



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik der Hochbau-Constructions

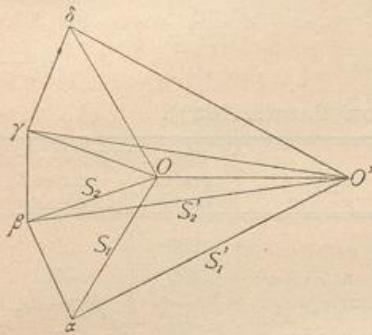
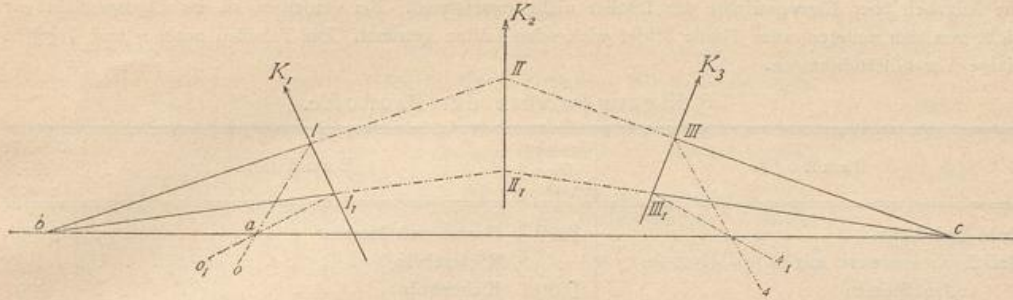
Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

2. Kap. Aeussere Kräfte, Schwerpunkte, statische Behandlung
baustatischer Aufgaben

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77733)

Fig. 18.



sich im Gleichgewicht; sie müssen also in die gerade Linie fallen, welche durch die beiden Punkte a und b bestimmt ist.

Nun ist die Mittelkraft von S_1 und S_1' nach Größe und Richtung die Schluslinie des Kraftpolygons $O'aO$, d. h. $O'O$. Die Richtungslinie der Mittelkraft ist also parallel zu $O'O$, d. h. die Linie ab ist parallel zu $O'O$, zur Verbindungslinie der beiden Pole.

Genau in derselben Weise ist zu beweisen, daß der Schnittpunkt b von S_2 und S_2' mit dem Schnittpunkte c von S_3 und S_3' auf einer zu $O'O$ parallelen Geraden liegt, d. h. auf der Linie ab , da durch b zu $O'O$ nur eine Parallele möglich ist.

2. Kapitel.

Aeußere Kräfte, Schwerpunkte, statische und Trägheitsmomente.

a) Belastungen.

Als Belastungen der Constructionen treten auf:

- 1) das Eigengewicht,
- 2) die Nutzlast,
- 3) die Schneelast und
- 4) der Winddruck.

1) Eigengewicht der Construction.

Das Eigengewicht der Construction ist beim Beginne jeder Berechnung nur angenähert bekannt. Für die gewöhnlichen Anordnungen genügt es, die aus den vorhandenen Bauwerken ermittelten Erfahrungswerthe bei der Berechnung einzuführen. Meistens kann man das Eigengewicht mit hinreichender Genauigkeit als gleichmäßig über die ganze Ausdehnung (des Trägers, der Balkendecke, des Daches etc.) vertheilt annehmen.

Nachstehend (unter α) sind die Eigengewichte einiger wichtiger Baustoffe und (unter β) diejenigen von verschiedenen Bautheilen angegeben, und zwar hauptsächlich in der Größe, wie sie vom Berliner Polizei-Präsidium nach einer Bekanntmachung vom 21. Februar 1887 den Berechnungen zu Grunde gelegt werden. Die Zusammenstellung (unter β) »Eigengewichte und Belastung von Bautheilen« enthält in der letzten Spalte auch die Nutzlast, welche erst im folgenden Artikel besprochen werden soll; es scheint aber dennoch zweckmäßig, die betreffenden Angaben hier sogleich mit zu machen.

Die Angaben der Tabellen unter α und β genügen in sehr vielen Fällen nicht; insbesondere sind die Angaben über Eigengewichte der Dächer nicht ausreichend. Bei denselben ist das Eigengewicht gar nicht von den anderen, zum Theile schief wirkenden Lasten getrennt. Die Tabellen unter γ und δ geben einige Vervollständigungen.

22.
Baustoffe.

α) Eigengewichte der Baustoffe.

Baustoff	Gewicht für 1 cbm	Baustoff	Gewicht für 1 cbm
Erde und Lehm	1600	Granit und Marmor	2700
Backsteinmauerwerk aus vollen Steinen	1600	Kiefernholz ³⁾	650
porösen Steinen	1300	Eichenholz	800
Lochsteinen	1100	Eisen	7500
Sandfeinmauerwerk	2400	Beton	2000
	Kilogr.		Kilogr.

23.
Bautheile.

β) Eigengewichte und Belastung von Bautheilen⁴⁾.

Bezeichnung der Construction	Eigengewicht für 1 qm	Eigengewicht und Nutzlast für 1 qm
Balkendecke in Wohnhäusern, gestaakt und gefchalt	250	500
» » Fabrik- und Lagergebäuden, so wie für Tanzsäle	250	750
» » Getreidepeichern, einschl. der Belastung, zum Nachweis	—	850—1000
Dachbalkenlage (unter dem Dachbodenraum)	375	—
Dachflächen, in der wagrechten Projection gemessen, einschl. Schnee- und Winddruck, bei Metall- oder Glasdeckung gemäß der Neigung	—	125—150
desgl. bei Schieferdeckung	—	200—240
desgl. bei Pappdeckung	—	120—130
desgl. bei Ziegeldeckung	—	250—300
desgl. bei Holzcementdeckung	—	350
Steile Mansarden-Dächer	—	400
Kappengewölbe aus porösen Steinen in Wohngebäuden	350	600
desgl. in Fabrik- und Lagerräumen	—	850
desgl. aus vollen Steinen, in Wohngebäuden	500	750
desgl. für Treppen und Treppen-Ruheplätze	500	1000
desgl. in Fabrik- und Lagerräumen	—	1000
desgl. unter Durchfahrten und befahrbaren Höfen	—	1250
Schmiedeeiserne Treppen, einschl. Nutzlast	—	600—650
Betonirtes Wellblech, für Wohnräume	350	600
desgl. für Treppen und Treppen-Ruheplätze	—	850
	Kilogr.	Kilogr.

24.
Decken mit eisernen Trägern.

γ) Eigengewichte der Decken mit eisernen Trägern⁵⁾.
(Mittelwerthe.)

Bezeichnung der Construction	Gewicht für 1 qm Deckenfläche
Eiserne Balken, 0,9 bis 1,2 m von einander entfernt, einschl. Dielung, Deckenputz, Sandausfüllung auf etwa halbe Höhe der Träger	260
Eiserne Balken, 1,0 bis 1,5 m von einander entfernt, mit zwischengespannten Kappengewölben aus porigen Steinen	250
	Kilogr.

³⁾ Nach genauen Ermittlungen wiegt 1 cbm Fichtenholz, lufttrocken, im Winter geschlagen: 550 kg, 1 cbm Lärchenholz, desgl. 730 kg.

(Siehe: Wochschr. d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1887, S. 277.)

⁴⁾ Nach: FROELICH, H. Elementare Anleitung zur Anfertigung statischer Berechnungen etc. 2. Aufl. Berlin 1897.

⁵⁾ Nach: Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 134 u. ff.

Bezeichnung der Construction	Gewicht für 1 qm Deckenfläche
Eiserne Balken, Abstand wie vor, mit Eifenwellblech-Ausfüllung der Zwischenräume, in den Wellen Beton	150
dasselbe, jedoch 8 cm hohe Sandausfüllung über dem Beton	300
Eiserne Balken, Abstand wie vor, über den Zwischenräumen <i>Monier</i> -Platten, je nach der Ausfüllung der Zwischentafel	170—300
Eiserne Balken, Abstand wie vor, Ausfüllung der Zwischenräume mit <i>Klette's</i> Holz-Asphaltdecke auf Wellblech oder <i>Zorls</i> -Eisen, mit Fußboden und Deckenschalung ⁶⁾	170—180
Eiserne Balken, System <i>Klette</i> , glatte Putzdecke, Dielenfußboden, Ausfüllung auf Fehlboden von Holz	310
dasselbe mit Gewölben aus Lochsteinen, Dielenfußboden, Hinterfüllung	320
dasselbe, Ausfüllung: Schlacken-Beton auf <i>Monier</i> -Platten, Cement-Estrich, glatte Cementbeton-Decke ⁷⁾	330
dasselbe mit Ausfüllung durch <i>Klein's</i> che Decke (D.R.P. 71 102)	} 220—350
„ „ „ „ <i>Schürmann's</i> che Decke (D.R.P. 80 653)	
„ „ „ „ <i>Koenen's</i> che Decke (Voutenplatte) (Abstand der Balken bis 6,0 m)	
„ „ „ „ <i>Foerster's</i> che Maffivdecke	
	Kilogr.

δ) Eigengewichte der Dächer.

Die Eigengewichte der Dächer setzen sich aus dem Gewichte der Dachdeckung nebst Zubehör, dem Gewichte der Pfetten, Sparren, des Windverbandes etc. und aus dem Gewichte der Binder zusammen. Der erste Theil ist beim Beginn der Berechnung für die Flächeneinheit schräger Dachfläche ziemlich genau bekannt und von der Weite des Daches unabhängig; auch der zweite Theil ist, wenn die Binderentfernung einigermassen fest steht, leicht zu ermitteln.

Der dritte dagegen ist vorläufig unbekannt, kann aber nach ausgeführten, ähnlichen Constructionen geschätzt und demnach vorläufig angenommen werden; derselbe ist übrigens den beiden ersten Werthen gegenüber meistens gering.

Für die erste Berechnung kann man die nachfolgenden vorläufigen Annahmen über das Eigengewicht der Dächer⁸⁾ machen; die nachherige Gewichtsrechnung muß ergeben, ob diese Annahmen entsprechend waren oder ob eine zweite Rechnung durchzuführen ist.

Eigengewichte der Dächer (für 1 qm schräger Dachfläche).

Holzdächer				Metalldächer	
Art des Daches	Mittl. Gewicht	Art des Daches	Mittl. Gewicht	Art des Daches	Mittl. Gewicht
Einfaches Ziegeldach	102	Asphaltdach mit Fliesenunterlage	102	Schiefer auf Winkeleisen	51
Doppel- u. Kronenziegeldach	127	Theerpappdach	30	Ebenes Eifenblech auf Winkeleisen	25
Falzziegeldach	72	Rohr- und Strohdach ohne Lehm	61	Eifenwellblech auf Winkeleisen	22
Gewöhnliches Schieferdach	76	Rohr- und Strohdach mit Lehm	76	Zinkwellblech auf Winkeleisen	24
Holzementdach	135	Zink- und Eifenblechdach auf Holzschalung	41	Gufszinkplatten auf hölzernen Latten u. Sparren	70
Asphaltdach mit Lehmunterlage	61 bis 76			Glas auf Winkel-, bezw. Sproffeneisen	35—50
	Kilogr.		Kilogr.		Kilogr.

6) Nach: Deutsche Bauz. 1883, S. 397.

7) Nach: Deutsche Bauz. 1886, S. 297.

8) Nach: Deutsches Bauhandbuch. Berlin 1879, Bd. I. S. 229. — Bd. II. S. 127.

HEINZERLING, F. Der Eifen-Hochbau der Gegenwart. Aachen 1876—78. Heft I, S. 9.

TETMAJER, L. Die äußeren und inneren Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhlconstructionen Zürich 1875. S. 8.

MÜLLER-Breslau, H. F. B. Die graphische Statik der Bauconstructionen. Leipzig 1887—92. S. 430.

LANDSBERG, Th. Die Glas- und Wellblechdeckung der eifernen Dächer. Darmstadt 1887.

Die Zahlen der vorstehenden Tabelle enthalten die Eigengewichte der Dachbinder noch nicht, sondern nur die Gewichte der Deckmaterialien einschl. Hilfsmaterial, der Lattung, bezw. Schalung, der Sparren und der Pfetten.

Für die Dachbinder können folgende Gewichtsannahmen gemacht werden:

a) Holzdächer (für 1 qm schräger Dachfläche):

- Dachbinder, stehende oder liegende, mit allem Zubehör an Holztheilen, bei
 - Spannweiten von 7,5 bis 15^m 7 bis 13 kg
 - einfache Hängeböcke, desgl., bei Spannweiten von 10 bis 18^m 12 » 18 kg
 - combinirte Spreng- und Hängeböcke, desgl., bei Spannweiten von etwa 20^m 20 » 24 kg
 - frei tragende Dachbinder verschiedener Constructionsformen, desgl., bei 10 bis 18^m Spannweite 20 » 30 kg

b) Eifendächer (für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche):

- bei leicht construirten Dachstühlen 14 » 20 kg
- bei schwer construirten Dachstühlen 20 » 30 kg

Da es oft bequemer ist, die Belastungen aus der überdeckten Grundfläche statt aus der schrägen Dachfläche zu ermitteln, so sind in der folgenden Tabelle die Eigengewichte der Dächer, auschl. des Gewichtes der Dachbinder, für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche, und zwar für die verschiedenen vorkommenden Dachneigungen (*h* bezeichnet die Höhe, *L* die Stützweite des Daches) angegeben.

Eigengewichte der Dächer, auschl. des Gewichtes der Dachbinder
(für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche).

Art des Daches:	$\frac{h}{L} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
a) Holzdächer:										
Einfaches Ziegeldach		144	122	114	—	—	—	—	—	—
Doppel- und Kronenziegeldach		180	152	142	—	—	—	—	—	—
Falzziegeldach		102	87	81	77	76	75	74	—	—
Gewöhnliches Schieferdach		108	91	85	82	—	—	—	—	—
Afphaltdach mit Lehmunterlage		106	91	84	81	79	78	77	77	77
» » Fliesenunterlage		144	122	114	110	107	106	105	104	104
Theerpappdach		42	36	34	32	32	31	31	31	30
Zink- und Eisenblechdach auf Holzschalung		58	49	46	44	43	42	42	42	42
b) Metalledächer:										
Schiefer auf Winkeleisen		72	61	56	54	—	—	—	—	—
Ebenes Eisenblech auf Winkeleisen		35	30	28	27	26	26	26	26	26
Eisenwellblech auf Winkeleisen		28	24	23	22	21	21	21	21	20
Zinkwellblech auf Winkeleisen		34	29	27	26	26	25	25	24	24
Glas auf Winkel-, bezw. Sproffeneisen		71	60	56	54	—	—	—	—	—

Kilogramm.

Beim Holzcementdach hat das Dach eine so geringe Neigung (etwa 1 : 20), daß man als Belastung für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche unbedenklich den Werth der Tabelle auf S. 19 (unter δ), d. i. 135 kg annehmen kann.

2) Nutzlast.

26.
Nutzlast.

Die Nutzlasten sind hauptsächlich bei den Decken-Constructions von Wichtigkeit; sie bestehen in der Belastung durch Menschen, ungünstigenfalls durch Menschengedränge in öffentlichen Sälen, Theatern, Concert- und Ausstellungssälen, Gerichtsräumen, Schulzimmern etc., in der Belastung durch Waaren in Speichern, durch Bücher in Bibliotheken u. dergl. mehr. Dabei ist für die Berechnung auf die Lage der Nutzlast Rücksicht zu nehmen und zu beachten, daß nicht für alle Theile der tragenden Constructure die Belastung des ganzen Raumes die gefährlichste ist, daß

vielmehr theilweise Belastung für viele Theile wesentlich ungünstiger ist. Demnach muß bei der Berechnung für jeden Theil die gefährlichste mögliche Belastungsart aufgefucht und diese der Berechnung zu Grunde gelegt werden. Weiter ist zu beachten, daß die Belastung mit Erschütterungen, selbst mit Stößen verbunden sein kann. Wenn eine große Versammlung sich plötzlich erhebt oder niedersetzt, wenn beim Beginne der Schule die Säle sich schnell füllen, wenn am Schlusse einer Vorstellung der Saal rasch entleert wird, wenn ein Tanzsaal bestimmungsgemäß benutzt wird; so treten Erschütterungen und Stöße auf, welche den Einfluß der Last wesentlich vergrößern können und auf welche zweckmäßig Rücksicht genommen wird. Es ist üblich, die stofsweise wirkenden Belastungen mit einem Coefficienten, welcher größer als 1 ist, multiplicirt in die Berechnung einzuführen. Für Hochbauten empfiehlt es sich, diesen Coefficienten mit 1,2 bis 1,5 anzunehmen.

Bezüglich der Nutzlasten können bei den Berechnungen folgende Annahmen zu Grunde gelegt werden: 27.
Zahlenangaben.

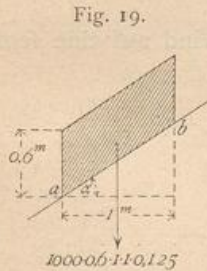
Nutzlast für 1 ^{qm} Grundfläche			
in Wohnräumen	150	in Hafer Speichern und Fruchtböden ⁹⁾ .	480 bis 500
» Tanzsälen	250	» Waaren Speichern ¹⁰⁾	760
» Heuspeichern ⁹⁾	500	durch Menschengedränge	400
	Kilogr.		Kilogr.

In den Speichern wird je nach der Waare, welcher der Speicher dienen soll, die größte Belastung verschieden sein, und deshalb ist zuvor über die Bedingungen, unter welchen die Waare gelagert wird (Höhe, Breite, Gewicht etc.), Erkundigung einzuziehen.

Für Bibliotheken kann das spezifische Gewicht der Bücher im Mittel zu 0,6 angenommen werden; weiter kann der Rauminhalt der Büchergerüste als nur zur Hälfte gefüllt berechnet werden, so daß 1 cbm Rauminhalt der Büchergerüste 300 kg schwer gesetzt werden kann. Auf eine stärkere Bestellung mit Büchern ist in deutschen Bibliotheken nicht zu zählen¹¹⁾.

3) Schneelast.

Die Schneelast kommt nur bei den Dächern in Frage. Als größte Schneehöhe, welche ungünstigstenfalls in unserem Klima fällt, ohne daß mittlerweile eine Befreitung des gefallenen Schnees möglich ist, kann man etwa 0,6 m annehmen; das spezifische Gewicht des Schnees beträgt etwa 0,125; mithin ist das größte Gewicht der Schneelast für 1^{qm} der wagrechten Projection (Fig. 19) 0,125 · 0,6 · 1000 = 75 kg. Diese Zahl ist innerhalb gewisser Grenzen von der Dachneigung unabhängig. Handelt es sich dagegen um die größte Schneebelastung für 1^{qm} der schrägen Dachfläche, so kann dieselbe wie folgt ermittelt werden.



Die Last von 75 kg kommt auf \overline{ab} Quadrat-Meter der Dachfläche; da $\overline{ab} = \frac{1}{\cos \alpha}$ ist, so kommt auf 1^{qm} der schrägen Dachfläche eine Schneelast

$$p_s = \frac{75}{ab} = 75 \cos \alpha.$$

⁹⁾ Siehe: FRANGENHEIM. Der Hauptbahnhof der Kölnischen Straßenbahn-Gesellschaft zu Köln. Deutsche Bauz. 1887, S. 421.

¹⁰⁾ Für den Seine-Speicher zu Paris wurden die Nutzlasten wie folgt berechnet: im I. Obergeschloß mit 1500 kg, im II. Obergeschloß mit 1250 kg, im III. bis V. Obergeschloß mit je 1000 kg und im VI. Obergeschloß mit 800 kg für 1^{qm} Lagerung von Mehl und Getreide. (Siehe: Centralbl. d. Bauverw. 1884, S. 509.)

¹¹⁾ Nach: TIEDEMANN, v. Die Universitäts-Bibliothek in Halle a. S. Zeitschr. f. Bauw. 1885, S. 338.

28.
Schneelast.

Für die verschiedenen Verhältnisse der Firfthöhe h zur Stützweite L ergeben sich demnach folgende

Größte Belastungen p_s durch Schneedruck
für 1 qm schräger Dachfläche:

Für $\frac{h}{L} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
$\alpha =$	45°	33°41'	26°40'	21°50'	18°25'	16°	14°	12°30'	11°20'
$p_s =$	(53)	62	67	70	71	72	73	73	73 Kilogr.

Für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche beträgt die ungünstigste Schneebelastung 75 kg.

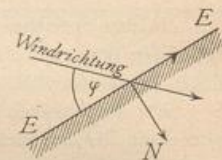
Wenn die Dachneigung so steil ist, daß $\frac{h}{L} \geq \frac{1}{2,8}$ ist, so bleibt der Schnee nicht mehr liegen, gleitet vielmehr ab; für derartige Dachneigungen braucht man also auf Schneelast gar keine Rücksicht zu nehmen. Deshalb ist in der Tabelle der Werth von p_s , welcher sich für $\frac{h}{L} = \frac{1}{2}$ ergeben hat, eingeklammert.

4) Winddruck.

29.
Winddruck.

Der Winddruck ist von hervorragender Bedeutung sowohl für die Dächer, wie für hohe Mauern, Schornsteine etc. In der Technik ist vor Allem wichtig, zu wissen, welchen Druck der Wind auf eine Ebene EE (Fig. 20) ausübt, die seinen Strom unter einem spitzen Winkel φ schneidet.

Fig. 20.



Dieser Druck kann nur senkrecht zu der Ebene gerichtet sein; denn der Druck zwischen zwei sich berührenden Körpern kann höchstens um einen Winkel von der Senkrechten zur Berührungsfläche abweichen, welcher gleich ist dem Reibungswinkel. Zwischen der Dachfläche und der sie umspielenden Luft findet keine Reibung statt, der Reibungswinkel ist hier also gleich Null; mithin ist der Druck zwischen der Dachfläche und der Luft stets senkrecht zur Dachfläche gerichtet.

Bis vor Kurzem wurde allgemein angenommen, der senkrechte Druck N auf die Ebene EE sei der zweiten Potenz von $\sin \varphi$ proportional; neuere theoretische Untersuchungen und praktische Versuche haben jedoch nachgewiesen, daß man der Wirklichkeit wesentlich näher kommt, wenn man einführt

$$N = P \sin \varphi, \dots \dots \dots 1.$$

in welcher Gleichung P die Größe des Druckes ist, welche der Wind auf eine senkrecht getroffene Fläche ausübt. Man kann setzen

$$P = \frac{v^2 F \gamma}{g}, \dots \dots \dots 2.$$

mithin

$$N = \frac{v^2 F \gamma}{g} \sin \varphi \dots \dots \dots 3.$$

In diesen Gleichungen bedeutet: F den Flächeninhalt der vom Winde getroffenen Fläche, v die Geschwindigkeit des Windes (in Met. für die Secunde), γ das Gewicht von 1 cbm Luft (in Kilogr.) und g die Beschleunigung des freien Falles = 9,81 m.

Für 15 Grad C. und 760 mm Barometerstand ist $\frac{\gamma}{g} = 0,12458$, also rund

$$P = 0,125 F v^2,$$

demnach der Winddruck für 1 qm senkrecht getroffener Fläche

$$p = 0,125 v^2.$$

Nimmt man als größte Windgeschwindigkeit $v = 30^m$ an, so wird rund

$$\left. \begin{aligned} p &= 120 \text{ Kilogr.} \\ n &= p \sin \varphi = 120 \sin \varphi \text{ Kilogr.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 6.$$

Es ist im Hochbau üblich, als größten Winddruck $p = 120^kg$ für 1^qm einzuführen; im Brückenbau rechnet man mit einem Größtwerth von p , welcher 250 bis 280^kg für 1^qm erreicht. Wenn auch bei den gewöhnlichen Dach-Constructions, besonders an geschützten Orten, der Werth 120^kg nicht zu klein ist, so ist doch bei Berechnung von hohen Schornsteinen und Thurmdächern, Gasbehältern u. dergl. zu überlegen, ob nicht die Vorsicht gebietet, einen größeren Werth als 120^kg für 1^qm der Rechnung zu Grunde zu legen. Alljährlich fällt eine nicht geringe Zahl von Thürmen und Schornsteinen den Stürmen zum Opfer. An freien Stellen und bei den genannten hohen Bauten sollte man bis $p = 200^kg$ für 1^qm gehen. Für die nachfolgenden Untersuchungen ist

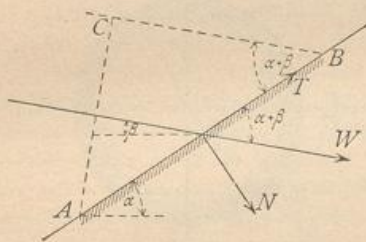
$$p = 120^kg \text{ für } 1^qm$$

angenommen.

α) Winddruck auf Dachflächen. Die Windrichtung schließt nach den gemachten Beobachtungen einen Winkel von nahezu 10 Grad mit der wagrechten Ebene ein¹²⁾. Dieser Winkel möge β , der Winkel der Dachfläche gegen die Wagrechte α genannt werden; dann ist nach Fig. 21 der Winkel der Windrichtung mit der Dachfläche $\varphi = (\alpha + \beta)$ und demnach der auf 1^qm schräger Dachfläche entfallende senkrechte Winddruck

30.
Dachflächen.

Fig. 21.



senkrechte Winddruck

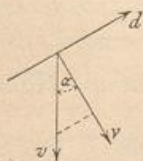
$$v = p \sin (\alpha + \beta) = 120 \sin (\alpha + 10^\circ) \dots 7.$$

Aus Gleichung 7 ergeben sich für die verschiedenen Dachneigungen die in folgender Tabelle angeführten Werthe für v .

Senkrechte Belastungen v durch Winddruck für 1^qm schräger Dachfläche.

Für $\frac{h}{L} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
$\alpha =$	45°	$33^\circ 41'$	$26^\circ 40'$	$21^\circ 50'$	$18^\circ 25'$	16°	14°	$12^\circ 30'$	$11^\circ 20'$
abgerundet $v =$	98	83	72	63	57	53	49	46	44 Kilogr.

Fig. 22.



Zerlegt man den Normaldruck v in eine lothrechte und eine in die Richtung der Dachfläche fallende Seitenkraft (Fig. 22), so wird die erstere für 1^qm der Dachfläche $v = \frac{v}{\cos \alpha}$ und für 1^qm wagrechte Projection der Dachfläche

$$v = \frac{v}{\cos^2 \alpha} = \frac{120 \sin (\alpha + 10^\circ)}{\cos^2 \alpha} \dots \dots \dots 8.$$

Die Werthe für v sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Für $\frac{h}{L} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
$\alpha =$	45°	$33^\circ 41'$	$26^\circ 40'$	$21^\circ 50'$	$18^\circ 25'$	16°	14°	$12^\circ 30'$	$11^\circ 20'$
$v =$	196	120	90	73	64	57	52	48	46 Kilogr.

¹²⁾ Nach neueren Versuchen von *Lilienthal* hat der Wind eine unter etwa 3 Grad von unten ansteigende Richtung; die Annahme wagrechter Richtung des Windes scheint demnach als die einfachste und mit den beiden Richtungen am besten vereinbare empfehlenswerth zu sein.

37.
Mauerflächen.

β) Winddruck gegen Mauerflächen. Bei Auffuchung des auf lothrechte oder schwach geneigte Mauern wirkenden Winddruckes wird zweckmäsig der Winddruck als wagrechte Kraft eingeführt.

Der senkrechte Druck des Windes gegen eine Mauerfläche EE (Fig. 23), welche den Winkel φ mit der Windrichtung bildet, ist für die Flächeneinheit

$$n = p \sin \varphi;$$

die Seitenkraft von n , welche in die Richtung des Windes fällt, ist alsdann

$$h = n \sin \varphi = p \sin^2 \varphi,$$

während die Seitenkraft, welche senkrecht zur Windrichtung wirkt, die Gröfse hat

$$t = p \sin \varphi \cos \varphi.$$

Die erstere Seitenkraft ist besonders dann wichtig, wenn es sich um Bauteile handelt, welche im Grundrifs nach einem Vielecke, einem Kreise, einer Ellipse etc. geformt sind, so bei Schornsteinen, Thürmen etc. Bei ebenen Mauern ist der Berechnung stets als ungünstigste Windbelastung diejenige zu Grunde zu legen, bei welcher der Wind die Mauer senkrecht trifft.

a) Winddruck gegen eine ebene Mauer. Wenn die getroffene Fläche F Quadr.-Met. enthält, so ist

$$N = p F = 120 F \text{ Kilogr.}$$

Als Angriffspunkt der Mittelkraft kann der Schwerpunkt der getroffenen Fläche eingeführt werden.

b) Winddruck gegen einen Kreis- cylinder. Es soll der Winddruck ermittelt werden, welcher auf die Längeneinheit der Höhe, also auf das steigende Meter wirkt. Gegen das Bogentheilchen ds , dessen Tangente mit der X -Axe den Winkel φ (Fig. 24) bildet, wirkt der Normaldruck

$$dn = p \cdot ds \cdot \sin \varphi = p r d\varphi \cdot \sin \varphi.$$

Die senkrecht zur Windrichtung wirkende Seitenkraft von dn wird durch eine gleich grofse, entgegengesetzt wirkende aufgehoben, welche auf den symmetrisch zur XX -Axe liegenden Bogentheil wirkt; die andere Seitenkraft ist

$$dh = dn \sin \varphi = p r \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Die gefammte Kraft, welche ein Umsturz-Moment erzeugt, ist für die Höhen- einheit offenbar

$$H = \int_0^{\pi} p r \sin^2 \varphi d\varphi = 2 p r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi,$$

fonach

$$H = p r \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots 9.$$

Wird $p = 120 \text{ kg}$ eingeführt, so ist die Kraft H für das steigende Meter

$$H = 188,4 r = \approx 190 r \text{ Kilogr.},$$

worin r in Metern einzufetzen ist.

Fig. 23.

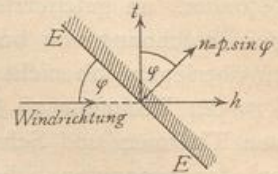
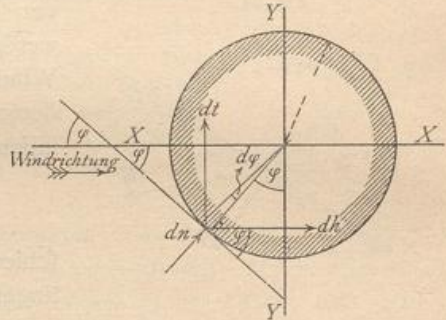


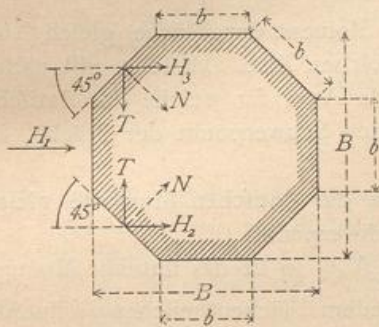
Fig. 24.



Die Kraft H liegt in der lothrechten Ebene der Axe XX und greift in halber Höhe des Cylinders an.

c) Winddruck gegen ein regelmässiges achtseitiges Prisma (Fig. 25). Die Breite des umschriebenen Quadrates sei B , die Seitenlänge der achteckigen Grundfläche sei b ; dann ist $b = 0,414 B$. Der Winddruck gegen die senkrecht getroffene Fläche ist für die Längeneinheit der Höhe

Fig. 25.



$$H_1 = pb,$$

derjenige gegen die unter 45 Grad getroffenen Seitenflächen je

$$N = pb \sin 45^\circ,$$

und die in die Windrichtung fallende Seitenkraft von N ist

$$H_2 = pb \sin^2 45^\circ = \frac{pb}{2}.$$

Eben so gross ist H_3 ; mithin wird die gesammte Kraft, welche ein Umsturz-Moment erzeugt, für das steigende Meter sein

$$H = H_1 + H_2 + H_3 = 2 pb.$$

Die Mittelkraft aller H greift, wie oben, in halber Höhe des Prismas an und liegt in der durch die Axe des Prismas und H_1 bestimmten lothrechten Ebene.

Die bisher ganz allgemein und auch in vorstehenden Entwicklungen gemachte Annahme einer gleichmässigen Vertheilung des Winddruckes über eine getroffene ebene Fläche scheint nach den neueren Versuchen und theoretischen Ermittlungen nicht ganz richtig zu sein; demnach ist auch nicht ohne Weiteres richtig, dass die Mittelkraft durch den Schwerpunkt der getroffenen Fläche geht. Es scheint, dass der Druck an den Rändern am kleinsten ist und nach der Mitte der Ebene hin zunimmt. Bis über die Gesetzmässigkeit genauere Angaben vorliegen, wird man jedoch für die Zwecke des Hochbaues unbedenklich die vorgeführten Annahmen den Berechnungen zu Grunde legen können.

b) Schwerpunkte und statische Momente.

1) Schwerpunkte von ebenen Figuren.

Um den Schwerpunkt einer beliebigen ebenen Figur zu finden, genügt es, zwei Linien zu bestimmen, auf deren jeder der Schwerpunkt liegen muss; alsdann ist der Schnittpunkt beider Linien der gesuchte Schwerpunkt. Werden in der Ebene, in welcher die betreffende Figur liegt, zwei Coordinaten-Axen OX und OY beliebig angenommen, so erhält man die Abstände x_0 und y_0 des Schwerpunktes von den beiden Axen OY und OX aus den Gleichungen

$$x_0 = \frac{\int x df}{F} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{\int y df}{F}, \quad \dots \dots \dots 10.$$

in denen F die ganze Querschnittsfläche, df den Flächeninhalt eines beliebigen Theilchens mit den Coordinaten x und y bedeutet und die Summirung über die ganze Fläche auszudehnen ist. Die vorstehenden beiden Gleichungen können hier als aus der Mechanik bekannt vorausgesetzt werden. Man kann statt der unendlich kleinen Theilchen df Flächentheile f von endlicher Grösse einführen, also die obigen Gleichungen schreiben:

$$x_0 = \frac{\sum (fx)}{F} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{\sum (fy)}{F}, \quad \dots \dots \dots 11.$$

wenn x und y die Schwerpunkts-Coordinten der Flächentheile f bedeuten.

32.
Grund-
gleichungen.

Die Zähler der Gleichungen nennt man die statischen Momente der Fläche, bezogen auf die Y - und X -Axe; denn denkt man in jedem Theile der Fläche den Inhalt desselben als Kraft senkrecht zur Ebene der Figur wirkend, so sind die statischen Momente dieser Kräfte für die beiden Axen eben die Zählergrößen obiger Gleichungen.

33.
Folgerungen.

Aus den Schwerpunktsgleichungen folgt:

α) x_0 wird gleich Null, wenn der Zähler $\Sigma (fx)$, bezw. $\int x df$ gleich Null wird, d. h. für eine Axe, für welche das statische Moment der Fläche gleich Null wird. Der Schwerpunkt liegt demnach auf einer solchen Axe. Dasselbe gilt natürlich für y_0 , so dass man allgemein sagen kann: Jede Axe, für welche das statische Moment einer Fläche gleich Null ist, geht durch den Schwerpunkt der Fläche, ist also, wie man sagt, eine Schwerpunktsaxe.

Man suche daher zwei Axen auf, für welche die statischen Momente gleich Null sind; alsdann ist ihr Schnittpunkt auch der Schwerpunkt.

β) Liegt eine Figur symmetrisch zu einer Axe XX , so ist das statische Moment $\int y df$ der Figur für diese Axe gleich Null; denn jedem Flächentheilchen f_1 im Abstand y_1 von der Axe entspricht ein eben so großes Theilchen f_1 im Abstand $-y_1$ von der Axe; der Beitrag beider Theile zum statischen Momente ist also $f_1 y_1 - f_1 y_1 = 0$. Das Gleiche gilt von je zwei anderen Theilen, so dass also das gesammte statische Moment gleich Null wird. Daraus folgt: Jede Symmetrie-Axe einer Fläche ist eine Schwerpunktsaxe.

Hat sonach ein Querschnitt eine Symmetrie-Axe, so ist nur noch die Lage des Schwerpunktes auf derselben zu bestimmen; hat ein Querschnitt zwei Symmetrie-Axen, so ist der Schnittpunkt beider auch der Schwerpunkt.

γ) Nach Gleichung 10 ist $Fx_0 = \int x df$. Ist es möglich, die ganze Fläche in eine Anzahl Gruppen $F_1, F_2, F_3 \dots$ zu zerlegen, von deren jeder der Schwerpunktsabstand ($x_1, x_2, x_3 \dots$) bekannt ist, so muss für diese sein

$$F_1 x_1 = \left(\int x df_1 \right), \quad F_2 x_2 = \left(\int x df_2 \right), \quad F_3 x_3 = \left(\int x df_3 \right), \quad \dots \quad 12.$$

in welchen Ausdrücken sich die Einzelintegrale auf die einzelnen Gruppen beziehen. Dann ist sonach

$$Fx_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n,$$

und es wird

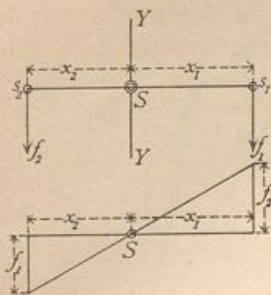
$$x_0 = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n}{F} \quad \dots \quad 13.$$

Es ist sehr oft möglich, die gegebene Figur in Rechtecke, bezw. solche kleinere Figuren zu zerlegen, deren Schwerpunkte bekannt sind und alsdann mit Hilfe obiger Formel die Lage des Gesamtschwerpunktes zu finden.

δ) Der Schwerpunkt S zweier Flächen F_1 und F_2 (Fig. 26) mit den Schwerpunkten s_1 und s_2 liegt auf der Verbindungslinie $s_1 s_2$ beider Schwerpunkte. Nennt man nämlich den Abstand des Gesamtschwerpunktes von dieser Verbindungslinie y_0 , so ist $Fy_0 = F_1 y_1 + F_2 y_2$. Die Abstände y_1 und y_2 der beiden Schwerpunkte s_1 und s_2 von derselben Axe sind aber gleich Null, weil die Axe durch diese Schwerpunkte gelegt ist. Demnach ist für diese Axe $Fy_0 = 0$, also auch $y_0 = 0$.

Hieraus folgt weiter, dass, wenn die Schwerpunkte noch weiterer Flächen auf

Fig. 26.



dieser Linie liegen, der Gesamtschwerpunkt gleichfalls auf derselben liegt; kann man also eine Fläche in eine Anzahl Streifen zerlegen, deren Schwerpunkte auf einer geraden Linie liegen, so befindet sich auch der Schwerpunkt der gesammten Fläche auf dieser Linie.

Die Lage des Schwerpunktes auf der Linie $s_1 s_2$ (Fig. 26) ist leicht zu finden. Werden die Abstände desselben von s_1 und s_2 mit bezw. $+x_1$ und $-x_2$ bezeichnet, so muß für eine senkrecht zu $s_1 s_2$ durch den Schwerpunkt S gelegte Axe YY' sein

$$0 = f_1 x_1 - f_2 x_2 \quad \text{oder} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{f_2}{f_1}.$$

Daraus ergibt sich die nachfolgende Construction.

Man errichte in s_1 eine Senkrechte, welche f_2 Flächeneinheiten in beliebigem Maßstabe enthält, in s_2 eine Senkrechte, jedoch nach entgegengesetzter Seite, welche f_1 Flächeneinheiten in demselben Maßstabe enthält, und verbinde die Endpunkte; alsdann schneidet diese Verbindungslinie die Axe $s_1 s_2$ im Schwerpunkte S .

2) Schwerpunkte von einfachen Figuren.

α) Schwerpunkt eines Quadrates, Rechteckes, Parallelogrammes, Kreises und einer Ellipse. Jede dieser Figuren hat wenigstens zwei Symmetrie-Axen, bezw. Halbierungslinien, in deren Schnittpunkt der Schwerpunkt sich befindet.

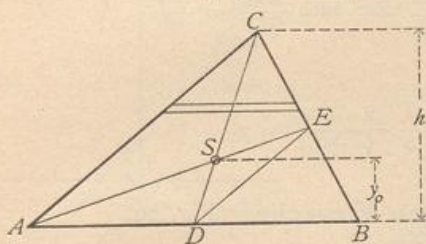
34.
Regelmäßige
Figuren.

Demnach liegt er beim Rechteck und Quadrat in der Mitte der Höhe und Breite, beim Parallelogramm im Schnittpunkte der Halbierungslinien der Seiten und beim Kreise und bei der Ellipse im Mittelpunkte.

β) Schwerpunkt eines Dreieckes (Fig. 27).

35.
Dreieck.

Fig. 27.



Zerlegt man die Dreiecksfläche durch Linien, welche einer Seite (AB in Fig. 27) parallel sind, in eine Anzahl sehr schmaler Streifen, so liegt der Schwerpunkt eines jeden Streifens in der Mitte seiner Breite, und nach der Folgerung unter δ in Art. 33 liegt der Gesamtschwerpunkt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Streifen. Der Schwerpunkt liegt also auf der Linie CD , welche die Mitte D einer Dreiecksseite mit der gegenüber liegenden Ecke (C) verbindet. Aus demselben Grunde liegt er auch auf der Linie AE , wenn $CE = EB$ ist. Der Schwerpunkt S ist der Schnittpunkt beider. Da aber DE und AC parallel sind, so ist

$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CA}} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \overline{DS} = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{\overline{CD}}{3}.$$

Daraus folgt, daß der senkrechte Abstand des Schwerpunktes S von der Grundlinie AB des Dreieckes ein Drittel der Höhe ist, d. h. es ist

$$y_0 = \frac{h}{3}.$$

Da jede Seite des Dreieckes als Grundlinie angesehen werden kann, so liegt S auch auf einer Parallelen zu BC , deren senkrechter Abstand ein Drittel desjenigen beträgt, in welchem A von BC liegt. Das Gleiche gilt von AC , bezw. B . Mittels dieses Gesetzes können daher leicht zwei Linien gezeichnet werden, auf denen der Schwerpunkt liegt.

γ) Schwerpunkt eines Parallel-Trapezes (Fig. 28).

Der Schwerpunkt des Trapezes in Fig. 28 liegt auf der Verbindungslinie der beiden Punkte E und F , welche die beiden parallelen Seiten halbiren. Ferner ist

$$F y_0 = \int y df.$$

36.
Parallel-
Trapez.

Nennt man die Breite eines Streifens z und seine Höhe dy , so ist

$$df = z dy, \quad z = b - \frac{b-a}{h} y \quad \text{und} \quad F = (a+b) \frac{h}{2};$$

folglich

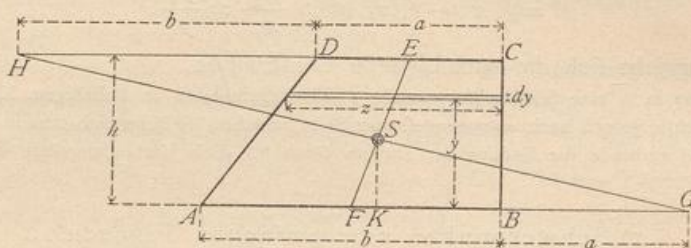
$$F y_0 = \int_0^h \left(b y - \frac{b-a}{h} y^2 \right) dy = \frac{b h^2}{2} - \frac{(b-a) h^3}{3},$$

und

$$y_0 = \frac{h}{3} \frac{(2a+b)}{(a+b)}.$$

Daraus ergibt sich die folgende Construction.

Fig. 28.



Man halbire die beiden parallelen Seiten in E und F , trage $BG = a$ und $DH = b$ nach rechts, bzw. links in den Verlängerungen der beiden parallelen Seiten auf und ziehe HG ; alsdann ist der Schnittpunkt von HG mit EF der Schwerpunkt S . Denn es ist

$$\frac{\overline{SF}}{\overline{EF}} = \frac{a + \frac{b}{2}}{a + \frac{b}{2} + b + \frac{a}{2}} = \frac{2a + b}{3(a+b)}, \quad \text{aber auch} \quad \frac{SF}{EF} = \frac{\overline{SK}}{h}$$

mithin ist

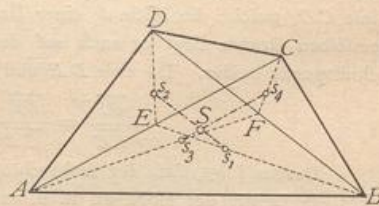
$$\frac{\overline{SK}}{h} = \frac{2a + b}{3(a+b)} \quad \text{und} \quad \overline{SK} = \frac{h}{3} \frac{(2a+b)}{(a+b)} = y_0.$$

Der Punkt S ist also in der That der Schwerpunkt.

δ) Schwerpunkt eines unregelmäßigen Viereckes (Fig. 29).

Um den Schwerpunkt des unregelmäßigen Viereckes $ABCD$ zu bestimmen, ziehe man die Gerade AC und ermittle die Schwerpunkte s_1 und s_2 der beiden Dreiecke ACB und ACD , wie unter β gezeigt; alsdann liegt der Gesamtschwerpunkt auf der Linie $s_1 s_2$. Nun ziehe man BD und ermittle die Schwerpunkte s_3 und s_4 der beiden Dreiecke ABD und BCD ; alsdann liegt der Gesamtschwerpunkt auch auf der Linie $s_3 s_4$. Demnach ist der Schnittpunkt der beiden Linien $s_1 s_2$ und $s_3 s_4$ der gesuchte Schwerpunkt.

Fig. 29.



In ganz ähnlicher Weise kann man weiter verfahren, wenn es sich um den Schwerpunkt eines Vieleckes handelt, welches in Dreiecke zerlegt werden kann. Doch wird in einem solchen Falle vielfach das unten vorzuführende graphische Verfahren bequemer sein.

ε) Schwerpunkt eines Kreisbogenschnittes (Fig. 30).

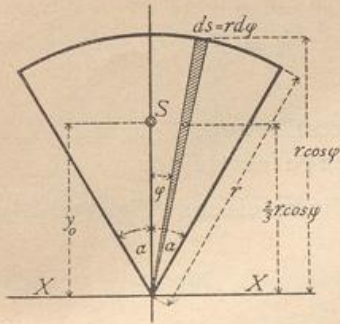
37.
Unregelmäßiges
Viereck.

Der ganze zum Kreisbogenchnitt gehörige Winkel sei 2α ; die Halbierungslinie des Winkels ist eine Symmetrie-Axe, enthält also den Schwerpunkt; somit ist nur noch der Abstand desselben vom Kreismittelpunkte oder, was dasselbe befragt, von einer durch diesen senkrecht zur Winkelhalbierenden gelegten Axe XX' zu suchen.

Für den zu einem Bogenstück $ds = r d\varphi$ gehörigen Theil des Abschnittes (Fig. 30), welcher als

38.
Kreisbogenchnitt.

Fig. 30.



Dreieck aufgefasst werden kann, ist der Schwerpunktsabstand von der Axe XX : $y = \frac{2}{3} r \cos \varphi$, der Flächeninhalt

$$df = ds \frac{r}{2} = \frac{r^2 d\varphi}{2};$$

mithin ist

$$y_0 = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} y df}{F} = \frac{2 \int_0^{\alpha} y df}{F} = \frac{2}{3} \frac{r^3 \int_0^{\alpha} \cos \varphi d\varphi}{r^2 \alpha}$$

$$y_0 = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \dots \dots \dots 14.$$

Für den Halbkreis wird $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\sin \alpha = 1$, sonach

$$y_0 = \frac{4r}{3\pi} = 0,425 r.$$

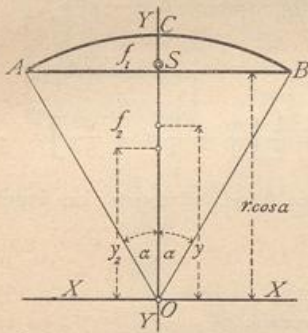
Für den Viertelkreis ist $\alpha = \frac{\pi}{4}$, daher $y_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r = 0,6 r$.

Für den Sechstelkreis ist $\alpha = \frac{\pi}{6}$, mithin $y_0 = \frac{2}{\pi} r = 0,637 r$.

ζ) Schwerpunkt eines Kreisabschnittes (Fig. 31).

39. Kreisabschnitt.

Fig. 31.



Der Schwerpunkt des Kreisabschnittes liegt zunächst wieder auf der Winkelhalbierenden; ferner ist aber nach der Folgerung δ in Art. 33 (S. 26), wenn F der Flächeninhalt des Kreisabschnittes $ACBO$, y der Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche von XX ist, wenn ferner f_1 und f_2 die Flächeninhalte des Kreisabschnittes ACB , bzw. des Dreieckes ABO und y_1 , bzw. y_2 die Schwerpunktsabstände dieser Flächen von XX sind,

$$Fy = f_1 y_1 + f_2 y_2 \quad \text{oder} \quad y_1 = \frac{Fy - f_2 y_2}{f_1}$$

Nun ist $F = r^2 \alpha$, $y = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ und $f_2 = r^2 \sin \alpha \cos \alpha$;

ferner

$$y_2 = \frac{2}{3} r \cos \alpha \quad \text{und} \quad f_1 = r^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha);$$

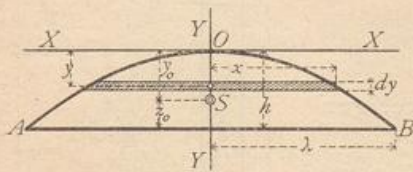
mithin wird

$$y_1 = \frac{\frac{2}{3} r \sin^3 \alpha}{\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}} \dots \dots \dots 15.$$

η) Schwerpunkt einer Parabelfläche (Fig. 32).

40. Parabelfläche

Fig. 32.



Die Gleichung der Parabel AOB , bezogen auf O als Anfangspunkt der Coordinaten-Axen, ist

$$\frac{x^2}{\lambda^2} = \frac{y}{h}.$$

Der Schwerpunkt der Fläche AOB liegt zunächst auf der Symmetrie-Axe YY ; der Abstand desselben von XX ist

$$y_0 = \frac{\int y df}{F} = \frac{\int y dy}{\int dy}.$$

Es ist $df = 2x dy$, $y = \frac{hx^2}{\lambda^2}$ und $dy = \frac{2xh}{\lambda^2} dx$, also $df = \frac{4x^2 h}{\lambda^2} dx$, somit

$$y_0 = \frac{\frac{4h^2}{\lambda^4} \int_0^{\lambda} x^4 dx}{\frac{4h}{\lambda^2} \int_0^{\lambda} x^2 dx} = \frac{h}{\lambda^2} \frac{3}{5} \lambda^2 = \frac{3}{5} h.$$

Der Schwerpunkt liegt also vom Scheitel O um

$$y_0 = \frac{3}{5} h \dots \dots \dots 16.$$

entfernt.

von der Linie AB um

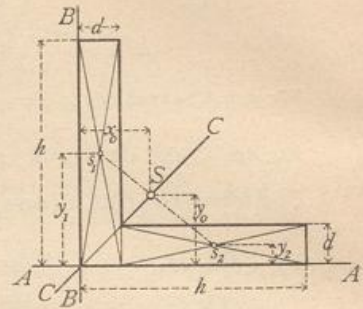
$$x_0 = \frac{2}{5} h \dots \dots \dots 17.$$

3) Schwerpunkte von Querschnittsflächen, die aus einfachen Figuren zusammengesetzt sind.

41. Gleichschenkeliges Winkeleisen.

α) Schwerpunkt des gleichschenkeligen Winkeleisens (Fig. 33). Auf die Ausrundung im Winkel und die Abrundung der Ecken soll keine Rücksicht genommen werden; dieselbe kann sowohl bei dieser, wie bei den folgenden Querschnittsformen meistens unbeachtet gelassen werden.

Fig. 33.



Der Abstand des Schwerpunktes S von AA , bzw. BB ist

$$y_0 = x_0 = \frac{\Sigma (fy)}{F} = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Hierin ist f_1 der Flächeninhalt des lothrecht, f_2 derjenige des wagrecht gezeichneten Schenkels, bei letzterem nach Abzug des Flächentheiles, der mit dem lothrechten Schenkel zusammenfällt; y_1 und y_2 sind die Abstände der Schwerpunkte von AA .

Eine angenäherte, fast stets genügend genaue Formel wird folgendermaßen gefunden¹³⁾. Es ist

$$y_0 = \frac{\frac{d \cdot h \cdot h}{2} + (h-d) \cdot d \cdot \frac{d}{2}}{2 d h - d^2} = \frac{h^2 + (h-d) d}{2 (2 h - d)} = \frac{h^2 + h d - d^2}{2 (2 h - d)} = \frac{1}{2} \left[\frac{h}{2} + \frac{3}{4} d - \frac{d^2}{8 h} \right].$$

Innerhalb der für $\frac{d}{h}$ vorkommenden Grenzen liegt $\frac{d^2}{2 \cdot 8 h}$ zwischen 0,0125 und 0,00625, hat sonach etwa den Mittelwerth 0,009. Wird dieser eingeführt, so erhält man

$$y_0 = x_0 = \frac{h}{4} + 0,366 d.$$

Sehr leicht kann der Schwerpunkt durch Construction gefunden werden.

Man zerlege den Querschnitt in zwei Rechtecke, ermittle ihre Schwerpunkte s_1 und s_2 , die nach Art. 33 (unter δ) die Schnittpunkte der Diagonalen sind; dann liegt der Gesamtschwerpunkt auf der Linie $s_1 s_2$; da er auch auf der Symmetrie-Axe CC liegt, so ist der Schnittpunkt S der genannten beiden Linien der gesuchte Schwerpunkt.

Beispiel. Es sei die Schenkellänge $h = 10$ cm und die Dicke $d = 1$ cm; alsdann ist $f_1 = 10$ qcm, $f_2 = 9$ qcm, $y_1 = 5$ cm und $y_2 = 0,5$ cm; sonach

$$y_0 = \frac{10 \cdot 5 + 9 \cdot 0,5}{10 + 9} = 2,87 \text{ cm} = x_0.$$

Die angenäherte Formel giebt

$$y_0 = 2,5 + 0,366 = 2,866 \text{ cm} = x_0.$$

42. Ungleichschenkeliges Winkeleisen.

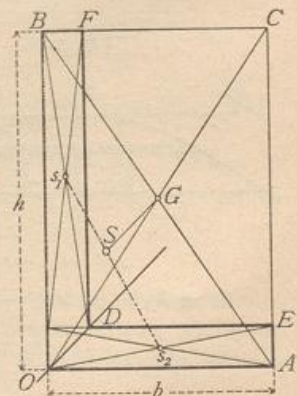
β) Schwerpunkt des ungleichschenkeligen Winkeleisens (Fig. 34).

Hier ist keine Symmetrie-Axe vorhanden; man muß also x_0 und y_0 getrennt berechnen. Es ist

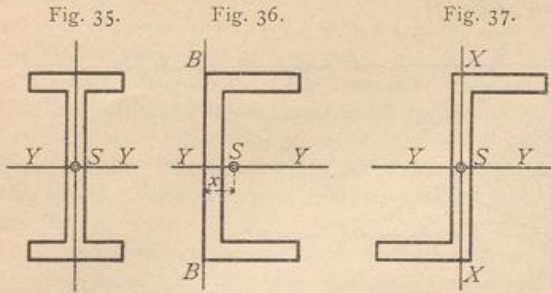
$$x_0 = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2}{f_1 + f_2} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Die Construction des Schwerpunktes ist in ähnlicher Weise möglich, wie unter α¹³⁾. Man ermittelt zunächst s_1 und s_2 , wie oben; alsdann liegt der Gesamtschwerpunkt auf $s_1 s_2$. Der Querschnitt kann

Fig. 34.



¹³⁾ Siehe: ZIMMERMANN. Ueber Winkeleisen-Querschnitte. Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 33.



Parallele zu OD ; alsdann ist der Schnittpunkt dieser mit $s_1 s_2$ der gefuchte Schwerpunkt.

Fig. 38.

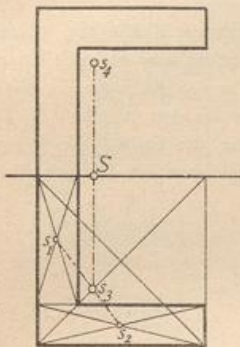


Fig. 39.

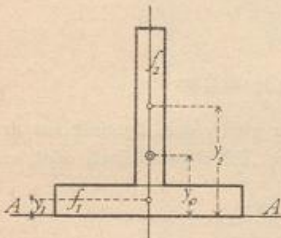
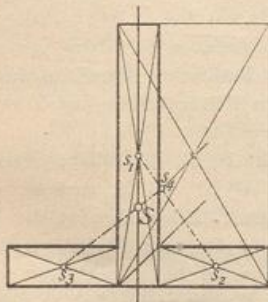


Fig. 40.



Abstände der Schwerpunkte derselben von der Axe XX bzw. $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$; alsdann ist das statische Moment der ganzen Fläche nach Obigem

$$M = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \dots + f_n y_n.$$

ferner als Differenz der beiden Rechtecke $OACB$ und $DECF$ betrachtet werden; der Schwerpunkt liegt also auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte dieser beiden Rechtecke; da diese Schwerpunkte jedoch sehr nahe zusammenfallen, so ergibt sich die Richtung der Verbindungslinie nicht genügend genau. Nun muß aber die Verbindungslinie zur Linie OD parallel sein; man ziehe also durch den Schwerpunkt G des umschriebenen Rechteckes $OACB$ die

γ) Schwerpunkt des I-Eisens (Fig. 35).

Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt beider Symmetrie-Axen.

δ) Schwerpunkt des C-Eisens (Fig. 36 u. 38).

Der Schwerpunkt liegt auf der wagrechten Symmetrie-Axe im Abstände x_0 von BB ; x_0 ist nach obiger Gleichung aufzufinden, durch Construction wie folgt. Die wagrechte Symmetrie-Axe theilt das C-Eisen in zwei Theile, deren jeder einen Winkeleisen-Querschnitt darstellt. Man ermittelt ihre Schwerpunkte s_3 und s_4 ; wie eben gezeigt wurde, ist der Gesamtschwerpunkt der Schnittpunkt der Linie $s_3 s_4$ mit der Symmetrie-Axe.

ε) Schwerpunkt des Z-Eisens (Fig. 37).

Der Schwerpunkt fällt mit demjenigen des lothrechten Rechteckes, des sog. Steges, zusammen; denn sowohl für die Axe XX , wie für die Axe YY ist das statische Moment der beiden wagrechten Rechtecke zusammen gleich Null; dieselben sind also ohne Einfluß auf die Schwerpunktlage. Dabei ist vorausgesetzt, daß dieselben gleichen Flächeninhalt haben.

ζ) Schwerpunkt des T-Eisens (Fig. 39 u. 40).

Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrie-Axe im Abstände y_0 von der Axe AA , und es ist

$$y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Durch Construction ist derselbe folgendermaßen zu finden. Man zerlege den Querschnitt in drei Rechtecke, ein lothrechtes und zwei wagrechte. Die Schwerpunkte seien s_1, s_2, s_3 . Das lothrechte und das eine wagrechte Rechteck bilden zusammen einen Winkeleisenquerschnitt, dessen Schwerpunkt s_4 , wie unter β angegeben, zu finden ist. Dann liegt der Gesamtschwerpunkt auf der Linie $s_3 s_4$, ferner auch auf der lothrechten Symmetrie-Axe, also auf dem Schnittpunkt S dieser beiden Linien.

4) Graphische Ermittlung der statischen Momente und der Schwerpunkte von Flächen.

Wenn die Figur, deren statisches Moment, bzw. deren Schwerpunkt ermittelt werden soll, eine unregelmäßige Form hat, so ist die graphische Behandlung der Aufgabe zu empfehlen.

Man zerlege die ganze Figur in Streifen, welche derjenigen Axe parallel laufen, für welche das statische Moment gefucht wird (Fig. 41).

Es seien die Flächeninhalte der einzelnen Streifen $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$, die Abstände der Schwerpunkte derselben von der Axe XX bzw. $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$; alsdann ist das statische Moment der ganzen Fläche nach Obigem

43-
I-Eisen.

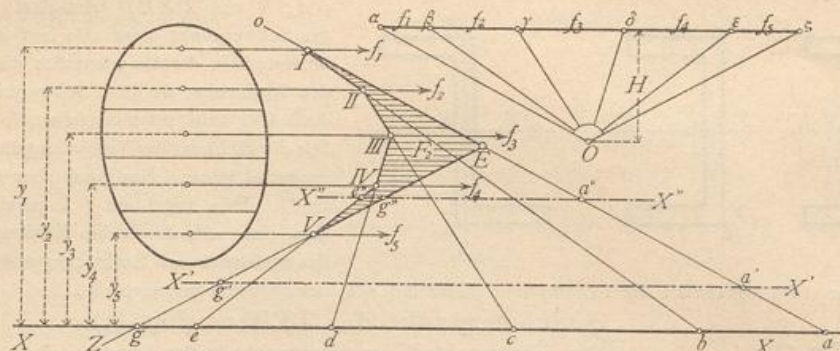
44-
C-Eisen.

45-
Z-Eisen.

46-
T-Eisen.

47-
Statisches
Moment.

Fig. 41.



Man führe nun die einzelnen Flächengrößen als parallel zur Axe XX wirkende Kräfte ein, welche in den Einzelschwerpunkten angreifen, füge sie zu einer Kraftlinie zusammen, indem man sie nach einem beliebigen, jedoch für alle gleichen Maßstabe aufrägt. Es sei $\alpha\beta = f_1$, $\beta\gamma = f_2$, $\gamma\delta = f_3 \dots$. Nun nehme man im Abstände H von dieser Kraftlinie einen Pol O an und konstruiere das den Werthen $f_1, f_2, f_3 \dots$ und diesem Pol entsprechende Seilpolygon $oI II III \dots$. Verlängert man die Seilpolygon-Seiten, welche die erste Kraft f_1 begrenzen, bis zum Schnitte mit der Axe XX , so erhält man ein Dreieck Iab , und es ist

$$\triangle Iab \sim \triangle O\alpha\beta,$$

da die Seiten dieser Dreiecke einander bzw. parallel sind; in Folge dessen ist

$$\frac{\overline{ab}}{y_1} = \frac{\overline{\alpha\beta}}{H} = \frac{f_1}{H}, \text{ d. h. } H \cdot \overline{ab} = f_1 y_1.$$

Der Abschnitt \overline{ab} der die Kraft f_1 begrenzenden Seilpolygon-Seiten auf der Axe XX multiplicirt mit dem Polabstand H giebt sonach das statische Moment von f_1 für diese Axe.

Eben so ist

$$\triangle IIbc \sim \triangle Ob\gamma;$$

also

$$\frac{\overline{bc}}{y_2} = \frac{\overline{\beta\gamma}}{H} = \frac{f_2}{H}, \quad H \cdot \overline{bc} = f_2 y_2 \quad \text{und} \quad H \cdot \overline{cd} = f_3 y_3 \quad \text{u. f. w.}$$

Das statische Moment der ganzen Fläche für die Axe XX ist daher gleich dem Product aus dem Stück ag , welches von den beiden äußersten Seilpolygon-Seiten auf der Axe XX abge schnitten wird, und dem Polabstand H , oder es ist

$$H \cdot \overline{ag} = \Sigma (f y).$$

Für die Anwendung ist zu beachten: Die Abschnitte $ab, bc, cd \dots$ auf der Axe XX liegen in den Dreiecken $Iab, IIbc$, bedeuten demnach Längen; die Werthe von H dagegen sind auf dieselbe Einheit zu beziehen, wie die Größen $f_1, f_2, f_3 \dots$, bedeuten also Flächen. Daher ist H auf dem Flächenmaßstabe, $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd} \dots$ hingegen sind auf dem Längenmaßstabe zu messen.

Beim Zerlegen der betreffenden Figur in parallele Streifen müssen dieselben so schmal gewählt werden, daß man mit genügender Genauigkeit die einzelnen Streifen als Rechtecke, Parallelogramme, Paralleltrapeze, überhaupt als solche einfache Figuren ansehen kann, deren Flächeninhalte und Schwerpunktlagen leicht bestimmt werden können.

Handelt es sich um das statische Moment der Fläche für die Axe $X'X'$, so ist dasselbe offenbar gleich $H \cdot \overline{a'g'}$. Rückt aber die Axe zwischen die Kräfte f , etwa nach $X''X''$, so ist zunächst das statische Moment der oberhalb liegenden Flächentheile gleich $H \cdot \overline{a''e''}$; im statischen Moment der gesammten Fläche ist aber auch der Beitrag der an der anderen Seite der Axe gelegenen Theile enthalten, welche einen negativen Beitrag liefern, weil die y -Werthe für dieselben von der Axe $X''X''$ aus nach unten gerechnet werden müssen; die von der Axe nach oben gerechneten Werthe der y sind ja positiv eingeführt. Demnach liefert hier f_5 ein statisches Moment gleich $-H \cdot \overline{g''e''}$, und daher ist das statische Moment der ganzen Fläche, bezogen auf die Axe $X''X''$, gleich $H \cdot \overline{a''g''}$.

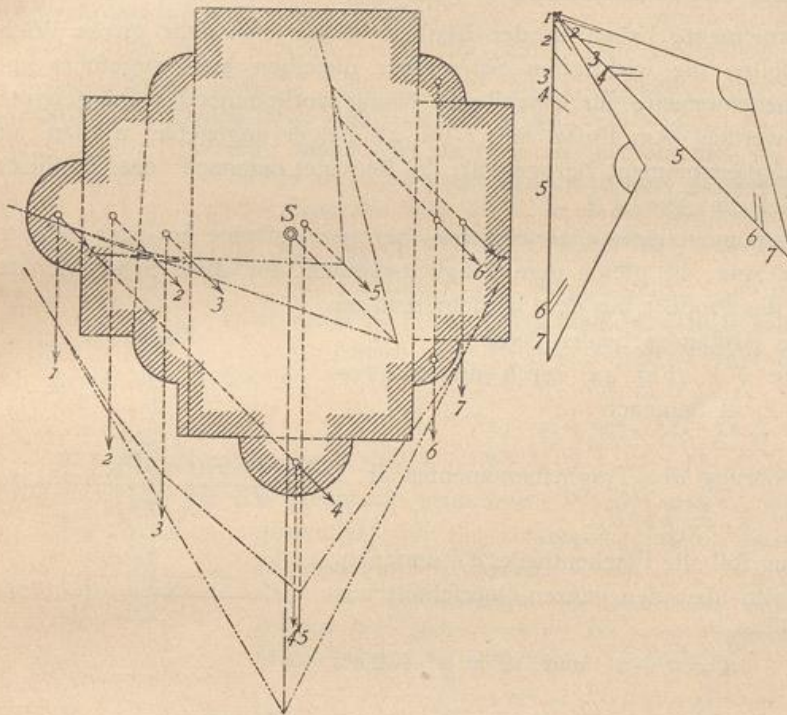
Demnach ist allgemein nachgewiesen: Das statische Moment einer Fläche F , bezogen auf eine Axe XX , wird erhalten, wenn man das von den beiden äußersten Seilpolygon-Seiten auf dieser Axe ab-

geschnittene Stück (ag , bzw. $a'g'$, $a''g''$) mit dem Polabstand H multiplicirt. Dabei muß das Stück ag auf dem Längenmaßstabe, der Polabstand H auf dem Flächenmaßstabe gemessen werden, nach welchem die Werthe von f aufgezeichnet sind.

Rückt die Axe XX weiter nach oben, so wird das von den äußersten Seilpolygon-Seiten auf derselben abgeschnittene Stück immer kleiner; geht die Axe durch den Schnittpunkt E der äußersten Seilpolygon-Seiten, so ist das abgeschnittene Stück gleich Null; also wird auch das statische Moment in Bezug auf diese Axe gleich Null; dieselbe ist also eine Schwerpunktsaxe. Hieraus folgt: Die durch den Schnittpunkt E der äußersten Seilpolygon-Seiten parallel zu XX gelegte Axe enthält den Schwerpunkt der Fläche.

Das soeben gefundene Ergebnis folgt auch mit Nothwendigkeit aus nachstehender Ueberlegung. Da die Flächen als Kräfte eingeführt sind, so kann man annehmen, diese Kräfte seien die Gewichte der einzelnen Theile einer an allen Stellen gleich starken Platte, welche dieselbe Form hat, wie die gegebene

Fig. 42.



Fläche, und in eben solche Theile getheilt ist, wie diese. Um die wirklichen Gewichte zu erhalten, braucht man nur alle Werthe f mit demselben Factor γ , dem Gewichte der Flächeneinheit, zu multipliciren. Da man aber die Platte aus beliebigem Material hergestellt und beliebig stark annehmen kann, so ist γ ganz beliebig, kann also auch gleich 1 gesetzt werden; die Werthe f können demnach auch als die Gewichte selbst angesehen werden. Die Mittelkraft aller dieser parallel gerichteten Kräfte geht demnach durch den Schwerpunkt der Fläche; sie geht aber auch durch den Schnittpunkt der äußersten Seilpolygon-Seiten und

ist der Richtung der anderen Kräfte parallel. Die durch diesen Schnittpunkt parallel zur Axe XX gezogene Linie ist also die Mittelkraft nach Richtung und Lage und geht durch den Schwerpunkt. Das Gleiche gilt von jeder anderen beliebigen Lage, welche für die Richtung der Axe, also auch der Kräfte angenommen wird. Man kann demnach leicht noch eine zweite Axe finden, auf welcher der Schwerpunkt liegt; der Schnittpunkt beider Axen ist dann der gesuchte Schwerpunkt.

Die gezeigte graphische Ermittlung des Schwerpunktes ist besonders bei unregelmäßigen Querschnitten empfehlenswerth; Fig. 42 zeigt diese Bestimmung für den Querschnitt eines Vierungspfeylers.

c) Trägheitsmomente und Centrifugalmomente.

Wird jedes Theilchen df einer Querschnittsfläche F mit dem Product uv seiner senkrecht genommenen Abstände von zwei Axen AA und BB multiplicirt (Fig. 43) und die Summe aller dieser Producte gezogen, so erhält man einen Ausdruck

$$J_{AB} = \int uv df,$$

48.
Schwerpunkt.

49.
Erläuterung.

welchen man das Centrifugalmoment des Querschnittes F für die Axen AA und BB nennt. Fallen beide Axen zusammen, so geht der Ausdruck in

$$\mathcal{F}_A = \int v^2 df$$

über, wenn BB mit der ursprünglichen Lage von AA zusammenfällt, bzw. in

$$\mathcal{F}_B = \int u^2 df,$$

wenn AA mit der ursprünglichen Lage von BB zusammenfällt. Man nennt $\mathcal{F}_A = \int v^2 df$ das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche F für die Axe AA ; eben so bezeichnet man

$\mathcal{F}_B = \int u^2 df$ als das Trägheitsmoment des Querschnittes für die Axe BB .

Die Trägheitsmomente haben in der Elasticitätslehre eine sehr große Wichtigkeit; deshalb sollen die wichtigsten Sätze über dieselben hier vorgeführt und zugleich die Trägheitsmomente für eine Reihe häufig vorkommender Querschnittsformen entwickelt werden. Am Fufse von \mathcal{F} soll als Zeiger angegeben werden, auf welche Axe das Trägheitsmoment bezogen ist; \mathcal{F}_A bedeutet demnach: das Trägheitsmoment bezogen auf die Axe AA .

50.
Trägheitsmomente für zur Schwerpunktsaxe parallele Axen.

Das Trägheitsmoment eines Querschnittes, bezogen auf eine zu einer Schwerpunktsaxe parallele Axe, ist gleich dem Trägheitsmoment für diese Schwerpunktsaxe, vermehrt um das Product aus der Querschnittsfläche in das Quadrat des Abstandes beider Axen.

Geht die Axe YY (Fig. 44) durch den Schwerpunkt der Fläche, so ist demnach

$$\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_Y + Fa^2.$$

Nach der Erklärung des Trägheitsmomentes ist

$$\mathcal{F}_A = \int u^2 df.$$

Die Summirung soll alle Flächentheile df umfassen; die Integration ist also über den ganzen Querschnitt auszudehnen. Nun ist

$$u = a + z \quad \text{und} \quad u^2 = a^2 + 2az + z^2,$$

also

$$\mathcal{F}_A = \int u^2 df = a^2 \int df + 2a \int z df + \int z^2 df.$$

Es ist jedoch $\int df = F$ und $\int z^2 df = \mathcal{F}_Y$, ferner nach der Lehre vom Schwerpunkt $\int z df = 0$, weil YY eine Schwerpunktsaxe ist; mithin in der That

$$\mathcal{F}_A = Fa^2 + \mathcal{F}_Y \dots \dots \dots 18.$$

Im Folgenden sollen für einige häufig vorkommende Querschnittsformen die Trägheitsmomente rechnerisch ermittelt werden.

α) Trägheitsmoment für den rechteckigen Querschnitt (Fig. 45).

Für diesen ist, bezogen auf die Schwerpunktsaxe YY ,

$$\mathcal{F}_Y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 df.$$

Fig. 43.

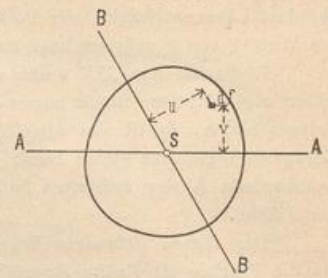
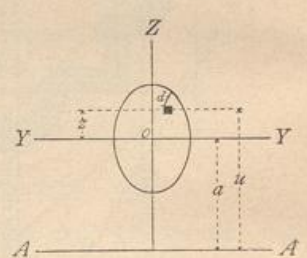
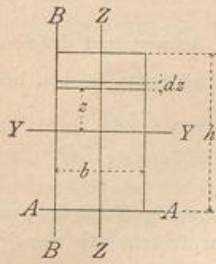


Fig. 44.



51.
Trägheitsmomente für rechteckige Querschnitte.

Fig. 45.



Da für alle Theile eines zu YY parallelen Streifens s dieselbe Gröfse hat, so kann man $df = b ds$ setzen, und es wird

$$J_Y = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \left[\frac{b z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right] = \frac{b h^3}{12} \quad \dots \quad 19.$$

Das Trägheitsmoment für eine Axe AA , welche mit einer Seite des Rechteckes zusammenfällt, ist nach Gleichung 18

$$J_A = \frac{b h^3}{12} + b h \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{b h^3}{12} + \frac{b h^3}{4} = \frac{b h^3}{3}.$$

Für eine zu YY normal stehende Schwerpunktsaxe ZZ ist nach Obigem

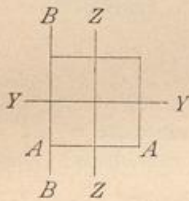
$$J_Z = \frac{h b^3}{12},$$

und für die Axe BB ist

$$J_B = \frac{h b^3}{3}.$$

Man kann dies in Worten folgendermaßen ausdrücken: Das Trägheitsmoment eines Rechteckes für eine zu einer der Seiten parallele Schwerpunktsaxe ist gleich dem Producte: Breite mal dritte Potenz der Höhe, dividirt durch zwölf; für eine mit einer Seite des Rechteckes zusammenfallende Axe ist das Trägheitsmoment dagegen gleich dem Producte: Breite mal dritte Potenz der Höhe, dividirt durch drei. Als Breite gilt die Abmessung des Rechteckes in der Richtung der betreffenden Axe, als Höhe die zu ersterer senkrechte Abmessung.

Fig. 46.



Mit Zuhilfenahme dieses Ergebnisses kann man für eine große Zahl von Querschnitten der Praxis die Trägheitsmomente leicht finden.

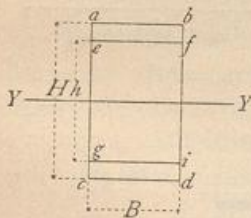
Das Quadrat ist ein Rechteck mit gleich langen Seiten; ist seine Seitenlänge $b = h = d$, so wird (Fig. 46)

$$J_Z = J_Y = \frac{d^4}{12} \quad \text{und} \quad J_A = J_B = \frac{d^4}{3}.$$

β) Trägheitsmomente für aus Rechtecken zusammengesetzte Querschnitte. Die für das Rechteck gefundenen Werthe von J werden vielfach angewendet, um für zusammengesetzte Querschnitte die Trägheitsmomente zu finden.

52.
Symmetrische
I- u. E-förmige
Querschnitte.

Fig. 47.



Das Trägheitsmoment des Querschnittes in Fig. 47 ist gleich der Differenz des Trägheitsmomentes des ganzen Rechteckes $abcd$ weniger dem Trägheitsmoment des Rechteckes $efgh$, d. h. es ist

$$J_Y = \frac{1}{12} B H^3 - \frac{1}{12} B h^3 = \frac{B}{12} (H^3 - h^3).$$

Für den symmetrischen I-förmigen (Fig. 48) und für den E-förmigen Querschnitt (Fig. 49) ergibt sich hiernach

$$J_Y = \frac{1}{12} \left\{ b [h^3 - (h - 2t)^3] + d (h - 2t)^3 \right\}.$$

Dieser für die Berechnung unbequeme Ausdruck kann wesentlich vereinfacht werden. Wird der Abstand der Schwerpunkte des oberen, bezw. unteren Rechteckes mit h bezeichnet, also $h - 2t = h$ gesetzt und im letzten Gliede obigen Ausdruckes statt $h - 2t$ (nicht ganz genau, jedoch mit kleinem Fehler) h eingeführt, so ist

Fig. 48.

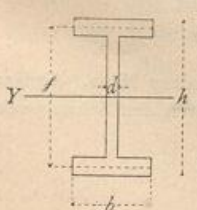
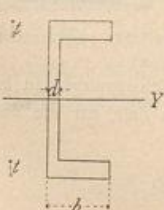


Fig. 49.



$$J_Y = \frac{1}{2} b t (h^2 - 2 h t + t^2) + \frac{1}{6} b t^3 + \frac{d h^3}{12}.$$

Wir setzen $b t = f$; alsdann wird

$$J_Y = \frac{1}{2} f (h - t)^2 + \frac{f t^2}{6} + \frac{d h^3}{12}.$$

$\frac{f t^2}{6}$ ist gegen das erste Glied sehr klein und kann ohne

Bedenken vernachlässigt werden; alsdann ist der Ausdruck für das Trägheitsmoment:

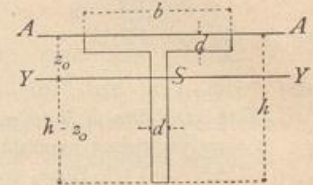
$$\mathcal{I}_Y = \frac{1}{2} f h^2 + \frac{d h^3}{12} = \frac{h^2}{2} \left(f + \frac{d h}{6} \right) \dots \dots \dots 20.$$

Denkt man sich die ganze Querschnittsfläche f des oberen Rechteckes im Schwerpunkt desselben vereinigt, also im Abstände $\frac{h}{2}$ von der Axe YY , und eben so die des unteren Rechteckes in dem bez. Schwerpunkt, so ist das Trägheitsmoment eines solchen Querschnittes

$$i = 2f \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{f h^2}{2}.$$

Dies ist aber der erste Theil unseres obigen Ausdruckes 20 für \mathcal{I}_Y ; der zweite Theil des Ausdruckes stellt demnach den Beitrag dar, welchen der Steg zum Trägheitsmoment leistet. Mit ziemlich genauer Annäherung erhält man demnach das Trägheitsmoment des symmetrischen I-förmigen Querschnittes, indem man die Querschnittsfläche des oberen und unteren Gurtes vermehrt um je $\frac{1}{6}$ der Querschnittsfläche des Steges (bis zu den Gurtschwerpunkten gerechnet), im Schwerpunkt des oberen und unteren Gurtes vereinigt denkt und dafür das Trägheitsmoment aufsucht.

Fig. 50.



53.
T-förmige
Querschnitte.

Wird beim T-förmigen Querschnitt (Fig. 50) der Abstand des Schwerpunktes von der durch die eine Kante gelegten Axe AA mit z_0 bezeichnet, so ist nach der Schwerpunktslehre

$$F z_0 = d (b - d) \frac{d}{2} + d h \frac{h}{2}, \text{ ferner } F = (b - d) d + d h.$$

Sonach ist

$$z_0 = \frac{(b - d) d^2 + d h^2}{2 [(b - d) d + d h]} = \frac{(b - d) d + h^2}{2 (b - d) + 2 h},$$

und das Trägheitsmoment für die wagrechte Schwerpunktsaxe YY

$$\mathcal{I}_Y = \frac{1}{3} [d (h - z_0)^3 + b z_0^3 - (b - d) (z_0 - d)^3].$$

Das Trägheitsmoment für die Axe AA ist

$$\mathcal{I}_A = \frac{1}{3} [d h^3 + (b - d) d^3].$$

54.
Unsymmetrische
I-förmige
Querschnitte.

Für den unsymmetrischen I-förmigen Querschnitt (Fig. 51) ist, wenn man die früheren Bezeichnungen beibehält

$$z_0 = \frac{\frac{d h \cdot h}{2} + (b - d) t \left(h - \frac{t}{2} \right) + \frac{(B - d) t^2}{2}}{d h + (b - d) t + (B - d) t} = \frac{d h^2 + (b - d) t (2 h - t) + (B - d) t^2}{2 [d h + (b - d) t + (B - d) t]}$$

und

$$\mathcal{I}_Y = \frac{1}{3} [b (h - z_0)^3 + B z_0^3 - (b - d) c^3 - (B - d) (z_0 - t)^3].$$

Fig. 51.

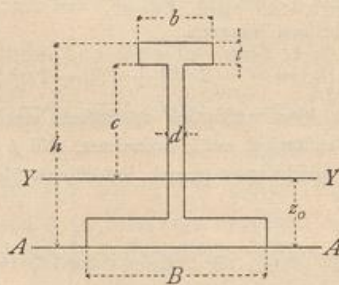
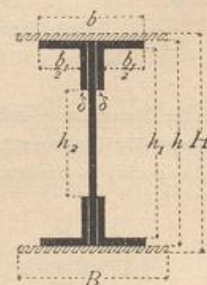


Fig. 52.



55.
Blechräger-
Querschnitte.

Bei den Querschnitten der Blechräger (Fig. 52) liegt der Schwerpunkt in halber Höhe. Alsdann ist, falls nur das lothrechte Blech und die 4 Winkleifen vorhanden sind, für die durch den Schwerpunkt gelegte wagrechte Axe

$$\mathcal{I} = \frac{1}{12} (b h^3 - b_1 h_1^3 - 2 \delta h_2^3).$$

Falls noch Blechplatten vorhanden sind, ermittelt man ihre Trägheitsmomente am besten besonders und zählt sie zum Trägheitsmoment des Querschnittes ohne Deckplatten. Das Trägheitsmoment dieser Deckplatten (Fig. 52) ist alsdann

$$\Delta \mathcal{J} = \frac{1}{12} B (H^3 - h^3).$$

γ) Trägheitsmoment für kreisförmige Querschnitte (Fig. 53).

Der Halbmesser des kreisförmigen Querschnittes sei r , der Durchmesser d . Zuerst soll das Trägheitsmoment der oberen Halbkreisfläche für die Axe YY bestimmt werden. Man zerlege die Kreisfläche in schmale Ringe, deren Mittelpunkte mit demjenigen der gegebenen Fläche zusammenfallen, und bestimme zunächst das Trägheitsmoment einer solchen Ringfläche. Der Halbmesser eines solchen Ringes sei ρ , seine sehr geringe Breite sei $d\rho$. Der Flächeninhalt eines Theilchens df dieser Ringfläche, welches zum Mittelpunktswinkel $d\varphi$ gehört, ist $df = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho$, und sein Trägheitsmoment bezogen auf die Axe YY

$$d(i) = y^2 \cdot df = \rho^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \rho^3 d\rho \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Das Trägheitsmoment des halben Ringes wird erhalten, indem man für alle Theile df desselben $d(i)$ aufsucht, d. h. indem man zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ integrirt, wobei natürlich ρ und $d\rho$ als Festwerthe (Constante) zu betrachten sind, da sie für alle Theilchen des Ringes gleiche Gröfse haben.

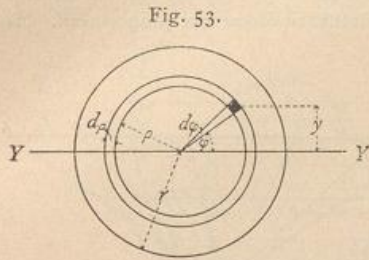


Fig. 53.

Man erhält

$$i = \rho^3 d\rho \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \rho^3 d\rho \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} \right]_0^\pi = \frac{\rho^3 d\rho \cdot \pi}{2}.$$

Um aus diesem Trägheitsmomente einer halben Ringfläche dasjenige der halben Kreisfläche zu erhalten, beachte man, dass die letztere sich aus lauter halben Ringflächen zusammensetzt; demnach ist

$$\frac{\mathcal{J}}{2} = \Sigma (i) = \int_0^r \rho^3 d\rho \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} r^4,$$

und das Trägheitsmoment der ganzen Kreisfläche für die Axe YY

$$\mathcal{J} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \dots \dots \dots 21.$$

Bei allen Angaben von Trägheitsmomenten ist zu beachten: Die Mafseinheit der Trägheitsmomente ist die Längeneinheit in der vierten Potenz (also entweder: Meter zur vierten, oder Centimeter zur vierten, oder Millimeter zur vierten Potenz etc.); denn jeder Theil des Trägheitsmomentes, also auch das Ganze, ist das Product einer Fläche in das Quadrat einer Länge. Deshalb ist stets mit der ziffermäßigen Gröfse auch die Mafseinheit des Trägheitsmomentes anzugeben.

Um ein Trägheitsmoment, welches in cm^4 angegeben ist, in ein solches zu verwandeln, dessen Mafseinheit mm^4 sind, muss man mit $10^4 = 10000$ multipliciren; umgekehrt ist mit $10^4 = 10000$ zu dividiren, wenn ein in mm^4 gegebenes Trägheitsmoment in eines mit der Mafseinheit cm^4 verwandelt werden soll.

Für die Statik und die Aufgaben derselben empfiehlt es sich, die Trägheitsmomente in cm^4 anzugeben.

Wenn die Querschnitte eine unregelmäßige Form haben, so ist es oft vorthellhaft, die Trägheitsmomente graphisch zu ermitteln. Nennt man, wie oben, die einzelnen Flächentheile, in welche die ganze Querschnittsfläche zerlegt wird, $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$, die Abstände der Schwerpunkte derselben von derjenigen Axe XX , für welche das Trägheitsmoment gesucht wird, bzw. $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$, so ist

$$\mathcal{J} = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n = \Sigma (f y^2) = f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + f_3 y_3^2 + \dots,$$

$$\mathcal{J} = f_1 y_1 \cdot y_1 + f_2 y_2 \cdot y_2 + f_3 y_3 \cdot y_3 + \dots$$

56.
Kreisförmige
Querschnitte.

57.
Mafseinheit für
die Trägheits-
momente.

58.
Graphische
Ermittlung der
Trägheits-
momente.

Nun sind $f_1 y_1, f_2 y_2, f_3 y_3 \dots$ die statischen Momente der einzelnen Flächentheile für die Axe XX ; setzt man $f_1 y_1 = m_1, f_2 y_2 = m_2, f_3 y_3 = m_3 \dots$, so wird

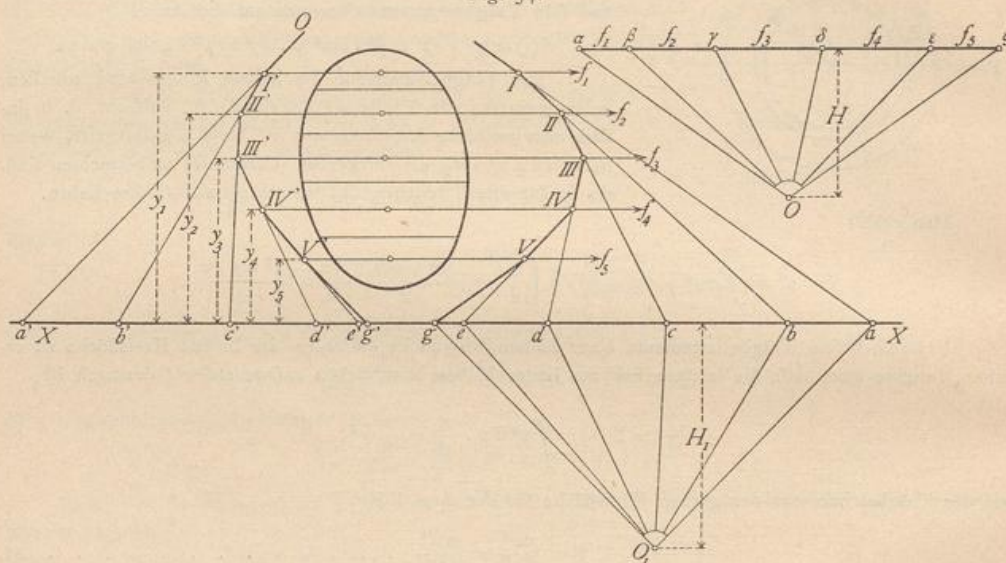
$$\mathcal{J} = i_1 + i_2 + i_3 + \dots = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots$$

59.
Culman'sches
Verfahren.

Man braucht also nur mit den Werthen $m_1, m_2, m_3 \dots$ genau so zu verfahren, wie oben (in Art. 47, S. 31) mit den Werthen $f_1, f_2, f_3 \dots$, um die statischen Momente von $m_1, m_2, m_3 \dots$, d. h. die Trägheitsmomente zu erhalten. Darauf beruht das nachfolgende von *Culman* angegebene Verfahren (Fig. 54).

Man zerlege den Querschnitt in Streifen, die zu derjenigen Axe parallel sind, für welche das Trägheitsmoment gesucht wird, und ermittle zunächst, wie oben (in Art. 47, S. 31) gezeigt ist, die statischen Momente für die Axe XX . Die Stücke $ab, bc, cd \dots$ sind den statischen Momenten proportional. Man

Fig. 54.



nehme nun einen neuen Pol O_1 an, ziehe die Strahlen $O_1 a, O_1 b, O_1 c \dots$ und construire für die Kräfte $m_1, m_2, m_3 \dots$, die in denselben Linien wirkend angenommen werden, wie die $f_1, f_2, f_3 \dots$, das zugehörige Seilpolygon $O P I P' I I P' \dots g' \dots$. Werden die Seilpolygoneiten über die Eckpunkte hinaus bis zu den Schnittpunkten mit der Axe XX verlängert, so ist

$$\triangle P' a' b' \sim \triangle O_1 a b, \text{ also } \frac{a' b'}{y_1} = \frac{a b}{H_1}.$$

Es ist aber (siehe Art. 47, S. 31)

$$\overline{a b} = \frac{f_1 y_1}{H}, \text{ mithin } \overline{a' b'} = \frac{f_1 y_1^2}{H H_1} = \frac{i_1}{H H_1} \text{ und } i_1 = H H_1 \cdot \overline{a' b'}.$$

Eben so ergibt sich

$$\triangle I P' b' c' \sim \triangle O_1 b c, \text{ mithin } \frac{b' c'}{y_2} = \frac{b c}{H_1} = \frac{f_2 y_2}{H H_1} \text{ und } \overline{b' c'} = \frac{f_2 y_2^2}{H H_1} = \frac{i_2}{H H_1};$$

sonach

$$i_2 = H \cdot H_1 \cdot \overline{b' c'}; \text{ eben so } i_3 = H \cdot H_1 \cdot \overline{c' d'} \dots$$

Man erhält demnach

$$\mathcal{J} = \Sigma (i) = H H_1 (a' b' + b' c' + c' d' + \dots) = H H_1 \cdot \overline{a' g'}.$$

Das Trägheitsmoment der Fläche F für eine Axe XX ist also gleich dem von den äußersten Seiten des Seilpolygons $O P I P' I I P' \dots$ auf der Axe abgechnittenen Stücke $a' g'$, multiplicirt mit dem Producte der beiden Polabstände H und H_1 .

Genau eben so, wie oben bei den statischen Momenten (siehe Art. 47, S. 31) nachgewiesen ist, ergibt sich auch hier, daß die Strecke $a' g'$ und H_1 auf dem Längenmaßstabe, H auf demjenigen Flächenmaß-

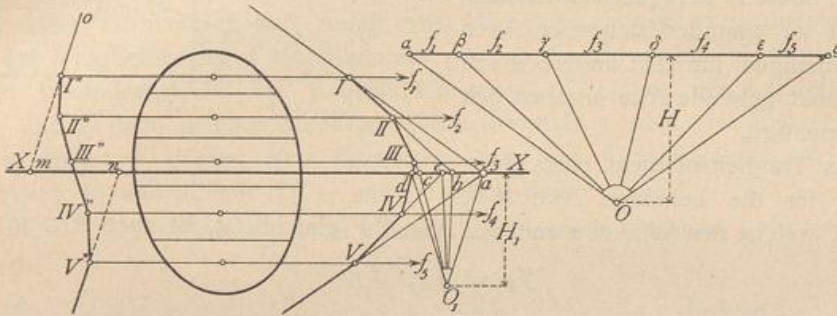
stabe zu messen ist, nach welchem $f_1, f_2, f_3 \dots$ aufgetragen sind; das Ergebnis ist jedoch das gleiche, wenn $\overline{a'g'}$ auf dem Flächenmaßstabe, H und H_1 auf dem Längenmaßstabe gemessen werden.

Ein Querschnitt sei in natürlicher Größe aufgezeichnet, $H = 5 \text{ cm}$ und $H_1 = 5 \text{ cm}$; ferner seien $f_1, f_2, f_3 \dots$ in einem Maßstabe aufgetragen, in welchem $1 \text{ cm} = 10 \text{ qcm}$ ist; alsdann wird, wenn $\overline{a'g'} = 4,6 \text{ cm}$ ist,

$$J = 4,6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5 \text{ cm}^4.$$

Wenn die Axe XX eine Schwerpunktsaxe ist (Fig. 55), so sind zunächst die statischen Momente genau wie oben gezeigt zu ermitteln; die statischen Momente der oberhalb von XX liegenden Flächenteile haben entgegengesetzten Sinn, wie diejenigen der unterhalb von XX liegenden Flächen, weil die

Fig. 55.



Hebelsarme verschiedene Vorzeichen haben. Der Sinn der einzelnen Momente ist ab, bc, cd, de, ea ; Anfangspunkt a und Endpunkt a fallen zusammen. Wird jetzt der Pol O_1 angenommen, so sind die Strahlen $O_1a, O_1b, O_1c, O_1d, O_1e, O_1a$; der letzte Strahl fällt mit dem ersten zusammen. Als Seilpolygon erhält man $O I'' II'' \dots V''$, und es ist

$$J_S = H \cdot H_1 \cdot \overline{m n}.$$

Ein anderes Verfahren hat *Mohr* angegeben.

Wenn die statischen Momente nach dem in Art. 47 (S. 31) vorgeführten Verfahren konstruiert sind (Fig. 54), so ist der Flächeninhalt des Dreieckes $I a b$

$$\varphi_1 = \frac{\overline{ab} \cdot y_1}{2} = \frac{f_1 y_1}{H} \cdot \frac{y_1}{2} = \frac{f_1 y_1^2}{2H} = \frac{i_1}{2H}$$

und der Flächeninhalt des Dreieckes $II b c$

$$\varphi_2 = \frac{\overline{bc} \cdot y_2}{2} = \frac{f_2 y_2}{H} \cdot \frac{y_2}{2} = \frac{f_2 y_2^2}{2H} = \frac{i_2}{2H}.$$

Eben so kann man für jeden Flächenteil f nachweisen, daß sein Trägheitsmoment für eine Axe XX gleich ist dem Flächeninhalte des Dreieckes, welches von der Axe und den das betreffende Flächenteilchen begrenzenden Seilpolygoneiten eingeschlossen ist, multiplicirt mit dem doppelten Polabstand. Es ist also

$$i_1 = 2H \varphi_1, \quad i_2 = 2H \varphi_2, \quad i_3 = 2H \varphi_3 \dots$$

und

$$J = \Sigma (i) = 2H \Sigma (\varphi) = 2H F_1,$$

wenn $F_1 = \Sigma (\varphi)$ ist.

Handelt es sich um das Trägheitsmoment für die Schwerpunktsaxe (Fig. 55), so bleibt Alles giltig, und es wird

$$J_S = 2H F_2,$$

wenn F_2 den Flächeninhalt der Figur $I II III IV V a I$ bedeutet.

Handelt es sich um das Trägheitsmoment eines Querschnittes für eine beliebige, nicht durch den Schwerpunkt gehende Axe, so kann man dasselbe aus demjenigen für die parallele Schwerpunktsaxe nach Art. 50 (S. 34) ermitteln; dieses letztere ist aber im Vorstehenden nur für sehr einfache Querschnittsformen und selbst bei diesen nur für einige wenige Lagen der Axen rechnerisch bestimmt. Für beliebig

6a.
Mohr'sches
Verfahren.

6r.
Trägheits-
momente für
verschiedene
Schwerpunkts-
axen.

liegende Axen, also beispielsweise beim Rechteckquerschnitt für eine Axe, welche keiner Seite parallel ist, wird die Berechnung meist recht umständlich. Dagegen ist die Ermittlung sehr bequem, wenn man das gefuchte Trägheitsmoment für eine beliebige Schwerpunktsaxe durch diejenigen für zwei andere Schwerpunktsaxen ausdrückt, welche einen beliebigen, zweckmäßig einen rechten Winkel mit einander bilden.

Die Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten zweier in einem beliebigen Punkte A der Querschnittsebene senkrecht zu einander stehender Axen und demjenigen für eine andere durch diesen Punkt gehende Axe ergeben sich folgendermaßen.

Das Trägheitsmoment eines Querschnittes für die beliebige Axe AZ_1 (Fig. 56), welche den Winkel α mit der Axe YY einschließt, ist nach Art. 49 (S. 33)

$$\mathcal{I}_{Z_1} = \int z_1^2 df.$$

Nach Fig. 56 ist

$$z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha,$$

folglich

$$\mathcal{I}_{Z_1} = \int z^2 \cos^2 \alpha \cdot df + \int y^2 \sin^2 \alpha \cdot df - \int 2yz \sin \alpha \cos \alpha \cdot df.$$

Die Integration ist über den ganzen Querschnitt auszudehnen; bei derselben ist α constant; da nun

$$\int z^2 df = \mathcal{I}_Z, \quad \int y^2 df = \mathcal{I}_Y \quad \text{und} \quad \int yz \cdot df = \mathcal{I}_{YZ}$$

ist, so folgt

$$\mathcal{I}_{Z_1} = \mathcal{I}_Y \cos^2 \alpha + \mathcal{I}_Z \sin^2 \alpha - \mathcal{I}_{YZ} \sin 2\alpha \dots \dots \dots 22.$$

Das Trägheitsmoment für die Axe AZ_1 wird erhalten, indem man an Stelle von α den Winkel einführt, welchen AZ_1 mit YY bildet, d. h. $90 + \alpha$. Dann ergibt sich

$$\mathcal{I}_{Z_1} = \mathcal{I}_Z \cos^2 \alpha + \mathcal{I}_Y \sin^2 \alpha + \mathcal{I}_{YZ} \sin 2\alpha \dots \dots \dots 23.$$

Die beiden Gleichungen 22 u. 23 geben die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Lage der Schweraxen an. Besonders wichtig ist die Lage der Axen, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum und ein Minimum wird. \mathcal{I}_{Z_1} wird ein Maximum für den Werth von α , für welchen

$$\frac{d\mathcal{I}_{Z_1}}{d\alpha} = -2\mathcal{I}_Y \cos \alpha \sin \alpha + 2\mathcal{I}_Z \sin \alpha \cos \alpha - 2\mathcal{I}_{YZ} \cos 2\alpha = 0,$$

d. h. für welchen $(\mathcal{I}_Z - \mathcal{I}_Y) \sin 2\alpha = 2\mathcal{I}_{YZ} \cos 2\alpha$ wird. Es ist also

$$\text{tg } 2\alpha_{max} = \frac{-2\mathcal{I}_{YZ}}{\mathcal{I}_Z - \mathcal{I}_Y} \dots \dots \dots 24.$$

Dieser Gleichung genügen zwei Winkelgrößen 2α , welche um 180 Grad verschieden sind, da $\text{tg}(180 + 2\alpha) = \text{tg } 2\alpha$ ist. Es gibt also zwei Axen, für welche ein Maximum, bzw. Minimum des Trägheitsmomentes stattfindet, und diese beiden Axen bilden mit der angenommenen Axe YY die Winkel α_{max} , bzw. $90 + \alpha_{max}$; diese beiden Axen stehen senkrecht zu einander. Ob Maximum oder Mini-

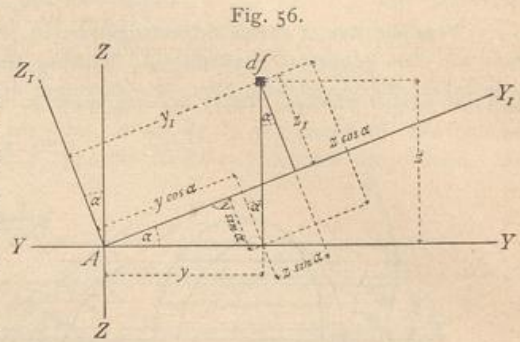


Fig. 56.

mum für die eine oder andere Axe stattfindet, ergibt die zweite Differentiation. Man findet leicht, daß die zweiten Abgeleiteten nach α für zwei Winkel, welche um 90 Grad verschieden sind, entgegengesetztes Vorzeichen haben; entspricht demnach dem Winkel α das Maximum, so tritt für den Winkel $(90 + \alpha)$ das Minimum des Trägheitsmomentes ein.

Es folgt daraus der Satz: Für jeden Punkt in der Ebene des Querschnittes ist eine Axe vorhanden, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum, eine andere, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird. Beide Axen stehen zu einander senkrecht.

62.
Hauptaxen.

Man nennt diese Axen die Hauptaxen. Diejenige, für welche das Trägheitsmoment seinen Größtwerth hat, nennt man die erste Hauptaxe, diejenige, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird, heißt die zweite Hauptaxe.

Die Veränderlichkeit des Centrifugalmomentes \mathcal{F}_{YZ} mit der Aenderung der Axen Y und Z kann in ganz ähnlicher Weise ermittelt werden, wie oben für das Trägheitsmoment \mathcal{F} gezeigt ist. Bezeichnet man das Centrifugalmoment für die beiden Axen Y_1 und Z_1 mit $\mathcal{F}_{Y_1 Z_1}$ und beachtet, daß

$$z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha \quad \text{und} \quad y_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{Y_1 Z_1} &= \int y_1 z_1 df = \int (y \cos \alpha + z \sin \alpha)(z \cos \alpha - y \sin \alpha) df, \\ \mathcal{F}_{Y_1 Z_1} &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int y z df + \frac{\sin 2 \alpha}{2} (\int z^2 df - \int y^2 df), \\ \mathcal{F}_{Y_1 Z_1} &= \mathcal{F}_{YZ} \cos 2 \alpha + \frac{\sin 2 \alpha}{2} (\mathcal{F}_Y - \mathcal{F}_Z). \quad \dots \quad 25. \end{aligned}$$

$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1}$ wird gleich Null für $(\mathcal{F}_Y - \mathcal{F}_Z) \sin 2 \alpha = -2 \mathcal{F}_{YZ} \cos 2 \alpha$, sonach für

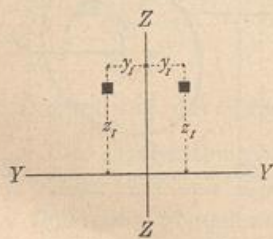
$$\operatorname{tg} 2 \alpha = - \frac{2 \mathcal{F}_{YZ}}{\mathcal{F}_Y - \mathcal{F}_Z} = \frac{2 \mathcal{F}_{YZ}}{\mathcal{F}_Z - \mathcal{F}_Y}.$$

Dies ist derselbe Werth, für welchen nach Gleichung 24 Maximum, bezw. Minimum des Trägheitsmomentes stattfindet. Für die Hauptaxen ist sonach

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \int y_1 z_1 df = 0.$$

Für viele Querschnitte ist hierdurch ein bequemes Kennzeichen zur Bestimmung der Hauptaxen gefunden. Man suche diejenigen Axen, für welche $\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = 0$ ist; alsdann sind die gefundenen Axen die Hauptaxen. Es genügt, eine Hauptaxe zu suchen, da nach Früherem die andere mit derselben stets einen Winkel von 90 Grad einschließt.

Fig. 57.

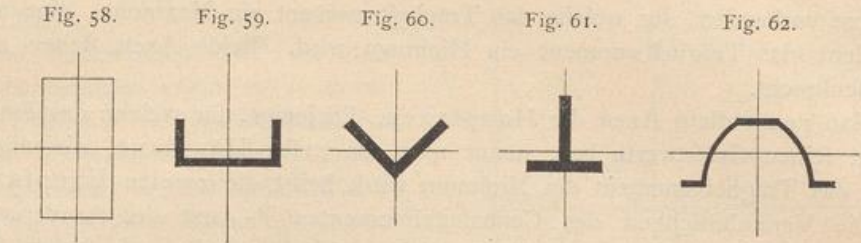


Bei sämtlichen zu einer oder mehreren Axen symmetrisch liegenden Querschnitten sind die Symmetriemaxen auch zugleich die Hauptaxen. Denn sei etwa die Z -Axe eine Symmetrieaxe, so entspricht jedem df mit den Koordinaten y_1, z_1 ein df mit den Koordinaten $-y_1, z_1$ (Fig. 57). Die Beiträge der beiden df zu $\mathcal{F}_{Y_1 Z_1}$ sind also

$$df \cdot y_1 z_1 - df \cdot y_1 z_1 = 0.$$

Genau eben so ist es mit sämtlichen übrigen Querschnittstheilen; die Summe der Beiträge je zweier symmetrisch liegender Flächentheile ist gleich Null, so daß also auch die Gesamtsomme $\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \int y_1 z_1 df = 0$ ist.

Bei den in Fig. 58 bis 62 dargestellten Querschnitten sind die Haupttaxen angegeben. In den im vorhergehenden Halbbande dieses »Handbuches« mitgetheilten Tabellen über die »Deutschen Normal-Profile für Walzeisen« sind die Trägheitsmomente für solche Axen mit aufgenommen worden, welche beim Berechnen von Hochbau-Constructions eine Rolle spielen.



63.
Wahl der Haupttaxen als Axen der Y und Z.

Wählt man die Haupttaxen als Axen der Y und Z (Fig. 57), so ist für diese nach Obigem $\int y z df = \mathcal{F}_{YZ} = 0$; mithin ist, wenn man das Trägheitsmoment in Bezug auf die eine Hauptaxe mit A, dasjenige in Bezug auf die andere mit B bezeichnet, in den Gleichungen 22, 23 u. 25 für \mathcal{F}_Y und \mathcal{F}_Z bzw. A und B, so wie für $\mathcal{F}_{YZ} = 0$ einzusetzen. Man erhält für diese Lage der Haupttaxen:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_{Y_1} &= A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha \\ \mathcal{F}_{Z_1} &= A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha \\ \mathcal{F}_{Y_1 Z_1} &= (A - B) \frac{\sin 2 \alpha}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 26.$$

Sind A und B, d. h. die beiden Hauptträgheitsmomente einander gleich, so ist

$$\mathcal{F}_{Y_1} = A (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = A,$$

d. h. \mathcal{F}_{Y_1} ist alsdann von α unabhängig, also für jedes α gleich A.

Hieraus folgt: Sind die beiden Hauptträgheitsmomente gleich groß, so sind alle Trägheitsmomente gleich groß.

64.
Centrifugalmomente.

Bei vielen statischen Untersuchungen ist es wichtig, die Lage der Haupttaxen und die Größe der Werthe von A und B zu kennen. Für die Ermittlung dieser Werthe aber bedarf man nach vorstehenden Entwicklungen der Kenntniss des Centrifugalmomentes $\mathcal{F}_{YZ} = \int y z df$.

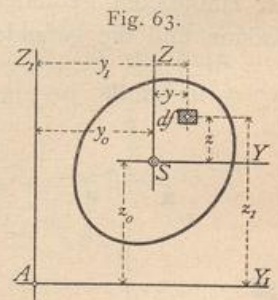
Legt man durch einen beliebigen Punkt A in der Ebene eines Querschnittes (Fig. 63) und durch den Schwerpunkt S desselben je zwei parallele Axen $A Y_1$ und $A Z_1$, bzw. SY und SZ, bezeichnet man die Coordinaten des Schwerpunktes für die ersten beiden Axen mit z_0 und y_0 , die Centrifugalmomente für die Axenpaare bzw. mit $\mathcal{F}_{Y_1 Z_1}$ und \mathcal{F}_{YZ} , so ist

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \mathcal{F}_{YZ} + F y_0 z_0.$$

Denn es ist

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \int y_1 z_1 df, \quad y_1 = y + y_0 \quad \text{und} \quad z_1 = z + z_0; \quad \text{also}$$

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \int (y + y_0) (z + z_0) df = \int y z df + y_0 \int z df + z_0 \int y df + y_0 z_0 \int df.$$



Nun ist $\int yz \, df = \mathcal{F}_{YZ}$, $\int df = F$, $\int z \, df = 0$ und $\int y \, df = 0$; die letzteren beiden Werthe ergeben sich, weil SY und SZ Schwerpunktsachsen sind (vergl. Art. 33, S. 26, unter α). Es wird somit

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \mathcal{F}_{YZ} + F y_0 z_0 \dots \dots \dots 27.$$

Wenn die Schwerpunktsachsen Hauptachsen sind, so ist $\mathcal{F}_{YZ} = 0$, demnach

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = F y_0 z_0 \dots \dots \dots 28.$$

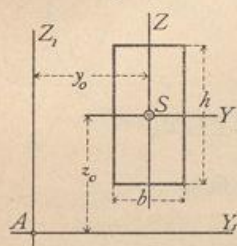
Diese Formel ist sehr bequem. Soll beispielsweise das Centrifugalmoment für die Axen AY_1 und AZ_1 (Fig. 64) und den Rechtecksquerschnitt ermittelt werden, dessen Seiten parallel zu den Axen sind, so lege man durch den Schwerpunkt zwei den ersteren bzw. parallele Axen SY und SZ ; alsdann wird

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = F y_0 z_0.$$

Fällt etwa A mit einer Ecke zusammen, so wird

$$\mathcal{F}_{Y_1 Z_1} = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

Fig. 64.



Beispiel. Es soll das Centrifugalmoment eines ungleichschenkeligen Winkelreifens (Fig. 65) für zwei durch seinen Schwerpunkt gelegte Axen ermittelt werden, welche den Winkelreifenschenkeln parallel sind.

Zerlegt man den Querschnitt in zwei Rechtecke, deren eines den ganzen lothrechten Schenkel enthält, deren anderes den wagrechten Schenkel nach Abzug des schon beim ersten mitberechneten Rechteckes in der Ecke bildet, und nennt man die Flächeninhalte F_1 und F_2 , so wie die Abstände der Einzelschwerpunkte von den Axen bzw. y_0', z_0', y_0'', z_0'' , so ist

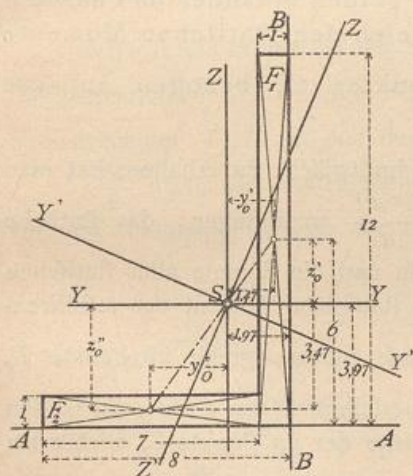
$$\mathcal{F}_{YZ} = F_1 y_0' z_0' + F_2 y_0'' z_0''.$$

Die Länge des großen und kleinen Schenkels sei bzw. 12 und 8 cm, die Stärke beider Schenkel 1,0 cm (Deutsches Normal-Profil Nr. 8/12) und der Abstand des Schwerpunktes von der äußeren Kante des langen, bzw. kurzen Schenkels 1,97 cm, bzw. 3,97 cm; alsdann ist

$$\mathcal{F}_{YZ} = 12 \cdot 1 \cdot 1,47 (6 - 3,97) + 7 \cdot 1 \cdot 3,47 (4,5 - 1,97) = 97,26 \text{ cm}^4.$$

Die Einheit, in welcher die Centrifugalmomente erhalten werden, ist dieselbe, wie bei den Trägheitsmomenten, und es wird auf das hierüber in Art. 57 (S. 37) Gefagte verwiesen. Befondere Aufmerksamkeit ist aber hier auf die Vorzeichen der Coordinaten y_0 und z_0 zu verwenden. In obigem Beispiel sind für das erste Rechteck beide positiv, für das zweite Rechteck beide negativ einzuführen; das Product ist hier also für jedes der Theilrechtecke positiv.

Fig. 65.



d) Darstellung der Trägheits- und Centrifugalmomente mit Hilfe von Kreisen.

Ein Flächentheilchen df hat für die beiden einander im Punkte P schneidenden Axen AA und BB das Centrifugalmoment $d\mathcal{F}_{AB} = uv \cdot df$, wenn u und v die senkrecht gemessenen Abstände des Theilchens df von den Axen bedeuten (Fig. 66). Bezeichnet man den Abstand desselben von dem Punkte P mit ρ , so wird $i_p = \rho^2 df$ das polare Trägheitsmoment von df für Punkt P genannt. Man lege durch P einen Kreis mit beliebigem Mittelpunkt M und beliebigem Halbmesser r , welcher die beiden Axen AA und BB aufser in P noch in den Punkten A'

65.
Grundlage.

und B' schneidet, verlängere die Linie df . P bis zum zweiten Schnittpunkte C' mit dem Kreise, ziehe die Sehne $B'A'$ und fälle von C' die Senkrechte $C'D'$ auf die Sehne $B'A'$; alsdann ergibt sich aus den Beziehungen zwischen Peripherie-, Tangenten- und Centriwinkeln

$$\begin{aligned} u &= \rho \sin \varphi_1, & v &= \rho \sin \varphi_2, \\ B'C' &= 2r \sin \varphi_2, & C'D' &= B'C' \sin \varphi_1, \\ \frac{C'D'}{B'C'} &= 2r \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2, \\ \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 &= \frac{C'D'}{2r}. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$d\mathcal{F}_{AB} = uv \cdot df = df \cdot \rho^2 \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 = \frac{\rho^2 df}{2r} \overline{C'D'},$$

und, wenn der Kreisdurchmesser mit d bezeichnet wird, ergibt sich

$$d\mathcal{F}_{AB} = \frac{\rho^2 df}{d} \overline{C'D'}$$

oder

$$d\mathcal{F}_{AB} = \frac{i_p}{d} \overline{C'D'}.$$

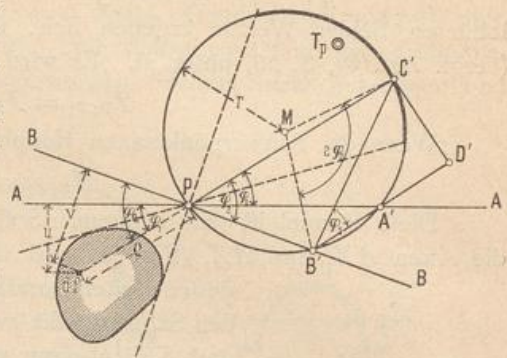
Das Centrifugalmoment von df für die beiden einander im Punkte P schneidenden Axen AA und BB ist also gleich dem statischen Momente des mit der Masse $\frac{i_p}{d}$ belasteten Kreispunktes C' , bezogen auf die Sehne $B'A'$ als Drehaxe.

Um das Centrifugalmoment der ganzen Querschnittsfläche zu erhalten, hat man in jedem Kreispunkte C' die betreffende Masse $\frac{\rho^2 df}{d}$ anzubringen, das statische Moment derselben für die Sehne $B'A'$ zu ermitteln und die Summe aller statischen Momente zu ziehen. Diese Summe ist gleich dem statischen Momente der resultierenden Masse, d. h. der Gesamtmasse $\int \frac{\rho^2 df}{d}$. Diese Summe greife im Punkte T_p an; alsdann folgt: Das Centrifugalmoment der Querschnittsfläche F für die beiden Axen AA und BB ist gleich dem statischen Momente der im Punkte T_p wirkenden Masse $\int \frac{\rho^2 df}{d}$ für die Sehne $B'A'$.

$\int \rho^2 df = \mathcal{F}_p$ ist das polare Trägheitsmoment der ganzen Querschnittsfläche für den Schnittpunkt P der Axen AA und BB . Man nennt den Punkt T_p den Trägheits-Hauptpunkt (auch wohl Trägheits-Schwerpunkt); den Punkt P heißt man den Pol.

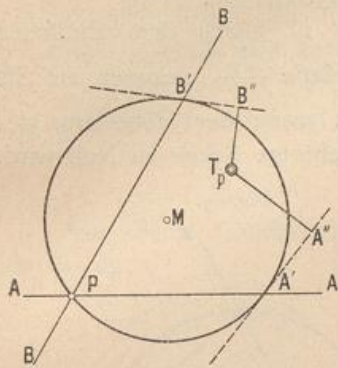
Fallen beide Axen zusammen, so geht das Centrifugalmoment in das Trägheitsmoment für die gemeinsame Axe über; die Sehne $B'A'$ wird alsdann zur Tangente in demjenigen Punkte, in welchem die gemeinsame Axe den Kreis zum zweiten Male schneidet. Demnach ist bewiesen:

Fig. 66.



Das Trägheitsmoment einer Fläche F für eine beliebige durch den Pol P gehende Axe BB ist gleich dem statischen Momente der im Trägheits-Hauptpunkte vereinigten Masse $\int \frac{\rho^2 df}{d}$, bezogen auf die Tangente im Punkte B' des Kreifes.

Fig. 67.



Demnach ist (Fig. 67)

$$\text{für Axe } AA: \mathcal{I}_A = \frac{\mathcal{I}_p}{d} T_p A'';$$

$$\text{für Axe } BB: \mathcal{I}_B = \frac{\mathcal{I}_p}{d} T_p B''.$$

Nach Annahme des Kreifes und des Punktes P (falls es sich um Trägheitsmomente handelt) sind die Massen $\frac{\rho^2 df}{d}$ ganz bestimmte, an bestimmten Kreispunkten wirkende Werthe; alsdann ist auch der Punkt T_p seiner Lage nach genau bestimmt. Aendern die Axen gleichfalls ihre Lage, so bleibt doch der Punkt T_p unverändert an seiner Stelle. Man kann das Ziehen der Tangenten vermeiden. Für die Axe AA ist (Fig. 68)

$$\mathcal{I}_A = \frac{\mathcal{I}_p}{d} \overline{T_p E}.$$

Man verbinde A' mit dem Mittelpunkte M des Kreifes, falle von T_p die Senkrechte auf MA' ; alsdann erhält man F als Fußpunkt dieser Senkrechten, und es ist

$$\overline{FA'} = \overline{T_p E}.$$

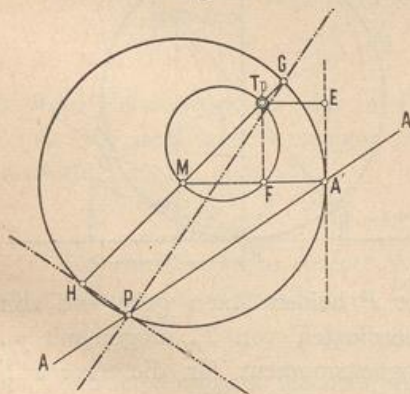
FA' ist die Projection des Strahles $T_p A'$ auf den Radius MA' ; mithin ist das Trägheitsmoment \mathcal{I}_A für die beliebige Axe AA gleich $\frac{\mathcal{I}_p}{d}$, multiplicirt mit der Projection von $T_p A'$ auf den durch A' gezogenen Kreisdurchmesser.

$\frac{\mathcal{I}_p}{d}$ ist für die verschiedenen Lagen der Axen unverändert; mithin verhalten sich die Trägheitsmomente für die verschiedenen durch P gelegten Axen wie die Werthe FA' . Das größte Trägheitsmoment wird sich also für diejenige Axe ergeben, für welche die Projection FA' den größtmöglichen Werth erreicht, das kleinste Trägheitsmoment für diejenige Axe, für welche die Projection FA' ihren kleinstmöglichen Werth hat. Verbindet man den Trägheits-Hauptpunkt T_p mit dem Mittelpunkte M des Kreifes, so schneidet dieser Durchmesser die Peripherie in den beiden Punkten G und H . Man sieht leicht, dass $T_p G$ der kleinste und $T_p H$ der größte mögliche Werth der Projection FA' ist; demnach wird

$$\mathcal{I}_{max} = \frac{\mathcal{I}_p}{d} \overline{T_p H} \text{ und } \mathcal{I}_{min} = \frac{\mathcal{I}_p}{d} \overline{T_p G}.$$

Die zugehörigen Axen sind PH , bzw. PG ; diese Axen sind in Art. 62 (S. 41) als Hauptaxen, die betreffenden Trägheitsmomente als Hauptträgheitsmomente bezeichnet worden; daher sind PH und PG die Hauptaxen.

Fig. 68.



66.
Größe des Trägheitsmomentes; Hauptaxen, Hauptträgheitsmomente.

Um die Hauptaxen zu erhalten, verlängere man demnach die Linie MT_p bis zu den Schnittpunkten G , bzw. H mit der Kreisperipherie und ziehe die Geraden PG und PH .

\overline{HG} ist ein Kreisdurchmesser; daher ist der Winkel HPG ein rechter Winkel, d. h. die Hauptaxen stehen auf einander senkrecht (vergl. Art. 62, S. 41).

67.
Conjugirte
Axen.

Das Centrifugalmoment für die Axen A und B ist gleich dem statischen Moment der im Trägheits-Hauptpunkt T_p vereinigten Masse $\frac{\mathcal{J}_p}{d}$, bezogen auf die Sehne $A'B'$ (Fig. 66); dasselbe wird zu Null werden, wenn der Hebelsarm der in T_p wirkenden Gesamtmasse für die zu den Axen gehörige Sehne zu Null wird. Dies findet für alle Sehnen, welche durch den Trägheits-Hauptpunkt gehen, statt. Daher ergeben sich für alle durch T_p gehenden Sehnen zwei Axen, deren Centrifugalmoment gleich Null ist. Man nennt solche Axen conjugirte Axen.

Conjugirte Axen sind beispielsweise PX und PY in Fig. 69; die zu den beiden Hauptaxen gehörige Sehne GH in Fig. 68 geht gleichfalls durch T_p , so dass folgt: Die beiden Hauptaxen sind conjugirte Axen.

Für die Hauptaxen ist das Centrifugalmoment gleich Null.

68.
Lage des
Trägheits-
hauptpunktes.

Nach Vorstehendem ist vor Allem wichtig, die Lage des Trägheits-Hauptpunktes T_p zu kennen. Man nehme zwei senkrecht zu einander stehende, im Punkte P einander schneidende Coordinatenaxen PY und PZ (Fig. 70) an und ermittle für diese Axen die Trägheitsmomente \mathcal{J}_Y , \mathcal{J}_Z und das Centrifugalmoment \mathcal{J}_{YZ} des Querschnittes. Dadurch ist auch das polare Trägheitsmoment \mathcal{J}_p bekannt; denn für rechtwinkelige Coordinatenaxen ist

$$\mathcal{J}_p = \int \rho^2 df = \int (y^2 + z^2) df = \int y^2 df + \int z^2 df = \mathcal{J}_z + \mathcal{J}_y;$$

also

$$\mathcal{J}_p = \mathcal{J}_z + \mathcal{J}_y.$$

Nunmehr sollen die Coordinaten des Trägheits-Hauptpunktes T_p für einen Kreis gefucht werden, welcher durch den Schnittpunkt P beider Axen geht und von der Axe PY im Punkte P berührt wird; die Coordinaten von T_p mögen mit y_p , bzw. z_p bezeichnet werden. Dann ist das Trägheitsmoment für die Axe PY gleich dem statischen Moment der in T_p vereinigten Masse $\frac{\mathcal{J}_p}{d}$ für diejenige Tangente, welche im Schnittpunkte der Axe PY mit dem Kreise gezogen ist; dieser Schnittpunkt fällt aber hier mit P zusammen, da PY Tangente an den Kreis

Fig. 69.

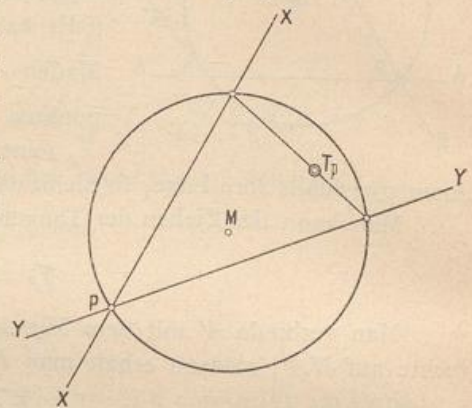
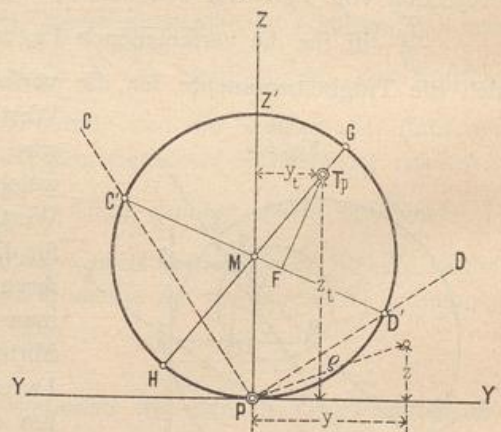


Fig. 70.



fein foll; daher ist das statische Moment für PY selbst gleich dem Trägheitsmoment \mathcal{F}_Y . Mithin wird

$$\mathcal{F}_Y = \frac{\mathcal{F}_P}{d} z_t.$$

Das Centrifugalmoment für die Axen PY und PZ ist gleich $\frac{\mathcal{F}_P}{d}$, multiplicirt mit dem Abstände des Punktes T_P von der zu den genannten Axen gehörigen Sehne. Diese Sehne ist aber die Axe PZ selbst, weil die beiden in Betracht kommenden Schnittpunkte der Axen Y und Z mit dem Kreise bzw. P und Z' sind; daher ist

$$\mathcal{F}_{ZY} = \frac{\mathcal{F}_P}{d} y_t.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Coordinaten des Trägheits-Hauptpunktes zu

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \mathcal{F}_{YZ} \frac{d}{\mathcal{F}_P} \\ z_t &= \mathcal{F}_Y \frac{d}{\mathcal{F}_P} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 29.$$

Da man d beliebig annehmen kann, so steht auf der rechten Seite beider Gleichungen nur Bekanntes. Wählt man d so, daß $\frac{\mathcal{F}_P}{d} = 1 \text{ cm}^3$ wird¹⁴⁾, d. h. macht man $d \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}^3 = \mathcal{F}_P \text{ cm}^4$, so vereinfachen sich obige Gleichungen für y_t und z_t , und man erhält

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \mathcal{F}_{YZ} \\ z_t &= \mathcal{F}_Y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 30.$$

Die Regel für die Auffuchung des Trägheits-Hauptpunktes lautet demnach: Man lege durch den Pol (bzw. wenn man die Trägheitsmomente für die Schwerpunktsaxen haben will, durch den Schwerpunkt) zwei senkrecht zu einander stehende Axen PY und PZ (in Fig. 70 sind sie nach rechts, bzw. oben positiv, nach links, bzw. unten negativ angenommen), schlage mit \mathcal{F}_P als Durchmesser einen Kreis, welcher durch P geht und von PY berührt wird, dessen Mittelpunkt also auf der Axe PZ liegt; man mache weiters $y_t = \mathcal{F}_{YZ}$ und $z_t = \mathcal{F}_Y$. Alsdann erhält man T_P .

Die im Punkte T_P vereinigte Masse ist nunmehr

$$\frac{\mathcal{F}_P}{d} = 1 \text{ cm}^3,$$

und die Hebelsarme für die in Betracht kommenden Tangenten geben nunmehr sofort, auf dem angenommenen Maßstab abgegriffen, die Größen der Trägheitsmomente. Es ist demnach

$$\mathcal{F}_{max} = \overline{T_P H} \cdot 1 \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{min} = \overline{T_P G} \cdot 1 \text{ cm}^3.$$

Für zwei beliebige andere Axen \overline{PC} und \overline{PD} , welche rechtwinkelig zu einander stehen, erhält man

$$\mathcal{F}_C = \overline{FC'} \cdot 1 \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_D = \overline{FD'} \cdot 1 \text{ cm}^3;$$

das Centrifugalmoment für diese Axen ist

$$\mathcal{F}_{CD} = \overline{T_P F} \cdot 1 \text{ cm}^3.$$

¹⁴⁾ Die Trägheitsmomente gehören der vierten Dimension, die Längen der ersten Dimension an; deshalb ist auf der rechten Seite als Benennung cm^3 hinzuzufügen.

In der Regel sind die Werthe \mathcal{J}_x , \mathcal{J}_y und \mathcal{J}_{yz} zu groß, als daß man sie unmittelbar auftragen könnte; man macht deshalb zweckmäßig $\frac{\mathcal{J}_x}{d}$ nicht gleich 1 cm^3 , sondern giebt diesem Quotienten einen bequemen Werth, etwa 100 cm^3 , 200 cm^3 u. f. w. Wählt man

$$\frac{\mathcal{J}_x}{d} = 100 \text{ cm}^3,$$

so wird

$$\left. \begin{aligned} d &= \frac{\mathcal{J}_x}{100 \text{ cm}^3} \\ y_i &= \frac{\mathcal{J}_{yz}}{100 \text{ cm}^3} \\ z_i &= \frac{\mathcal{J}_y}{100 \text{ cm}^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 31.$$

Alsdann sind die Werthe für \overline{FC} , $\overline{FD'}$, $\overline{T_pH}$, $\overline{T_pG}$, $\overline{T_pF}$ ebenfalls mit 100 cm^3 zu multipliciren, um die betreffenden Trägheits- und Centrifugalmomente zu erhalten.

Wenn \mathcal{J}_{yz} gleich Null ist, z. B. wenn die Axe \mathcal{J}_y oder \mathcal{J}_z eine Symmetrieaxe ist, so wird auch y_i gleich Null; also dann liegt T_p auf der Z-Axe; wenn \mathcal{J}_{yz} negativ ist, so wird auch y_i negativ, ist also dann nach links abzutragen.

69.
Maximal- und
Minimal-
Trägheits-
momente für:
Winkelblei.

Für einige häufig vorkommende Querschnittsformen sollen im Nachstehenden die Maximal- und Minimal-Trägheitsmomente, so wie die Trägheitskreise vorgeführt werden.

α) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein gleichschenkeliges Winkelblei (Fig. 71).

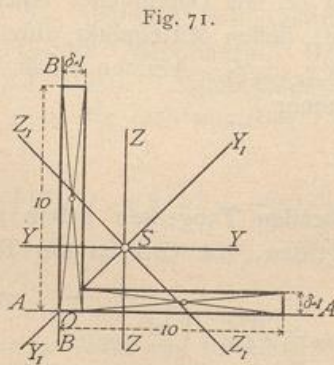


Fig. 71.

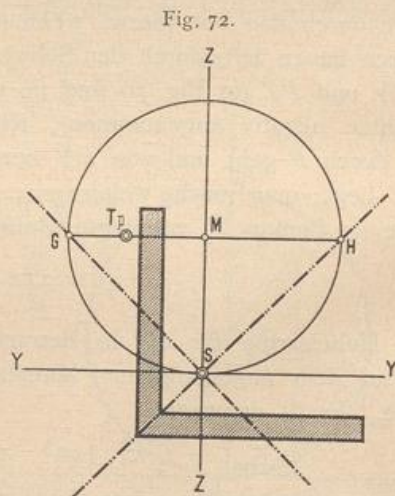


Fig. 72.

Hauptaxen sind die Symmetrieaxe $Y_1 Y_1$, welche den Winkel halbirt, und die zu dieser im Schwerpunkte senkrechte Axe $Z_1 Z_1$. Die erstere bildet mit der Axe $Y Y$ den Winkel $\alpha = 45$ Grad. Somit ist nach Gleichung 22

$$\mathcal{J}_{Y_1} = \mathcal{J}_Y \cos^2 \alpha + \mathcal{J}_Z \sin^2 \alpha - \mathcal{J}_{YZ} \sin 2 \alpha,$$

und, da $\alpha = 45$ Grad ist,

$$\mathcal{J}_{Y_1} = \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} - \mathcal{J}_{YZ}.$$

Die Werthe auf der rechten Seite vorstehender Gleichung sind leicht zu finden.

Für ein Winkelblei mit 10 cm Schenkellänge, 1 cm Schenkelfstärke (Deutsches Normal-Profil Nr. 10) ist $y_0 = z_0 = 2,87$ cm; mithin

$$\mathcal{I}_Y = \mathcal{I}_A - F y_0^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_Z = \mathcal{I}_B - F z_0^2;$$

$$\mathcal{I}_Y = \frac{1 \cdot 10^3}{3} + \frac{9 \cdot 1^3}{3} - (10 + 9) 1 \cdot 2,87^2 = 179,83 \text{ cm}^4; \text{ eben so groß ist } \mathcal{I}_Z = 179,83 \text{ cm}^4;$$

$$\mathcal{I}_{YZ} = -10 \cdot 1 \cdot (5 - 2,87) (2,87 - 0,5) - 9 \cdot 1 \cdot (5,5 - 2,87) (2,87 - 0,5) = -106,58 \text{ cm}^4.$$

(Die Werthe der y und z sind nach rechts, bezw. oben als positiv eingeführt.) Es wird ferner

$$\mathcal{I}_{Y_1} = 179,83 + 106,58 = 286,41 \text{ cm}^4$$

$$\text{und } \mathcal{I}_{Z_1} = \mathcal{I}_Y \sin^2 \alpha + \mathcal{I}_Z \cos^2 \alpha + \mathcal{I}_{YZ} \sin 2\alpha = \frac{\mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z}{2} + \mathcal{I}_{YZ} = 179,83 - 106,58 = 73,25 \text{ cm}^4.$$

Mithin ist

$$\mathcal{I}_{Y_1} = A = 286,41 \text{ cm}^4 \text{ (Maximum),}$$

$$\mathcal{I}_{Z_1} = B = 73,25 \text{ cm}^4 \text{ (Minimum).}$$

Um den Trägheitskreis zu schlagen, ermittelt man

$$\mathcal{I}_p = \mathcal{I}_Z + \mathcal{I}_Y = 2 \cdot 179,83 = 359,66 \text{ cm}^4 = \infty 360 \text{ cm}^4,$$

$$\text{und mit } \frac{\mathcal{I}_p}{d} = 100 \text{ cm}^3 \text{ wird}$$

$$d = 3,6 \text{ cm}, \quad s_t = \frac{\mathcal{I}_Y}{100 \text{ cm}^3} = 1,798 = \infty 1,8 \text{ cm},$$

$$y_t = \frac{\mathcal{I}_{YZ}}{100 \text{ cm}^3} = -1,066 \text{ cm} = \infty -1,07 \text{ cm}.$$

Man erhält T_p in Fig. 72, ferner

$$\mathcal{I}_{max} = T_p H \cdot 100 \text{ cm}^3 = 2,86 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3$$

$$\mathcal{I}_{min} = T_p G \cdot 100 \text{ cm}^3 = 0,73 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3.$$

β) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein ungleichschenkeliges Winkelblei (Fig. 65, S. 43).

Zunächst ist die Lage der Hauptachsen aufzufuchen. Da hier keine Symmetrie-Axe vorhanden ist, so ist dieselbe nach Formel 24

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_{max} = \frac{2 \mathcal{I}_{YZ}}{\mathcal{I}_Z - \mathcal{I}_Y}$$

zu berechnen.

Für das in Fig. 65 dargestellte Winkelblei (Deutsches Normal-Profil Nr. 8/12) ist

$$\mathcal{I}_Y = \mathcal{I}_A - F z_0^2 = \frac{1}{3} [1,0 \cdot 12^3 + 7,0 \cdot 1,0^3] - (12 + 7) 1,0 \cdot 3,97^2 = 278,87 \text{ cm}^4,$$

$$\mathcal{I}_Z = \mathcal{I}_B - F y_0^2 = \frac{1}{3} [1,0 \cdot 8^3 + 11 \cdot 1,0^3] - (12 + 7) 1,0 \cdot 1,97^2 = 100,59 \text{ cm}^4,$$

$$\mathcal{I}_{YZ} = 97,26 \text{ cm}^4 \text{ (siehe Art. 64, S. 42).}$$

Hiernach ist

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_{max} = \frac{2 \cdot 97,26}{100,59 - 278,87} = -1,09109.$$

Nun ist, wenn man $2 \alpha_{max} = 180 - 2\beta$ setzt, $\operatorname{tg} 2 \alpha_{max} = -\operatorname{tg} 2\beta$; somit $\operatorname{tg} 2\beta = 1,09109$ und $2\beta = 47^\circ 29' 40''$, woraus $\beta = 23^\circ 44' 50''$; mithin

$$\alpha_{max} = 90 - \beta, \text{ bzw. } 180 - \beta.$$

Hieraus ergibt sich

$$\alpha_{max} = 156^\circ 15' 10'' \text{ und } \alpha_{min} = 66^\circ 15' 10''.$$

Die Axen $Y'Y'$ und $Z'Z'$ sind demnach die Hauptachsen; man erhält nach Gleichung 22

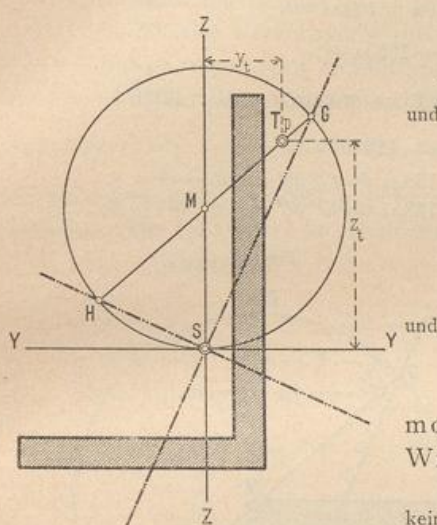
$$\mathcal{I}_{Y_1} = \mathcal{I}_Y \cos^2 156^\circ 15' 10'' + \mathcal{I}_Z \sin^2 156^\circ 15' 10'' - \mathcal{I}_{YZ} \sin 312^\circ 30' 20'',$$

$$= \mathcal{I}_Y \cos^2 23^\circ 44' 50'' + \mathcal{I}_Z \sin^2 23^\circ 44' 50'' + \mathcal{I}_{YZ} \sin 47^\circ 29' 40'' = 321,43 \text{ cm}^4 = A;$$

$$\mathcal{I}_{Z_1} = \mathcal{I}_Y \cos^2 66^\circ 15' 10'' + \mathcal{I}_Z \sin^2 66^\circ 15' 10'' - \mathcal{I}_{YZ} \sin 47^\circ 29' 40'' = 57,80 \text{ cm}^4 = B.$$

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Ermittlung mit Hilfe des Trägheitskreises (Fig. 73). Es ist $\mathcal{I}_Y = 278,87 \text{ cm}^4$, $\mathcal{I}_Z = 100,59 \text{ cm}^4$ und $\mathcal{I}_{YZ} = 97,26 \text{ cm}^4$; ferner $\mathcal{I}_p = \mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z = 278,87 + 100,59 = 379,46 \text{ cm}^4$, und mit $\frac{\mathcal{I}_p}{d} = 100 \text{ cm}^3$

Fig. 73.



$$y_t = \frac{\mathcal{F}_{XY}}{100} = 0,97 \text{ cm}, \quad z_t = \frac{\mathcal{F}_Y}{100} = 2,79 \text{ cm} \quad \text{und} \quad d = \frac{\mathcal{F}_p}{100} = 3,79 \text{ cm}.$$

Man trägt auf SZ die Länge $\overline{SM} = \frac{3,79 \text{ cm}}{2}$ auf, schlägt von M aus mit $\frac{3,79}{2}$ als Halbmesser den Kreis, verzeichnet T_p aus den Koordinaten $y_t = 0,97 \text{ cm}$ und $z_t = 2,79 \text{ cm}$, zieht $T_p M$; alsdann geben SH und SG die Maximal-, bezw. Minimal-Trägheitsachsen. Es ist

$$\mathcal{F}_{max} = T_p H \cdot 100 \text{ cm}^3 = 3,2 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{min} = T_p G \cdot 100 \text{ cm}^3 = 0,58 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3.$$

γ) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein Z-Eisen.

Die Ermittlung soll für das Deutsche Normal-Profil Nr. 12 (Fig. 74) vorgenommen werden.

Es ist
$$\mathcal{F}_Y = \frac{0,7 \cdot 12^3}{12} + 2 \frac{5,3 (6^3 - 5,1^3)}{3} = 395,3 \text{ cm}^4,$$

$$\mathcal{F}_Z = \frac{10,2 \cdot 0,7^3}{12} + 2 \frac{(5,65^3 + 0,35^3)}{3} \cdot 0,9 = 108,53 \text{ cm}^4,$$

$$\mathcal{F}_{YZ} = 0 - 0,9 \cdot 5,3 \cdot 5,65 \cdot 3,0 \cdot 2 = -158,84 \text{ cm}^4,$$

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_{max} = -\frac{2 \cdot 158,84}{108,53 - 395,3} = \frac{2 \cdot 158,84}{286,77} = 1,1078, \quad \text{woraus} \quad 2 \alpha_{max} = 47^\circ 56';$$

fomit
$$\alpha_{max} = 23^\circ 58' \quad \text{und} \quad \alpha_{min} = 113^\circ 58'.$$

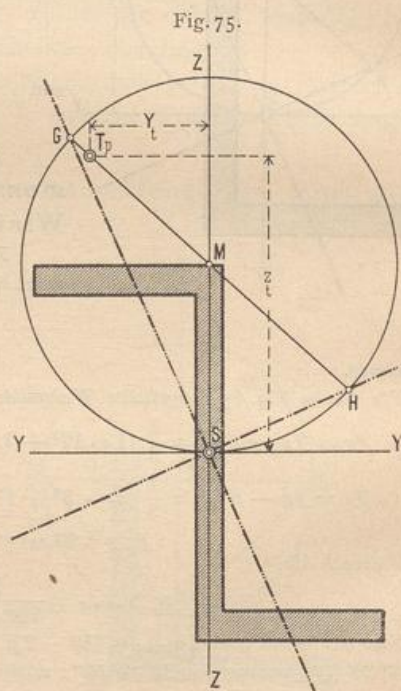
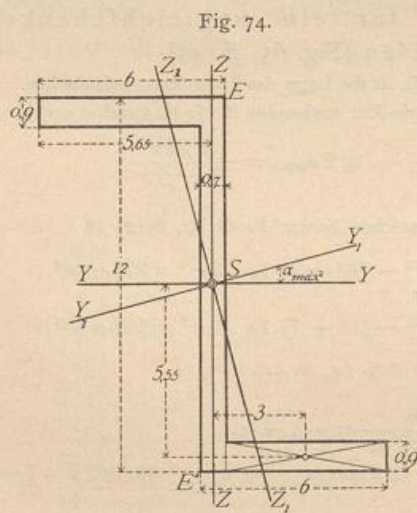
$$\mathcal{F}_{Y_1} = 395,3 \cos^2 23^\circ 58' + 108,53 \sin^2 23^\circ 58' + 158,84 \sin 47^\circ 56' = 465,9 \text{ cm}^4 = A,$$

$$\mathcal{F}_{Z_1} = 395,3 \sin^2 23^\circ 58' + 108,53 \cos^2 23^\circ 58' - 158,84 \sin 47^\circ 56' = 38,1 \text{ cm}^4 = B.$$

Fig. 75 zeigt die Construction des Trägheitskreises. Es ist

$$\mathcal{F}_p = 395,3 + 108,53 = 503,83 \text{ cm}^4;$$

mithin



$$z_t = \frac{\mathcal{F}_Y}{100} = 3,95 \text{ cm}, \quad y_t = \frac{\mathcal{F}_{YZ}}{100} = -\frac{158,8}{100} = -1,59 \text{ cm}$$

und

$$d = \frac{\mathcal{F}_p}{100} = 5,04 \text{ cm};$$

ferner

$$\mathcal{F}_{max} = \overline{T_p H} \cdot 100 \text{ cm}^3 = 4,6 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3$$

und

$$\mathcal{F}_{min} = \overline{T_p G} \cdot 100 \text{ cm}^3 = 0,58 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm}^3.$$

Bedeutet \mathcal{J} das Trägheitsmoment für eine beliebige Axe, so kann man $\mathcal{J} = FR^2$ setzen, in welcher Gleichung F die Querschnittsfläche bedeutet. Alsdann ist

71.
Trägheitsradius.

$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{F}}$$

und es wird R der Trägheitsradius für die betreffende Axe genannt. Beispielsweise würden sich die Trägheitsradien für die Hauptaxen aus den Gleichungen:

$$A = FR_1^2 \quad \text{und} \quad B = FR_2^2 \quad \text{zu} \quad R_1 = \sqrt{\frac{A}{F}} \quad \text{und} \quad R_2 = \sqrt{\frac{B}{F}}$$

ergeben.

Die den Gleichungen 22 u. 23 entsprechende Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes mit der Veränderung des Winkels α kann man graphisch auch veranschaulichen, indem man vom Schnittpunkte der Axen aus auf jeder Axe eine Länge abträgt, welche dem Trägheitsmoment für diese Axe entspricht. Wählt man die Hauptaxen als Coordinatenaxen und trägt auf jeder Axe $\frac{K}{\sqrt{\mathcal{J}}}$ ab, in welcher Gleichung K eine zunächst beliebige Constante, \mathcal{J} das Trägheitsmoment für die betreffende Axe bedeutet, so erhält man als Endpunkt einer Linie etwa den Punkt P (Fig. 76). Alsdann ist

72.
Ellipse der Trägheitsmomente.

$$r = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}, \quad \cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y \sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}{K} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{z}{r} = \frac{z \sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}}{K}$$

Nach Gleichung 26 ist

$$\mathcal{J}_{Y_1} = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha = \frac{A y^2 \mathcal{J}_{Y_1}}{K^2} + \frac{B z^2 \mathcal{J}_{Y_1}}{K^2}$$

$$K^2 = A y^2 + B z^2 \quad \text{und} \quad 1 = \frac{y^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{A}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{B}}\right)^2} \quad \dots \quad 32.$$

Gleichung 32 ist die Gleichung der Curve für die Punkte P ; die Endpunkte der Fahrstrahlen liegen also auf einer Ellipse, deren beide Halbaxen $\frac{K}{\sqrt{A}}$ und $\frac{K}{\sqrt{B}}$ sind; $\frac{K}{\sqrt{A}}$ ist die Länge auf der Hauptaxe OY , $\frac{K}{\sqrt{B}}$ diejenige auf der Hauptaxe OZ .

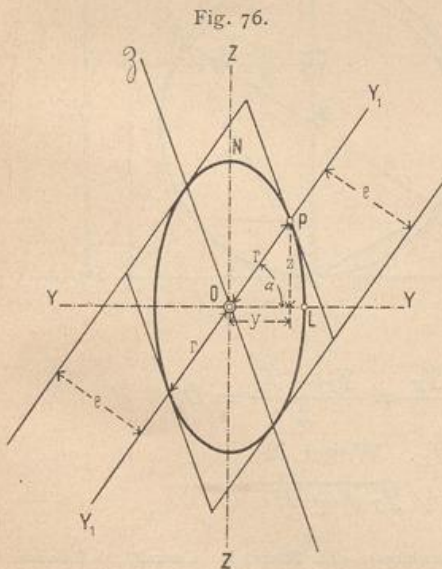


Fig. 76.

Man nennt diese Ellipse die Ellipse der Trägheitsmomente. Dieselbe kann für jeden beliebigen Punkt der Ebene als Mittelpunkt construirt werden; gehen sämtliche Axen, wie hier, durch den Schwerpunkt des Querschnittes, so nennt man dieselbe die Centralellipse.

Der Werth K kann beliebig angenommen werden. Wählt man $K = \sqrt{\frac{AB}{F}}$, so wird die Länge des Fahrstrahles auf der Hauptaxe OY

$$\overline{OL} = \frac{K}{\sqrt{A}} = \sqrt{\frac{AB}{FA}} = \sqrt{\frac{B}{F}} = \sqrt{\frac{Fb^2}{F}} = b;$$

die Länge des Fahrstrahles auf der Hauptaxe OZ wird

$$\overline{ON} = \frac{K}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{AB}{FB}} = \sqrt{\frac{A}{F}} = \sqrt{\frac{Fa^2}{F}} = a.$$

a und b sind die Trägheitsradien, welche zu den Hauptträgheitsmomenten A und B gehören. Man erhält also die Ellipse der Trägheitsmomente, indem man auf der ersten Hauptaxe den Trägheitsradius b , auf der zweiten Hauptaxe den Trägheitsradius a aufträgt und für diese als Halbachsen der Ellipse die Curve conftruiert.

Für eine beliebige Axe Y, Y , ziehe man an die Ellipse die vier Tangenten, welche dem Durchmesser Y, Y , und dem zugehörigen conjugirten Durchmesser $3O$ entsprechen; die von diesem eingeschlossene Fläche ist $4re$, aber bekanntlich auch gleich $4ab$. Es ist also auch $re = ab$, fomit

$$e = \frac{ab}{r}.$$

Nun ist

$$a = \sqrt{\frac{A}{F}}, \quad b = \sqrt{\frac{B}{F}}, \quad r = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{J}_{Y_1}}} = \sqrt{\frac{AB}{F\mathcal{J}_{Y_1}}};$$

mithin

$$e = \frac{ab}{r} = \sqrt{\frac{ABF\mathcal{J}_{Y_1}}{F^2 AB}} = \sqrt{\frac{\mathcal{J}_{Y_1}}{F}},$$

d. h.

$$\mathcal{J}_{Y_1} = Fe^2.$$

Demnach ist e der Trägheitsradius für die Axe $V_1 V_1$.

Wird also $K = \sqrt{\frac{AB}{F}}$ gewählt, so ist für jede Axe der Trägheitsradius ohne Weiteres durch Ziehen der parallelen Tangente und Abmessen des senkrechten Abstandes der Tangente von der Axe zu ermitteln.

73.
Weitere einfache
Ausdrücke
für die
Hauptträgheits-
momente.

Mit Hilfe des in Art. 65 (S. 43) vorgeführten Trägheitskreises ergeben sich folgende einfache Ausdrücke für die Hauptträgheitsmomente A und B ¹⁵⁾. In Fig. 77 seien OY und OZ zwei senkrecht zu einander gerichtete Axen, für welche die Trägheitsmomente \mathcal{J}_Y und \mathcal{J}_Z , so wie das Centrifugalmoment \mathcal{J}_{YZ} bekannt sind.

Dann ist $\overline{OL} = d = \mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z$, und der Halbmesser des Kreifes

$$r = \overline{MH} = \overline{MG} = \overline{MO} = \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2}.$$

Ferner ist

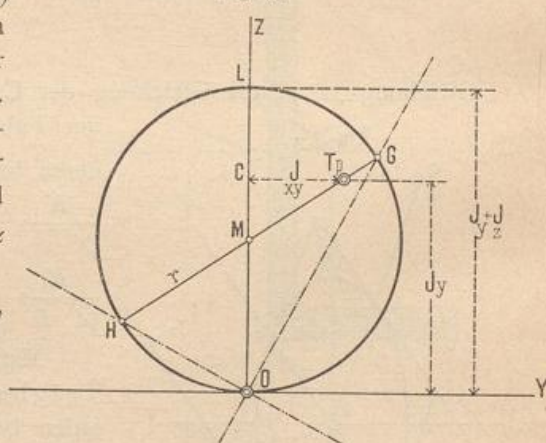
$$\overline{MC} = \overline{OC} - \overline{OM} = \mathcal{J}_Z - \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} = \frac{\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z}{2} = D,$$

d. h. D ist der halbe Unterschied von \mathcal{J}_Y und \mathcal{J}_Z . Weiter ist

$$\overline{MT_p} = \sqrt{\overline{CT_p}^2 + \overline{MC}^2} = \sqrt{\mathcal{J}_{YZ}^2 + D^2}.$$

¹⁵⁾ Angegeben von LAND (Die Bestimmung der Haupt-Trägheitsmomente einer Fläche) in: Centralbl. d. Bauverw. 1898, S. 22.

Fig. 77.



Nun ist aber

$$A = \overline{T_p H} = \overline{MH} + \overline{MT_p} = \frac{\mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z}{2} + \sqrt{\mathcal{I}_{YZ}^2 + D^2},$$

$$B = \overline{T_p G} = \overline{MG} - \overline{MT_p} = \frac{\mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z}{2} - \sqrt{\mathcal{I}_{YZ}^2 + D^2};$$

daher

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z}{2} + \sqrt{\mathcal{I}_{YZ}^2 + \left(\frac{\mathcal{I}_Y - \mathcal{I}_Z}{2}\right)^2} \\ B &= \frac{\mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z}{2} - \sqrt{\mathcal{I}_{YZ}^2 + \left(\frac{\mathcal{I}_Y - \mathcal{I}_Z}{2}\right)^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 33.$$

Die Benutzung dieser Formeln setzt nur die Kenntniss von \mathcal{I}_Y , \mathcal{I}_Z und \mathcal{I}_{YZ} voraus; es ist nicht erforderlich, wie bei Verwendung der Formeln 22 und 23, mit Winkelfunctionen zu rechnen, um die Hauptträgheitsmomente zu ermitteln¹⁶⁾.

Beispiel. Bei dem Z-Eisen in Art. 70 (S. 50) war

$$\mathcal{I}_Y = 395,3 \text{ cm}^4, \quad \mathcal{I}_Z = 108,83 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_{YZ} = -158,84 \text{ cm}^4;$$

daher ist

$$\frac{\mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z}{2} = 251,9 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{I}_Y - \mathcal{I}_Z}{2} = D = 143,4 \text{ cm}^4;$$

fomit

$$A = 251,9 + \sqrt{158,8^2 + 143,4^2} = 251,9 + 214 = 465,9 \text{ cm}^4,$$

$$B = 251,9 - \sqrt{158,8^2 + 143,4^2} = 251,9 - 214 = 37,9 \text{ cm}^4.$$

¹⁶⁾ Ueber die Darstellung der Trägheitsmomente mit Hilfe von Kreisen vergl.:

MOHR. Ueber die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen. Civiling. 1887, S. 43.

LAND, R. Einfache Darstellung der Trägheits- und Centrifugalmomente von Flächen etc. Zeitschr. f. Bauw. 1892, S. 549. —

Auch als Sonderabdruck erschienen: Berlin 1892. — Auszug daraus: Centralbl. d. Bauverw. 1893, S. 11.

Beigabe zum Deutschen Baukalender 1894 u. ff. Berlin 1893 u. ff.

Des Ingenieurs Taschenbuch. Herausg. v. akad. Verein »Hütten«. 16. Aufl. Abth. I. Berlin 1896. S. 177.