bei derselben ist a constant; mithin erhält man

$$P = a\,\Sigma\,(\eta\,df) = a\,S_K$$

und

$$P\,r = a\,\Sigma\,(\eta^2\,df) = a\,\mathcal{J}_K \quad \ldots\ldots\ldots \quad 107.$$

S_K und $\mathcal{J}_K$ bedeuten das statische und Trägheitsmoment des wirksamen Querschnittstheiles, bezogen auf die Null-Linie KK. Dividirt man die zweite dieser Gleichungen durch die erste, so ergiebt sich

$$r = \frac{\mathcal{J}_K}{S_K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 108.$$

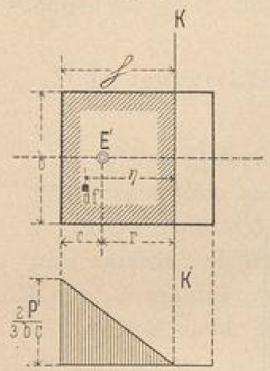
Der Abftand des Schnittpunktes E von der nächften Kante, d. h. von c, ift bekannt; die ganze Breite β des wirkfamen Querfchnittstheiles ift demnach

$$\beta = c + r = c + \frac{\mathcal{J}_K}{S_K} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 109.$$

Die Ermittelung von r nach Gleichung 108 auf dem Wege der Rechnung führt bei einigermafsen unregelmäfsigen Querfchnittsformen zu fehr umftändlichen Arbeiten; bei der am häufigften vorkommenden Querfchnittsform, dem Rechtecke, ergiebt fich aber r fehr einfach.

Die zunächft noch unbekannte Abmeffung des wirkfamen Rechteckes, welche in die Kraftebene fällt, fei $\mathfrak{h}$, d. h. es werde mit $\mathfrak{h}$ bezeichnet, was oben β genannt war; die Breite des Rechteckes fei b; alsdann ift (fiehe Art. 51, S. 34)

Fig. 131.



$$\mathcal{J}_K = \frac{b\,\mathfrak{h}^3}{3} \quad \text{und} \quad S_K = \frac{b\,\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{h}}{2} = \frac{b\,\mathfrak{h}^2}{2};$$

demnach

$$r = \frac{\mathcal{J}_K}{S_K} = \frac{2\,b\,\mathfrak{h}^3}{3\,b\,\mathfrak{h}^2} = \frac{2}{3}\,\mathfrak{h}.$$

Ferner ift $\mathfrak{h} = \beta = c + r = c + \frac{2}{3}\,\mathfrak{h}$; mithin

$$c = \frac{\mathfrak{h}}{3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{h} = 3\,c \quad \ldots \ldots \quad 110.$$

Die Druckvertheilung findet alfo auf eine Fläche ftatt, welche dreimal fo breit ift, als der Abftand des Schnittpunktes E von der nächften Kante.

Die Druckbeanfpruchung an irgend einer Querfchnittsftelle ift nun $\sigma = a\,\eta$, in welchem Ausdrucke a aus der Bedingungsgleichung $P = a\,S_K$ zu ermitteln ift, d. h. $a = \frac{P}{S_K}$; daher

$$\sigma = \frac{P\,\eta}{S_K} = \frac{2\,P\,\eta}{b\,\mathfrak{h}^2}.$$

σ_{max} findet in denjenigen Punkten ftatt, in denen η feinen gröfsten Werth $\mathfrak{h}$ hat, d. h. es ift

$$\sigma_{max} = \frac{2\,P}{b\,\mathfrak{h}} = \frac{2\,P}{3\,b\,c} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 111.$$

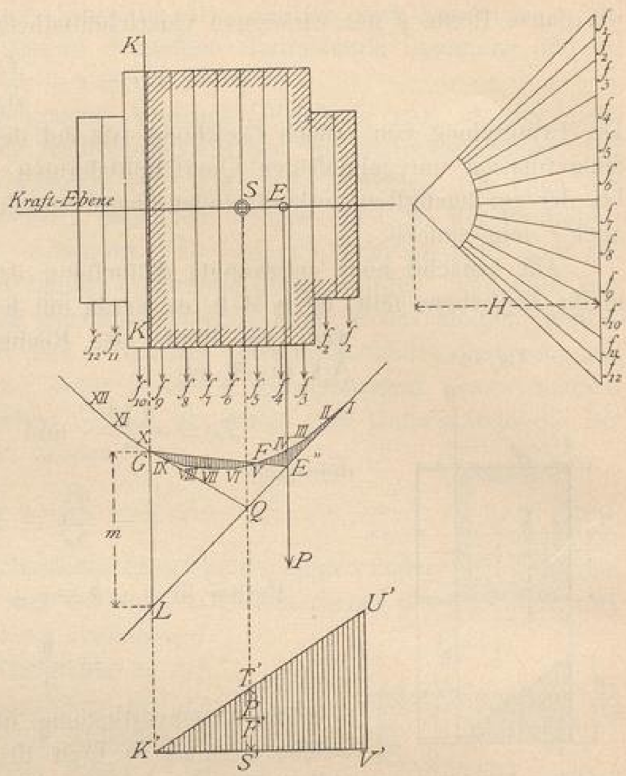
Wenn fich der Druck P gleichmäfsig über die ganze gedrückte Fläche $F_1 = b\,\mathfrak{h} = 3\,b\,c$ vertheilen würde, fo wäre die Druckfpannung für die Flächeneinheit gleich $\frac{P}{3\,b\,c}$; der wirklich ftattfindende Maximaldruck ift gleich $\frac{2\,P}{3\,b\,c}$, d. h. doppelt fo grofs, als wenn P fich gleichmäfsig vertheilte. Die Druckfigur in diefem Falle wird alfo erhalten, indem man zunächft c dreimal von der nächft liegenden Kante aus abträgt, wodurch man den Nullpunkt K findet; alsdann trägt man in diefer Kante nach beliebigem Mafsftabe $\sigma_{max} = \frac{2\,P}{3\,b\,c}$ auf und verbindet den Endpunkt diefer Ordinate mit dem Nullpunkt. Die lothrecht fchraffirte Fläche giebt die Druckfigur.

Soll die Druckvertheilung in unregelmäfsigen Querfchnitten ermittelt werden, fo ift das rechnerifche Verfahren überaus umftändlich. Man kann daffelbe dadurch vermeiden, dafs man ein graphifches Verfahren anwendet. In dem durch 130. Druckvertheilung in unregelmäfsigen Querfchnitten.

Fig. 132 dargeſtellten Querſchnitt ſei KK die Null-Linie und der Querſchnittstheil rechts von dieſer Linie der wirkſame Querſchnitt (derſelbe iſt an den Rändern ſchraffirt). Man zerlege dieſen Querſchnitt in eine Anzahl ſchmaler Streifen, deren Flächeninhalte $f_1, f_2, f_3 \ldots$ ſeien, trage dieſelben nach beliebigem Flächenmaſsſtabe auf, conſtruire für den beliebig angenommenen Polabſtand H das Seilpolygon $I, II \ldots VI, VII \ldots XII$ und verlängere die erſte Seite des Seilpolygons bis zum Schnittpunkte L mit der Linie KK; alsdann iſt (nach Art. 47, S. 31) das ſtatiſche Moment der wirkſamen Querſchnittsfläche, bezogen auf die Axe KK,

$$S_K = H\,m .$$

Fig. 132.



Ferner iſt, wenn der Inhalt der Fläche $I\,II \ldots X\,L\,I$ mit φ bezeichnet wird, das Trägheitsmoment der wirkſamen Querſchnittsfläche, bezogen auf die Axe KK (nach Art. 60, S. 39)

$$\mathcal{J}_K = 2\,H\,\varphi ,$$

und da nach Gleichung 108: $r = \frac{\mathcal{J}_K}{S_K}$ iſt, ſo wird $r = \frac{2\,\varphi}{m}$; mithin

$$\varphi = \frac{m\,r}{2} \qquad \qquad 112.$$

Die Null-Linie KK liegt alſo derart, daſs φ inhaltsgleich iſt einem Dreieck, deſſen Höhe gleich r, deſſen Grundlinie gleich dem Stücke m iſt, welches auf der Null-Linie zwiſchen die verlängerte erſte Seilpolygonſeite und das Seilpolygon fällt. Verbindet man den Schnittpunkt E'' der Kraftrichtung P und der verlängerten erſten Seilpolygonſeite mit X, ſo erhält man ein Dreieck $X\,L\,E''$, deſſen Flächeninhalt gleich $\frac{m\,r}{2}$ iſt, welches alſo, wenn KK richtig angenommen iſt, inhaltsgleich mit φ iſt. Dies findet ſtatt, wenn die in Fig. 132 lothrecht ſchraffirten Flächen $I\,II\,III\,F\,E''\,I$ und $F\,VI\,VII\,VIII\,IX\,G\,F$ gleichen Inhalt haben. Sind beide an Inhalt nicht gleich, ſo iſt die Linie $E''\,G$ um E'' zu drehen und damit auch KK nach rechts oder links ſo lange zu verſchieben, bis dieſe Bedingung erfüllt iſt; die dann erhaltene Null-Linie iſt die richtige. Demnach iſt das Verfahren das folgende.

Man conſtruire für den ganzen Querſchnitt das Seilpolygon $I\,II \ldots XII$, verlängere die erſte Seilpolygonſeite, ermittele deren Schnittpunkt E'' mit der Kraftlinie und ſuche nun diejenige durch E'' gehende Linie, welche die beiden lothrecht ſchraffirten Flächen einander gleich macht; der Punkt X, in welchem dieſe Linie das Seilpolygon ſchneidet, beſtimmt die Lage der Null-Linie KK.

Es macht jetzt keine Schwierigkeit, die Druckvertheilung und den gröfsten Druck zu ermitteln. Im Schwerpunkte der wirkfamen Querfchnittsfläche ift $z' = 0$, alfo nach Gleichung 106

$$\sigma = \frac{P}{F'}.$$

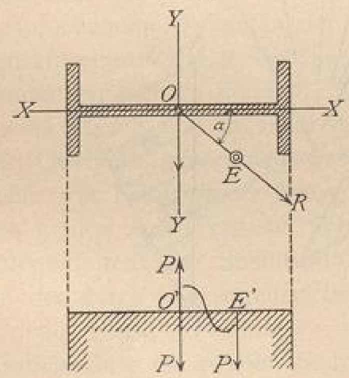
F' ift bekannt; es kann unmittelbar aus Fig. 132 entnommen werden, alfo auch $\frac{P}{F'}$. Die Lage des Schwerpunktes S folgt mit Leichtigkeit aus dem Seilpolygon. Trägt man an der dem Schwerpunkte entfprechenden Stelle des Aufriffes der Fuge den Werth $\frac{P}{F'}$ in beliebigem Mafsftabe als Ordinate auf ($= S'T'$), verbindet T' mit K', fo giebt die Linie $K'T'$ die Druckvertheilung an; der gröfste Druck für die Flächeneinheit ift $V'U'$ in dem gleichen Mafsftabe, in dem $\frac{P}{F'}$ aufgetragen war.

3) Druckvertheilung, falls die Kraftebene die Querfchnitte nicht in Hauptaxen fchneidet.

α) Die Querfchnitte können Druck und Zug aufnehmen[28]). Die Wirkung einer excentrifch auf den Querfchnitt (Fig. 133) im Punkte E angreifenden Kraft P ift eine dreifache. Falls XX und YY die Hauptaxen des Querfchnittes find, fo wird zunächft nichts geändert, wenn man im Schwerpunkte zwei einander gleiche Kräfte P anbringt, welche der gegebenen Kraft P parallel, alfo lothrecht gerichtet find. Zwei diefer Kräfte P bilden in der durch OE gelegten lothrechten Ebene ein Kräftepaar; die dritte Kraft P greift im Punkte O an. Das Moment M des Kräftepaares kann man durch zwei wagrechte Kräfte R erfetzen, deren eine im Querfchnitt, deren andere in folcher Höhe h über dem Querfchnitt wirkt, dafs $Rh = M$ ift. Zerlegt man die Kräfte R in zwei Seitenkräfte $R \cos \alpha$ und $R \sin \alpha$, welche in die lothrecht durch XX, bezw. YY gelegten Ebenen fallen, fo erhält man zwei Momente: in der lothrechten durch XX gelegten Ebene $M \cos \alpha = M_y$ und in der lothrechten durch YY gelegten Ebene $M \sin \alpha = M_x$. Demnach ift die lothrechte Spannung, welche in einem Punkte C des Querfchnittes mit den Coordinaten x und y erzeugt wird,

131.
Querfchnitt nimmt Zug und Druck auf.

Fig. 133.



$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_x y}{\mathfrak{J}_X} + \frac{M_y x}{\mathfrak{J}_Y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 113.$$

In diefer Gleichung bedeutet F den Flächeninhalt des Querfchnittes; $\mathfrak{J}_X$ und $\mathfrak{J}_Y$ find die Trägheitsmomente der Querfchnittsfläche, bezogen auf die XX- und YY-Axe.

Bei gegebenem Querfchnitt und gegebener Kraft enthält die Gleichung 113 nur drei Veränderliche: σ, x und y; alle drei kommen nur in der erften Potenz vor. Ermittelt man demnach für alle Werthe von x und y, d. h. für alle Querfchnittspunkte, die zugehörigen Werthe von σ und trägt diefelben als Ordinaten

[28]) Vergl. auch Art. 102 bis 104 (S. 80 bis 83).