Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

c) Trägheitsmomente und Centrifugalmomente

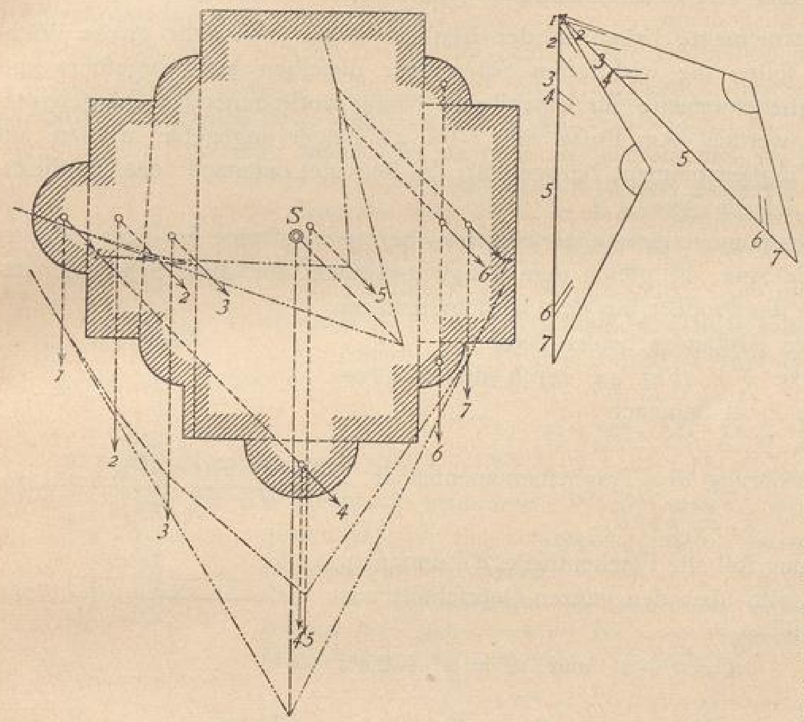
urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

geſchnittene Stück ($a g$, bezw. $a' g'$, $a'' g''$) mit dem Polabſtand H multiplicirt. Dabei muſs das Stück $a g$ auf dem Längenmaſsſtabe, der Polabſtand H auf dem Flächenmaſsſtabe gemeſſen werden, nach welchem die Werthe von f aufgezeichnet ſind.

Rückt die Axe XX weiter nach oben, ſo wird das von den äuſserſten Seilpolygon-Seiten auf der- 48. Schwerpunkt.
ſelben abgeſchnittene Stück immer kleiner; geht die Axe durch den Schnittpunkt E der äuſserſten Seilpolygon-Seiten, ſo iſt das abgeſchnittene Stück gleich Null; alſo wird auch das ſtatiſche Moment in Bezug auf dieſe Axe gleich Null; dieſelbe iſt alſo eine Schwerpunktsaxe. Hieraus folgt: Die durch den Schnittpunkt E der äuſserſten Seilpolygon-Seiten parallel zu XX gelegte Axe enthält den Schwerpunkt der Fläche.

Das ſoeben gefundene Ergebniſs folgt auch mit Nothwendigkeit aus nachſtehender Ueberlegung. Da die Flächen als Kräfte eingeführt ſind, ſo kann man annehmen, dieſe Kräfte ſeien die Gewichte der einzelnen Theile einer an allen Stellen gleich ſtarken Platte, welche dieſelbe Form hat, wie die gegebene Fläche, und in eben ſolche Theile getheilt iſt, wie dieſe. Um die wirklichen Gewichte zu erhalten, braucht man nur alle Werthe f mit demſelben Factor γ, dem Gewichte der Flächeneinheit, zu multipliciren. Da man aber die Platte aus beliebigem Material hergeſtellt und beliebig ſtark annehmen kann, ſo iſt γ ganz beliebig, kann alſo auch gleich 1 geſetzt werden; die Werthe f können demnach auch als die Gewichte ſelbſt angeſehen werden. Die Mittelkraft aller dieſer parallel gerichteten Kräfte geht demnach durch den Schwerpunkt der Fläche; ſie geht aber auch durch den Schnittpunkt der äuſserſten Seilpolygon-Seiten und iſt der Richtung der anderen Kräfte parallel. Die durch dieſen Schnittpunkt parallel zur Axe XX gezogene Linie iſt alſo die Mittelkraft nach Richtung und Lage und geht durch den Schwerpunkt. Das Gleiche gilt von jeder anderen beliebigen Lage, welche für die Richtung der Axe, alſo auch der Kräfte angenommen wird. Man kann demnach leicht noch eine zweite Axe finden, auf welcher der Schwerpunkt liegt; der Schnittpunkt beider Axen iſt dann der geſuchte Schwerpunkt.

Fig. 42.



Die gezeigte graphiſche Ermittelung des Schwerpunktes iſt beſonders bei unregelmäſsigen Querſchnitten empfehlenswerth; Fig. 42 zeigt dieſe Beſtimmung für den Querſchnitt eines Vierungspfeilers.

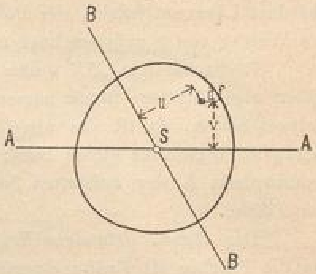
c) Trägheitsmomente und Centrifugalmomente.

Wird jedes Theilchen df einer Querſchnittsfläche F mit dem Product uv ſeiner 49. Erläuterung.
ſenkrecht genommenen Abſtände von zwei Axen AA und BB multiplicirt (Fig. 43) und die Summe aller dieſer Producte gezogen, ſo erhält man einen Ausdruck

$$\mathfrak{J}_{AB} = \int u v \, df,$$

welchen man das Centrifugalmoment des Querſchnittes F für die Axen AA und BB nennt. Fallen beide Axen zuſammen, ſo geht der Ausdruck in

Fig. 43.



$$\mathfrak{J}_A = \int v^2\, df$$

über, wenn BB mit der urſprünglichen Lage von AA zuſammenfällt, bezw. in

$$\mathfrak{J}_B = \int u^2\, df,$$

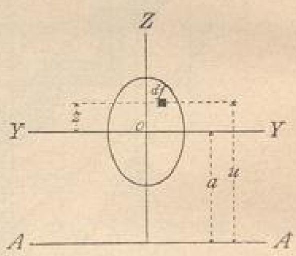
wenn AA mit der urſprünglichen Lage von BB zuſammenfällt. Man nennt $\mathfrak{J}_A = \int v^2\, df$ das Trägheitsmoment der Querſchnittsfläche F für die Axe AA; eben ſo bezeichnet man $\mathfrak{J}_B = \int u^2\, df$ als das Trägheitsmoment des Querſchnittes für die Axe BB.

Die Trägheitsmomente haben in der Elaſticitätslehre eine ſehr groſse Wichtigkeit; deſshalb ſollen die wichtigſten Sätze über dieſelben hier vorgeführt und zugleich die Trägheitsmomente für eine Reihe häufig vorkommender Querſchnittsformen entwickelt werden. Am Fuſse von $\mathfrak{J}$ ſoll als Zeiger angegeben werden, auf welche Axe das Trägheitsmoment bezogen iſt; $\mathfrak{J}_A$ bedeutet demnach: das Trägheitsmoment bezogen auf die Axe AA.

50. Trägheitsmomente für zur Schwerpunktsaxe parallele Axen.

Das Trägheitsmoment eines Querſchnittes, bezogen auf eine zu einer Schwerpunktsaxe parallele Axe, iſt gleich dem Trägheitsmoment für dieſe Schwerpunktsaxe, vermehrt um das Product aus der Querſchnittsfläche in das Quadrat des Abſtandes beider Axen.

Fig. 44.



Geht die Axe YY (Fig. 44) durch den Schwerpunkt der Fläche, ſo iſt demnach

$$\mathfrak{J}_A = \mathfrak{J}_Y + F a^2.$$

Nach der Erklärung des Trägheitsmomentes iſt

$$\mathfrak{J}_A = \int u^2\, df.$$

Die Summirung ſoll alle Flächentheile df umfaſſen; die Integration iſt alſo über den ganzen Querſchnitt auszudehnen. Nun iſt

$$u = a + z \quad \text{und} \quad u^2 = a^2 + 2az + z^2,$$

alſo

$$\mathfrak{J}_A = \int u^2\, df = a^2 \int df + 2a \int z\, df + \int z^2\, df.$$

Es iſt jedoch $\int df = F$ und $\int z^2\, df = \mathfrak{J}_Y$, ferner nach der Lehre vom Schwerpunkt $\int z\, df = 0$, weil YY eine Schwerpunktsaxe iſt; mithin in der That

$$\mathfrak{J}_A = F a^2 + \mathfrak{J}_Y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 18.$$

Im Folgenden ſollen für einige häufig vorkommende Querſchnittsformen die Trägheitsmomente rechneriſch ermittelt werden.

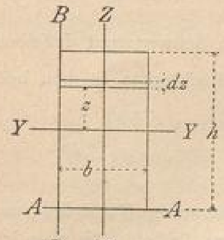
51. Trägheitsmomente für rechteckige Querſchnitte.

α) Trägheitsmoment für den rechteckigen Querſchnitt (Fig. 45).

Für dieſen iſt, bezogen auf die Schwerpunktsaxe YY,

$$\mathfrak{J}_Y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2\, df.$$

Fig. 45.



Da für alle Theile eines zu YY parallelen Streifens z dieſelbe Gröſse hat, ſo kann man $df = b\,dz$ ſetzen, und es wird

$$\mathfrak{J}_Y = b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2\,dz = \left[\frac{b\,z^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3}\left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right] = \frac{b\,h^3}{12} \quad . \quad . \quad 19.$$

Das Trägheitsmoment für eine Axe AA, welche mit einer Seite des Rechteckes zuſammenfällt, iſt nach Gleichung 18

$$\mathfrak{J}_A = \frac{b\,h^3}{12} + b\,h\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{b\,h^3}{12} + \frac{b\,h^3}{4} = \frac{b\,h^3}{3}.$$

Für eine zu YY normal ſtehende Schwerpunktsaxe ZZ iſt nach Obigem

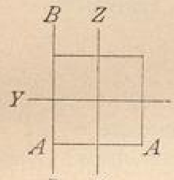
$$\mathfrak{J}_Z = \frac{h\,b^3}{12},$$

und für die Axe BB iſt

$$\mathfrak{J}_B = \frac{h\,b^3}{3}.$$

Man kann dies in Worten folgendermaſsen ausdrücken: Das Trägheitsmoment eines Rechteckes für eine zu einer der Seiten parallele Schwerpunktsaxe iſt gleich dem Producte: Breite mal dritte Potenz der Höhe, dividirt durch zwölf; für eine mit einer Seite des Rechteckes zuſammenfallende Axe iſt das Trägheitsmoment dagegen gleich dem Producte: Breite mal dritte Potenz der Höhe, dividirt durch drei. Als Breite gilt die Abmeſſung des Rechteckes in der Richtung der betreffenden Axe, als Höhe die zu erſterer ſenkrechte Abmeſſung.

Fig. 46.



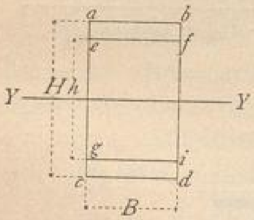
Mit Zuhilfenahme dieſes Ergebniſſes kann man für eine groſse Zahl von Querſchnitten der Praxis die Trägheitsmomente leicht finden.

Das Quadrat iſt ein Rechteck mit gleich langen Seiten; iſt ſeine Seitenlänge $b = h = d$, ſo wird (Fig. 46)

$$\mathfrak{J}_Z = \mathfrak{J}_Y = \frac{d^4}{12} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_A = \mathfrak{J}_B = \frac{d^4}{3}.$$

β) Trägheitsmomente für aus Rechtecken zuſammengeſetzte Querſchnitte. Die für das Rechteck gefundenen Werthe von $\mathfrak{J}$ werden vielfach angewendet, um für zuſammengeſetzte Querſchnitte die Trägheitsmomente zu finden. 52. Symmetriſche I- u. C-förmige Querſchnitte.

Fig. 47.



Das Trägheitsmoment des Querſchnittes in Fig. 47 iſt gleich der Differenz des Trägheitsmomentes des ganzen Rechteckes $abcd$ weniger dem Trägheitsmoment des Rechteckes $efig$, d. h. es iſt

$$\mathfrak{J}_Y = \frac{1}{12}\,B\,H^3 - \frac{1}{12}\,B\,h^3 = \frac{B}{12}\,(H^3 - h^3).$$

Für den ſymmetriſchen I-förmigen (Fig. 48) und für den C-förmigen Querſchnitt (Fig. 49) ergiebt ſich hiernach

$$\mathfrak{J}_Y = \frac{1}{12}\left\{b\left[h^3 - (h - 2t)^3\right] + d\,(h - 2t)^3\right\}.$$

Dieſer für die Berechnung unbequeme Ausdruck kann weſentlich vereinfacht werden. Wird der Abſtand der Schwerpunkte des oberen, bezw. unteren Rechteckes mit $\mathfrak{h}$ bezeichnet, alſo $h - t = \mathfrak{h}$ geſetzt und im letzten Gliede obigen Ausdruckes ſtatt $h - 2t$ (nicht ganz genau, jedoch mit kleinem Fehler) $\mathfrak{h}$ eingeführt, ſo iſt

Fig. 48.

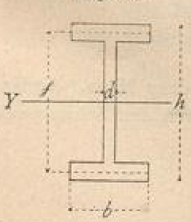
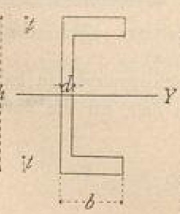


Fig. 49.



$$\mathfrak{J}_Y = \frac{1}{2}\,b\,t\,(h^2 - 2\,h\,t + t^2) + \frac{1}{6}\,b\,t^3 + \frac{d\,\mathfrak{h}^3}{12}.$$

Wir ſetzen $b\,t = f$; alsdann wird

$$\mathfrak{J}_Y = \frac{1}{2}\,f\,(h - t)^2 + \frac{f\,t^2}{6} + \frac{d\,\mathfrak{h}^3}{12}.$$

$\frac{f\,t^2}{6}$ iſt gegen das erſte Glied ſehr klein und kann ohne Bedenken vernachläſſigt werden; alsdann iſt der Ausdruck für das Trägheitsmoment:

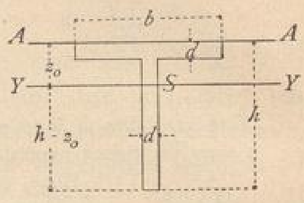
$$\mathfrak{J}_Y = \frac{1}{2} f \mathfrak{h}^2 + \frac{d\,\mathfrak{h}^3}{12} = \frac{\mathfrak{h}^2}{2}\left(f + \frac{d\,\mathfrak{h}}{6}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots \quad 20.$$

Denkt man ſich die ganze Querſchnittsfläche f des oberen Rechteckes im Schwerpunkt deſſelben vereinigt, alſo im Abſtande $\frac{\mathfrak{h}}{2}$ von der Axe YY, und eben ſo die des unteren Rechteckes in dem bez. Schwerpunkt, ſo iſt das Trägheitsmoment eines ſolchen Querſchnittes

$$i = 2f\left(\frac{\mathfrak{h}}{2}\right)^2 = \frac{f\,\mathfrak{h}^2}{2}.$$

Dies iſt aber der erſte Theil unſeres obigen Ausdruckes 20 für $\mathfrak{J}_Y$; der zweite Theil des Ausdruckes ſtellt demnach den Beitrag dar, welchen der Steg zum Trägheitsmoment leiſtet. Mit ziemlich genauer Annäherung erhält man demnach das Trägheitsmoment des ſymmetriſchen I-förmigen Querſchnittes, indem man die Querſchnittsfläche des oberen und unteren Gurtes vermehrt um je $^1/_6$ der Querſchnittsfläche des Steges (bis zu den Gurtſchwerpunkten gerechnet), im Schwerpunkt des oberen und unteren Gurtes vereinigt denkt und dafür das Trägheitsmoment aufſucht.

Fig. 50.



53. T-förmige Querſchnitte.

Wird beim T-förmigen Querſchnitt (Fig. 50) der Abſtand des Schwerpunktes von der durch die eine Kante gelegten Axe AA mit z_0 bezeichnet, ſo iſt nach der Schwerpunktslehre

$$F z_0 = d\,(b-d)\,\frac{d}{2} + d\,h\,\frac{h}{2}, \text{ ferner } F = (b-d)\,d + d\,h.$$

Sonach iſt

$$z_0 = \frac{(b-d)\,d^2 + d\,h^2}{2\left[(b-d)\,a + d\,h\right]} = \frac{(b-d)\,d + h^2}{2\,(b-d) + 2\,h},$$

und das Trägheitsmoment für die wagrechte Schwerpunktsaxe YY

$$\mathfrak{J}_Y = \frac{1}{3}\left[d\,(h - z_0)^3 + b\,z_0^3 - (b-d)\,(z_0 - d)^3\right].$$

Das Trägheitsmoment für die Axe AA iſt

$$\mathfrak{J}_A = \frac{1}{3}\left[d\,h^3 + (b-d)\,d^3\right].$$

54. Unſymmetriſche I-förmige Querſchnitte.

Für den unſymmetriſchen I-förmigen Querſchnitt (Fig. 51) iſt, wenn man die früheren Bezeichnungen beibehält

$$z_0 = \frac{\frac{d\,h\,.\,h}{2} + (b-d)\,t\left(h - \frac{t}{2}\right) + \frac{(B-d)\,t^2}{2}}{d\,h + (b-d)\,t + (B-d)\,t} = \frac{d\,h^2 + (b-d)\,t\,(2h - t) + (B-d)\,t^2}{2\left[d\,h + (b-d)\,t + (B-d)\,t\right]}$$

und

$$\mathfrak{J}_Y = \frac{1}{3}\left[b\,(h - z_0)^3 + B\,z_0^3 - (b-d)\,c^3 - (B-d)\,(z_0 - t)^3\right].$$

Fig. 51.

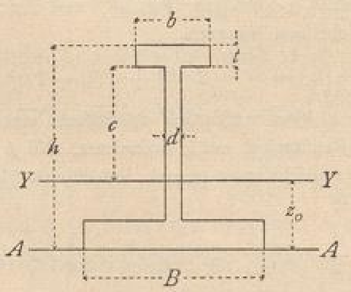
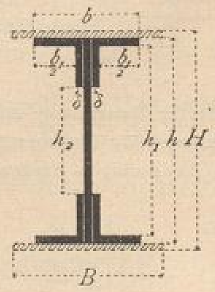


Fig. 52.



55. Blechträger-Querſchnitte.

Bei den Querſchnitten der Blechträger (Fig. 52) liegt der Schwerpunkt in halber Höhe. Alsdann iſt, falls nur das lothrechte Blech und die 4 Winkeleiſen vorhanden ſind, für die durch den Schwerpunkt gelegte wagrechte Axe

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{12}\left(b\,h^3 - b_1\,h_1^3 - 2\,\delta\,h_2^3\right).$$

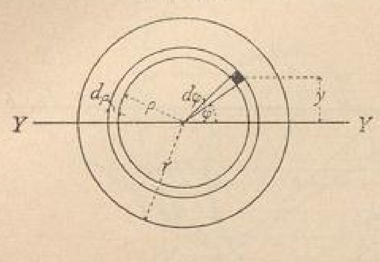
Falls noch Blechplatten vorhanden find, ermittelt man ihre Trägheitsmomente am beften befonders und zählt fie zum Trägheitsmoment des Querfchnittes ohne Deckplatten. Das Trägheitsmoment diefer Deckplatten (Fig. 52) ift alsdann

$$\triangle \mathcal{J} = \frac{1}{12} B (H^3 - h^3).$$

γ) Trägheitsmoment für kreisförmige Querfchnitte (Fig. 53). 56. Kreisförmige Querfchnitte.

Der Halbmeffer des kreisförmigen Querfchnittes fei r, der Durchmeffer d. Zuerft foll das Trägheitsmoment der oberen Halbkreisfläche für die Axe YY beftimmt werden. Man zerlege die Kreisfläche in fchmale Ringe, deren Mittelpunkte mit demjenigen der gegebenen Fläche zufammenfallen, und beftimme zunächft das Trägheitsmoment einer folchen Ringfläche. Der Halbmeffer eines folchen Ringes fei ρ, feine fehr geringe Breite fei $d\rho$. Der Flächeninhalt eines Theilchens df diefer Ringfläche, welches zum Mittelpunktswinkel $d\varphi$ gehört, ift $df = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho$, und fein Trägheitsmoment bezogen auf die Axe YY

Fig. 53.



$$d(i) = y^2 \cdot df = \rho^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot df = \rho^3 d\rho \sin^2 \varphi \, d\varphi .$$

Das Trägheitsmoment des halben Ringes wird erhalten, indem man für alle Theile df deffelben $d(i)$ auffucht, d. h. indem man zwifchen den Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ integrirt, wobei natürlich ρ und $d\rho$ als Feftwerthe (Conftante) zu betrachten find, da fie für alle Theilchen des Ringes gleiche Gröfse haben.

Man erhält

$$i = \rho^3 d\rho \int_0^\pi \sin^2 \varphi \, d\varphi = \rho^3 d\rho \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{2} \right]_0^\pi = \frac{\rho^3 d\rho \cdot \pi}{2} .$$

Um aus diefem Trägheitsmomente einer halben Ringfläche dasjenige der halben Kreisfläche zu erhalten, beachte man, dafs die letztere fich aus lauter halben Ringflächen zufammenfetzt; demnach ift

$$\frac{\mathcal{J}}{2} = \Sigma(i) = \int_0^r \rho^3 d\rho \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} r^4,$$

und das Trägheitsmoment der ganzen Kreisfläche für die Axe YY

$$\mathcal{J} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 21.$$

Bei allen Angaben von Trägheitsmomenten ift zu beachten: Die Mafseinheit der Trägheitsmomente ift die Längeneinheit in der vierten Potenz (alfo entweder: Meter zur vierten, oder Centimeter zur vierten, oder Millimeter zur vierten Potenz etc.); denn jeder Theil des Trägheitsmomentes, alfo auch das Ganze, ift das Product einer Fläche in das Quadrat einer Länge. Defshalb ift ftets mit der ziffermäfsigen Gröfse auch die Mafseinheit des Trägheitsmomentes anzugeben. 57. Mafseinheit für die Trägheitsmomente.

Um ein Trägheitsmoment, welches in cm^4 angegeben ift, in ein folches zu verwandeln, deffen Mafseinheit mm^4 find, mufs man mit $10^4 = 10000$ multipliciren; umgekehrt ift mit $10^4 = 10000$ zu dividiren, wenn ein in mm^4 gegebenes Trägheitsmoment in eines mit der Mafseinheit cm^4 verwandelt werden foll.

Für die Statik und die Aufgaben derfelben empfiehlt es fich, die Trägheitsmomente in cm^4 anzugeben.

Wenn die Querfchnitte eine unregelmäfsige Form haben, fo ift es oft vortheilhaft, die Trägheitsmomente graphifch zu ermitteln. Nennt man, wie oben, die einzelnen Flächentheile, in welche die ganze Querfchnittsfläche zerlegt wird, $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$, die Abftände der Schwerpunkte derfelben von derjenigen Axe XX, für welche das Trägheitsmoment gefucht wird, bezw. $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$, fo ift 58. Graphifche Ermittelung der Trägheitsmomente.

$$\mathcal{J} = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots i_n = \Sigma(fy^2) = f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + f_3 y_3^2 + \ldots,$$
$$\mathcal{J} = f_1 y_1 \cdot y_1 + f_2 y_2 \cdot y_2 + f_3 y_3 \cdot y_3 + \ldots$$

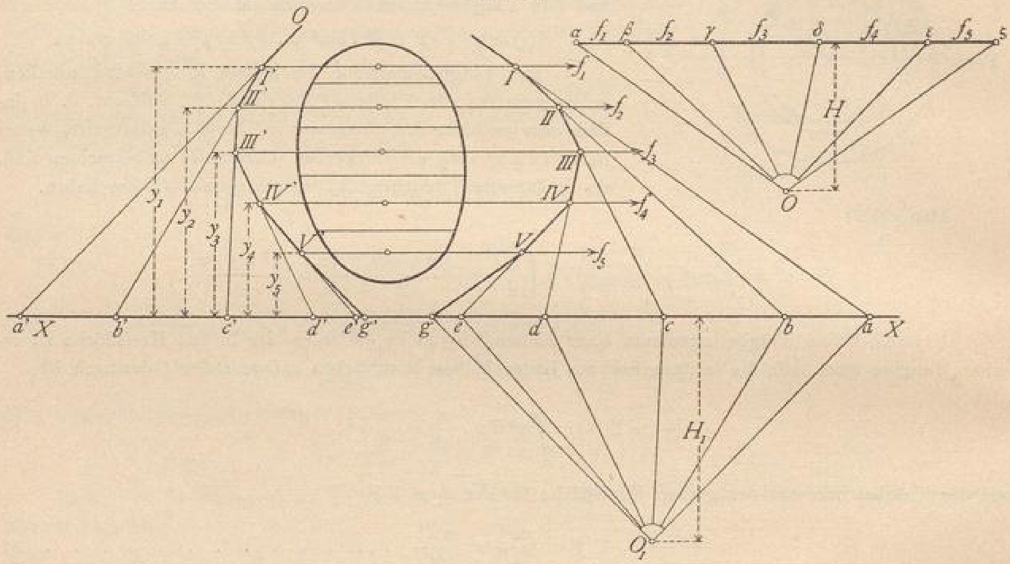
Nun ſind $f_1 y_1$, $f_2 y_2$, $f_3 y_3$ . . . die ſtatiſchen Momente der einzelnen Flächentheile für die Axe XX; ſetzt man $f_1 y_1 = m_1$, $f_2 y_2 = m_2$, $f_3 y_3 = m_3$ . . ., ſo wird

$$\mathfrak{J} = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots$$

59. *Culman*'ſches Verfahren. Man braucht alſo nur mit den Werthen m_1, m_2, m_3 . . . genau ſo zu verfahren, wie oben (in Art. 47, S. 31) mit den Werthen f_1, f_2, f_3 . . ., um die ſtatiſchen Momente von m_1, m_2, m_3 . . ., d. h. die Trägheitsmomente zu erhalten. Darauf beruht das nachfolgende von *Culman* angegebene Verfahren (Fig. 54).

Man zerlege den Querſchnitt in Streifen, die zu derjenigen Axe parallel ſind, für welche das Trägheitsmoment geſucht wird, und ermittele zunächſt, wie oben (in Art. 47, S. 31) gezeigt iſt, die ſtatiſchen Momente für die Axe XX. Die Stücke ab, bc, cd . . . ſind den ſtatiſchen Momenten proportional. Man

Fig. 54.



nehme nun einen neuen Pol O_1 an, ziehe die Strahlen $O_1 a$, $O_1 b$, $O_1 c$ . . . und conſtruire für die Kräfte $m_1, m_2, m_3 \ldots$, die in denſelben Linien wirkend angenommen werden, wie die $f_1, f_2, f_3 \ldots$, das zugehörige Seilpolygon $O\,I'\,II'\,III' \ldots g' \ldots$ Werden die Seilpolygonſeiten über die Eckpunkte hinaus bis zu den Schnittpunkten mit der Axe XX verlängert, ſo iſt

$$\triangle\, I'a'b' \backsim \triangle\, O_1 a b, \quad \text{alſo} \quad \frac{\overline{a'b'}}{y_1} = \frac{\overline{ab}}{H_1}.$$

Es iſt aber (ſiehe Art. 47, S. 31)

$$\overline{ab} = \frac{f_1 y_1}{H}, \quad \text{mithin} \quad \overline{a'b'} = \frac{f_1 y_1^2}{H H_1} = \frac{i_1}{H H_1} \quad \text{und} \quad i_1 = H H_1 \,.\, \overline{a'b'}\,.$$

Eben ſo ergiebt ſich

$$\triangle\, II'b'c' \backsim \triangle\, O_1 b c, \quad \text{mithin} \quad \frac{\overline{b'c'}}{y_2} = \frac{\overline{bc}}{H_1} = \frac{f_2 y_2}{H H_1} \quad \text{und} \quad \overline{b_1'c'} = \frac{f_2 y_2^2}{H H_1} = \frac{i_2}{H H_1};$$

ſonach

$$i_2 = H \,.\, H_1 \,.\, \overline{b'c'}; \quad \text{eben ſo} \quad i_3 = H \,.\, H_1 \,.\, \overline{c'd'} \ldots$$

Man erhält demnach

$$\mathfrak{J} = \Sigma\,(i) = H H_1\,(a'b' + b'c' + c'd' + \ldots) = H H_1 \,.\, \overline{a'g'}.$$

Das Trägheitsmoment der Fläche F für eine Axe XX iſt alſo gleich dem von den äuſserſten Seiten des Seilpolygons $O\,I'\,II'\,III'$ . . . auf der Axe abgeſchnittenen Stücke $\overline{a'g'}$, multiplicirt mit dem Producte der beiden Polabſtände H und H_1.

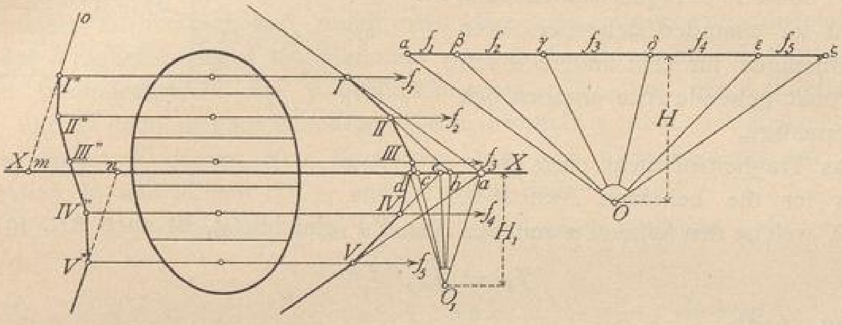
Genau eben ſo, wie oben bei den ſtatiſchen Momenten (ſiehe Art. 47, S. 31) nachgewieſen iſt, ergiebt ſich auch hier, daſs die Strecke $\overline{a'g'}$ und H_1 auf dem Längenmaſsſtabe, H auf demjenigen Flächenmaſsftabe zu meffen ift, nach welchem $f_1, f_2, f_3 \ldots$ aufgetragen find; das Ergebnifs ift jedoch das gleiche, wenn $\overline{a' g'}$ auf dem Flächenmafsftabe, H und H_1 auf dem Längenmafsftabe gemeffen werden.

Ein Querfchnitt fei in natürlicher Gröfse aufgezeichnet, $H = 5$ cm und $H_1 = 5$ cm; ferner feien $f_1, f_2, f_3 \ldots$ in einem Mafsftabe aufgetragen, in welchem 1 cm = 10 qcm ift; alsdann wird, wenn $\overline{a' g'} = 4{,}6$ cm ift,

$$\mathcal{J} = 4{,}6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5 \text{ cm}^4.$$

Wenn die Axe XX eine Schwerpunktsaxe ift (Fig. 55), fo find zunächft die ftatifchen Momente genau wie oben gezeigt zu ermitteln; die ftatifchen Momente der oberhalb von XX liegenden Flächentheile haben entgegengefetzten Sinn, wie diejenigen der unterhalb von XX liegenden Flächen, weil die

Fig. 55.



Hebelsarme verfchiedene Vorzeichen haben. Der Sinn der einzelnen Momente ift ab, bc, cd, de, ea; Anfangspunkt a und Endpunkt a fallen zufammen. Wird jetzt der Pol O_1 angenommen, fo find die Strahlen $O_1 a$, $O_1 b$, $O_1 c$, $O_1 d$, $O_1 e$, $O_1 a$; der letzte Strahl fällt mit dem erften zufammen. Als Seilpolygon erhält man $O\, I'' \, II'' \ldots V''$, und es ift

$$\mathcal{J}s = H \cdot H_1 \cdot \overline{mn}.$$

Ein anderes Verfahren hat *Mohr* angegeben. 60. *Mohr*'fches Verfahren.

Wenn die ftatifchen Momente nach dem in Art. 47 (S. 31) vorgeführten Verfahren conftruirt find (Fig. 54), fo ift der Flächeninhalt des Dreieckes $I\,a\,b$

$$\varphi_1 = \frac{\overline{ab} \cdot y_1}{2} = \frac{f_1 y_1}{H} \cdot \frac{y_1}{2} = \frac{f_1 y_1^2}{2H} = \frac{i_1}{2H}$$

und der Flächeninhalt des Dreieckes $II\,b\,c$

$$\varphi_2 = \frac{\overline{bc} \cdot y_2}{2} = \frac{f_2 y_2}{H} \cdot \frac{y_2}{2} = \frac{f_2 y_2^2}{2H} = \frac{i_2}{2H}.$$

Eben fo kann man für jeden Flächentheil f nachweifen, dafs fein Trägheitsmoment für eine Axe XX gleich ift dem Flächeninhalte des Dreieckes, welches von der Axe und den das betreffende Flächentheilchen begrenzenden Seilpolygonfeiten eingefchloffen ift, multiplicirt mit dem doppelten Polabftand. Es ift alfo

$$i_1 = 2H\varphi_1, \qquad i_2 = 2H\varphi_2, \qquad i_3 = 2H\varphi_3 \ldots$$

und

$$\mathcal{J} = \Sigma\,(i) = 2H\,\Sigma\,(\varphi) = 2HF_1,$$

wenn $F_1 = \Sigma\,(\varphi)$ ift.

Handelt es fich um das Trägheitsmoment für die Schwerpunktsaxe (Fig. 55), fo bleibt Alles giltig, und es wird

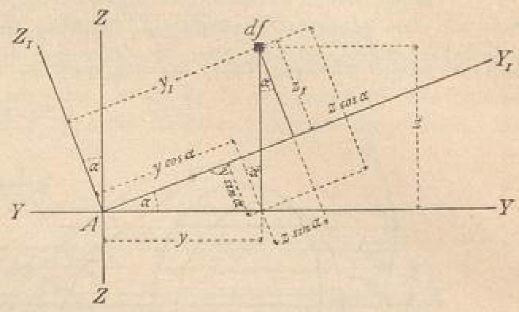
$$\mathcal{J}s = 2HF_2,$$

wenn F_2 den Flächeninhalt der Figur $I\,II\,III\,IV\,V\,a\,I$ bedeutet.

Handelt es fich um das Trägheitsmoment eines Querfchnittes für eine beliebige, nicht durch den Schwerpunkt gehende Axe, fo kann man daffelbe aus demjenigen für die parallele Schwerpunktsaxe nach Art. 50 (S. 34) ermitteln; diefes letztere ift aber im Vorftehenden nur für fehr einfache Querfchnittsformen und felbft bei diefen nur für einige wenige Lagen der Axen rechnerifch beftimmt. Für beliebig 61. Trägheitsmomente für verfchiedene Schwerpunktsaxen.

liegende Axen, alſo beiſpielsweiſe beim Rechteckquerſchnitt für eine Axe, welche keiner Seite parallel iſt, wird die Berechnung meiſt recht umſtändlich. Dagegen iſt die Ermittelung ſehr bequem, wenn man das geſuchte Trägheitsmoment für eine beliebige Schwerpunktsaxe durch diejenigen für zwei andere Schwerpunktsaxen ausdrückt, welche einen beliebigen, zweckmäſsig einen rechten Winkel mit einander bilden.

Fig. 56.



Die Beziehungen zwiſchen den Trägheitsmomenten zweier in einem beliebigen Punkte A der Querſchnittsebene ſenkrecht zu einander ſtehender Axen und demjenigen für eine andere durch dieſen Punkt gehende Axe ergeben ſich folgendermaſsen.

Das Trägheitsmoment eines Querſchnittes für die beliebige Axe $A Y_1$ (Fig. 56), welche den Winkel α mit der Axe YY einſchlieſst, iſt nach Art. 49 (S. 33)

$$\mathfrak{J}_{Y_1} = \int z_1^2 \, df.$$

Nach Fig. 56 iſt

$$z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha,$$

folglich

$$\mathfrak{J}_{Y_1} = \int z^2 \cos^2 \alpha \, . \, df + \int y^2 \sin^2 \alpha \, . \, df - \int 2 y z \sin \alpha \cos \alpha \, . \, df.$$

Die Integration iſt über den ganzen Querſchnitt auszudehnen; bei derſelben iſt α conſtant; da nun

$$\int z^2 \, df = \mathfrak{J}_Y, \quad \int y^2 \, df = \mathfrak{J}_Z \quad \text{und} \quad \int y z \, . \, df = \mathfrak{J}_{YZ}$$

iſt, ſo folgt

$$\mathfrak{J}_{Y_1} = \mathfrak{J}_Y \cos^2 \alpha + \mathfrak{J}_Z \sin^2 \alpha - \mathfrak{J}_{YZ} \sin 2 \alpha \quad \ldots \ldots \quad 22.$$

Das Trägheitsmoment für die Axe $A Z_1$ wird erhalten, indem man an Stelle von α den Winkel einführt, welchen $A Z_1$ mit YY bildet, d. h. $90 + \alpha$. Dann ergiebt ſich

$$\mathfrak{J}_{Z_1} = \mathfrak{J}_Z \cos^2 \alpha + \mathfrak{J}_Y \sin^2 \alpha + \mathfrak{J}_{YZ} \sin 2 \alpha \quad \ldots \ldots \quad 23.$$

Die beiden Gleichungen 22 u. 23 geben die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Lage der Schweraxen an. Beſonders wichtig iſt die Lage der Axen, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum und ein Minimum wird. $\mathfrak{J}_{Y_1}$ wird ein Maximum für den Werth von α, für welchen

$$\frac{d \mathfrak{J}_{Y_1}}{d \alpha} = - 2 \mathfrak{J}_Y \cos \alpha \sin \alpha + 2 \mathfrak{J}_Z \sin \alpha \cos \alpha - 2 \mathfrak{J}_{YZ} \cos 2 \alpha = 0,$$

d. h. für welchen $(\mathfrak{J}_Z - \mathfrak{J}_Y) \sin 2 \alpha = 2 \mathfrak{J}_{YZ} \cos 2 \alpha$ wird. Es iſt alſo

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_{max} = \frac{2 \mathfrak{J}_{YZ}}{\mathfrak{J}_Z - \mathfrak{J}_Y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 24.$$

Dieſer Gleichung genügen zwei Winkelgröſsen 2α, welche um 180 Grad verſchieden ſind, da $\operatorname{tg} (180 + 2 \alpha) = \operatorname{tg} 2 \alpha$ iſt. Es giebt alſo zwei Axen, für welche ein Maximum, bezw. Minimum des Trägheitsmomentes ſtattfindet, und dieſe beiden Axen bilden mit der angenommenen Axe YY die Winkel α_{max}, bezw. $90 + \alpha_{max}$; dieſe beiden Axen ſtehen ſonach ſenkrecht zu einander. Ob Maximum oder Minimum für die eine oder andere Axe ftattfindet, ergiebt die zweite Differentiation. Man findet leicht, dafs die zweiten Abgeleiteten nach α für zwei Winkel, welche um 90 Grad verfchieden find, entgegengefetztes Vorzeichen haben; entfpricht demnach dem Winkel α das Maximum, fo tritt für den Winkel $(90 + \alpha)$ das Minimum des Trägheitsmomentes ein.

Es folgt daraus der Satz: Für jeden Punkt in der Ebene des Querfchnittes ift eine Axe vorhanden, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum, eine andere, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird. Beide Axen ftehen zu einander fenkrecht. 62. Hauptaxen.

Man nennt diefe Axen die Hauptaxen. Diejenige, für welche das Trägheitsmoment feinen Gröfstwerth hat, nennt man die erfte Hauptaxe, diejenige, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird, heifst die zweite Hauptaxe.

Die Veränderlichkeit des Centrifugalmomentes $\mathcal{J}_{YZ}$ mit der Aenderung der Axen Y und Z kann in ganz ähnlicher Weife ermittelt werden, wie foeben für das Trägheitsmoment $\mathcal{J}$ gezeigt ift. Bezeichnet man das Centrifugalmoment für die beiden Axen Y_1 und Z_1 mit $\mathcal{J}_{Y_1 Z_1}$ und beachtet, dafs

$$z_1 = z \cos\alpha - y \sin\alpha \quad \text{und} \quad y_1 = y \cos\alpha + z \sin\alpha$$

ift, fo wird

$$\mathcal{J}_{Y_1 Z_1} = \int y_1 z_1 \, df = \int (y \cos\alpha + z \sin\alpha)(z \cos\alpha - y \sin\alpha) \, df,$$

$$\mathcal{J}_{Y_1 Z_1} = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \int y z \, df + \frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\int z^2 \, df - \int y^2 \, df \right),$$

$$\mathcal{J}_{Y_1 Z_1} = \mathcal{J}_{YZ} \cos 2\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} (\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z) \quad \ldots \ldots \quad 25.$$

$\mathcal{J}_{Y_1 Z_1}$ wird gleich Null für $(\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z) \sin 2\alpha = -2 \mathcal{J}_{YZ} \cos 2\alpha$, fonach für

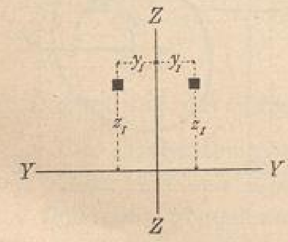
$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \mathcal{J}_{YZ}}{\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z} = \frac{2 \mathcal{J}_{YZ}}{\mathcal{J}_Z - \mathcal{J}_Y}.$$

Dies ift derfelbe Werth, für welchen nach Gleichung 24 Maximum, bezw. Minimum des Trägheitsmomentes ftattfindet. Für die Hauptaxen ift fonach

$$\mathcal{J}_{Y_1 Z_1} = \int y_1 z_1 \, df = 0.$$

Für viele Querfchnitte ift hierdurch ein bequemes Kennzeichen zur Beftimmung der Hauptaxen gefunden. Man fuche diejenigen Axen, für welche $\mathcal{J}_{Y_1 Z_1} = 0$ ift; alsdann find die gefundenen Axen die Hauptaxen. Es genügt, eine Hauptaxe zu fuchen, da nach Früherem die andere mit derfelben ftets einen Winkel von 90 Grad einfchliefst.

Fig. 57.



Bei fämmtlichen zu einer oder mehreren Axen fymmetrifch liegenden Querfchnitten find die Symmetrieaxen auch zugleich die Hauptaxen. Denn fei etwa die Z-Axe eine Symmetrieaxe, fo entfpricht jedem df mit den Coordinaten y_1, z_1 ein df mit den Coordinaten $-y_1$, z_1 (Fig. 57). Die Beiträge der beiden df zu $\mathcal{J}_{Y_1 Z_1}$ find alfo

$$df \cdot y_1 z_1 - df \cdot y_1 z_1 = 0.$$

Genau eben fo ift es mit fämmtlichen übrigen Querfchnittstheilen; die Summe der Beiträge je zweier fymmetrifch liegender Flächentheile ift gleich Null, fo dafs alfo auch die Gefammtfumme $\mathcal{J}_{Y_1 Z_1} = \int y_1 z_1 \, df = 0$ ift.

Bei den in Fig. 58 bis 62 dargeftellten Querfchnitten find die Hauptaxen angegeben. In den im vorhergehenden Halbbande diefes »Handbuches« mitgetheilten Tabellen über die »Deutfchen Normal-Profile für Walzeifen« find die Trägheitsmomente für folche Axen mit aufgenommen worden, welche beim Berechnen von Hochbau-Conftructionen eine Rolle fpielen.

Fig. 58.

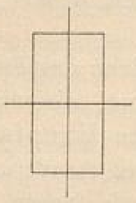


Fig. 59.

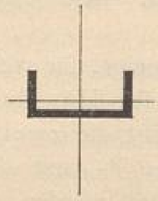


Fig. 60.

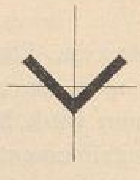


Fig. 61.

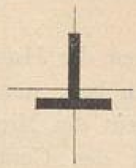
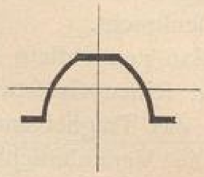


Fig. 62.



63. Wahl der Hauptaxen als Axen der Y und Z.

Wählt man die Hauptaxen als Axen der Y und Z (Fig. 57), fo ift für diefe nach Obigem $\int y\, z\, df = \mathfrak{J}_{YZ} = 0$; mithin ift, wenn man das Trägheitsmoment in Bezug auf die eine Hauptaxe mit A, dasjenige in Bezug auf die andere mit B bezeichnet, in den Gleichungen 22, 23 u. 25 für $\mathfrak{J}_Y$ und $\mathfrak{J}_Z$ bezw. A und B, fo wie für $\mathfrak{J}_{YZ} = 0$ einzufetzen. Man erhält für diefe Lage der Hauptaxen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{J}_{Y_1} = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha \\ \mathfrak{J}_{Z_1} = A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha \\ \mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = (A - B) \dfrac{\sin 2\alpha}{2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 26.$$

Sind A und B, d. h. die beiden Hauptträgheitsmomente einander gleich, fo ift

$$\mathfrak{J}_{Y_1} = A (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = A,$$

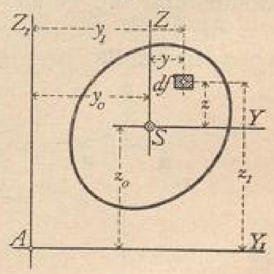
d. h. $\mathfrak{J}_{Y_1}$ ift alsdann von α unabhängig, alfo für jedes α gleich A.

Hieraus folgt: Sind die beiden Hauptträgheitsmomente gleich grofs, fo find alle Trägheitsmomente gleich grofs.

64. Centrifugalmomente.

Bei vielen ftatifchen Unterfuchungen ift es wichtig, die Lage der Hauptaxen und die Gröfse der Werthe von A und B zu kennen. Für die Ermittelung diefer Werthe aber bedarf man nach vorftehenden Entwickelungen der Kenntnifs des Centrifugalmomentes $\mathfrak{J}_{YZ} = \int y\, z\, df$.

Fig. 63.



Legt man durch einen beliebigen Punkt A in der Ebene eines Querfchnittes (Fig. 63) und durch den Schwerpunkt S deffelben je zwei parallele Axen AY_1 und AZ_1, bezw. SY und SZ, bezeichnet man die Coordinaten des Schwerpunktes für die erften beiden Axen mit z_0 und y_0, die Centrifugalmomente für die Axenpaare bezw. mit $\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1}$ und $\mathfrak{J}_{YZ}$, fo ift

$$\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = \mathfrak{J}_{YZ} + F y_0\, z_0.$$

Denn es ift

$$\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = \int y_1\, z_1\, df, \quad y_1 = y + y_0 \quad \text{und} \quad z_1 = z + z_0\,; \quad \text{alfo}$$

$$\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = \int (y + y_0)(z + z_0)\, df = \int y\, z\, df + y_0 \int z\, df + z_0 \int y\, df + y_0\, z_0 \int df.$$

Nun ist $\int y z \, df = \mathcal{J}_{YZ}$, $\int df = F$, $\int z \, df = 0$ und $\int y \, df = 0$; die letzteren beiden Werthe ergeben sich, weil SY und SZ Schwerpunktsaxen sind (vergl. Art. 33, S. 26, unter α). Es wird somit

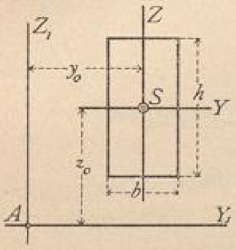
$$\mathcal{J}_{Y_1 Z_1} = \mathcal{J}_{YZ} + F y_0 z_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 27.$$

Wenn die Schwerpunktsaxen Hauptaxen sind, so ist $\mathcal{J}_{YZ} = 0$, demnach

$$\mathcal{J}_{Y_1 Z_1} = F y_0 z_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 28.$$

Diese Formel ist sehr bequem. Soll beispielsweise das Centrifugalmoment für die Axen AY_1 und AZ_1 (Fig. 64) und den Rechtecksquerschnitt ermittelt werden, dessen Seiten parallel zu den Axen sind, so lege man durch den Schwerpunkt zwei den ersteren bezw. parallele Axen SY und SZ; alsdann wird

Fig. 64.



$$\mathcal{J}_{Y_1 Z_1} = F y_0 z_0 .$$

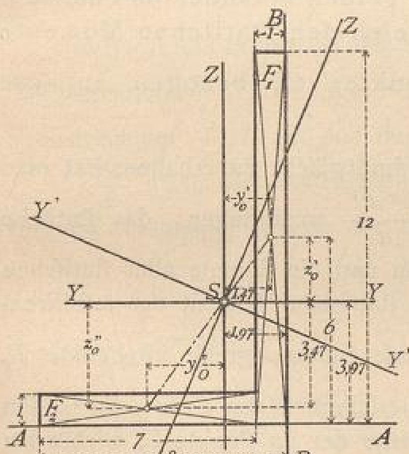
Fällt etwa A mit einer Ecke zusammen, so wird

$$\mathcal{J}_{Y_1 Z_1} = \frac{b^2 h^2}{4} .$$

Beispiel. Es soll das Centrifugalmoment eines ungleichschenkeligen Winkeleisens (Fig. 65) für zwei durch seinen Schwerpunkt gelegte Axen ermittelt werden, welche den Winkeleisenschenkeln parallel sind.

Zerlegt man den Querschnitt in zwei Rechtecke, deren eines den ganzen lothrechten Schenkel enthält, deren anderes den wagrechten Schenkel nach Abzug des schon beim ersten mitberechneten Rechteckes in der Ecke bildet, und nennt man die Flächeninhalte F_1 und F_2, so wie die Abstände der Einzelschwerpunkte von den Axen bezw. y_0', z_0', y_0'', z_0'', so ist

Fig. 65.



$$\mathcal{J}_{YZ} = F_1 y_0' z_0' + F_2 y_0'' z_0''.$$

Die Länge des grofsen und kleinen Schenkels sei bezw. 12 und 8 cm, die Stärke beider Schenkel 1,0 cm (Deutsches Normal-Profil Nr. 8/12) und der Abstand des Schwerpunktes von der äufseren Kante des langen, bezw. kurzen Schenkels 1,97 cm, bezw. 3,97 cm; alsdann ist

$$\mathcal{J}_{YZ} = 12 \cdot 1 \cdot 1{,}47\,(6 - 3{,}97) + 7 \cdot 1 \cdot 3{,}47\,(4{,}5 - 1{,}97)$$
$$= 97{,}26 \text{ cm}^4.$$

Die Einheit, in welcher die Centrifugalmomente erhalten werden, ist dieselbe, wie bei den Trägheitsmomenten, und es wird auf das hierüber in Art. 57 (S. 37) Gesagte verwiesen. Besondere Aufmerksamkeit ist aber hier auf die Vorzeichen der Coordinaten y_0 und z_0 zu verwenden. In obigem Beispiel sind für das erste Rechteck beide positiv, für das zweite Rechteck beide negativ einzuführen; das Product ist hier also für jedes der Theilrechtecke positiv.

d) Darstellung der Trägheits- und Centrifugalmomente mit Hilfe von Kreisen.

Ein Flächentheilchen df hat für die beiden einander im Punkte P schneiden- 65.
den Axen AA und BB das Centrifugalmoment $d\mathcal{J}_{AB} = u v \,.\, df$, wenn u und v Grundlage.
die senkrecht gemessenen Abstände des Theilchens df von den Axen bedeuten (Fig. 66). Bezeichnet man den Abstand desselben von dem Punkte P mit ρ, so wird $i_p = \rho^2 \, df$ das polare Trägheitsmoment von df für Punkt P genannt. Man lege durch P einen Kreis mit beliebigem Mittelpunkt M und beliebigem Halbmesser r, welcher die beiden Axen AA und BB aufser in P noch in den Punkten A'