Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

a) Stützen mit ausserhalb der Längsaxe wirkenden Kräften, ohne Rücksicht auf Zerknicken

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

Bei den aus Holz und Eifen beftehenden Druckftäben, bezw. Freiftützen tritt die erwähnte Schwierigkeit nicht auf; ftatt derfelben ift bei diefen die Gefahr eines feitlichen Ausbiegens und weiter diejenige des Zerknickens in das Auge zu faffen.

a) Stützen mit aufserhalb der Längsaxe wirkenden Kräften, ohne Rückficht auf Zerknicken.

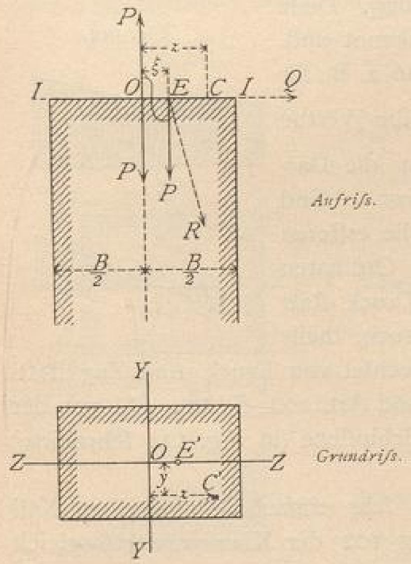
1) Druckvertheilung in Querfchnitten, welche Druck und Zug aufnehmen können, falls die Kraftebene alle Querfchnitte in Hauptaxen fchneidet.

126. Allgemeine Unterfuchung.

Die nachfolgende Unterfuchung hat allgemeine Giltigkeit, mag die Axe der betreffenden Conftruction lothrecht, wagrecht oder geneigt fein; fie findet vorwiegend auf gemauerte Pfeiler und Stützen Anwendung und wird defshalb an diefer Stelle vorgenommen. Alle Ergebniffe bleiben aber auch beftehen, wenn man Fig. 123 um 90 Grad dreht, alfo einen Balken mit wagrechter Axe unterfucht, wefshalb in Art. 101 (S. 80) auf die hier vorzunehmenden Befprechungen hingewiefen werden konnte. Mit grofser Annäherung gelten fie auch für den gekrümmten Balken, z. B. für das Gewölbe, wenn der Halbmeffer deffelben nicht zu klein ift; die ganze Unterfuchung ift ein Sonderfall der allgemeinen in Art. 102 bis 114 (S. 80 bis 94) durchgeführten.

Die Mittelkraft aller oberhalb irgend eines Querfchnittes II auf die Freiftütze wirkenden Kräfte fei R; fie fchneide den Querfchnitt in einem Punkte E (Fig. 123), deffen Abftand von der Pfeileraxe mit ξ bezeichnet werden foll. Die Kraftebene fchneide den Querfchnitt II und alle Querfchnitte des Pfeilers in Hauptaxen (diefelben find gewöhnlich Symmetrie-Axen). R wird in eine Seitenkraft P, welche fenkrecht zum Querfchnitt II wirkt, und eine Seitenkraft Q zerlegt, welche in den Querfchnitt fällt; letztere foll unbeachtet gelaffen werden, da fie das Endergebnifs der Unterfuchung nur wenig beeinflufft. Es wird nichts geändert, wenn man im Schwerpunkte O des Querfchnittes zwei Kräfte anbringt, welche je einander gleich und zu P parallel find, aber entgegengefetzten Sinn haben, alfo einander aufheben. Dadurch ergiebt fich als Wirkung der excentrifchen Kraft P: eine im Schwerpunkte O angreifende Kraft P und zwei (in Fig. 123 durch einen Bogen verbundene) Kräfte P, welche zufammen ein Kräftepaar mit dem Momente $M = P\xi$ bilden;

Fig. 123.



das Moment dreht im vorliegenden Falle nach rechts (im Sinne des Uhrzeigers). Durch die Kraft und das Kräftepaar werden im Querfchnitte Beanfpruchungen hervorgerufen, welche fich nach Art. 95, S. 75, Gleichung 54 zu

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{J_Y} z$$

ergeben, und mit Rückficht darauf, dafs $M = P\xi$ ift, zu

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P \xi z}{\mathfrak{J}}$$

oder

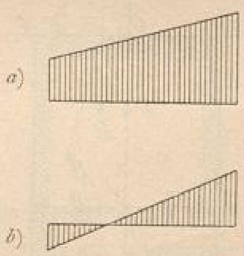
$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F \xi z}{\mathfrak{J}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 102.$$

Abkürzend ift $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_Y$ gefetzt; ferner follen Druckfpannungen im Folgenden als pofitiv, Zugfpannungen als negativ eingeführt werden, da es fich bei den zu betrachtenden Conftructionen hauptfächlich um Beanfpruchungen auf Druck handelt.

Für eine gegebene Kraft P mit gegebenem Angriffspunkt E kann die Spannung fämmtlicher Querfchnittspunkte durch Gleichung 102 ermittelt werden. Von der Spannungsvertheilung erhält man ein klares Bild, wenn man in jedem Punkte des Querfchnittes die Spannung als Ordinate aufträgt und die Endpunkte diefer Ordinaten verbindet. Da bei den gemachten Annahmen die Entfernung y des beliebig gewählten Punktes C von der Kraftebene gar nicht in der Gleichung vorkommt, fo folgt, dafs die Spannung σ von y unabhängig ift; alle in gleichem Abftande z von der YY-Axe liegenden Punkte erleiden alfo gleiche Spannung. Demnach genügt es, die Spannungen aller Punkte aufzufuchen, welche auf einer zur Kraftebene parallelen Linie des Querfchnittes liegen und diefe nach beliebig gewähltem Mafsftabe aufzutragen. Die z-Werthe find die Abfciffen, und die Spannungen σ find die Ordinaten; die Vertheilung findet nach dem durch Gleichung 102 beftimmten Gefetze ftatt.

In diefer Gleichung find σ und z die einzigen Veränderlichen; beide kommen nur in der erften Potenz vor; alfo ift die Verbindungslinie der Endpunkte der Ordinaten σ eine Gerade, die Gerade obiger Gleichung. Diefe Linie ift bekannt, wenn zwei Punkte derfelben bekannt find. Demnach kann man fie leicht auffinden, indem man z. B. für die beiden Endwerthe $z = -\frac{B}{2}$ und $z = +\frac{B}{2}$ die Werthe von σ ausrechnet und aufträgt. Man erhält etwa die Darftellungen in Fig. 124. Die pofitiven Werthe von σ find nach oben, die negativen nach unten abgetragen; die erfteren bedeuten Druck, die letzteren Zug. Wenn alle Ordinaten auf einer Seite der Abfciffe liegen, fo findet nur Druck ftatt (Fig. 124 *a*); fonft hat man im Querfchnitt theils Druck, theils Zug (Fig. 124 *b*). Die Grenze, an welcher der Wechfel von Druck zum Zug ftattfindet, ift die Null-Linie (fiehe auch Art. 96, S. 75 und Art. 102, S. 80). Die von der Abfciffe und der Geraden der Gleichung 102 eingefchloffene (in Fig. 124 fchraffirte) Fläche wird als **Druckfigur** bezeichnet.

Fig. 124.



127.
Null-Linie.

Die Ermittelung der Null-Linie ift hier eine fehr einfache. σ wird zu Null für alle diejenigen Punkte, für welche in Gleichung 102 der Klammerwerth gleich Null wird. Nennt man den befonderen Werth von z, für den dies eintritt, z_0, fo wird $\sigma = 0$, wenn $1 + \frac{F \xi z_0}{\mathfrak{J}} = 0$ wird, d. h. für

$$z_0 = -\frac{\mathfrak{J}}{F \xi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 103.$$

Gleichung 103 ift alfo die Gleichung der Null-Linie unter der Vorausfetzung, dafs die Kraftebene den Querfchnitt in einer Hauptaxe fchneidet.

Aus der Gleichung 103 für die Null-Linie ergeben fich die Folgerungen:

α) Da $\mathcal{J}$ und F ftets pofitive Gröfsen find, fo hat z_0 ftets anderes Vorzeichen als ξ. Die fämmtlichen Punkte, in denen die Spannung Null ftattfindet, liegen alfo an derjenigen Stelle der Axe YY, an welcher der Schnittpunkt mit der Mittelkraft R nicht liegt.

β) Für eine beftimmte Lage der Kraft R find alle Gröfsen auf der rechten Seite der Gleichung conftant, ift alfo auch z_0 conftant; demnach liegen alle Punkte, in denen σ gleich Null ift, in gleichem Abftande von der Y-Axe, d. h. alle diefe Punkte liegen in einer Geraden, die parallel ift zu derjenigen Schwerpunktsaxe, welche zur Schnittlinie des Querfchnittes mit der Kraftebene fenkrecht fteht.

γ) Der Werth für z_0 ift von der Kraftgröfse ganz unabhängig; er ift nur von den Werthen $\mathcal{J}$ und F, alfo von der Querfchnittsform und -Gröfse, und von ξ, d. h. von der Lage des Schnittpunktes E abhängig.

δ) z_0 wird Null, d. h. die Null-Linie fällt mit der zur Kraftebene fenkrechten Schwerpunktsaxe zufammen, wenn $\xi = \infty$ wird, d. h. wenn die Kraft R den Querfchnitt erft in unendlich weiter Ferne fchneidet, wenn alfo R zum Querfchnitte parallel gerichtet ift, d. h. wenn keine Axialkraft vorhanden ift.

Die Gleichung 103 giebt ein bequemes Verfahren, die Lage der Null-Linie graphifch zu ermitteln. Befonders einfach geftaltet fich die Aufgabe beim rechteckigen Querfchnitt.

Hier ift nach Art. 51 (S. 34)

$$\mathcal{J} = \frac{b h^3}{12} \quad \text{und} \quad F = b h.$$

Aus Gleichung 103 folgt, wenn man zunächft nur die abfolute Gröfse von z_0 beftimmt,

$$z_0 = \frac{b h^3}{12 b h \xi} = \frac{h^2}{12 \xi} \quad \text{und} \quad z_0 \xi = \frac{h^2}{12} = \frac{h}{6} \cdot \frac{h}{2}.$$

Daraus ergiebt fich die folgende Conftruction (Fig. 125).

Man trägt von O' aus $\overline{O'B'} = \frac{h}{6}$ nach einer Seite ab, fchlägt über $B'A' = \frac{2}{3} h$ als Durchmeffer einen Halbkreis, welcher die in O' zur ZZ-Axe gezogene Lothrechte in D fchneidet; dann ift $\overline{O'D}^2 = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{6} = \frac{h^2}{12}$. Verbindet man nun D mit E' und zieht durch D die Linie DK fenkrecht zu $E'D$, fo ift $\overline{O'D}^2 = \overline{E'O'} \cdot \overline{O'K} = \xi \cdot \overline{O'K}$, d. h.

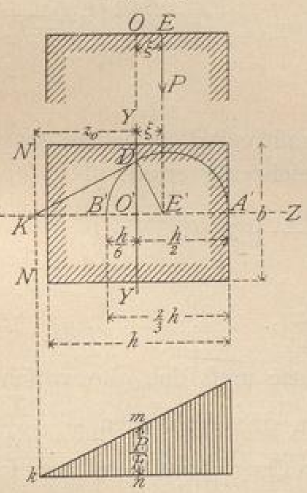
$$\overline{O'K} = \frac{\overline{O'D}^2}{\xi} = \frac{h^2}{12 \xi};$$

mithin

$$\overline{O'K} = z_0.$$

K ift alfo ein Punkt der Null-Linie, und die durch K parallel zur Y-Axe gelegte Linie NN ift die Null-Linie felbft.

Fig. 125.



Eine etwas geänderte Conftruction ift bei weniger einfachen Querfchnitten anwendbar. Nach Art. 71 (S. 51) ift der Trägheitsradius

$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{F}} \quad \text{und} \quad \mathcal{J} = F R^2.$$

Demnach ift nach Gleichung 103

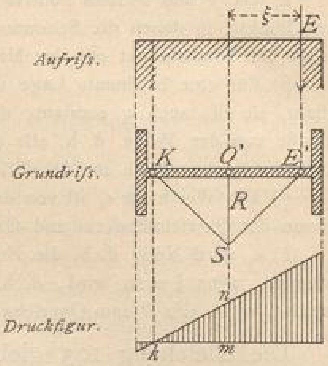
$$z_0 = -\frac{\mathcal{J}}{F \xi} = -\frac{F R^2}{F \xi} = -\frac{R^2}{\xi},$$

woraus fich die folgende Conftruction (Fig. 126) ergiebt.

In O' errichte man zur ZZ-Axe die Lothrechte $\overline{O'S} = R$, verbinde S mit E' und ziehe durch S die Senkrechte $\overline{SK}$ zu $E'S$; dann ift $\overline{O'S}^2 = R^2 = \overline{E'O'} \cdot \overline{O'K} = \xi \cdot \overline{O'K}$; mithin

$$\overline{O'K} = \frac{R^2}{\xi} \text{ (abfolute Gröfse)} = z_0.$$

Fig. 126.

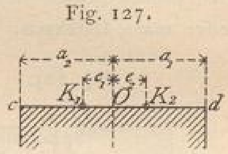


Der Punkt K in Fig. 125 u. 126 ift ein Punkt der Geraden, welche die Veränderung von σ darftellt; wenn noch ein Punkt diefer Geraden bekannt ift, fo kann fie gezeichnet werden. Für $z = 0$ ift nach Gleichung 102: $\sigma_0 = \frac{P}{F}$, d. h. in den Querfchnittspunkten, welche in der zur Kraftebene fenkrechten Schwerpunktsaxe liegen, ift die Spannung genau fo grofs, als wenn nur die Kraft P in der Axe wirkte. Man kann $\frac{P}{F}$ leicht ermitteln und nach beliebigem Mafsftabe im entfprechenden Punkte m (Fig. 126) auftragen. Ift $\overline{mn} = \frac{P}{F}$, fo ergiebt die Verbindung von m mit k die Gerade für σ.

128. Kernpunkte. Die Beanfpruchung der Querfchnittstheile ift an den beiden Seiten der Null-Linie verfchiedenartig, an der einen Seite Druck, an der anderen Zug. Es ift nunmehr zu unterfuchen, wie die Kraft P liegen mufs, damit nur Druckfpannungen im Querfchnitte auftreten [27]).

Offenbar find im ganzen Querfchnitte nur Druckfpannungen, wenn die den äufserften Querfchnittspunkten c und d (Fig. 127) entfprechenden Spannungen Druck bedeuten; denn dann fällt die Null-Linie aufserhalb des Querfchnittes (fiehe Fig. 124a). Nun ift die Spannung im Punkte d, weil für denfelben $z = a_1$ ift, nach Gleichung 102

Fig. 127.



$$\sigma_{max} = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F \xi a_1}{\mathcal{J}}\right),$$

diejenige im Punkte c, weil für diefen $z = -a_2$ ift,

$$\sigma_{min} = \frac{P}{F}\left(1 - \frac{F \xi a_2}{\mathcal{J}}\right).$$

Wenn fowohl σ_{max}, wie σ_{min} Druck bedeuten, alfo pofitiv find, findet im ganzen Querfchnitte nur Druck ftatt; dies ift der Fall, wenn gleichzeitig erfüllt ift

$$\left(1 + \frac{F \xi a_1}{\mathcal{J}}\right) > 0 \quad \text{und} \quad \left(1 - \frac{F \xi a_2}{\mathcal{J}}\right) > 0,$$

d. h. wenn

$$\xi > -\frac{\mathcal{J}}{F a_1} \quad \text{und} \quad \xi < \frac{\mathcal{J}}{F a_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 104.$$

ift. Der Schnittpunkt E der Kraft P mit dem Querfchnitte mufs fich alfo zwifchen zwei Punkten K_1 und K_2 (Fig. 127) befinden, welche in den Abftänden $-\frac{\mathcal{J}}{F a_1}$, bezw. $\frac{\mathcal{J}}{F a_2}$ von der Axe O liegen, wenn nur Druck im Querfchnitt herrfchen foll. Wir bezeichnen abkürzungsweife

$$\frac{\mathcal{J}}{F a_1} = e_1 \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{J}}{F a_2} = e_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 105.$$

Die Punkte K_1 und K_2 find die Kernpunkte.

[27]) Bei obiger Unterfuchung hätten die Darlegungen in Art. 108 (S. 91), betreffend den Kern, zu Grunde gelegt werden können; die obige Art der Ableitung ift gewählt, um die Entwickelung der Formeln 104 vom vorherigen Studium der Art. 105 bis 114 (S. 86 bis 94) unabhängig zu erhalten.

Da auf die fämmtlichen für e_1 und e_2 mafsgebenden Gröfsen $\mathfrak{J}$, F, a_1 und a_2 ausfchliefslich die Querfchnittsgeftaltung Einflufs hat, fo ift die Lage der Kernpunkte nur von der Form und Gröfse des Querfchnittes abhängig.

Für das Rechteck ift $\mathfrak{J} = \frac{b h^3}{12}$, $F = b h$ und $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$; mithin $e_1 = e_2 = \frac{h}{6}$. Soll alfo nur Druck im Querfchnitt ftattfinden, fo darf die Kraft den Querfchnitt in keinem gröfseren Abftande von der Axe fchneiden, als $\frac{h}{6}$; mit anderen Worten: fie mufs den Querfchnitt im inneren Drittel fchneiden (vergl. auch Art. 109, S. 91).

Für den Kreisquerfchnitt ift $e_1 = e_2 = \frac{d}{8}$, d. h. die Kraft darf das innere Viertel nicht verlaffen, wenn nur Druck auftreten foll. (Vergl. Art. 110, S. 92.)

Für den Kreisringquerfchnitt bei geringer Ringftärke ift $e_1 = e_2 = \frac{d}{4}$; die Kraft mufs alfo in der inneren Hälfte verbleiben.

2) Druckvertheilung in Querfchnitten, welche nur Druck aufzunehmen vermögen, falls die Kraftebene alle Querfchnitte in Hauptaxen fchneidet.

Die für die Druckvertheilung unter 1 entwickelten Gefetze gelten auch für Conftructionen, welche nur Druck aufnehmen können, fo lange die Kraft eine derartige Lage hat, dafs im ganzen Querfchnitt wirklich nur Druckfpannungen auftreten, fo lange alfo die Kraft innerhalb der Kernpunkte liegt. 129. Druckvertheilung.

Wenn daher z. B. beim rechteckigen Querfchnitte die Kraft im inneren Drittel liegt, fo kann die Lage der Null-Linie, fo wie die Druckvertheilung genau fo ermittelt werden, wie in Fig. 125 gezeigt ift. Diefe Conftruction findet häufige Anwendung nicht nur bei Freiftützen mit rechteckigem Querfchnitt, fondern auch bei Stützmauern, in Gewölben etc.

Als Mafs fenkrecht zur Bildfläche wählt man zweckmäfsig die Einheit (gewöhnlich 1 m), fo dafs die gedrückte Fläche — der Querfchnitt — ein Rechteck von der Breite (fenkrecht zur Bildfläche) gleich der Einheit ift. Die zweite Abmeffung des Rechteckes ift bei den Gewölben (Fig. 128) die Gewölbftärke d an der betreffenden Stelle, bei den Stützmauern die Mauerftärke d (Fig. 129).

Fig. 128.

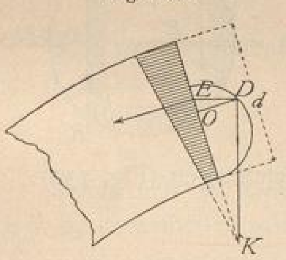
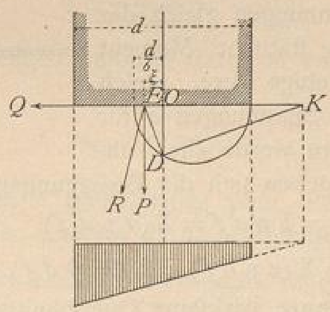


Fig. 129.



In den beiden neben ftehenden Figuren fchneidet die Mittelkraft die betreffende Fuge innerhalb der Kernpunkte, fo dafs alfo nur Druck im Querfchnitt entfteht und der ganze Querfchnitt wirkfam ift. Die angewandte Conftruction ift ohne weitere Erläuterung verftändlich.

Es möge noch bemerkt werden, dafs diefelbe bei den Gewölben nur annäherungsweife richtig ift, weil die Vorausfetzung der geraden Axe nicht zutrifft. Der Fehler ift aber bei einigermafsen grofsem Halbmeffer des Gewölbes unerheblich.

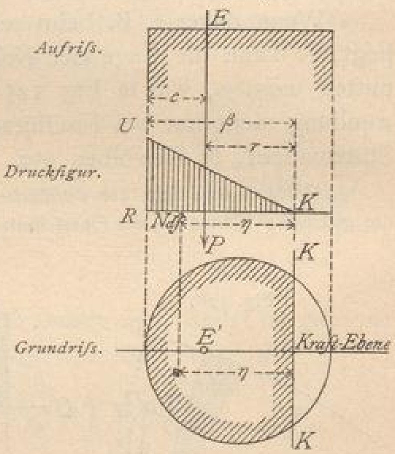
Wenn aber die Kraft den Querfchnitt aufserhalb der Kernpunkte fchneidet, fo fällt die Null-Linie in den Querfchnitt, und an der einen Seite derfelben würden Zugfpannungen entftehen, falls der Bauftoff diefelben aufnehmen könnte. Da dies nach obiger Annahme hier nicht möglich ift, fo wird auf diefem ganzen Querfchnittstheile kein Uebertragen von Spannungen ftattfinden können; die ganze Spannungsübertragung findet auf der Druckfeite der Null-Linie ftatt. Man nennt diefen Theil des Querfchnittes den wirkfamen Querfchnitt. Gröfse und Form des wirkfamen Querfchnittes und die gröfste in demfelben ftattfindende Spannung find zu ermitteln.

Der für die Spannung σ gefundene Ausdruck (Gleichung 102) ift hier nicht ohne Weiteres anwendbar, weil bei Aufftellung deffelben Spannungsvertheilung über die ganze Querfchnittsfläche angenommen war. Hier jedoch ift nur ein Theil des Querfchnittes als vorhanden anzufehen, indem der andere Theil an der Kraftübertragung nach der Annahme nicht theilnimmt. Mit kleiner Aenderung kann aber die Gleichung 102 auch hier der Berechnung zu Grunde gelegt werden: man mufs nur unter F die Fläche des wirkfamen Querfchnittstheiles, unter M das Moment von P, bezogen auf die im Schwerpunkt des wirkfamen Querfchnittstheiles fenkrecht zur Kraftebene liegende Axe YY, und unter $\mathcal{J}$ das Trägheitsmoment des wirkfamen Querfchnittes für diefe Axe verftehen. Dann ift, wenn zum Unterfchiede die Bezeichnungen F', M', $\mathcal{J}'$ eingeführt werden,

$$\sigma = \frac{P}{F'} + \frac{M' z'}{\mathcal{J}'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 106.$$

Die Spannung σ in den verfchiedenen Querfchnittspunkten ändert fich wiederum nach dem Gefetze einer Geraden, weil die einzigen Veränderlichen der Gleichung 106, σ und z', nur in der erften Potenz vorkommen. Diefe Gerade (Fig. 130), deren Ordinaten in den verfchiedenen Punkten die Druckgröfsen für die Flächeneinheit angeben, fchneide die Abfciffenaxe in K; alsdann ift für irgend einen Punkt C im fenkrecht gemeffenen Abftand η vom Nullpunkte K die Spannung $\sigma = a\,\eta$, worin a eine noch zu beftimmende Conftante ift. Das Gleichgewicht zwifchen der äufseren Kraft P und den inneren Spannungen σ verlangt, dafs die Summe der im Querfchnitt wirkenden Druckfpannungen gleich der Kraft P fei, fo wie dafs das ftatifche Moment von P, bezogen auf eine beliebige Axe, gleich der Summe der Momente der Spannungen σ für diefelbe Axe fei. Als Drehaxe werde die Null-Linie KK gewählt; alsdann ergeben fich die Bedingungsgleichungen (Fig. 130):

Fig. 130.



$$P = \Sigma\, \sigma\, d f = \Sigma\, (a\, \eta\, d f)$$

und

$$P r = \Sigma\, (\sigma\, \eta\, d f) = \Sigma\, (a\, \eta^2\, d f).$$

Die Summirung ift über die ganze wirkfame Querfchnittsfläche auszudehnen. Bei derfelben ift a conftant; mithin erhält man

$$P = a\, \Sigma\, (\eta\, d f) = a\, S_K$$

und

$$P r = a\, \Sigma\, (\eta^2\, d f) = a\, \mathcal{J}_K \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 107.$$

S_K und $\mathcal{J}_K$ bedeuten das ftatifche und Trägheitsmoment des wirkfamen Querfchnittstheiles, bezogen auf die Null-Linie KK. Dividirt man die zweite diefer Gleichungen durch die erfte, fo ergiebt fich

$$r = \frac{\mathcal{J}_K}{S_K} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 108.$$

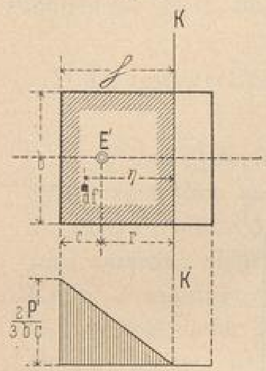
Der Abſtand des Schnittpunktes E von der nächſten Kante, d. h. von c, iſt bekannt; die ganze Breite β des wirkſamen Querſchnittstheiles iſt demnach

$$\beta = c + r = c + \frac{\mathcal{J}_K}{S_K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 109.$$

Die Ermittelung von r nach Gleichung 108 auf dem Wege der Rechnung führt bei einigermaſsen unregelmäſsigen Querſchnittsformen zu ſehr umſtändlichen Arbeiten; bei der am häufigſten vorkommenden Querſchnittsform, dem Rechtecke, ergiebt ſich aber r ſehr einfach.

Die zunächſt noch unbekannte Abmeſſung des wirkſamen Rechteckes, welche in die Kraftebene fällt, ſei $\mathfrak{h}$, d. h. es werde mit $\mathfrak{h}$ bezeichnet, was oben β genannt war; die Breite des Rechteckes ſei b; alsdann iſt (ſiehe Art. 51, S. 34)

Fig. 131.



$$\mathcal{J}_K = \frac{b\,\mathfrak{h}^3}{3} \quad \text{und} \quad S_K = \frac{b\,\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{h}}{2} = \frac{b\,\mathfrak{h}^2}{2};$$

demnach

$$r = \frac{\mathcal{J}_K}{S_K} = \frac{2\,b\,\mathfrak{h}^3}{3\,b\,\mathfrak{h}^2} = \frac{2}{3}\,\mathfrak{h}.$$

Ferner iſt $\mathfrak{h} = \beta = c + r = c + \frac{2}{3}\,\mathfrak{h}$; mithin

$$c = \frac{\mathfrak{h}}{3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{h} = 3\,c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 110.$$

Die Druckvertheilung findet alſo auf eine Fläche ſtatt, welche dreimal ſo breit iſt, als der Abſtand des Schnittpunktes E von der nächſten Kante.

Die Druckbeanſpruchung an irgend einer Querſchnittsſtelle iſt nun $\sigma = a\,\eta$, in welchem Ausdrucke a aus der Bedingungsgleichung $P = a\,S_K$ zu ermitteln iſt, d. h. $a = \frac{P}{S_K}$; daher

$$\sigma = \frac{P\,\eta}{S_K} = \frac{2\,P\,\eta}{b\,\mathfrak{h}^2}.$$

σ_{max} findet in denjenigen Punkten ſtatt, in denen η ſeinen gröſsten Werth $\mathfrak{h}$ hat, d. h. es iſt

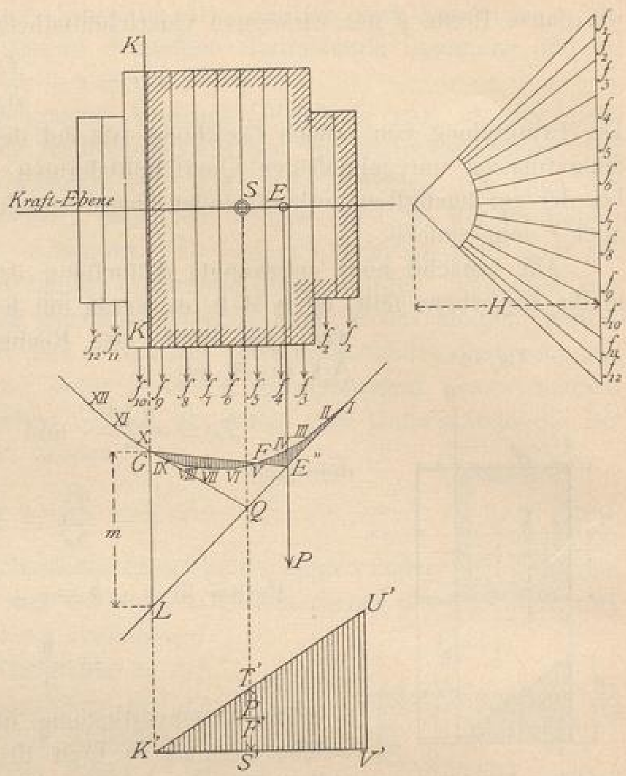
$$\sigma_{max} = \frac{2\,P}{b\,\mathfrak{h}} = \frac{2\,P}{3\,b\,c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 111.$$

Wenn ſich der Druck P gleichmäſsig über die ganze gedrückte Fläche $F_1 = b\,\mathfrak{h} = 3\,b\,c$ vertheilen würde, ſo wäre die Druckſpannung für die Flächeneinheit gleich $\frac{P}{3\,b\,c}$; der wirklich ſtattfindende Maximaldruck iſt gleich $\frac{2\,P}{3\,b\,c}$, d. h. doppelt ſo groſs, als wenn P ſich gleichmäſsig vertheilte. Die Druckfigur in dieſem Falle wird alſo erhalten, indem man zunächſt c dreimal von der nächſt liegenden Kante aus abträgt, wodurch man den Nullpunkt K findet; alsdann trägt man in dieſer Kante nach beliebigem Maſsſtabe $\sigma_{max} = \frac{2\,P}{3\,b\,c}$ auf und verbindet den Endpunkt dieſer Ordinate mit dem Nullpunkt. Die lothrecht ſchraffirte Fläche giebt die Druckfigur.

Soll die Druckvertheilung in unregelmäſsigen Querſchnitten ermittelt werden, ſo iſt das rechneriſche Verfahren überaus umſtändlich. Man kann daſſelbe dadurch vermeiden, daſs man ein graphiſches Verfahren anwendet. In dem durch 130. Druckvertheilung in unregelmäſsigen Querſchnitten.

Fig. 132 dargeſtellten Querſchnitt ſei KK die Null-Linie und der Querſchnittstheil rechts von dieſer Linie der wirkſame Querſchnitt (derſelbe iſt an den Rändern ſchraffirt). Man zerlege dieſen Querſchnitt in eine Anzahl ſchmaler Streifen, deren Flächeninhalte f_1, f_2, f_3 . . . ſeien, trage dieſelben nach beliebigem Flächenmaſsſtabe auf, conſtruire für den beliebig angenommenen Polabſtand H das Seilpolygon $I, II \ldots VI, VII \ldots XII$ und verlängere die erſte Seite des Seilpolygons bis zum Schnittpunkte L mit der Linie KK; alsdann iſt (nach Art. 47, S. 31) das ſtatiſche Moment der wirkſamen Querſchnittsfläche, bezogen auf die Axe KK,

Fig. 132.



$$S_K = H\, m\,.$$

Ferner iſt, wenn der Inhalt der Fläche $I\, II \ldots X\, L\, I$ mit φ bezeichnet wird, das Trägheitsmoment der wirkſamen Querſchnittsfläche, bezogen auf die Axe KK (nach Art. 60, S. 39)

$$\mathfrak{J}_K = 2\, H\, \varphi\,,$$

und da nach Gleichung 108: $r = \frac{\mathfrak{J}_K}{S_K}$ iſt, ſo wird $r = \frac{2\,\varphi}{m}$; mithin

$$\varphi = \frac{m\, r}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 112.$$

Die Null-Linie KK liegt alſo derart, daſs φ inhaltsgleich iſt einem Dreieck, deſſen Höhe gleich r, deſſen Grundlinie gleich dem Stücke m iſt, welches auf der Null-Linie zwiſchen die verlängerte erſte Seilpolygonſeite und das Seilpolygon fällt. Verbindet man den Schnittpunkt E'' der Kraftrichtung P und der verlängerten erſten Seilpolygonſeite mit X, ſo erhält man ein Dreieck $X\,L\,E''$, deſſen Flächeninhalt gleich $\frac{m\, r}{2}$ iſt, welches alſo, wenn KK richtig angenommen iſt, inhaltsgleich mit φ iſt. Dies findet ſtatt, wenn die in Fig. 132 lothrecht ſchraffirten Flächen $I\, II\, III\, F\, E''\, I$ und $F\; VI\; VII\; VIII\; IX\; G\; F$ gleichen Inhalt haben. Sind beide an Inhalt nicht gleich, ſo iſt die Linie $E''\, G$ um E'' zu drehen und damit auch KK nach rechts oder links ſo lange zu verſchieben, bis dieſe Bedingung erfüllt iſt; die dann erhaltene Null-Linie iſt die richtige. Demnach iſt das Verfahren das folgende.

Man conſtruire für den ganzen Querſchnitt das Seilpolygon $I\, II \ldots XII$, verlängere die erſte Seilpolygonſeite, ermittele deren Schnittpunkt E'' mit der Kraftlinie und ſuche nun diejenige durch E'' gehende Linie, welche die beiden lothrecht ſchraffirten Flächen einander gleich macht; der Punkt X, in welchem dieſe Linie das Seilpolygon ſchneidet, beſtimmt die Lage der Null-Linie KK.

Es macht jetzt keine Schwierigkeit, die Druckvertheilung und den gröfsten Druck zu ermitteln. Im Schwerpunkte der wirkfamen Querfchnittsfläche ift $z' = 0$, alfo nach Gleichung 106

$$\sigma = \frac{P}{F'}.$$

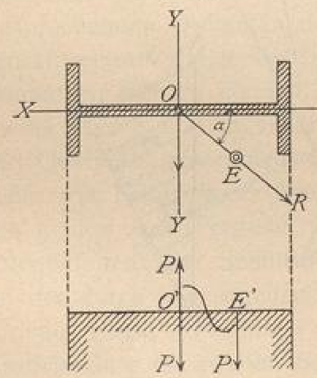
F' ift bekannt; es kann unmittelbar aus Fig. 132 entnommen werden, alfo auch $\frac{P}{F'}$. Die Lage des Schwerpunktes S folgt mit Leichtigkeit aus dem Seilpolygon. Trägt man an der dem Schwerpunkte entfprechenden Stelle des Aufriffes der Fuge den Werth $\frac{P}{F'}$ in beliebigem Mafsftabe als Ordinate auf ($= S' T'$), verbindet T' mit K', fo giebt die Linie $K' T'$ die Druckvertheilung an; der gröfste Druck für die Flächeneinheit ift $V' U'$ in dem gleichen Mafsftabe, in dem $\frac{P}{F'}$ aufgetragen war.

3) Druckvertheilung, falls die Kraftebene die Querfchnitte nicht in Hauptaxen fchneidet.

α) Die Querfchnitte können Druck und Zug aufnehmen[28]). Die Wirkung einer excentrifch auf den Querfchnitt (Fig. 133) im Punkte E angreifenden Kraft P ift eine dreifache. Falls XX und YY die Hauptaxen des Querfchnittes find, fo wird zunächft nichts geändert, wenn man im Schwerpunkte zwei einander gleiche Kräfte P anbringt, welche der gegebenen Kraft P parallel, alfo lothrecht gerichtet find. Zwei diefer Kräfte P bilden in der durch OE gelegten lothrechten Ebene ein Kräftepaar; die dritte Kraft P greift im Punkte O an. Das Moment M des Kräftepaares kann man durch zwei wagrechte Kräfte R erfetzen, deren eine im Querfchnitt, deren andere in folcher Höhe h über dem Querfchnitt wirkt, dafs $Rh = M$ ift. Zerlegt man die Kräfte R in zwei Seitenkräfte $R \cos \alpha$ und $R \sin \alpha$, welche in die lothrecht durch XX, bezw. YY gelegten Ebenen fallen, fo erhält man zwei Momente: in der lothrechten durch XX gelegten Ebene $M \cos a = M_y$ und in der lothrechten durch YY gelegten Ebene $M \sin \alpha = M_x$. Demnach ift die lothrechte Spannung, welche in einem Punkte C des Querfchnittes mit den Coordinaten x und y erzeugt wird,

131. Querfchnitt nimmt Zug und Druck auf.

Fig. 133.



$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_x y}{\mathfrak{J}_X} + \frac{M_y x}{\mathfrak{J}_Y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 113.$$

In diefer Gleichung bedeutet F den Flächeninhalt des Querfchnittes; $\mathfrak{J}_X$ und $\mathfrak{J}_Y$ find die Trägheitsmomente der Querfchnittsfläche, bezogen auf die XX- und YY-Axe.

Bei gegebenem Querfchnitt und gegebener Kraft enthält die Gleichung 113 nur drei Veränderliche: σ, x und y; alle drei kommen nur in der erften Potenz vor. Ermittelt man demnach für alle Werthe von x und y, d. h. für alle Querfchnittspunkte, die zugehörigen Werthe von σ und trägt diefelben als Ordinaten

[28]) Vergl. auch Art. 102 bis 104 (S. 80 bis 83).

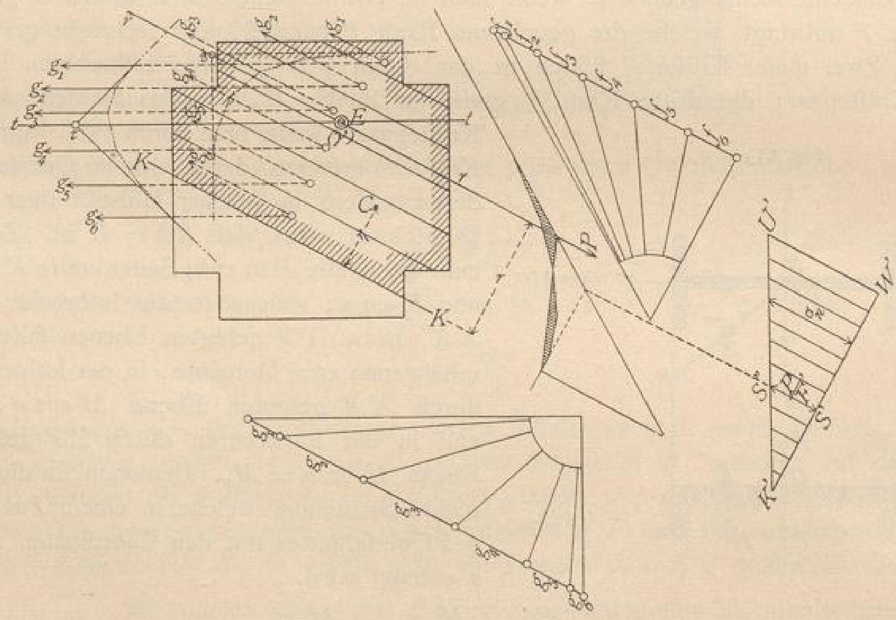
auf, fo liegen alle Endpunkte diefer Ordinaten auf einer Ebene, auf der Ebene der Gleichung 113. Man findet leicht die Null-Linie, indem man $\sigma = 0$ fetzt und in der erhaltenen Gleichung für zwei Werthe von x die zugehörigen Werthe von y auffucht. (Vergl. auch Art. 105, S. 86.)

132. Querfchnitt nimmt nur Druck auf.

β) Die Querfchnitte können nur Druck aufnehmen. Wenn die Querfchnitte nur Druck übertragen können, wie dies beim Mauerwerk nahezu der Fall ift, behält, fo lange die Null-Linie nicht den Querfchnitt fchneidet, die Gleichung 113 ihre Giltigkeit, weil alsdann nur Druckfpannungen ftattfinden. Sobald aber die Null-Linie in den Querfchnitt fällt, wird die Aufgabe eine fehr fchwierige. Denn es ift nicht nur die Gröfse der gedrückten Fläche, fondern auch die Richtung der Null-Linie unbekannt. Die Gleichung 113 bleibt auch für diefen Fall giltig, wenn unter F die wirkfame Querfchnittsfläche, unter XX, bezw. YY die durch den Schwerpunkt derfelben gelegten Hauptaxen diefes Theiles der Querfchnittsfläche verftanden werden und die Coordinaten x und y, fo wie $\mathfrak{J}_X$ und $\mathfrak{J}_Y$ auf diefe Hauptaxen bezogen werden.

Die Endpunkte der in den einzelnen Querfchnittspunkten aufgetragenen Werthe für σ liegen wiederum auf einer Ebene, der Spannungsebene, welche den Querfchnitt in der Null-Linie fchneidet. Alle lothrechten Ebenen, welche parallel zur

Fig. 134.



Null-Linie durch den wirkfamen Querfchnittstheil gelegt werden, fchneiden diefen und die Spannungsebene in zwei parallelen Linien, deren Abftand die Spannung der gefchnittenen Querfchnittspunkte angiebt. Daraus folgt, dafs in allen Punkten, welche auf einer Parallelen zur Null-Linie KK liegen (Fig. 134), die Spannungen gleich grofs find. In einem Punkte C, deffen fenkrechter Abftand von KK gleich η ift, wird die Spannung $\sigma = a\,\eta$ fein, in welcher Gleichung a eine noch unbekannte Conftante ift. Die graphifche Darftellung der Spannung in den einzelnen Punkten des Querfchnittes bietet die Linie $U'K'$.

Wird zunächft die Richtung der Null-Linie KK als bekannt und gegeben angenommen, fo ift die ganze Ableitung in Art. 130 (S. 117) auch hier giltig. Auch hier ift

$$\sigma = a\,\eta\,, \quad P = \int a\,\eta\,df = a\,S_K \quad \text{und} \quad P\,r = \int \sigma\,\eta\,df = a \int \eta^2\,df = a\,\mathfrak{J}_K;$$

fonach

$$r = \frac{\mathfrak{J}_K}{S_K}.$$

$\mathfrak{J}_K$ und S_K bedeuten das Trägheits- und das ftatifche Moment der wirkfamen Querfchnittsfläche, bezogen auf die Axe KK. Man zerlege die Querfchnittsfläche nunmehr in Streifen, welche parallel zu KK find und ermittele die Lage von KK, wie oben (in Art. 130, S. 117) gezeigt ift (Fig. 134[29]).

Es ift nun zu unterfuchen, ob die angenommene Richtung der Null-Linie richtig ift. Die im Querfchnitt wirkenden Druckfpannungen müffen mit der Kraft P, welche den Querfchnitt im Punkte E fchneidet, im Gleichgewicht fein; demnach mufs ihre Mittelkraft ebenfalls durch den Punkt E gehen, wenn die Richtung der Null-Linie richtig gewählt ift. Alsdann ift auch die gefundene wirkfame Fläche (in Fig. 134 fchraffirt) richtig; anderenfalls ift eine Verbefferung vorzunehmen. Alle Punkte des Querfchnittes, welche auf Parallelen zur Null-Linie liegen, haben nach Obigem gleiche Spannung; man kann alfo die Querfchnittsfläche in (genügend fchmale) der Null-Linie parallele Streifen zerlegen, in welchen je gleiche Spannung ftattfindet. Der gefammte Druck in einem Streifen von der Breite b_n, der Länge h_n und der Spannung σ_n für die Flächeneinheit ift offenbar

$$g_n = b_n\,h_n\,\sigma_n\,.$$

Man ermittele für alle Streifen die Werthe g, wobei die Werthe von σ_n durch die entfprechenden Ordinaten der Linie $U'K'$ dargeftellt find, und fuche die Entfernung der Mittelkraft diefer Werthe $g_1, g_2, g_3 \ldots$ von zwei Axen, welche beliebig angenommen werden können. Zweckmäfsig wird als eine Axe die Null-Linie, als die andere Axe eine Längsfeite des Querfchnittes gewählt; es können auch die Längs- und Querfeite genommen werden. Das Auffuchen der Mittelkraftslage erfolgt bequem mit Hilfe zweier Seilpolygone (Fig. 134). Der Abftand der Mittelkraft von den beiden Axen ergiebt fich aus den Schnittpunkten ρ und τ der äufserften Seilpolygonfeiten; der Schnittpunkt der Mittelkraft mit dem Querfchnitt liegt fowohl auf der durch ρ gezogenen Linie rr, wie auf der durch τ gezogenen Linie tt, ift alfo der Punkt V. Linie rr ift parallel zur Kraftrichtung im erften, tt parallel zur Kraftrichtung im zweiten Seilpolygon.

Wenn V mit E zufammenfällt, wie in Fig. 134, fo ift die Null-Linie und die ganze Conftruction richtig; die wirklichen Druckfpannungen können dann, wie in Art. 130 (S. 117) gezeigt, ermittelt werden, indem man im Schwerpunkte der wirkfamen Querfchnittsfläche $\frac{P}{F_1}$ $(= S'S'')$ aufträgt und den Endpunkt S'' mit K' verbindet. $K'U'W'$ ift die Druckfigur.

Fällt aber V mit E nicht zufammen, fo ift die Unterfuchung für eine andere Lage der Null-Linie zu wiederholen. Man kann ohne Schwierigkeit fchätzen, nach welcher Richtung KK gedreht werden mufs, und erreicht meift bereits bei der

[29]) In Fig. 134 find die Kräfte $f_1, f_2, f_3 \ldots$ nicht ausgezeichnet, um die Abbildung nicht undeutlich zu machen.

erſten Wiederholung der Conſtruction ein genügend genaues Zuſammenfallen der Punkte E und V.

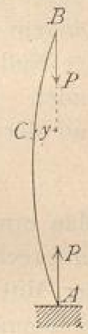
Vorſtehende Unterſuchung iſt für die Ermittelung der Standſicherheit von Gewölbepfeilern, durchbrochenen Mauern, Schornſteinen etc. von groſser Wichtigkeit.

b) Gedrückte Stäbe unter Berückſichtigung der Zerknickungsgefahr.

1) Theorie des Widerſtandes gegen Zerknicken.

133. Voraus-ſetzungen. Wenn auf einen Stab mit gerader Axe zwei Zugkräfte P wirken, deren Richtungslinien genau mit der Stabaxe zuſammenfallen, ſo findet in den einzelnen Punkten des Stabes nur eine Zugbeanſpruchung ſtatt. Wirken auf einen eben ſolchen Stab zwei Druckkräfte P ebenfalls genau in der Richtung der Axe und einander entgegengeſetzt, ſo müſſten nach Früherem an den einzelnen Stellen gleichfalls nur Druckbeanſpruchungen ſtattfinden, welche bei überall gleichem Stabquerſchnitt in allen Punkten für die Flächeneinheit gleich wären. In Wirklichkeit kann man darauf nicht immer rechnen. Wenn die Länge des Stabes im Vergleich zu ſeiner Querſchnittsfläche groſs iſt, ſo wird unter dem Einfluſſe der drückenden Kräfte ein Ausbiegen ſtattfinden, und auf jeden Querſchnitt C (Fig. 135) wirkt alsdann auſser der Axialkraft P noch ein Moment Py. In dieſem Falle findet Beanſpruchung des Stabes auf Zerknicken ſtatt, und derſelbe iſt mit Rückſicht auf dieſe Beanſpruchungsweiſe zu berechnen.

Fig. 135.



Es kann auffallen, daſs hier ſcheinbar ein Widerſpruch zwiſchen der Theorie und Praxis obwaltet; in Wirklichkeit iſt derſelbe aber nicht vorhanden. So lange die Druckkräfte ganz genau in der Stabaxe und in deren Richtung wirken, findet ein Ausbiegen nicht ſtatt; ſobald aber in Folge von unvermeidlichen Fehlern die Kräfte auſserhalb der Axe angreifen, bezw. von der Richtung der Axe abweichen, entſteht für jeden Querſchnitt des Stabes ein Biegungsmoment, welches unter Umſtänden ein Ausbiegen zur Folge hat. Man kann daher in dieſem Falle von einem labilen Gleichgewichtszuſtande ſprechen.

Ein Ausbiegen der Stabaxe kann nicht nur in der in Fig. 135 gezeichneten Richtung ſtattfinden, ſondern iſt nach allen möglichen Richtungen denkbar; es iſt demnach zu unterſuchen, nach welcher Richtung ein ſolches Ausbiegen am leichteſten ſtattfindet, und der Querſchnitt des Stabes danach anzuordnen. Für die folgenden Unterſuchungen ſoll angenommen werden, daſs 1) als äuſsere Kräfte nur die Axialkräfte P wirken, 2) die Axialkräfte in den Schwerpunkten der Endflächen angreifen und 3) der Stab überall gleichen Querſchnitt habe.

Fig. 136.

134. Elaſtiſche Linie. Unter Einwirkung der Kraft P möge der Stab (Fig. 136), deſſen Axe urſprünglich mit AX zuſammenfiel, in die Lage AB gekommen ſein; die Bildebene XAY, in welcher AB liegt, ſchneide alle Querſchnitte in Hauptaxen; der Axenpunkt B habe nach der Formänderung die Ordinate y_0. Für irgend einen Punkt C mit der Abſciſſe x ſei die Ordinate y; das Moment für dieſen Punkt iſt $M = P(y_0 - y)$ und die elaſtiſche Linie demnach aus der Gleichung 100 zu ermitteln. Danach wird

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P(y_0 - y)}{E \mathfrak{J}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 114.$$

Hierin iſt $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment des Querſchnittes bei C, bezogen auf diejenige Schwerpunktsaxe deſſelben, welche ſenkrecht zur Kraftebene, alſo zur XY-