Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

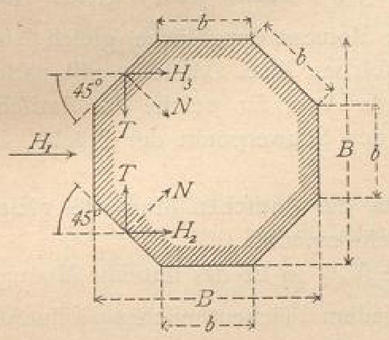
b) Schwerpunkte und statische Momente

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

Die Kraft H liegt in der lothrechten Ebene der Axe XX und greift in halber Höhe des Cylinders an.

c) Winddruck gegen ein regelmäfsiges achtfeitiges Prisma (Fig. 25). Die Breite des umfchriebenen Quadrates fei B, die Seitenlänge der achteckigen Grundfläche fei b; dann ift $b = 0{,}414\ B$. Der Winddruck gegen die fenkrecht getroffene Fläche ift für die Längeneinheit der Höhe

Fig. 25.



$$H_1 = p\,b,$$

derjenige gegen die unter 45 Grad getroffenen Seitenflächen je

$$N = p\,b \sin 45^0,$$

und die in die Windrichtung fallende Seitenkraft von N ift

$$H_2 = p\,b \sin^2 45^0 = \frac{p\,b}{2}.$$

Eben fo grofs ift H_3; mithin wird die gefammte Kraft, welche ein Umfturz-Moment erzeugt, für das fteigende Meter fein

$$H = H_1 + H_2 + H_3 = 2\,p\,b.$$

Die Mittelkraft aller H greift, wie oben, in halber Höhe des Prismas an und liegt in der durch die Axe des Prismas und H_1 beftimmten lothrechten Ebene.

Die bisher ganz allgemein und auch in vorftehenden Entwickelungen gemachte Annahme einer gleichmäfsigen Vertheilung des Winddruckes über eine getroffene ebene Fläche fcheint nach den neueren Verfuchen und theoretifchen Ermittelungen nicht ganz richtig zu fein; demnach ift auch nicht ohne Weiteres richtig, dafs die Mittelkraft durch den Schwerpunkt der getroffenen Fläche geht. Es fcheint, dafs der Druck an den Rändern am kleinften ift und nach der Mitte der Ebene hin zunimmt. Bis über die Gefetzmäfsigkeit genauere Angaben vorliegen, wird man jedoch für die Zwecke des Hochbaues unbedenklich die vorgeführten Annahmen den Berechnungen zu Grunde legen können.

b) Schwerpunkte und ftatifche Momente.

1) Schwerpunkte von ebenen Figuren.

Um den Schwerpunkt einer beliebigen ebenen Figur zu finden, genügt es, zwei Linien zu beftimmen, auf deren jeder der Schwerpunkt liegen mufs; alsdann ift der Schnittpunkt beider Linien der gefuchte Schwerpunkt. Werden in der Ebene, in welcher die betreffende Figur liegt, zwei Coordinaten-Axen OX und OY beliebig angenommen, fo erhält man die Abftände x_0 und y_0 des Schwerpunktes von den beiden Axen OY und OX aus den Gleichungen 32. Grund-gleichungen.

$$x_0 = \int \frac{x\,df}{F} \quad \text{und} \quad y_0 = \int \frac{y\,df}{F}, \quad \ldots\ldots \quad 10.$$

in denen F die ganze Querfchnittsfläche, df den Flächeninhalt eines beliebigen Theilchens mit den Coordinaten x und y bedeutet und die Summirung über die ganze Fläche auszudehnen ift. Die vorftehenden beiden Gleichungen können hier als aus der Mechanik bekannt vorausgefetzt werden. Man kann ftatt der unendlich kleinen Theilchen df Flächentheile f von endlicher Gröfse einführen, alfo die obigen Gleichungen fchreiben:

$$x_0 = \frac{\Sigma\,(f\,x)}{F} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{\Sigma\,(f\,y)}{F}, \quad \ldots\ldots \quad 11.$$

wenn x und y die Schwerpunkts-Coordinaten der Flächentheile f bedeuten.

Die Zähler der Gleichungen nennt man die ſtatiſchen Momente der Fläche, bezogen auf die Y- und X-Axe; denn denkt man in jedem Theile der Fläche den Inhalt deſſelben als Kraft ſenkrecht zur Ebene der Figur wirkend, ſo ſind die ſtatiſchen Momente dieſer Kräfte für die beiden Axen eben die Zählergröſsen obiger Gleichungen.

33. Folgerungen. Aus den Schwerpunktsgleichungen folgt:

α) x_0 wird gleich Null, wenn der Zähler $\Sigma\ (fx)$, bezw. $\int x\,df$ gleich Null wird, d. h. für eine Axe, für welche das ſtatiſche Moment der Fläche gleich Null wird. Der Schwerpunkt liegt demnach auf einer ſolchen Axe. Daſſelbe gilt natürlich für y_0, ſo daſs man allgemein ſagen kann: Jede Axe, für welche das ſtatiſche Moment einer Fläche gleich Null iſt, geht durch den Schwerpunkt der Fläche, iſt alſo, wie man ſagt, eine Schwerpunktsaxe.

Man ſuche daher zwei Axen auf, für welche die ſtatiſchen Momente gleich Null ſind; alsdann iſt ihr Schnittpunkt auch der Schwerpunkt.

β) Liegt eine Figur ſymmetriſch zu einer Axe XX, ſo iſt das ſtatiſche Moment $\int y\,df$ der Figur für dieſe Axe gleich Null; denn jedem Flächentheilchen f_1 im Abſtande y_1 von der Axe entſpricht ein eben ſo groſses Theilchen f_1 im Abſtand $-y_1$ von der Axe; der Beitrag beider Theile zum ſtatiſchen Momente iſt alſo $f_1 y_1 - f_1 y_1 = 0$. Das Gleiche gilt von je zwei anderen Theilen, ſo daſs alſo das geſammte ſtatiſche Moment gleich Null wird. Daraus folgt: Jede Symmetrie-Axe einer Fläche iſt eine Schwerpunktsaxe.

Hat ſonach ein Querſchnitt eine Symmetrie-Axe, ſo iſt nur noch die Lage des Schwerpunktes auf derſelben zu beſtimmen; hat ein Querſchnitt zwei Symmetrie-Axen, ſo iſt der Schnittpunkt beider auch der Schwerpunkt.

γ) Nach Gleichung 10 iſt $Fx_0 = \int x\,df$. Iſt es möglich, die ganze Fläche in eine Anzahl Gruppen $F_1, F_2, F_3 \ldots$ zu zerlegen, von deren jeder der Schwerpunktsabſtand $(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ bekannt iſt, ſo muſs für dieſe ſein

$$F_1 x_1 = \left(\int x\,df_1\right), \quad F_2 x_2 = \left(\int x\,df_2\right), \quad F_3 x_3 = \left(\int x\,df_3\right), \quad . \quad 12.$$

in welchen Ausdrücken ſich die Einzelintegrale auf die einzelnen Gruppen beziehen. Dann iſt ſonach

$$F x_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \ldots + F_n x_n,$$

und es wird

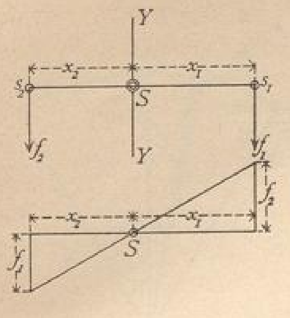
$$x_0 = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \ldots + F_n x_n}{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13.$$

Es iſt ſehr oft möglich, die gegebene Figur in Rechtecke, bezw. ſolche kleinere Figuren zu zerlegen, deren Schwerpunkte bekannt ſind und alsdann mit Hilfe obiger Formel die Lage des Geſammtſchwerpunktes zu finden.

δ) Der Schwerpunkt S zweier Flächen F_1 und F_2 (Fig. 26) mit den Schwerpunkten s_1 und s_2 liegt auf der Verbindungslinie $s_1 s_2$ beider Schwerpunkte. Nennt man nämlich den Abſtand des Geſammtſchwerpunktes von dieſer Verbindungslinie y_0, ſo iſt $Fy_0 = F_1 y_1 + F_2 y_2$. Die Abſtände y_1 und y_2 der beiden Schwerpunkte s_1 und s_2 von derſelben Axe ſind aber gleich Null, weil die Axe durch dieſe Schwerpunkte gelegt iſt. Demnach iſt für dieſe Axe $Fy_0 = 0$, alſo auch $y_0 = 0$.

Hieraus folgt weiter, daſs, wenn die Schwerpunkte noch weiterer Flächen auf

Fig. 26.



diefer Linie liegen, der Gefammtfchwerpunkt gleichfalls auf derfelben liegt; kann man alfo eine Fläche in eine Anzahl Streifen zerlegen, deren Schwerpunkte auf einer geraden Linie liegen, fo befindet fich auch der Schwerpunkt der gefammten Fläche auf diefer Linie.

Die Lage des Schwerpunktes auf der Linie $s_1 s_2$ (Fig. 26) ift leicht zu finden. Werden die Abftände desfelben von s_1 und s_2 mit bezw. $+x_1$ und $-x_2$ bezeichnet, fo mufs für eine fenkrecht zu $s_1 s_2$ durch den Schwerpunkt S gelegte Axe YY fein

$$0 = f_1 x_1 - f_2 x_2 \text{ oder } \frac{x_1}{x_2} = \frac{f_2}{f_1}.$$

Daraus ergiebt fich die nachfolgende Conftruction.

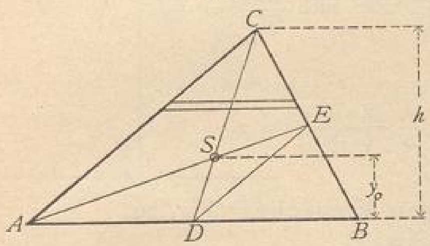
Man errichte in s_1 eine Senkrechte, welche f_2 Flächeneinheiten in beliebigem Mafsftabe enthält, in s_2 eine Senkrechte, jedoch nach entgegengefetzter Seite, welche f_1 Flächeneinheiten in demfelben Mafsftabe enthält, und verbinde die Endpunkte; alsdann fchneidet diefe Verbindungslinie die Axe $s_1 s_2$ im Schwerpunkte S.

2) Schwerpunkte von einfachen Figuren.

α) Schwerpunkt eines Quadrates, Rechteckes, Parallelogrammes, Kreifes und einer Ellipfe. Jede diefer Figuren hat wenigftens zwei Symmetrie-Axen, bezw. Halbirungslinien, in deren Schnittpunkt der Schwerpunkt fich befindet. 34 Regelmäfsige Figuren.

Demnach liegt er beim Rechteck und Quadrat in der Mitte der Höhe und Breite, beim Parallelogramm im Schnittpunkte der Halbirungslinien der Seiten und beim Kreife und bei der Ellipfe im Mittelpunkte.

Fig. 27.



β) Schwerpunkt eines Dreieckes (Fig. 27). 35. Dreieck.

Zerlegt man die Dreiecksfläche durch Linien, welche einer Seite (AB in Fig. 27) parallel find, in eine Anzahl fehr fchmaler Streifen, fo liegt der Schwerpunkt eines jeden Streifens in der Mitte feiner Breite, und nach der Folgerung unter δ in Art. 33 liegt der Gefammtfchwerpunkt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Streifen. Der Schwerpunkt liegt alfo auf der Linie CD, welche die Mitte D einer Dreieckfeite mit der gegenüber liegenden Ecke (C) verbindet. Aus demfelben Grunde liegt er auch auf der Linie AE, wenn $CE = EB$ ift. Der Schwerpunkt S ift der Schnittpunkt beider. Da aber DE und AC parallel find, fo ift

$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CA}} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \overline{DS} = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{\overline{CD}}{3}.$$

Daraus folgt, dafs der fenkrechte Abftand des Schwerpunktes S von der Grundlinie AB des Dreieckes ein Drittel der Höhe ift, d. h. es ift

$$y_0 = \frac{h}{3}.$$

Da jede Seite des Dreieckes als Grundlinie angefehen werden kann, fo liegt S auch auf einer Parallelen zu BC, deren fenkrechter Abftand ein Drittel desjenigen beträgt, in welchem A von BC liegt. Das Gleiche gilt von AC, bezw. B. Mittels diefes Gefetzes können daher leicht zwei Linien gezeichnet werden, auf denen der Schwerpunkt liegt.

γ) Schwerpunkt eines Parallel-Trapezes (Fig. 28). 36. Parallel-Trapez.

Der Schwerpunkt des Trapezes in Fig. 28 liegt auf der Verbindungslinie der beiden Punkte E und F, welche die beiden parallelen Seiten halbiren. Ferner ift

$$F y_0 = \int y \, df.$$

Nennt man die Breite eines Streifens z und ſeine Höhe dy, ſo iſt

$$df = z\,dy,\quad z = b - \frac{b-a}{h}\,y \quad\text{und}\quad F = (a+b)\,\frac{h}{2}\,;$$

ſonach

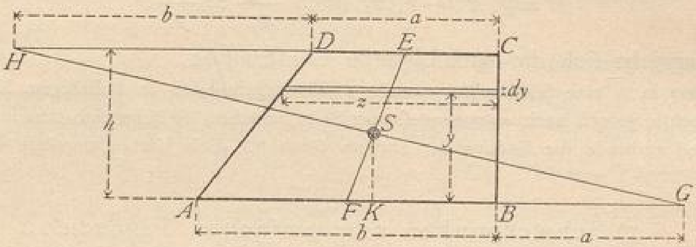
$$F y_0 = \int_0^h \left(b y - \frac{b-a}{h}\,y^2\right) dy = \frac{b h^2}{2} - \frac{(b-a)}{h}\,\frac{h^3}{3}\,,$$

und

$$y_0 = \frac{h}{3}\,\frac{(2a+b)}{(a+b)}\,.$$

Daraus ergiebt ſich die folgende Conſtruction.

Fig. 28.



Man halbire die beiden parallelen Seiten in E und F, trage $BG = a$ und $DH = b$ nach rechts, bezw. links in den Verlängerungen der beiden parallelen Seiten auf und ziehe HG; alsdann iſt der Schnittpunkt von HG mit EF der Schwerpunkt S. Denn es iſt

$$\frac{\overline{SF}}{\overline{EF}} = \frac{a + \frac{b}{2}}{a + \frac{b}{2} + b + \frac{a}{2}} = \frac{2a+b}{3(a+b)}\,,\quad \text{aber auch}\quad \frac{\overline{SF}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{SK}}{h}\,,$$

mithin iſt

$$\frac{\overline{SK}}{h} = \frac{2a+b}{3(a+b)} \quad\text{und}\quad \overline{SK} = \frac{h}{3}\,\frac{(2a+b)}{(a+b)} = y_0\,.$$

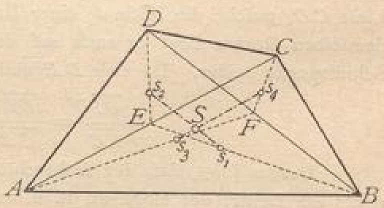
Der Punkt S iſt alſo in der That der Schwerpunkt.

37. Unregelmäſsiges Viereck.

δ) Schwerpunkt eines unregelmäſsigen Viereckes (Fig. 29).

Um den Schwerpunkt des unregelmäſsigen Viereckes $ABCD$ zu beſtimmen, ziehe man die Gerade AC und ermittele die Schwerpunkte s_1 und s_2 der beiden Dreiecke ACB und ACD, wie unter β gezeigt; alsdann liegt der Geſammtſchwerpunkt auf der Linie $s_1 s_2$. Nun ziehe man BD und ermittele die Schwerpunkte s_3 und s_4 der beiden Dreiecke ABD und BCD; alsdann liegt der Geſammtſchwerpunkt auch auf der Linie $s_3 s_4$. Demnach iſt der Schnittpunkt der beiden Linien $s_1 s_2$ und $s_3 s_4$ der geſuchte Schwerpunkt.

Fig. 29.



In ganz ähnlicher Weiſe kann man weiter verfahren, wenn es ſich um den Schwerpunkt eines Vieleckes handelt, welches in Dreiecke zerlegt werden kann. Doch wird in einem ſolchen Falle vielfach das unten vorzuführende graphiſche Verfahren bequemer ſein.

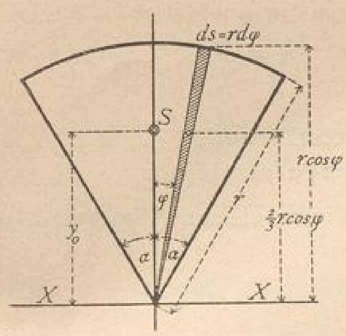
38. Kreisausſchnitt.

ε) Schwerpunkt eines Kreisausſchnittes (Fig. 30).

Der ganze zum Kreisausſchnitt gehörige Winkel ſei 2α; die Halbirungslinie des Winkels iſt eine Symmetrie-Axe, enthält alſo den Schwerpunkt; ſomit iſt nur noch der Abſtand deſſelben vom Kreismittelpunkte oder, was daſſelbe beſagt, von einer durch dieſen ſenkrecht zur Winkelhalbirenden gelegten Axe XX zu ſuchen.

Für den zu einem Bogenſtück $ds = r\,d\varphi$ gehörigen Theil des Ausſchnittes (Fig. 30), welcher als

Fig. 30.



Dreieck aufgefaſſt werden kann, iſt der Schwerpunktsabſtand von der Axe XX: $y = \frac{2}{3}\, r \cos \varphi$, der Flächeninhalt

$$df = ds\,\frac{r}{2} = \frac{r^2\,d\varphi}{2};$$

mithin iſt

$$y_0 = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} y\,df}{F} = \frac{2\int_0^{\alpha} y\,df}{F} = \frac{\frac{2}{3}\,r^3 \int_0^{\alpha} \cos \varphi\,d\varphi}{r^2\,\alpha}$$

$$y_0 = \frac{2}{3}\,\frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14.$$

Für den Halbkreis wird $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\sin \alpha = 1$, ſonach

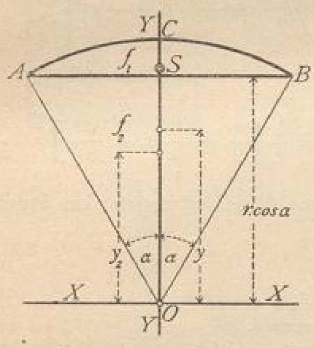
$$y_0 = \frac{4\,r}{3\,\pi} = 0{,}425\; r.$$

Für den Viertelkreis iſt $\alpha = \frac{\pi}{4}$, daher $y_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3\,\pi}\, r = 0{,}6\; r$.

Für den Sechſtelkreis iſt $\alpha = \frac{\pi}{6}$, mithin $y_0 = \frac{2}{\pi}\, r = 0{,}637\; r$.

ζ) Schwerpunkt eines Kreisabſchnittes (Fig. 31). 39. Kreisabſchnitt.

Fig. 31.



Der Schwerpunkt des Kreisabſchnittes liegt zunächſt wieder auf der Winkelhalbirenden; ferner iſt aber nach der Folgerung δ in Art. 33 (S. 26), wenn F der Flächeninhalt des Kreisausſchnittes $ACBO$, y der Abſtand des Schwerpunktes dieſer Fläche von XX iſt, wenn ferner f_1 und f_2 die Flächeninhalte des Kreisabſchnittes ACB, bezw. des Dreieckes ABO und y_1, bezw. y_2 die Schwerpunktsabſtände dieſer Flächen von XX ſind,

$$F y = f_1 y_1 + f_2 y_2 \quad \text{oder} \quad y_1 = \frac{F y - f_2 y_2}{f_1}.$$

Nun iſt $F = r^2 \alpha$, $y = \frac{2}{3}\,\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ und $f_2 = r^2 \sin \alpha \cos \alpha$;

ferner

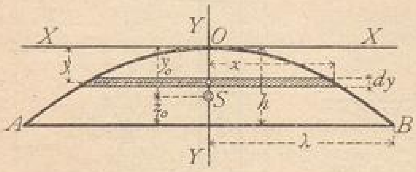
$$y_2 = \frac{2}{3}\, r \cos \alpha \quad \text{und} \quad f_1 = r^2\,(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha);$$

mithin wird

$$y_1 = \frac{\frac{2}{3}\, r \sin^3 \alpha}{\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15.$$

η) Schwerpunkt einer Parabelfläche (Fig. 32). 40. Parabelfläche

Fig. 32.



Die Gleichung der Parabel AOB, bezogen auf O als Anfangspunkt der Coordinaten-Axen, iſt

$$\frac{x^2}{\lambda^2} = \frac{y}{h}.$$

Der Schwerpunkt der Fläche AOB liegt zunächſt auf der Symmetrie-Axe YY; der Abſtand deſſelben von XX iſt

$$y_0 = \frac{\int y\,df}{F} = \frac{\int y\,df}{\int df}.$$

Es iſt $df = 2\,x\,dy$, $y = \frac{h\,x^2}{\lambda^2}$ und $dy = \frac{2\,x\,h}{\lambda^2}\,dx$, alſo $df = \frac{4\,x^2\,h}{\lambda^2}\,dx$, ſomit

$$y_0 = \frac{\frac{4\,h^2}{\lambda^4}\int_0^{\lambda} x^4\,dx}{\frac{4\,h}{\lambda^2}\int_0^{\lambda} x^2\,dx} = \frac{h}{\lambda^2}\,\frac{3}{5}\,\lambda^2 = \frac{3}{5}\,h.$$

Der Schwerpunkt liegt alfo vom Scheitel O um

$$y_0 = \frac{3}{5} h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16.$$

entfernt.

von der Linie AB um

$$z_0 = \frac{2}{5} h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17.$$

3) Schwerpunkte von Querfchnittsflächen, die aus einfachen Figuren zufammengefetzt find.

41\. Gleichfchenkeliges Winkeleifen.

α) Schwerpunkt des gleichfchenkeligen Winkeleifens (Fig. 33). Auf die Ausrundung im Winkel und die Abrundung der Ecken foll keine Rückficht genommen werden; diefelbe kann fowohl bei diefer, wie bei den folgenden Querfchnittsformen meiftens unbeachtet gelaffen werden.

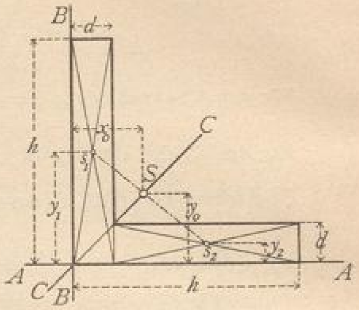


Fig. 33.

Der Abftand des Schwerpunktes S von AA, bezw. BB ift

$$y_0 = x_0 = \frac{\Sigma (f y)}{F} = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Hierin ift f_1 der Flächeninhalt des lothrecht, f_2 derjenige des wagrecht gezeichneten Schenkels, bei letzterem nach Abzug des Flächentheiles, der mit dem lothrechten Schenkel zufammenfällt; y_1 und y_2 find die Abftände der Schwerpunkte von AA.

Eine angenäherte, faft ftets genügend genaue Formel wird folgendermafsen gefunden [13]. Es ift

$$y_0 = \frac{\frac{d h \cdot h}{2} + (h-d)\, d \frac{d}{2}}{2 d h - d^2} = \frac{h^2 + (h-d)\, d}{2\,(2h-d)} = \frac{h^2 + h d - d^2}{2\,(2h-d)} = \frac{1}{2}\left[\frac{h}{2} + \frac{3}{4} d - \frac{d^2}{8h}\right].$$

Innerhalb der für $\frac{d}{h}$ vorkommenden Grenzen liegt $\frac{d^2}{2 \cdot 8h}$ zwifchen 0,0125 und 0,00625, hat fonach etwa den Mittelwerth 0,009. Wird diefer eingeführt, fo erhält man

$$y_0 = x_0 = \frac{h}{4} + 0{,}366\, d.$$

Sehr leicht kann der Schwerpunkt durch Conftruction gefunden werden.

Man zerlege den Querfchnitt in zwei Rechtecke, ermittele ihre Schwerpunkte s_1 und s_2, die nach Art. 33 (unter δ) die Schnittpunkte der Diagonalen find; dann liegt der Gefammtfchwerpunkt auf der Linie $s_1 s_2$; da er auch auf der Symmetrie-Axe CC liegt, fo ift der Schnittpunkt S der genannten beiden Linien der gefuchte Schwerpunkt.

Beifpiel. Es fei die Schenkellänge $h = 10$ cm und die Dicke $d = 1$ cm; alsdann ift $f_1 = 10$ qcm, $f_2 = 9$ qcm, $y_1 = 5$ cm und $y_2 = 0{,}5$ cm; fonach

$$y_0 = \frac{10 \cdot 5 + 9 \cdot 0{,}5}{10 + 9} = 2{,}87 \text{ cm} = x_0 .$$

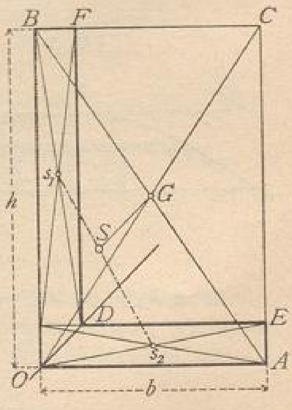
Die angenäherte Formel giebt

$$y_0 = 2{,}5 + 0{,}366 = 2{,}866 \text{ cm} = x_0 .$$

42\. Ungleichfchenkeliges Winkeleifen.

β) Schwerpunkt des ungleichfchenkeligen Winkeleifens (Fig. 34).

Fig. 34.



Hier ift keine Symmetrie-Axe vorhanden; man mufs alfo x_0 und y_0 getrennt berechnen. Es ift

$$x_0 = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2}{f_1 + f_2} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Die Conftruction des Schwerpunktes ift in ähnlicher Weife möglich, wie unter α [13]. Man ermittelt zunächft s_1 und s_2, wie oben; alsdann liegt der Gefammtfchwerpunkt auf $s_1 s_2$. Der Querfchnitt kann

[13] Siehe: Zimmermann. Ueber Winkeleifen-Querfchnitte. Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 33.

Fig. 35.

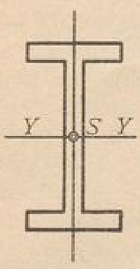


Fig. 36.

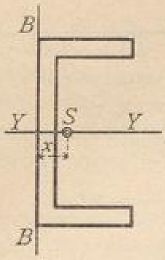
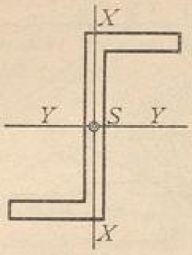


Fig. 37.



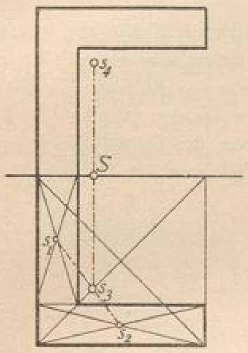
ferner als Differenz der beiden Rechtecke $OACB$ und $DECF$ betrachtet werden; der Schwerpunkt liegt alfo auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte diefer beiden Rechtecke; da diefe Schwerpunkte jedoch fehr nahe zufammenfallen, fo ergiebt fich die Richtung der Verbindungslinie nicht genügend genau. Nun mufs aber die Verbindungslinie zur Linie OD parallel fein; man ziehe alfo durch den Schwerpunkt G des umfchriebenen Rechteckes $OACB$ die Parallele zu OD; alsdann ift der Schnittpunkt diefer mit $s_1 s_2$ der gefuchte Schwerpunkt.

γ) Schwerpunkt des I-Eifens (Fig. 35). 43. I-Eifen.

Der Schwerpunkt ift der Schnittpunkt beider Symmetrie-Axen.

δ) Schwerpunkt des [-Eifens (Fig. 36 u. 38). 44. [-Eifen.

Fig. 38.



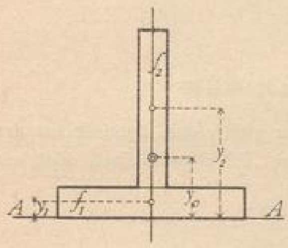
Der Schwerpunkt liegt auf der wagrechten Symmetrie-Axe im Abftande x_0 von BB; x_0 ift nach obiger Gleichung aufzufinden, durch Conftruction wie folgt. Die wagrechte Symmetrie-Axe theilt das [-Eifen in zwei Theile, deren jeder einen Winkeleifen-Querfchnitt darftellt. Man ermittelt ihre Schwerpunkte s_3 und s_4; wie eben gezeigt wurde, ift der Gefammtfchwerpunkt der Schnittpunkt der Linie $s_3 s_4$ mit der Symmetrie-Axe.

ε) Schwerpunkt des Z-Eifens (Fig. 37). 45. Z-Eifen.

Der Schwerpunkt fällt mit demjenigen des lothrechten Rechteckes, des fog. Steges, zufammen; denn fowohl für die Axe XX, wie für die Axe YY ift das ftatifche Moment der beiden wagrechten Rechtecke zufammen gleich Null; diefelben find alfo ohne Einflufs auf die Schwerpunktlage. Dabei ift vorausgefetzt, dafs diefelben gleichen Flächeninhalt haben.

ζ) Schwerpunkt des T-Eifens (Fig. 39 u. 40). 46. T-Eifen.

Fig. 39.

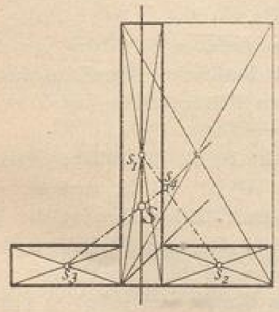


Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrie-Axe im Abftande y_0 von der Axe AA, und es ift

$$y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Durch Conftruction ift derfelbe folgendermafsen zu finden. Man zerlege den Querfchnitt in drei Rechtecke, ein lothrechtes und zwei wagrechte. Die Schwerpunkte feien s_1, s_2, s_3. Das lothrechte und das eine wagrechte Rechteck bilden zufammen einen Winkeleifenquerfchnitt, deffen Schwerpunkt s_4, wie unter β angegeben, zu finden ift. Dann liegt der Gefammtfchwerpunkt auf der Linie $s_3 s_4$, ferner auch auf der lothrechten Symmetrie-Axe, alfo auf dem Schnittpunkt S diefer beiden Linien.

Fig. 40.



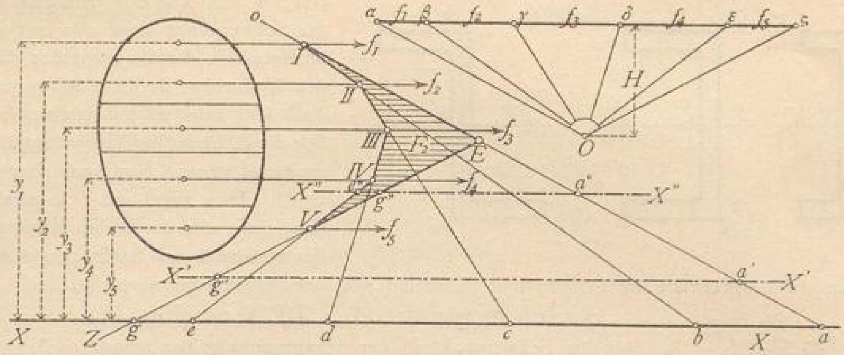
4) Graphifche Ermittelung der ftatifchen Momente und der Schwerpunkte von Flächen.

Wenn die Figur, deren ftatifches Moment, bezw. deren Schwerpunkt ermittelt werden foll, eine unregelmäfsige Form hat, fo ift die graphifche Behandlung der Aufgabe zu empfehlen. 47. Statifches Moment.

Man zerlege die ganze Figur in Streifen, welche derjenigen Axe parallel laufen, für welche das ftatifche Moment gefucht wird (Fig. 41). Es feien die Flächeninhalte der einzelnen Streifen $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$, die Abftände der Schwerpunkte derfelben von der Axe XX bezw. $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$; alsdann ift das ftatifche Moment der ganzen Fläche nach Obigem

$$M = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \cdots + f_n y_n.$$

Fig. 41.



Man führe nun die einzelnen Flächengröfsen als parallel zur Axe XX wirkende Kräfte ein, welche in den Einzelfchwerpunkten angreifen, füge fie zu einer Kraftlinie zufammen, indem man fie nach einem beliebigen, jedoch für alle gleichen Mafsftabe aufträgt. Es fei $\alpha\beta = f_1$, $\beta\gamma = f_2$, $\gamma\delta = f_3 \ldots$ Nun nehme man im Abftande H von diefer Kraftlinie einen Pol O an und conftruire das den Werthen f_1, f_2, $f_3 \ldots$ und diefem Pol entfprechende Seilpolygon $o\,I\,II\,III \ldots$ Verlängert man die Seilpolygon-Seiten, welche die erfte Kraft f_1 begrenzen, bis zum Schnitte mit der Axe XX, fo erhält man ein Dreieck Iab, und es ift

$$\triangle\, Iab \backsim \triangle\, O\alpha\beta,$$

da die Seiten diefer Dreiecke einander bezw. parallel find; in Folge deffen ift

$$\frac{\overline{ab}}{y_1} = \frac{\overline{\alpha\beta}}{H} = \frac{f_1}{H}, \text{ d. h. } H.\overline{ab} = f_1 y_1.$$

Der Abfchnitt $\overline{ab}$ der die Kraft f_1 begrenzenden Seilpolygon-Seiten auf der Axe XX multiplicirt mit dem Polabftand H giebt fonach das ftatifche Moment von f_1 für diefe Axe.

Eben fo ift

$$\triangle\, IIbc \backsim \triangle\, Ob\gamma;$$

alfo

$$\frac{\overline{bc}}{y_2} = \frac{\overline{\beta\gamma}}{H} = \frac{f_2}{H}, \quad H.\overline{bc} = f_2 y_2 \text{ und } H.\overline{cd} = f_3 y_3 \text{ u. f. w.}$$

Das ftatifche Moment der ganzen Fläche für die Axe XX ift daher gleich dem Product aus dem Stück ag, welches von den beiden äufserften Seilpolygon-Seiten auf der Axe XX abgefchnitten wird, und dem Polabftand H, oder es ift

$$H.\overline{ag} = \Sigma\,(fy).$$

Für die Anwendung ift zu beachten: Die Abfchnitte ab, bc, $cd \ldots$ auf der Axe XX liegen in den Dreiecken Iab, $IIbc$, bedeuten demnach Längen; die Werthe von H dagegen find auf diefelbe Einheit zu beziehen, wie die Gröfsen $f_1, f_2, f_3 \ldots$, bedeuten alfo Flächen. Daher ift H auf dem Flächenmafsftabe, $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd} \ldots$ hingegen find auf dem Längenmafsftabe zu meffen.

Beim Zerlegen der betreffenden Figur in parallele Streifen müffen diefelben fo fchmal gewählt werden, dafs man mit genügender Genauigkeit die einzelnen Streifen als Rechtecke, Parallelogramme, Paralleltrapeze, überhaupt als folche einfache Figuren anfehen kann, deren Flächeninhalte und Schwerpunktslagen leicht beftimmt werden können.

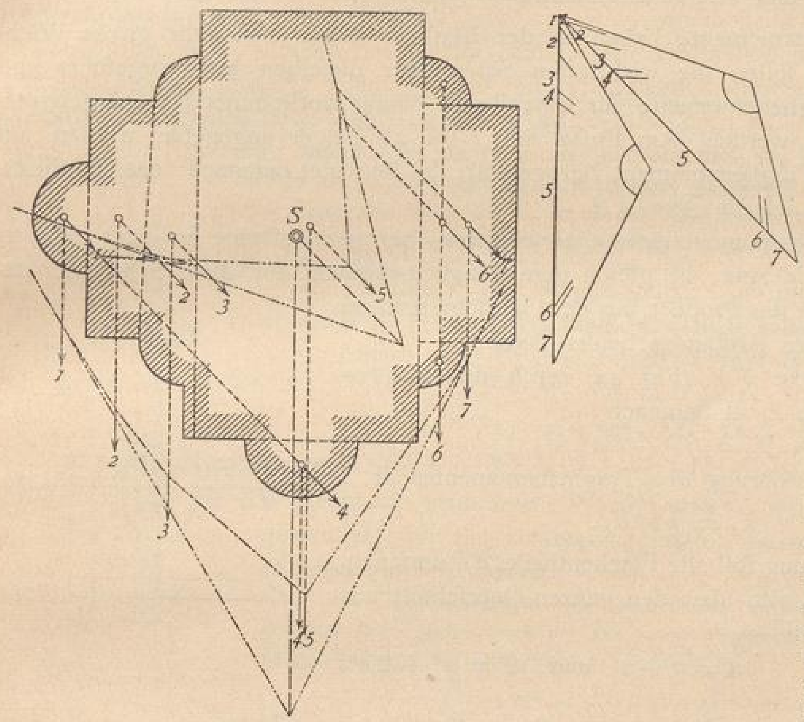
Handelt es fich um das ftatifche Moment der Fläche für die Axe $X'X'$, fo ift daffelbe offenbar gleich $H.\overline{a'g'}$. Rückt aber die Axe zwifchen die Kräfte f, etwa nach $X''X''$, fo ift zunächft das ftatifche Moment der oberhalb liegenden Flächentheile gleich $H.\overline{a''e''}$; im ftatifchen Moment der gefammten Fläche ift aber auch der Beitrag der an der anderen Seite der Axe gelegenen Theile enthalten, welche einen negativen Beitrag liefern, weil die y-Werthe für diefelben von der Axe $X''X''$ aus nach unten gerechnet werden müffen; die von der Axe nach oben gerechneten Werthe der y find ja pofitiv eingeführt. Demnach liefert hier f_5 ein ftatifches Moment gleich $-H.\overline{g''e''}$, und daher ift das ftatifche Moment der ganzen Fläche, bezogen auf die Axe $X''X''$, gleich $H.\overline{a''g''}$.

Demnach ift allgemein nachgewiefen: Das ftatifche Moment einer Fläche F, bezogen auf eine Axe XX, wird erhalten, wenn man das von den beiden äufserften Seilpolygon-Seiten auf diefer Axe abgeschnittene Stück ($a g$, bezw. $a' g'$, $a'' g''$) mit dem Polabstand H multiplicirt. Dabei muss das Stück $a g$ auf dem Längenmassstabe, der Polabstand H auf dem Flächenmassstabe gemessen werden, nach welchem die Werthe von f aufgezeichnet sind.

Rückt die Axe XX weiter nach oben, so wird das von den äussersten Seilpolygon-Seiten auf der- 48. Schwerpunkt.
selben abgeschnittene Stück immer kleiner; geht die Axe durch den Schnittpunkt E der äussersten Seilpolygon-Seiten, so ist das abgeschnittene Stück gleich Null; also wird auch das statische Moment in Bezug auf diese Axe gleich Null; dieselbe ist also eine Schwerpunktsaxe. Hieraus folgt: Die durch den Schnittpunkt E der äussersten Seilpolygon-Seiten parallel zu XX gelegte Axe enthält den Schwerpunkt der Fläche.

Das soeben gefundene Ergebniss folgt auch mit Nothwendigkeit aus nachstehender Ueberlegung. Da die Flächen als Kräfte eingeführt sind, so kann man annehmen, diese Kräfte seien die Gewichte der einzelnen Theile einer an allen Stellen gleich starken Platte, welche dieselbe Form hat, wie die gegebene Fläche, und in eben solche Theile getheilt ist, wie diese. Um die wirklichen Gewichte zu erhalten, braucht man nur alle Werthe f mit demselben Factor γ, dem Gewichte der Flächeneinheit, zu multipliciren. Da man aber die Platte aus beliebigem Material hergestellt und beliebig stark annehmen kann, so ist γ ganz beliebig, kann also auch gleich 1 gesetzt werden; die Werthe f können demnach auch als die Gewichte selbst angesehen werden. Die Mittelkraft aller dieser parallel gerichteten Kräfte geht demnach durch den Schwerpunkt der Fläche; sie geht aber auch durch den Schnittpunkt der äussersten Seilpolygon-Seiten und ist der Richtung der anderen Kräfte parallel. Die durch diesen Schnittpunkt parallel zur Axe XX gezogene Linie ist also die Mittelkraft nach Richtung und Lage und geht durch den Schwerpunkt. Das Gleiche gilt von jeder anderen beliebigen Lage, welche für die Richtung der Axe, also auch der Kräfte angenommen wird. Man kann demnach leicht noch eine zweite Axe finden, auf welcher der Schwerpunkt liegt; der Schnittpunkt beider Axen ist dann der gesuchte Schwerpunkt.

Fig. 42.



Die gezeigte graphische Ermittelung des Schwerpunktes ist besonders bei unregelmässigen Querschnitten empfehlenswerth; Fig. 42 zeigt diese Bestimmung für den Querschnitt eines Vierungspfeilers.

c) Trägheitsmomente und Centrifugalmomente.

Wird jedes Theilchen df einer Querschnittsfläche F mit dem Product uv seiner 49. Erläuterung.
senkrecht genommenen Abstände von zwei Axen AA und BB multiplicirt (Fig. 43) und die Summe aller dieser Producte gezogen, so erhält man einen Ausdruck

$$\mathfrak{J}_{AB} = \int u v \, df,$$