



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik der Hochbau-Constructions

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

3. Abschnitt: Stützen und Träger

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77733)

I. Theil, 2. Abtheilung:
DIE STATIK DER HOCHBAU-CONSTRUCTIONEN.

3. Abschnitt.
Stützen und Träger.

Man bezeichnet mit dem Namen Stützen solche Bau-Constructions, bei denen die Längsaxe ganz oder nahezu mit der Richtung der Belastungen zusammenfällt. Die Belastungen wirken in den meisten Fällen lothrecht, in der Richtung der Schwere, und daraus ergibt sich, daß die Stützen meistens lothrechte oder nahezu lothrechte Längsaxen haben. Wir rechnen dahin die Pfeiler und die Säulen, die sich wohl auch unter dem gemeinschaftlichen Namen Freistützen zusammenfassen lassen.

Träger sind Bau-Constructions, bei denen die Belastungen ausschließlich oder vorwiegend senkrecht zur Richtung der Längsaxe wirken. Da die Belastungen meist lothrecht gerichtet sind, haben die Träger meist wagrechte oder nur wenig davon abweichende Längsaxen.

1. Kapitel.
Stützen.

125.
Vor-
bemerkungen.

Im vorliegenden Kapitel sollen ganz allgemein solche Constructions, bezw. Constructionstheile behandelt werden, welche auf Druck in Anspruch genommen werden, also nicht allein die Freistützen (Pfeiler und Säulen), sondern auch sonstige gedrückte Stäbe, wie sie bei Trägern für Decken und Dächer vorkommen. Je nach dem für den gedrückten Theil verwendeten Material ist der Widerstand desselben ein wesentlich verschiedener: Stützen aus Eisen und Holz sind im Stande, sowohl Druck- wie Zugwiderstand zu leisten; Stützen aus Mauerwerk dagegen können keinen mit Sicherheit in Rechnung zu ziehenden, bemerkenswerthen Zugwiderstand leisten.

Wenn die auf einen Querschnitt wirkende Mittelkraft außerhalb der Längsaxe des Pfeilers wirkt, ist sie mit einem Momente verbunden, welches in den einzelnen Querschnittstheilen Zugbeanspruchungen erzeugt. Dieselben werden allerdings zum Theile durch Druckbeanspruchungen wieder aufgehoben; sobald jedoch die Excentricität gewisse Grenzen erreicht, so sind Zugbeanspruchungen vorhanden, falls das Material dieselben übertragen kann; anderenfalls treten vollständig veränderte Spannungsverhältnisse auf. Dieser letztere Fall kommt bei den gemauerten Pfeilern sehr häufig vor und ist deshalb besonders zu untersuchen.

Bei den aus Holz und Eisen bestehenden Druckstäben, bezw. Freistützen tritt die erwähnte Schwierigkeit nicht auf; statt derselben ist bei diesen die Gefahr eines seitlichen Ausbiegens und weiter diejenige des Zerknickens in das Auge zu fassen.

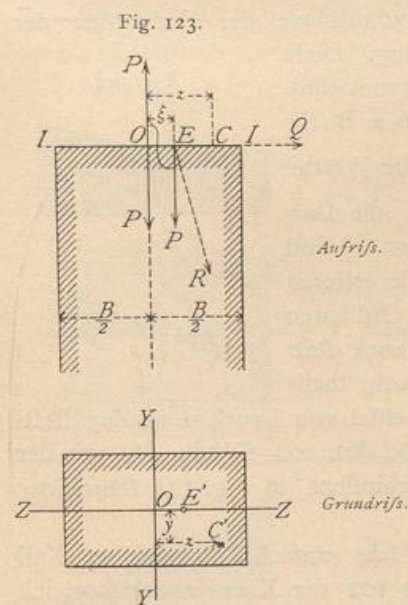
a) Stützen mit außerhalb der Längsaxe wirkenden Kräften, ohne Rücksicht auf Zerknicken.

1) Druckvertheilung in Querschnitten, welche Druck und Zug aufnehmen können, falls die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneidet.

Die nachfolgende Untersuchung hat allgemeine Giltigkeit, mag die Axe der betreffenden Construction lothrecht, wagrecht oder geneigt sein; sie findet vorwiegend auf gemauerte Pfeiler und Stützen Anwendung und wird deshalb an dieser Stelle vorgenommen. Alle Ergebnisse bleiben aber auch bestehen, wenn man Fig. 123 um 90 Grad dreht, also einen Balken mit wagrechter Axe untersucht, weshalb in Art. 101 (S. 80) auf die hier vorzunehmenden Besprechungen hingewiesen werden konnte. Mit großer Annäherung gelten sie auch für den gekrümmten Balken, z. B. für das Gewölbe, wenn der Halbmesser desselben nicht zu klein ist; die ganze Untersuchung ist ein Sonderfall der allgemeinen in Art. 102 bis 114 (S. 80 bis 94) durchgeführten.

126.
Allgemeine
Untersuchung.

Die Mittelkraft aller oberhalb irgend eines Querschnittes II auf die Freistütze wirkenden Kräfte sei R ; sie schneide den Querschnitt in einem Punkte E (Fig. 123),



dessen Abstand von der Pfeileraxe mit ξ bezeichnet werden soll. Die Kraftebene schneide den Querschnitt II und alle Querschnitte des Pfeilers in Hauptaxen (dieselben sind gewöhnlich Symmetrie-Axen). R wird in eine Seitenkraft P , welche senkrecht zum Querschnitt II wirkt, und eine Seitenkraft Q zerlegt, welche in den Querschnitt fällt; letztere soll unbeachtet gelassen werden, da sie das Endergebnis der Untersuchung nur wenig beeinflusst. Es wird nichts geändert, wenn man im Schwerpunkte O des Querschnittes zwei Kräfte anbringt, welche je einander gleich und zu P parallel sind, aber entgegengesetzten Sinn haben, also einander aufheben. Dadurch ergibt sich als Wirkung der excentrischen Kraft P : eine im Schwerpunkte O angreifende Kraft P und zwei (in Fig. 123 durch einen Bogen verbundene) Kräfte P , welche zusammen ein Kräftepaar mit dem Momente $M = P\xi$ bilden;

das Moment dreht im vorliegenden Falle nach rechts (im Sinne des Uhrzeigers). Durch die Kraft und das Kräftepaar werden im Querschnitte Beanspruchungen hervorgerufen, welche sich nach Art. 95, S. 75, Gleichung 54 zu

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{J_Y} z$$

ergeben, und mit Rücksicht darauf, daß $M = P\xi$ ist, zu

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P\xi z}{\mathcal{F}}$$

oder

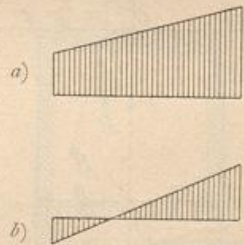
$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F\xi z}{\mathcal{F}} \right) \dots \dots \dots 102.$$

Abkürzend ist $\mathcal{F} = \mathcal{F}_Y$ gesetzt; ferner sollen Druckspannungen im Folgenden als positiv, Zugspannungen als negativ eingeführt werden, da es sich bei den zu betrachtenden Constructionen hauptsächlich um Beanspruchungen auf Druck handelt.

Für eine gegebene Kraft P mit gegebenem Angriffspunkt E kann die Spannung sämmtlicher Querschnittspunkte durch Gleichung 102 ermittelt werden. Von der Spannungsvertheilung erhält man ein klares Bild, wenn man in jedem Punkte des Querschnittes die Spannung als Ordinate aufträgt und die Endpunkte dieser Ordinaten verbindet. Da bei den gemachten Annahmen die Entfernung y des beliebig gewählten Punktes C von der Kräfteebene gar nicht in der Gleichung vorkommt, so folgt, daß die Spannung σ von y unabhängig ist; alle in gleichem Abstände z von der YY -Axe liegenden Punkte erleiden also gleiche Spannung. Demnach genügt es, die Spannungen aller Punkte aufzufuchen, welche auf einer zur Kräfteebene parallelen Linie des Querschnittes liegen und diese nach beliebig gewähltem Maßstabe aufzutragen. Die z -Werthe sind die Abscissen, und die Spannungen σ sind die Ordinaten; die Vertheilung findet nach dem durch Gleichung 102 bestimmten Gesetze statt.

In dieser Gleichung sind σ und z die einzigen Veränderlichen; beide kommen nur in der ersten Potenz vor; also ist die Verbindungslinie der Endpunkte der Ordinaten σ eine Gerade, die Gerade obiger Gleichung. Diese Linie ist bekannt, wenn zwei Punkte derselben bekannt sind. Demnach kann man sie leicht auffinden, indem man z. B. für die beiden Endwerthe $z = -\frac{B}{2}$ und $z = +\frac{B}{2}$ die Werthe von σ ausrechnet und aufträgt. Man erhält etwa die Darstellungen in Fig. 124. Die positiven Werthe von σ sind nach oben, die negativen nach unten abgetragen; die ersteren bedeuten Druck, die letzteren Zug. Wenn alle Ordinaten auf einer Seite der Abscisse liegen, so findet nur Druck statt (Fig. 124 a); sonst hat man im Querschnitt theils Druck, theils Zug (Fig. 124 b). Die Grenze, an welcher der Wechsel von Druck zum Zug stattfindet, ist die Null-Linie (siehe auch Art. 96, S. 75 und Art. 102, S. 80). Die von der Abscisse und der Geraden der Gleichung 102 eingeschlossene (in Fig. 124 schraffierte) Fläche wird als Druckfigur bezeichnet.

Fig. 124.



127.
Null-Linie.

Die Ermittlung der Null-Linie ist hier eine sehr einfache. σ wird zu Null für alle diejenigen Punkte, für welche in Gleichung 102 der Klammerwerth gleich Null wird. Nennt man den besonderen Werth von z , für den dies eintritt, z_0 , so wird $\sigma = 0$, wenn $1 + \frac{F\xi z_0}{\mathcal{F}} = 0$ wird, d. h. für

$$z_0 = -\frac{\mathcal{F}}{F\xi} \dots \dots \dots 103.$$

Gleichung 103 ist also die Gleichung der Null-Linie unter der Voraussetzung, daß die Kräfteebene den Querschnitt in einer Hauptaxe schneidet.

Aus der Gleichung 103 für die Null-Linie ergeben sich die Folgerungen:

α) Da \mathcal{F} und F stets positive Größen sind, so hat z_0 stets anderes Vorzeichen als ξ . Die sämtlichen Punkte, in denen die Spannung Null stattfindet, liegen also an derjenigen Stelle der Axe YY , an welcher der Schnittpunkt mit der Mittelkraft R nicht liegt.

β) Für eine bestimmte Lage der Kraft R sind alle Größen auf der rechten Seite der Gleichung constant, ist also auch z_0 constant; demnach liegen alle Punkte, in denen σ gleich Null ist, in gleichem Abstände von der Y -Axe, d. h. alle diese Punkte liegen in einer Geraden, die parallel ist zu derjenigen Schwerpunktsaxe, welche zur Schnittlinie des Querschnittes mit der Kraftebene senkrecht steht.

γ) Der Werth für z_0 ist von der Kraftgröße ganz unabhängig; er ist nur von den Werthen \mathcal{F} und F , also von der Querschnittsform und -Größe, und von ξ , d. h. von der Lage des Schnittpunktes E abhängig.

δ) z_0 wird Null, d. h. die Null-Linie fällt mit der zur Kraftebene senkrechten Schwerpunktsaxe zusammen, wenn $\xi = \infty$ wird, d. h. wenn die Kraft R den Querschnitt erst in unendlich weiter Ferne schneidet, wenn also R zum Querschnitte parallel gerichtet ist, d. h. wenn keine Axialkraft vorhanden ist.

Die Gleichung 103 giebt ein bequemes Verfahren, die Lage der Null-Linie graphisch zu ermitteln. Besonders einfach gestaltet sich die Aufgabe beim rechteckigen Querschnitt.

Hier ist nach Art. 51 (S. 34)

$$\mathcal{F} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{und} \quad F = bh.$$

Aus Gleichung 103 folgt, wenn man zunächst nur die absolute Größe von z_0 bestimmt,

$$z_0 = \frac{bh^3}{12bh\xi} = \frac{h^2}{12\xi} \quad \text{und} \quad z_0\xi = \frac{h^2}{12} = \frac{h}{6} \cdot \frac{h}{2}.$$

Daraus ergibt sich die folgende Construction (Fig. 125).

Man trägt von O' aus $\overline{O'B'} = \frac{h}{6}$ nach einer Seite ab, schlägt über $B'A' = \frac{2}{3}h$ als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die in O' zur ZZ -Axe gezogene Lothrechte in D schneidet; dann ist $\overline{O'D}^2 = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{6} = \frac{h^2}{12}$. Verbindet man nun D mit E' und zieht durch D die Linie DK senkrecht zu $E'D$, so ist $\overline{O'D}^2 = E'O' \cdot \overline{O'K} = \xi \cdot \overline{O'K}$, d. h.

$$\overline{O'K} = \frac{\overline{O'D}^2}{\xi} = \frac{h^2}{12\xi};$$

mithin

$$\overline{O'K} = z_0.$$

K ist also ein Punkt der Null-Linie, und die durch K parallel zur Y -Axe gelegte Linie NN ist die Null-Linie selbst.

Eine etwas geänderte Construction ist bei weniger einfachen Querschnitten anwendbar. Nach Art. 71 (S. 51) ist der Trägheitsradius

$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{F}} \quad \text{und} \quad \mathcal{F} = FR^2.$$

Demnach ist nach Gleichung 103

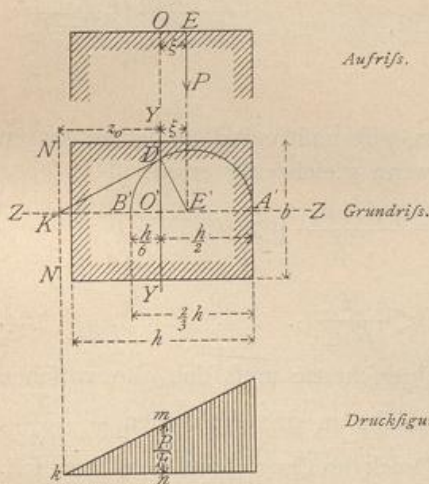
$$z_0 = -\frac{\mathcal{F}}{F\xi} = -\frac{FR^2}{F\xi} = -\frac{R^2}{\xi},$$

woraus sich die folgende Construction (Fig. 126) ergibt.

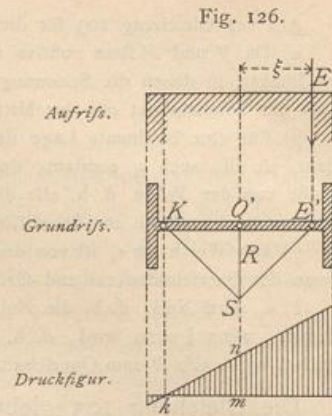
In O' errichte man zur ZZ -Axe die Lothrechte $\overline{O'S} = R$, verbinde S mit E' und ziehe durch S die Senkrechte \overline{SK} zu $E'S$; dann ist $\overline{O'S}^2 = R^2 = E'O' \cdot \overline{O'K} = \xi \cdot \overline{O'K}$; mithin

$$\overline{O'K} = \frac{R^2}{\xi} \quad (\text{absolute Größe}) = z_0.$$

Fig. 125.



Der Punkt K in Fig. 125 u. 126 ist ein Punkt der Geraden, welche die Veränderung von σ darstellt; wenn noch ein Punkt dieser Geraden bekannt ist, so kann sie gezeichnet werden. Für $z=0$ ist nach Gleichung 102: $\sigma_0 = \frac{P}{F}$, d. h. in den Querschnittspunkten, welche in der zur Kraftebene senkrechten Schwerpunktsaxe liegen, ist die Spannung genau so groß, als wenn nur die Kraft P in der Axe wirkte. Man kann $\frac{P}{F}$ leicht ermitteln und nach beliebigem Maßstabe im entsprechenden Punkte m (Fig. 126) auftragen. Ist $\overline{mn} = \frac{P}{F}$, so ergibt die Verbindung von m mit k die Gerade für σ .



128.
Kernpunkte.

Die Beanspruchung der Querschnittsteile ist an den beiden Seiten der Null-Linie verschiedenartig, an der einen Seite Druck, an der anderen Zug. Es ist nunmehr zu untersuchen, wie die Kraft P liegen muß, damit nur Druckspannungen im Querschnitte auftreten²⁷⁾.

Offenbar sind im ganzen Querschnitte nur Druckspannungen, wenn die den äußersten Querschnittspunkten c und d (Fig. 127) entsprechenden Spannungen Druck bedeuten; denn dann fällt die Null-Linie außerhalb des Querschnittes (siehe Fig. 124a). Nun ist die Spannung im Punkte d , weil für denselben $z = a_1$ ist, nach Gleichung 102

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F \xi a_1}{\mathcal{J}} \right),$$

diejenige im Punkte c , weil für diesen $z = -a_2$ ist,

$$\sigma_{min} = \frac{P}{F} \left(1 - \frac{F \xi a_2}{\mathcal{J}} \right).$$

Wenn sowohl σ_{max} , wie σ_{min} Druck bedeuten, also positiv sind, findet im ganzen Querschnitte nur Druck statt; dies ist der Fall, wenn gleichzeitig erfüllt ist

$$\left(1 + \frac{F \xi a_1}{\mathcal{J}} \right) > 0 \quad \text{und} \quad \left(1 - \frac{F \xi a_2}{\mathcal{J}} \right) > 0,$$

d. h. wenn

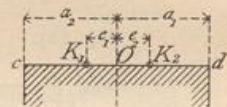
$$\xi > -\frac{\mathcal{J}}{F a_1} \quad \text{und} \quad \xi < \frac{\mathcal{J}}{F a_2} \quad \dots \quad 104.$$

ist. Der Schnittpunkt E der Kraft P mit dem Querschnitte muß sich also zwischen zwei Punkten K_1 und K_2 (Fig. 127) befinden, welche in den Abständen $-\frac{\mathcal{J}}{F a_1}$, bzw. $\frac{\mathcal{J}}{F a_2}$ von der Axe O liegen, wenn nur Druck im Querschnitt herrschen soll. Wir bezeichnen abkürzungsweise

$$\frac{\mathcal{J}}{F a_1} = e_1 \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{J}}{F a_2} = e_2 \quad \dots \quad 105.$$

Die Punkte K_1 und K_2 sind die Kernpunkte.

Fig. 127.



²⁷⁾ Bei obiger Untersuchung hätten die Darlegungen in Art. 108 (S. 91), betreffend den Kern, zu Grunde gelegt werden können; die obige Art der Ableitung ist gewählt, um die Entwicklung der Formeln 104 vom vorherigen Studium der Art. 105 bis 114 (S. 86 bis 94) unabhängig zu erhalten.

Da auf die sämtlichen für e_1 und e_2 maßgebenden Größen \mathcal{F} , F , a_1 und a_2 ausschließlich die Querschnittsgealtung Einfluss hat, so ist die Lage der Kernpunkte nur von der Form und Größe des Querschnittes abhängig.

Für das Rechteck ist $\mathcal{F} = \frac{bh^3}{12}$, $F = bh$ und $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$; mithin $e_1 = e_2 = \frac{h}{6}$. Soll also nur Druck im Querschnitt stattfinden, so darf die Kraft den Querschnitt in keinem größeren Abstände von der Axe schneiden, als $\frac{h}{6}$; mit anderen Worten: sie muss den Querschnitt im inneren Drittel schneiden (vergl. auch Art. 109, S. 91).

Für den Kreisquerschnitt ist $e_1 = e_2 = \frac{d}{8}$, d. h. die Kraft darf das innere Viertel nicht verlassen, wenn nur Druck auftreten soll. (Vergl. Art. 110, S. 92.)

Für den Kreisringquerschnitt bei geringer Ringstärke ist $e_1 = e_2 = \frac{d}{4}$; die Kraft muss also in der inneren Hälfte verbleiben.

2) Druckvertheilung in Querschnitten, welche nur Druck aufzunehmen vermögen, falls die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneidet.

Die für die Druckvertheilung unter 1 entwickelten Gesetze gelten auch für Constructionen, welche nur Druck aufnehmen können, so lange die Kraft eine derartige Lage hat, dass im ganzen Querschnitt wirklich nur Druckspannungen auftreten, so lange also die Kraft innerhalb der Kernpunkte liegt.

Wenn daher z. B. beim rechteckigen Querschnitte die Kraft im inneren Drittel liegt, so kann die Lage der Null-Linie, so wie die Druckvertheilung genau so ermittelt werden, wie in Fig. 125 gezeigt ist. Diese Construction findet häufige Anwendung nicht nur bei Freistützen mit rechteckigem Querschnitt, sondern auch bei Stützmauern, in Gewölben etc.

Als Maß senkrecht zur Bildfläche wählt man zweckmäßig die Einheit (gewöhnlich 1 m), so dass die gedrückte Fläche — der Querschnitt — ein Rechteck von der Breite (senkrecht zur Bildfläche) gleich der Einheit ist. Die zweite Ab-

messung des Rechteckes ist bei den Gewölben (Fig. 128) die Gewölbstärke d an der betreffenden Stelle, bei den Stützmauern die Mauerstärke d (Fig. 129).

In den beiden neben stehenden Figuren schneidet die Mittelkraft die betreffende Fuge innerhalb der Kernpunkte, so dass also nur Druck im Querschnitt entsteht und der ganze Querschnitt wirksam ist. Die angewandte Construction ist ohne weitere Erläuterung verständlich.

Es möge noch bemerkt werden, dass dieselbe bei den Gewölben nur annäherungsweise richtig ist, weil die Voraussetzung der geraden Axe nicht zutrifft. Der Fehler ist aber bei einigermaßen großem Halbmesser des Gewölbes unerheblich.

Wenn aber die Kraft den Querschnitt außerhalb der Kernpunkte schneidet, so fällt die Null-Linie in den Querschnitt, und an der einen Seite derselben würden Zugspannungen entstehen, falls der Baustoff dieselben aufnehmen könnte. Da dies nach obiger Annahme hier nicht möglich ist, so wird auf diesem ganzen Querschnittstheile kein Uebertragen von Spannungen stattfinden können; die ganze Spannungsübertragung findet auf der Druckseite der Null-Linie statt. Man nennt diesen Theil

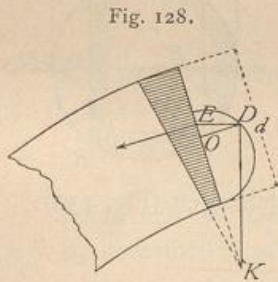


Fig. 128.

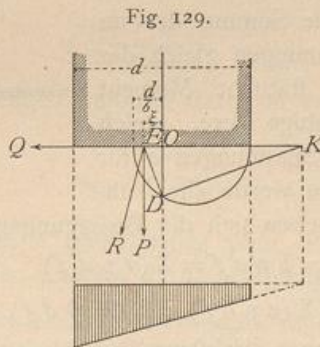


Fig. 129.

129.
Druck-
vertheilung.

des Querschnittes den wirkfamen Querschnitt. Gröfse und Form des wirkfamen Querschnittes und die gröfste in demselben stattfindende Spannung sind zu ermitteln.

Der für die Spannung σ gefundene Ausdruck (Gleichung 102) ist hier nicht ohne Weiteres anwendbar, weil bei Aufstellung desselben Spannungsvertheilung über die ganze Querschnittsfläche angenommen war. Hier jedoch ist nur ein Theil des Querschnittes als vorhanden anzusehen, indem der andere Theil an der Kraftübertragung nach der Annahme nicht theilnimmt. Mit kleiner Aenderung kann aber die Gleichung 102 auch hier der Berechnung zu Grunde gelegt werden: man mufs nur unter F die Fläche des wirkfamen Querschnittstheiles, unter M das Moment von P , bezogen auf die im Schwerpunkt des wirkfamen Querschnittstheiles senkrecht zur Kraftebene liegende Axe YY , und unter \mathcal{J} das Trägheitsmoment des wirkfamen Querschnittes für diese Axe verstehen. Dann ist, wenn zum Unterschiede die Bezeichnungen F' , M' , \mathcal{J}' eingeführt werden,

$$\sigma = \frac{P}{F'} + \frac{M' z'}{\mathcal{J}'} \dots \dots \dots 106.$$

Die Spannung σ in den verschiedenen Querschnittspunkten ändert sich wiederum nach dem Gesetze einer Geraden, weil die einzigen Veränderlichen der Gleichung 106, σ und z' , nur in der ersten Potenz vorkommen.

Diese Gerade (Fig. 130), deren Ordinaten in den verschiedenen Punkten die Druckgrößen für die Flächeneinheit angeben, schneide die Abscissenaxe in K ; alsdann ist für irgend einen Punkt C im senkrecht gemessenen Abstand η vom Nullpunkte K die Spannung $\sigma = a \eta$, worin a eine noch zu bestimmende Constante ist. Das Gleichgewicht zwischen der äußeren Kraft P und den inneren Spannungen σ verlangt, dafs die Summe der im Querschnitt wirkenden Druckspannungen gleich der Kraft P sei, so wie dafs das statische Moment von P , bezogen auf eine beliebige Axe, gleich der Summe der Momente der Spannungen σ für dieselbe Axe sei. Als Drehaxe werde die Null-Linie KK gewählt; alsdann ergeben sich die Bedingungsgleichungen (Fig. 130):

$$P = \Sigma \sigma df = \Sigma (a \eta df)$$

und

$$Pr = \Sigma (\sigma \eta df) = \Sigma (a \eta^2 df).$$

Die Summirung ist über die ganze wirkfame Querschnittsfläche auszudehnen. Bei derselben ist a constant; mithin erhält man

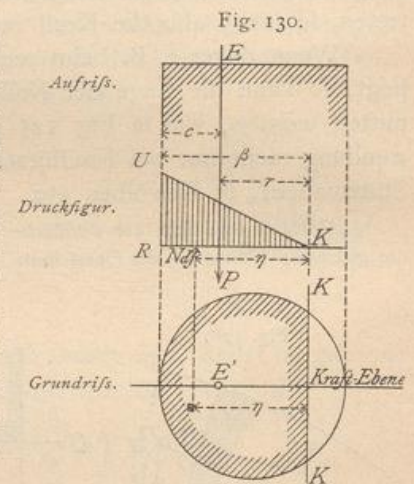
$$P = a \Sigma (\eta df) = a S_K$$

und

$$Pr = a \Sigma (\eta^2 df) = a \mathcal{J}_K \dots \dots \dots 107.$$

S_K und \mathcal{J}_K bedeuten das statische und Trägheitsmoment des wirkfamen Querschnittstheiles, bezogen auf die Null-Linie KK . Dividirt man die zweite dieser Gleichungen durch die erste, so ergibt sich

$$r = \frac{\mathcal{J}_K}{S_K} \dots \dots \dots 108.$$



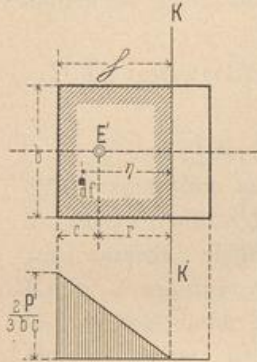
Der Abstand des Schnittpunktes E von der nächsten Kante, d. h. von c , ist bekannt; die ganze Breite β des wirkfamen Querschnittstheiles ist demnach

$$\beta = c + r = c + \frac{\mathcal{F}_K}{S_K} \dots \dots \dots 109.$$

Die Ermittlung von r nach Gleichung 108 auf dem Wege der Rechnung führt bei einigermaßen unregelmäßigen Querschnittsformen zu sehr umständlichen Arbeiten; bei der am häufigsten vorkommenden Querschnittsform, dem Rechtecke, ergibt sich aber r sehr einfach.

Die zunächst noch unbekannte Abmessung des wirkfamen Rechteckes, welche in die Kräfteebene fällt, sei h , d. h. es werde mit h bezeichnet, was oben β genannt war; die Breite des Rechteckes sei b ; alsdann ist (siehe Art. 51, S. 34)

Fig. 131.



$$\mathcal{F}_K = \frac{b h^3}{3} \quad \text{und} \quad S_K = \frac{b h \cdot h}{2} = \frac{b h^2}{2};$$

demnach

$$r = \frac{\mathcal{F}_K}{S_K} = \frac{2 b h^3}{3 b h^2} = \frac{2}{3} h.$$

Ferner ist $h = \beta = c + r = c + \frac{2}{3} h$; mithin

$$c = \frac{h}{3} \quad \text{und} \quad h = 3 c. \dots \dots \dots 110.$$

Die Druckverteilung findet also auf eine Fläche statt, welche dreimal so breit ist, als der Abstand des Schnittpunktes E von der nächsten Kante.

Die Druckbeanspruchung an irgend einer Querschnittsstelle ist nun $\sigma = a \eta$, in welchem Ausdrucke a aus der Bedingungsgleichung $P = a S_K$ zu ermitteln ist, d. h. $a = \frac{P}{S_K}$; daher

$$\sigma = \frac{P \eta}{S_K} = \frac{2 P \eta}{b h^2}.$$

σ_{max} findet in denjenigen Punkten statt, in denen η seinen größten Werth h hat, d. h. es ist

$$\sigma_{max} = \frac{2 P}{b h} = \frac{2 P}{3 b c} \dots \dots \dots III.$$

Wenn sich der Druck P gleichmäßig über die ganze gedrückte Fläche $F_1 = b h = 3 b c$ vertheilen würde, so wäre die Druckspannung für die Flächeneinheit gleich $\frac{P}{3 b c}$; der wirklich stattfindende Maximaldruck ist gleich $\frac{2 P}{3 b c}$, d. h. doppelt so groß, als wenn P sich gleichmäßig vertheilte. Die Druckfigur in diesem Falle wird also erhalten, indem man zunächst c dreimal von der nächst liegenden Kante aus abträgt, wodurch man den Nullpunkt K findet; alsdann trägt man in dieser Kante nach beliebigem Maßstabe $\sigma_{max} = \frac{2 P}{3 b c}$ auf und verbindet den Endpunkt dieser Ordinate mit dem Nullpunkt. Die lothrecht schraffierte Fläche giebt die Druckfigur.

Soll die Druckverteilung in unregelmäßigen Querschnitten ermittelt werden, so ist das rechnerische Verfahren überaus umständlich. Man kann dasselbe dadurch vermeiden, daß man ein graphisches Verfahren anwendet. In dem durch

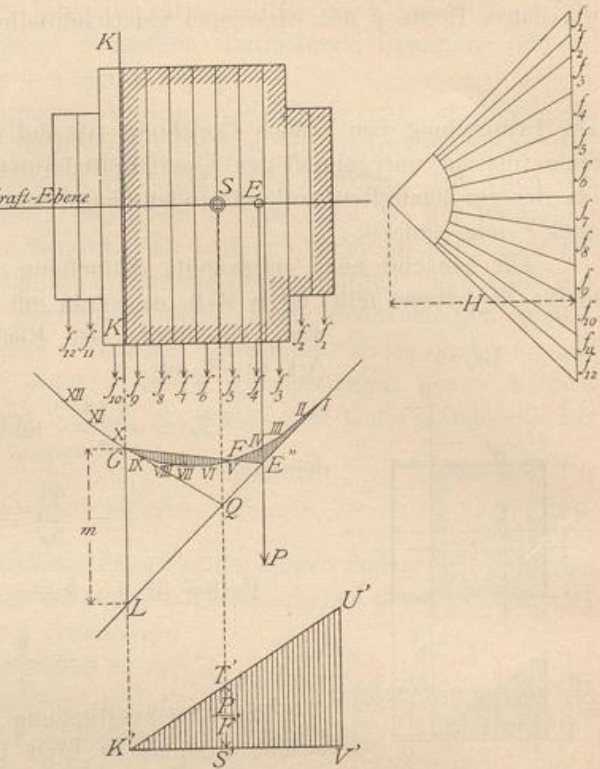
130.
Druckvertheilung
in unregel-
mäßigen
Querschnitten.

Fig. 132.

Fig. 132 dargestellten Querschnitt sei KK die Null-Linie und der Querschnittstheil rechts von dieser Linie der wirkfame Querschnitt (derselbe ist an den Rändern schraffirt). Man zerlege diesen Querschnitt in eine Anzahl schmaler Streifen, deren Flächeninhalte $f_1, f_2, f_3 \dots$ seien, trage dieselben nach beliebigem Flächenmaßstabe auf, construire für den beliebig angenommenen Polabstand H das Seilpolygon $I, II \dots VI, VII \dots XII$ und verlängere die erste Seite des Seilpolygons bis zum Schnittpunkte L mit der Linie KK ; alsdann ist (nach Art. 47, S. 31) das statische Moment der wirkfamen Querschnittsfläche, bezogen auf die Axe KK ,

$$S_K = H m.$$

Ferner ist, wenn der Inhalt der Fläche $III \dots XLI$ mit φ bezeichnet wird, das Trägheitsmoment der wirkfamen Querschnittsfläche, bezogen auf die Axe KK (nach Art. 60, S. 39)



$$\mathcal{I}_K = 2 H \varphi,$$

und da nach Gleichung 108: $r = \frac{\mathcal{I}_K}{S_K}$ ist, so wird $r = \frac{2 \varphi}{m}$; mithin

$$\varphi = \frac{m r}{2} \dots \dots \dots 112.$$

Die Null-Linie KK liegt also derart, daß φ inhaltsgleich ist einem Dreieck, dessen Höhe gleich r , dessen Grundlinie gleich dem Stücke m ist, welches auf der Null-Linie zwischen die verlängerte erste Seilpolygonseite und das Seilpolygon fällt. Verbindet man den Schnittpunkt E'' der Krafttrichtung P und der verlängerten ersten Seilpolygonseite mit X , so erhält man ein Dreieck XLE'' , dessen Flächeninhalt gleich $\frac{m r}{2}$ ist, welches also, wenn KK richtig angenommen ist, inhaltsgleich mit φ ist. Dies findet statt, wenn die in Fig. 132 lothrecht schraffirten Flächen $III III FE'' I$ und $F VI VII VIII IX GF$ gleichen Inhalt haben. Sind beide an Inhalt nicht gleich, so ist die Linie $E''G$ um E'' zu drehen und damit auch KK nach rechts oder links so lange zu verschieben, bis diese Bedingung erfüllt ist; die dann erhaltene Null-Linie ist die richtige. Demnach ist das Verfahren das folgende.

Man construire für den ganzen Querschnitt das Seilpolygon $III \dots XII$, verlängere die erste Seilpolygonseite, ermittle deren Schnittpunkt E'' mit der Kraftlinie und suche nun diejenige durch E'' gehende Linie, welche die beiden lothrecht schraffirten Flächen einander gleich macht; der Punkt X , in welchem diese Linie das Seilpolygon schneidet, bestimmt die Lage der Null-Linie KK .

Es macht jetzt keine Schwierigkeit, die Druckvertheilung und den größten Druck zu ermitteln. Im Schwerpunkte der wirkfamen Querschnittsfläche ist $z' = 0$, also nach Gleichung 106

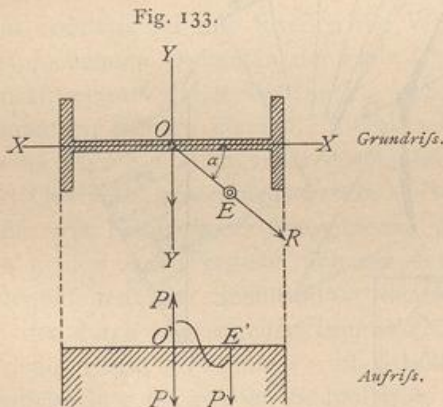
$$\sigma = \frac{P}{F'}$$

F' ist bekannt; es kann unmittelbar aus Fig. 132 entnommen werden, also auch $\frac{P}{F'}$. Die Lage des Schwerpunktes S folgt mit Leichtigkeit aus dem Seilpolygon. Trägt man an der dem Schwerpunkte entsprechenden Stelle des Aufrisses der Fuge den Werth $\frac{P}{F'}$ in beliebigem Mafsstabe als Ordinate auf ($= S'T'$), verbindet T' mit K' , so giebt die Linie $K'T'$ die Druckvertheilung an; der größte Druck für die Flächeneinheit ist $V'U'$ in dem gleichen Mafsstabe, in dem $\frac{P}{F'}$ aufgetragen war.

3) Druckvertheilung, falls die Kraftebene die Querschnitte nicht in Hauptaxen schneidet.

a) Die Querschnitte können Druck und Zug aufnehmen²⁸⁾. Die Wirkung einer excentrisch auf den Querschnitt (Fig. 133) im Punkte E angreifenden Kraft P ist eine dreifache. Falls XX und YY die Hauptaxen des Querschnittes sind, so wird zunächst nichts geändert, wenn man im Schwerpunkte zwei einander gleiche Kräfte P anbringt, welche der gegebenen Kraft P parallel, also lothrecht gerichtet sind. Zwei dieser Kräfte P bilden in der durch OE gelegten lothrechten Ebene ein Kräftepaar; die dritte Kraft P greift im Punkte O an. Das Moment M des Kräftepaares kann man durch zwei wagrechte Kräfte R ersetzen, deren eine im Querschnitt, deren andere in solcher Höhe h über dem Querschnitt wirkt, dafs $Rh = M$ ist. Zerlegt man die Kräfte R in zwei Seitenkräfte $R \cos \alpha$ und $R \sin \alpha$, welche in die lothrecht durch XX , bezw. YY gelegten Ebenen fallen, so erhält man zwei Momente: in der lothrechten durch XX gelegten Ebene $M \cos \alpha = M_y$ und in der lothrechten durch YY gelegten Ebene $M \sin \alpha = M_x$. Demnach ist die lothrechte Spannung, welche in einem Punkte C des Querschnittes mit den Coordinaten x und y erzeugt wird,

131. Querschnitt nimmt Zug und Druck auf.



$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_x y}{\mathcal{F}_x} + \frac{M_y x}{\mathcal{F}_y} \dots \dots \dots 113.$$

In dieser Gleichung bedeutet F den Flächeninhalt des Querschnittes; \mathcal{F}_x und \mathcal{F}_y sind die Trägheitsmomente der Querschnittsfläche, bezogen auf die XX - und YY -Axe.

Bei gegebenem Querschnitt und gegebener Kraft enthält die Gleichung 113 nur drei Veränderliche: σ , x und y ; alle drei kommen nur in der ersten Potenz vor. Ermittelt man demnach für alle Werthe von x und y , d. h. für alle Querschnittspunkte, die zugehörigen Werthe von σ und trägt dieselben als Ordinaten

²⁸⁾ Vergl. auch Art. 102 bis 104 (S. 80 bis 83).

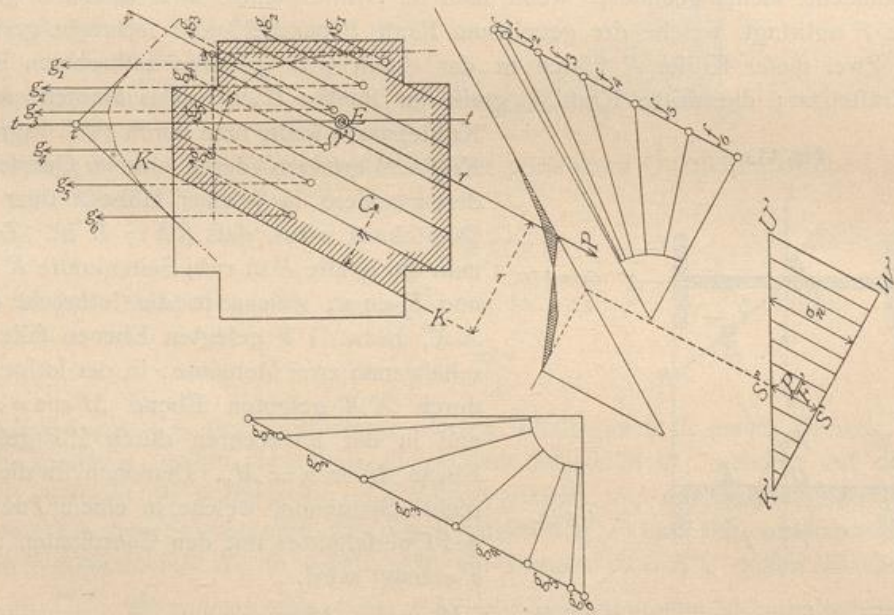
auf, so liegen alle Endpunkte dieser Ordinaten auf einer Ebene, auf der Ebene der Gleichung 113. Man findet leicht die Null-Linie, indem man $\sigma = 0$ setzt und in der erhaltenen Gleichung für zwei Werthe von x die zugehörigen Werthe von y auffucht. (Vergl. auch Art. 105, S. 86.)

132.
Querschnitt
nimmt
nur Druck
auf.

β) Die Querschnitte können nur Druck aufnehmen. Wenn die Querschnitte nur Druck übertragen können, wie dies beim Mauerwerk nahezu der Fall ist, behält, so lange die Null-Linie nicht den Querschnitt schneidet, die Gleichung 113 ihre Gültigkeit, weil alsdann nur Druckspannungen stattfinden. Sobald aber die Null-Linie in den Querschnitt fällt, wird die Aufgabe eine sehr schwierige. Denn es ist nicht nur die Größe der gedrückten Fläche, sondern auch die Richtung der Null-Linie unbekannt. Die Gleichung 113 bleibt auch für diesen Fall gültig, wenn unter F die wirkfame Querschnittsfläche, unter XX , bzw. YY die durch den Schwerpunkt derselben gelegten Haupttaxen dieses Theiles der Querschnittsfläche verstanden werden und die Coordinaten x und y , so wie \bar{x}_X und \bar{y}_Y auf diese Haupttaxen bezogen werden.

Die Endpunkte der in den einzelnen Querschnittspunkten aufgetragenen Werthe für σ liegen wiederum auf einer Ebene, der Spannungsebene, welche den Querschnitt in der Null-Linie schneidet. Alle lothrechten Ebenen, welche parallel zur

Fig. 134.



Null-Linie durch den wirkfamen Querschnittstheil gelegt werden, schneiden diesen und die Spannungsebene in zwei parallelen Linien, deren Abstand die Spannung der geschnittenen Querschnittspunkte angiebt. Daraus folgt, dafs in allen Punkten, welche auf einer Parallelen zur Null-Linie KK liegen (Fig. 134), die Spannungen gleich grofs sind. In einem Punkte C , dessen senkrechter Abstand von KK gleich η ist, wird die Spannung $\sigma = a \eta$ sein, in welcher Gleichung a eine noch unbekannte Constante ist. Die graphische Darstellung der Spannung in den einzelnen Punkten des Querschnittes bietet die Linie $U'K'$.

Wird zunächst die Richtung der Null-Linie KK als bekannt und gegeben angenommen, so ist die ganze Ableitung in Art. 130 (S. 117) auch hier gültig. Auch hier ist

$\sigma = a \eta$, $P = \int a \eta df = a S_K$ und $Pr = \int \sigma \eta df = a \int \eta^2 df = a \mathcal{F}_K$;
 fonach

$$r = \frac{\mathcal{F}_K}{S_K}.$$

\mathcal{F}_K und S_K bedeuten das Trägheits- und das statische Moment der wirksamen Querschnittsfläche, bezogen auf die Axe KK . Man zerlege die Querschnittsfläche nunmehr in Streifen, welche parallel zu KK sind und ermittle die Lage von KK , wie oben (in Art. 130, S. 117) gezeigt ist (Fig. 134²⁹).

Es ist nun zu untersuchen, ob die angenommene Richtung der Null-Linie richtig ist. Die im Querschnitt wirkenden Druckspannungen müssen mit der Kraft P , welche den Querschnitt im Punkte E schneidet, im Gleichgewicht sein; demnach muß ihre Mittelkraft ebenfalls durch den Punkt E gehen, wenn die Richtung der Null-Linie richtig gewählt ist. Alsdann ist auch die gefundene wirksame Fläche (in Fig. 134 schraffirt) richtig; anderenfalls ist eine Verbesserung vorzunehmen. Alle Punkte des Querschnittes, welche auf Parallelen zur Null-Linie liegen, haben nach Obigem gleiche Spannung; man kann also die Querschnittsfläche in (genügend schmale) der Null-Linie parallele Streifen zerlegen, in welchen je gleiche Spannung stattfindet. Der gesammte Druck in einem Streifen von der Breite b_n , der Länge h_n und der Spannung σ_n für die Flächeneinheit ist offenbar

$$g_n = b_n h_n \sigma_n.$$

Man ermittle für alle Streifen die Werthe g , wobei die Werthe von σ_n durch die entsprechenden Ordinaten der Linie $U'K'$ dargestellt sind, und suche die Entfernung der Mittelkraft dieser Werthe $g_1, g_2, g_3 \dots$ von zwei Axen, welche beliebig angenommen werden können. Zweckmäßig wird als eine Axe die Null-Linie, als die andere Axe eine Längsseite des Querschnittes gewählt; es können auch die Längs- und Querseite genommen werden. Das Auffuchen der Mittelkraftslage erfolgt bequem mit Hilfe zweier Seilpolygone (Fig. 134). Der Abstand der Mittelkraft von den beiden Axen ergibt sich aus den Schnittpunkten ρ und τ der äußersten Seilpolygoneiten; der Schnittpunkt der Mittelkraft mit dem Querschnitt liegt sowohl auf der durch ρ gezogenen Linie rr , wie auf der durch τ gezogenen Linie tt , ist also der Punkt V . Linie rr ist parallel zur Krafrichtung im ersten, tt parallel zur Krafrichtung im zweiten Seilpolygon.

Wenn V mit E zusammenfällt, wie in Fig. 134, so ist die Null-Linie und die ganze Construction richtig; die wirklichen Druckspannungen können dann, wie in Art. 130 (S. 117) gezeigt, ermittelt werden, indem man im Schwerpunkte der wirksamen Querschnittsfläche $\frac{P}{F_1}$ ($= S' S''$) aufträgt und den Endpunkt S'' mit K' verbindet. $K' U' W'$ ist die Druckfigur.

Fällt aber V mit E nicht zusammen, so ist die Untersuchung für eine andere Lage der Null-Linie zu wiederholen. Man kann ohne Schwierigkeit schätzen, nach welcher Richtung KK gedreht werden muß, und erreicht meist bereits bei der

²⁹) In Fig. 134 sind die Kräfte $f_1, f_2, f_3 \dots$ nicht ausgezeichnet, um die Abbildung nicht undeutlich zu machen.

erften Wiederholung der Construction ein genügend genaues Zusammenfallen der Punkte E und V .

Vorstehende Unterfuchung ist für die Ermittlung der Standficherheit von Gewölbepfeilern, durchbrochenen Mauern, Schornsteinen etc. von großer Wichtigkeit.

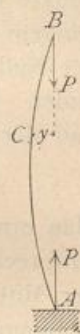
b) Gedrückte Stäbe unter Berücksichtigung der Zerknickungsgefahr.

1) Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken.

133.
Voraus-
setzungen.

Wenn auf einen Stab mit gerader Axe zwei Zugkräfte P wirken, deren Richtungslinien genau mit der Stabaxe zusammenfallen, so findet in den einzelnen Punkten des Stabes nur eine Zugbeanspruchung statt. Wirken auf einen eben solchen Stab zwei Druckkräfte P ebenfalls genau in der Richtung der Axe und einander entgegengesetzt, so müßten nach Früherem an den einzelnen Stellen gleichfalls nur Druckbeanspruchungen stattfinden, welche bei überall gleichem Stabquerschnitt in allen Punkten für die Flächeneinheit gleich wären. In Wirklichkeit kann man darauf nicht immer rechnen. Wenn die Länge des Stabes im Vergleich zu seiner Querschnittsfläche groß ist, so wird unter dem Einflusse der drückenden Kräfte ein Ausbiegen stattfinden, und auf jeden Querschnitt C (Fig. 135) wirkt alsdann außer der Axialkraft P noch ein Moment $P y$. In diesem Falle findet Beanspruchung des Stabes auf Zerknicken statt, und derselbe ist mit Rücksicht auf diese Beanspruchungsweise zu berechnen.

Fig. 135.



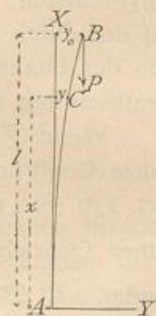
Es kann auffallen, daß hier scheinbar ein Widerspruch zwischen der Theorie und Praxis obwaltet; in Wirklichkeit ist derselbe aber nicht vorhanden. So lange die Druckkräfte ganz genau in der Stabaxe und in deren Richtung wirken, findet ein Ausbiegen nicht statt; sobald aber in Folge von unvermeidlichen Fehlern die Kräfte außerhalb der Axe angreifen, bezw. von der Richtung der Axe abweichen, entsteht für jeden Querschnitt des Stabes ein Biegemoment, welches unter Umständen ein Ausbiegen zur Folge hat. Man kann daher in diesem Falle von einem labilen Gleichgewichtszustande sprechen.

Ein Ausbiegen der Stabaxe kann nicht nur in der in Fig. 135 gezeichneten Richtung stattfinden, sondern ist nach allen möglichen Richtungen denkbar; es ist demnach zu untersuchen, nach welcher Richtung ein solches Ausbiegen am leichtesten stattfindet, und der Querschnitt des Stabes danach anzuordnen. Für die folgenden Untersuchungen soll angenommen werden, daß 1) als äußere Kräfte nur die Axialkräfte P wirken, 2) die Axialkräfte in den Schwerpunkten der Endflächen angreifen und 3) der Stab überall gleichen Querschnitt habe.

134.
Elastische
Linie.

Unter Einwirkung der Kraft P möge der Stab (Fig. 136), dessen Axe ursprünglich mit AX zusammenfiel, in die Lage AB gekommen sein; die Bildebene XAY , in welcher AB liegt, schneide alle Querschnitte in Hauptaxen; der Axenpunkt B habe nach der Formänderung die Ordinate y_0 . Für irgend einen Punkt C mit der Abscisse x sei die Ordinate y ; das Moment für diesen Punkt ist $M = P(y_0 - y)$ und die elastische Linie demnach aus der Gleichung 100 zu ermitteln. Danach wird

Fig. 136.



$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P(y_0 - y)}{E \mathcal{J}} \dots \dots \dots 114.$$

Hierin ist \mathcal{J} das Trägheitsmoment des Querschnittes bei C , bezogen auf diejenige Schwerpunktsaxe desselben, welche senkrecht zur Kraftebene, also zur XY

Ebene, steht. Der Querschnitt ist nach obiger Voraussetzung constant, also auch \mathcal{F} für die Integration constant; da P und E gleichfalls constant sind, so hat bei der Integration $\frac{P}{E \mathcal{F}}$ einen constanten Werth. Abkürzungsweise werde

$$\frac{P}{E \mathcal{F}} = a^2 \dots \dots \dots 115.$$

gesetzt, so dass die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a^2 (y_0 - y) \dots \dots \dots 116.$$

Die zweimalige Integration ergibt als Gleichung der elastischen Linie:

$$y = y_0 + A \sin a x + B \cos a x \dots \dots \dots 117.$$

Die beiden Constanten A und B sind für die verschiedenen Arten der Stabunterstützung verschieden.

Bekanntlich ist

$\sin \alpha = \sin (2 \pi + \alpha) = \sin (2 n \pi + \alpha)$ und $\cos \alpha = \cos (2 \pi + \alpha) = \cos (2 n \pi + \alpha)$, worin n eine beliebige ganze Zahl oder Null bedeutet, also gleich 0, 1, 2, 3... gesetzt werden kann. Es ist also auch

$$\sin a x = \sin (a x + 2 \pi) = \sin \left[a \left(x + \frac{2 \pi}{a} \right) \right]$$

und

$$\cos a x = \cos (a x + 2 \pi) = \cos \left[a \left(x + \frac{2 \pi}{a} \right) \right].$$

Die Gleichung 117 kann daher auch geschrieben werden:

$$y = y_0 + A \sin \left[a \left(x + \frac{2 \pi}{a} \right) \right] + B \cos \left[a \left(x + \frac{2 \pi}{a} \right) \right] \dots \dots 118.$$

Man erhält sonach gleich große Werthe für y , wenn man x und wenn man $x + \frac{2 \pi}{a}$ einsetzt, d. h. die Ordinaten je zweier Punkte, deren Abscissen um $\frac{2 \pi}{a}$ von einander verschieden sind, haben gleiche Werthe. Die elastische Linie ist demnach eine Wellenlinie; die Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{2 \pi}{a}, \dots \dots \dots 119.$$

und, da nach Gleichung 115: $a = \sqrt{\frac{P}{E \mathcal{F}}}$ ist,

$$\lambda = 2 \pi \sqrt{\frac{E \mathcal{F}}{P}} \dots \dots \dots 120.$$

Aus dieser Gleichung kann man, falls E , \mathcal{F} und P gegeben sind, die Wellenlänge berechnen. Ist dagegen λ gegeben, so kann man aus Gleichung 120 diejenige Kraft P berechnen, welche die Durchbiegungen y erzeugen kann. Die Größe von P folgt aus Gleichung 120 zu:

$$P = \frac{4 \pi^2 E \mathcal{F}}{\lambda^2} \dots \dots \dots 121.$$

Noch auf eine wichtige Eigenthümlichkeit der allgemeinen Gleichung 116 ist

hinzuweisen. Dieselbe bleibt giltig, wenn man beiderseits mit der beliebigen Zahl m multiplicirt; sie heist alsdann:

$$m \frac{d^2 y}{d x^2} = m a^2 (y_0 - y) = a^2 (m y_0 - m y).$$

Es sei $m y_0 = \eta_0$ und $m y = \eta$; alsdann ist auch $m \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d^2 \eta}{d x^2}$, also

$$\frac{d^2 \eta}{d x^2} = a^2 (\eta_0 - \eta) \dots \dots \dots 122.$$

Die Gleichung 116 gilt daher für beliebig grose Werthe von y . Sind also unter der Einwirkung einer Kraft P die Durchbiegungen y möglich, so sind auch m -mal so grose, d. h. beliebig grose Durchbiegungen möglich, also auch so grose, daß der Stab zerknickt wird.

Der Werth von P in Gleichung 121, welcher die Durchbiegungen y erzeugen kann, kann also auch den Stab zerknicken.

Bei der vorstehenden Ableitung ist angenommen worden, daß die Ausbiegung in der XY -Ebene erfolge; dieselbe kann aber auch in der senkrecht zu ersterer stehenden XZ -Ebene stattfinden, welche die zweiten Hauptaxen der Querschnitte enthält. Die Entwicklung für diesen Fall bleibt genau dieselbe, wie die obige, und man erhält für P denselben Ausdruck, wie dort; nur ist alsdann unter \mathcal{F} das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die zur XZ -Ebene senkrechte Schwerpunktsaxe, zu verstehen, welche Axe parallel zur Y -Axe ist. Nennen wir dasselbe \mathcal{F}_1 , die entsprechenden Werthe von P und λ aber P_1 und λ_1 , so ist

$$P_1 = \frac{4 \pi^2 E \mathcal{F}_1}{\lambda_1^2} \dots \dots \dots 123.$$

Ein Ausbiegen des Stabes kann nun sowohl in der XY -Ebene, wie in der XZ -Ebene stattfinden; die wirkliche dem Stabe zuzumuthende Belastung darf den Grenzwert nicht erreichen. Die Gleichungen 121 u. 123 geben zwei Grenzwerte, und naturgemäfs ist der kleinere von beiden als maßgebend einzuführen. Nimmt man in beiden Richtungen gleiche λ an, so unterscheiden sich beide Grenzwerte nur durch die Werthe der Trägheitsmomente. In den Ausdruck für P ist demnach von den beiden Hauptträgheitsmomenten das kleinere einzusetzen.

Wenn die Ausbiegung nach allen Richtungen möglich ist, so nimmt man an, daß dieselbe senkrecht zu derjenigen Hauptaxe erfolgt, welcher das kleinere Hauptträgheitsmoment entspricht; denn dieses ist nach Art. 62 (S. 41) das kleinste der für alle Schweraxen möglichen Trägheitsmomente.

Für die weiteren Betrachtungen sind die verschiedenen möglichen Fälle in das Auge zu fassen.

135.
Einfseitig
eingespannter
Stab.

a) Einfseitig eingespannter, an einem Ende in der Richtung der Axe belasteter Stab (Fig. 137). Aus der allgemeinen Gleichung 117 für die elastische Linie:

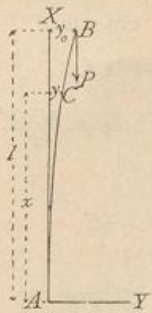
$$y = y_0 + A \sin a x + B \cos a x$$

folgt

$$\frac{d y}{d x} = A a \cos a x - B a \sin a x \dots \dots \dots 124.$$

Die Constanten A und B werden aus den besonderen Bedingungen für diesen Fall bestimmt.

Fig. 137.



Für $x = 0$ ist $\frac{dy}{dx} = 0$, weil der Stab an dieser Stelle wegen der Einspannung stets die Richtung der X-Axe hat; demnach ist in Gleichung 124

$$A a = 0,$$

oder, da a nicht gleich Null ist, $A = 0$. Eben so ist für $x = 0$ auch $y = 0$, daher in Gleichung 117: $0 = y_0 + B$ oder $B = -y_0$. Sonach lautet die Gleichung der elastischen Linie für diesen Fall:

$$y = y_0 - y_0 \cos a x = y_0 (1 - \cos a x) \quad \dots \quad 125.$$

Für $x = l$ wird $y = y_0$; demnach $y_0 = y_0 (1 - \cos a l)$. Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn

$$\cos a l = 0 \quad \dots \quad 126.$$

ist. Soll also der Stab unter Einwirkung der Kraft P sich so durchbiegen, wie Fig. 137 zeigt, also im Punkte C die Ordinate y , im Endpunkte die Ordinate y_0 haben können, so muß $\cos a l = 0$ sein; es muß also

$$a l = 90^\circ, \text{ bzw. } 270^\circ, \text{ bzw. } 450^\circ \text{ u. f. w.,}$$

oder allgemein

$$a l = \frac{\pi}{2} (2n + 1) \quad \dots \quad 127.$$

sein, worin n die Werthe 0, 1, 2, 3... annehmen kann. Daraus folgt auch der Werth von P , welcher den Stab in der angegebenen Weise biegt, also nach den Erklärungen in Art. 134 (S. 122) auch zerknicken kann. Für diesen

Fig. 138.



Fall ist nach Gleichung 127: $a = \frac{\pi}{2l} (2n + 1)$, und,

da $a = \sqrt{\frac{P}{E \mathcal{J}}}$ ist, $\sqrt{\frac{P}{E \mathcal{J}}} = \frac{\pi}{2l} (2n + 1)$; also

$$P = \frac{E \mathcal{J} \pi^2}{4 l^2} (2n + 1)^2 \quad \dots \quad 128.$$

Die zugehörige Wellenlänge λ folgt aus Gleichung 119. Es ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{a} = \frac{l}{2n + 1} \quad \dots \quad 129.$$

Die beiden Gleichungen geben Aufschluss über die Gröfse der Grenzwerte P , welche bei den verschiedenen Anordnungen des eingespannten Stabes einzuführen sind.

Bei dem in Fig. 137 u. 138 vorgeführten Falle ist die ganze Wellenlänge λ viermal so groß, als die freie Länge l , d. h. es ist $\lambda = 4l$; demnach folgt für diesen Fall aus der Gleichung 129:

$n = 0$, und damit aus Gleichung 128

$$P = \frac{E \mathcal{J} \pi^2}{4 l^2} \quad \dots \quad 130.$$

Wird ein Punkt E im Abstände $\frac{l}{3}$ vom Einspannungspunkte fest gelegt, so muß die Formänderung so erfolgen, daß $l = \frac{3}{4} \lambda$ (Fig. 140) wird; dafür folgt aus

Gleichung 129: $\lambda = \frac{3\lambda}{2n+1}$ die Gröfse $n = 1$, ferner aus Gleichung 128 als zerknickende Kraft

$$P = \frac{9 E \mathcal{F} \pi^2}{4 l^2} \dots 131.$$

Werden endlich zwei Punkte E und F in den Abständen $\frac{l}{5}$ und $\frac{3}{5} l$ vom Einspannungspunkte fest gehalten (Fig. 139), so wird $\lambda = \frac{4}{5} l$ und aus Gleichung 129: $n = 2$; alsdann ist die zerknickende Kraft

$$P = \frac{25}{4} \frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$$

Man sieht, wie wesentlich der Grenzwert durch angemessene Construction erhöht werden kann.

β) Stab mit beiderseits frei drehbaren Enden (Fig. 141). Die symmetrische Belastung des Stabes wird zur Folge haben, dafs beide Stabhälften, oberhalb und unterhalb der Stabmitte, sich genau gleich verhalten; man kann demnach diesen Fall auf den vorhergehenden dadurch zurückführen, dafs man den Anfangspunkt des Coordinatensystems in die Stabmitte legt. Jede Hälfte verhält sich dann genau eben so, wie der Stab im vorigen Artikel; die zerknickende Kraft P , d. h. der Grenzwert von P , ist demnach aus der Gleichung 128 zu entnehmen, jedoch mit der Aenderung, dafs statt des dortigen l hier $\frac{l}{2}$ einzusetzen ist, weil die dort mit l bezeichnete Länge hier nur $\frac{l}{2}$ beträgt.

Für den vorliegenden Fall ist also

$$P = \frac{E \mathcal{F} \pi^2 (2n+1)^2}{4 \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2} (2n+1)^2$$

und

$$\lambda = \frac{4 \frac{l}{2}}{2n+1} = \frac{2l}{2n+1} \dots 132.$$

Bei dem in Fig. 142 dargestellten Falle ist $\lambda = 2l$, d. h. $n = 0$, mithin

$$P = \frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$$

Wird ein Punkt E in der Mitte des Stabes fest gehalten, so findet die Durch-

Fig. 139.

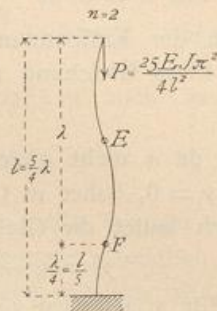


Fig. 140.

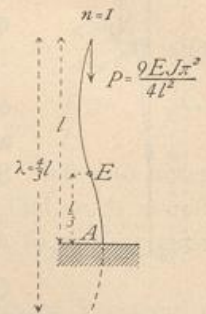


Fig. 141.

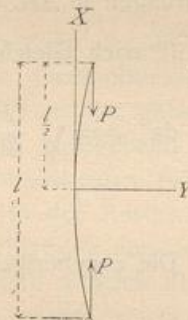
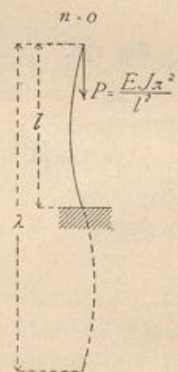
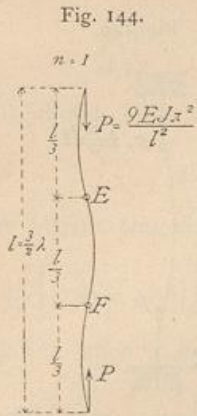
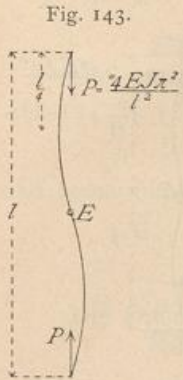


Fig. 142.



136.
Stab
mit freien
Enden.



biegung nach Fig. 143 so statt, dass $l = \lambda$, also $n = \frac{1}{2}$ wird; alsdann hat P den Werth:

$$P = \frac{4 E J \pi^2}{l^2}.$$

Sind endlich zwei Punkte E und F in den Abständen $\frac{l}{3}$ von den Endpunkten fest gehalten, so dass die Formänderung nach Fig. 144 eintreten muss, so wird $l = \frac{3}{2} \lambda$, also $n = 1$ und

$$P = \frac{9 E J \pi^2}{l^2}.$$

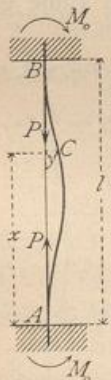
Die Formänderung kann auch unter Beibehaltung der Punkte E, F und der Endpunkte so eintreten, dass die Bogenlinien auf diejenige Seite der ursprünglichen Axe fallen, welche der gezeichneten entgegengesetzt ist.

γ) Stab mit eingespannten Enden (Fig. 145). Beide Endpunkte des Stabes verbleiben in Folge der Einspannung in der Lothrechten der Axe XX ; die Tangente an die Axe in diesen Punkten, d. h. die Axenrichtung, kann sich nicht verändern. An jedem Einspannungspunkte muss demnach ein Kräftepaar wirken, dessen Moment stets genügend groß ist, um den Stab in der ursprünglichen Richtung zu erhalten; dieses Moment möge M_0 genannt werden. Für einen beliebigen Punkt C mit der Abscisse x ist das Biegemoment

137.
Stab mit
eingespannten
Enden.

$$M = M_0 - P y = \left(\frac{M_0}{P} - y \right) P.$$

Fig. 145.



Demnach lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie hier:

$$E J \frac{d^2 y}{d x^2} = P \left(\frac{M_0}{P} - y \right) \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P}{E J} \left(\frac{M_0}{P} - y \right).$$

Abkürzungsweise werde wieder $\frac{P}{E J} = a^2$ gesetzt; alsdann ist

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a^2 \left(\frac{M_0}{P} - y \right).$$

Als Gleichung der elastischen Linie ergibt sich

$$y = \frac{M_0}{P} + A \sin a x + B \cos a x; \dots \dots \dots 133.$$

ferner

$$\frac{d y}{d x} = A a \cos a x - B a \sin a x \dots \dots \dots 134.$$

Die Constanten A und B ergeben sich in folgender Weise. Für $x = 0$ ist $y = 0$, demnach in Gleichung 133: $0 = \frac{M_0}{P} + B$ und $B = -\frac{M_0}{P}$. Für $x = 0$ wird $\frac{d y}{d x} = 0$, folglich in Gleichung 134: $0 = A a$ und, da a nicht gleich Null ist, $A = 0$. Die Gleichung der elastischen Linie lautet sonach im vorliegenden Falle:

$$y = \frac{M_0}{P} - \frac{M_0}{P} \cos a x = \frac{M_0}{P} (1 - \cos a x). \dots \dots \dots 135.$$

Für $x = l$ ist $y = 0$, demnach

$$0 = \frac{M_0}{P} (1 - \cos a l) \text{ oder } \cos a l = 1.$$

Damit diese Gleichung erfüllt werde, muß

$$a l = 2 n \pi$$

sein, worin n die Werthe 0, 1, 2, 3 . . . haben kann.

Aus Gleichung 119 folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2 \pi l}{2 n \pi} = \frac{l}{n} \text{ oder } \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{n}.$$

Ferner wird nach Gleichung 119

$$a^2 = \frac{P}{E \mathcal{F}} = \frac{4 \pi^2}{\lambda^2} \text{ und } P = \frac{4 E \mathcal{F} \pi^2}{\lambda^2}.$$

Diese beiden Gleichungen geben über die GröÙe von P Aufschluss. Es ist

für $n = 1$:

$$\frac{\lambda}{l} = 1 \text{ oder } \lambda = l; \\ P = \frac{4 E \mathcal{F} \pi^2}{l^2};$$

für $n = 2$:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2} \text{ oder } \lambda = \frac{l}{2}; \\ P = \frac{16 E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$$

Der erstere Fall ist durch Fig. 146, der zweite durch Fig. 147 dargestellt; letzterer tritt ein, wenn der Punkt E in der Stabmitte fest gehalten wird.

δ) Stab mit einem eingespannten und einem in der Lothrechten geführten Ende (Fig. 148). Wenn der Punkt B nicht in der lothrechten Linie geführt wäre, würde er etwa die punktirte Lage eingenommen haben; die Führung muß also durch eine wagrechte Kraft H verursacht werden, welche stets genügend groß ist, um ein Ausweichen von B zu verhüten. Diese Kraft H ist ihrer GröÙe nach nicht bekannt.

Das Biegemoment für irgend einen Punkt C des Stabes mit der Abscisse x ist nun

$$M = H(l - x) - P y = P \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right],$$

und die Differentialgleichung der elastischen Linie (siehe Gleichung 100)

$$E \mathcal{F} \frac{d^2 y}{d x^2} = P \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right]$$

oder

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P}{E \mathcal{F}} \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right] \dots \dots \dots 136.$$

Man setzt, um diese Gleichung aufzulösen, $\frac{d^2 y}{d x^2} = z$; wieder sei abkürzungsweise $\frac{P}{E \mathcal{F}} = a^2$; alsdann ist

$$z = a^2 \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right] \text{ und } \frac{d z}{d x} = a^2 \left(- \frac{H}{P} - \frac{d y}{d x} \right);$$

Fig. 146.

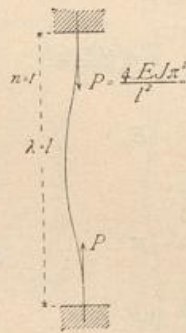
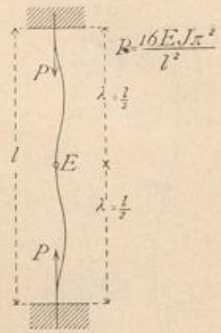
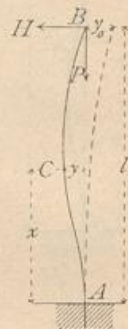


Fig. 147.



138.
Stab mit einem
eingespannten
und einem
geführten Ende.

Fig. 148.



ferner

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = - a^2 \frac{d^2 y}{d x^2} = - a^2 z.$$

Die Auflöfung dieser Differentialgleichung ergibt wiederum genau, wie in Art. 134 (S. 123)

$$z = A \sin a x + B \cos a x, \dots \dots \dots 137.$$

und wenn für z der Werth eingeführt wird,

$$a^2 \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right] = A \sin a x + B \cos a x \dots \dots \dots 138.$$

Die Differentiation nach x ergibt

$$- a^2 \left(\frac{H}{P} + \frac{d y}{d x} \right) = A a \cos a x - B a \sin a x \dots \dots \dots 139.$$

Aus den beiden Gleichungen 138 u. 139 ergeben sich die Werthe der Constanten A und B , wie folgt.

Für $x = 0$ ist $y = 0$, also nach Gleichung 138: $\frac{a^2 H}{P} l = B$; für $x = 0$ ist $\frac{d y}{d x} = 0$, also nach Gleichung 139: $-\frac{a^2 H}{P} = A a$ und $-\frac{a H}{P} = A$. Endlich ist für $x = l$ auch $y = 0$, weil der Endpunkt des Stabes in der Lothrechten geführt wird, also nach Gleichung 138

$$0 = A \sin (a l) + B \cos (a l), \text{ woraus } \operatorname{tg} a l = -\frac{B}{A}$$

folgt, und wenn für B und A die foeben gefundenen Werthe eingefetzt werden,

$$\operatorname{tg} a l = a l \dots \dots \dots 140.$$

Diese Beziehung findet statt für $a l = 0$, auferdem aber auch für den Winkel $257^\circ 27' 12''$; für diesen Winkel ist $\operatorname{tg} a l = a l = 4,4934$, also $a = \frac{4,4934}{l}$ und da $a^2 = \frac{P}{E \mathcal{F}}$ ist, so wird

$$P = \frac{E \mathcal{F} (4,4934)^2}{l^2} = 20,19 \frac{E \mathcal{F}}{l^2} \dots \dots \dots 141.$$

Dies ist der Werth von P , für welchen Gleichung 140 erfüllt ist und einen Sinn hat; der Werth $a l = 0$ ist nicht zu verwerthen. Dieses P vermag sonach die in Fig. 148 gezeichnete Formänderung hervorzurufen, also nach Früherem auch den Stab zu zerknicken.

In Art. 135 bis 138 sind diejenigen Werthe der zerknickenden Kraft entwickelt worden, welche für die Praxis hauptsächlich von Bedeutung sind. Nachstehend sind dieselben in Fig. 149 bis 152 übersichtlich zusammengestellt, wobei überall der Stab auf seine ganze Länge frei angenommen ist; der Werth von P im vierten Falle ist des bequemen Vergleiches wegen ebenfalls als Product mit dem Factor $\frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}$ dargestellt.

Die Tragfähigkeit der Stäbe verhält sich demnach

in den Fällen	1	2	4	3
wie	$\frac{1}{4}$: 1	: 2,048	: 4.

139.
Zusammen-
stellung.

Fig. 149.
Fall 1.

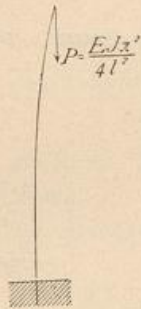


Fig. 150.
Fall 2.



Fig. 151.
Fall 3.

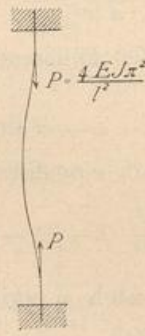
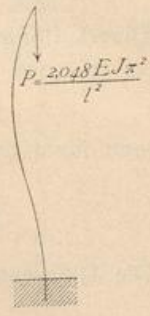


Fig. 152.
Fall 4.



Durch entsprechende Endanordnung würde man also die Tragfähigkeit des Stabes verfehzhnfachen können. Die angegebenen Kräfte sind thatfächlich im Stande, den Stab zu zerknicken, und deshalb sind Sicherheits-Coefficienten einzuführen.

2) Querschnittsermittlung bei centrischer Druckbelastung.

140.
Zulässige
Beanspruchung.

Die unter 1 entwickelten Formeln geben die Gröfse derjenigen Kraft P an, welche im Stande ist, den Stab oder die Stütze zu zerknicken. Die dem Stabe wirklich zuzumuthende Last darf naturgemäfs diesen Werth niemals erreichen; sie darf nur einen Bruchtheil des ermittelten Knickwerthes betragen. Versteht man unter s den fog. Sicherheits-Coefficienten, unter C einen von der Endbefestigung des Stabes abhängigen Coefficienten, so ist die Kraft, welche mit Rücksicht auf die Zerknickungsgefahr auf den Stab wirken darf,

$$P = \frac{C E \mathcal{F}}{s l^2} \dots \dots \dots 142.$$

Dieser Werth ist aber nicht ohne Weiteres für alle Fälle anwendbar. Wenn die Stablänge l , also auch die im Nenner vorkommende Gröfse l^2 , sehr klein ist, so ergeben sich für P sehr grofse Werthe, gröfsere Werthe, als die einfache Druckbeanspruchung des Stabes gestattet. Wird die zulässige Druckbeanspruchung für die Flächeneinheit des Querschnittes mit K , die Querschnittsfläche mit F bezeichnet, so darf höchstens sein

$$P = F K \dots \dots \dots 143.$$

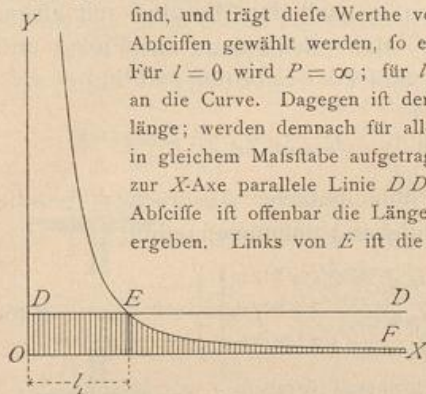
Gröfser, als der Werth in Gleichung 143 ist, darf P mit Rücksicht auf die zulässige Druckbeanspruchung nicht werden; gröfser, als der Werth in Gleichung 142 ist, darf P der Zerknickungsgefahr halber nicht werden; deshalb ist stets der kleinere dieser beiden Werthe für diejenige Belastungsgröfse maßgebend, welche dem Stabe zugemuthet werden darf. Bei grofser Stablänge l ergibt die Gleichung 142, bei geringer Stablänge l die Gleichung 143 kleinere Werthe für P . Der Grenzwert von l , etwa l_1 , wird derjenige sein, für welchen aus beiden Gleichungen derselbe Werth von P folgt. Dieser Grenzwert ergibt sich durch Gleichsetzung der beiden Werthe von P in den Ausdrücken 142 u. 143 zu

$$l_1 = \sqrt{C} \sqrt{\frac{E}{K s}} \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{F}} \dots \dots \dots 144.$$

Zerknickungsgefahr tritt erst auf, wenn $l > l_1$ ist; demnach ist, falls die Stablänge kleiner als l_1 ist, die Gleichung 143, falls sie größer als l_1 ist, die Gleichung 142 anzuwenden.

Klaren Einblick in die hier maßgebenden Verhältnisse verschafft die graphische Darstellung der Veränderlichkeit von P in Fig. 153. Ermittelt man diejenigen Werthe von P , welche ein Stab bei verschiedenen Längen mit Rücksicht auf die Zerknickungsgefahr ertragen kann, falls Material,

Fig. 153. Querschnittsform und Querschnittsgröße, so wie Befestigungsweise der Enden stets dieselben sind, und trägt diese Werthe von P als Ordinaten auf, während die zugehörigen Längen als Abscissen gewählt werden, so erhält man eine Curve, offenbar die Curve der Gleichung 142. Für $l = 0$ wird $P = \infty$; für $l = \infty$ wird $P = 0$; die Y - und X -Axe sind also Asymptoten an die Curve. Dagegen ist der Werth für P aus Gleichung 143 unabhängig von der Stablänge; werden demnach für alle möglichen Längen diese Werthe ermittelt und als Ordinaten in gleichem Maßstabe aufgetragen, wie die Werthe aus Gleichung 142, so ergibt sich eine zur X -Axe parallele Linie DD . Im Punkte E schneiden sich beide Linien; die zugehörige Abscisse ist offenbar die Länge l_1 , für welche beide Gleichungen denselben Werth von P ergeben. Links von E ist die Linie DE , rechts von E die Curve EF maßgebend. Die schraffierte Fläche deutet dies an.



Wenn, wie gewöhnlich, die Last P und die Länge l gegeben sind, so handelt es sich um die Ermittlung von Form und Größe des Stabquerschnittes. Für diese Bestimmung

141.
Querschnitts-
ermittlung.

stehen die beiden Gleichungen 142 u. 143 zur Verfügung. F und \mathcal{F} müssen wenigstens die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe haben, so daß sich die Bedingungen für die Querschnittsbildung ergeben zu

$$F \geq \frac{P}{K} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{min} \geq \frac{P s l^2}{C E} \dots \dots \dots 145.$$

Dabei ist zu bemerken, daß, wenn Ausbiegen nach allen Richtungen möglich ist, das kleinste für eine Schwerpunktsaxe des Querschnittes sich ergebende Trägheitsmoment zum mindesten die verlangte Größe haben muß; deshalb wurde in Gleichung 145: \mathcal{F}_{min} gesetzt. Ist Ausbiegen nur nach bestimmten Richtungen möglich, so muß das kleinste in Betracht kommende Schweraxen-Trägheitsmoment die berechnete Größe haben.

Die in obigem Ausdruck vorkommenden Constanten C , E , K und s bedeuten bestimmte Zahlenwerthe; für die in Fig. 149 bis 152 dargestellten vier Fälle ist C :

Fall 1:	Fall 2:	Fall 3:	Fall 4:
$C = \frac{\pi^2}{4}$	$= \pi^2$	$= 4 \pi^2$	$= 2 \pi^2$ (genügend genau)
$\sqrt{C} = 1,57$	$= 3,14$	$= 6,28$	$= 4,44$.

Die Coefficienten E , K und s haben für alle Stäbe aus demselben Material gleiche Werthe; wird als Flächeneinheit das Quadrat-Centimeter, als Kräfteinheit das Kilogramm angenommen, so kann man für K , E und s nachstehende Werthe setzen:

für Schweifseifen und Flusseifen:	für Gufseifen:	für Holz:
$E = 2000000$	1000000	$120000 \text{ kg für } 1 \text{ qcm}$
$K = 700$	500	65 » »
$s = 5$	8	10

Alsdann wird auch P in Kilogr. eingeführt werden müssen; F wird in Quadr.-Centim. und \mathcal{F} in cm^4 erhalten. Die Formel ergibt für Fall 2 und Schweifseifen

$$\mathcal{F}_{min} \geq \frac{P \text{kg} \cdot 5 \text{ lcm}^2}{\pi^2 \cdot 2000000}$$

Wesentlich bequemer werden die Ausdrücke für \mathcal{F}_{min} , wenn man P und E in Tonnen, l in Met. einführt und $\pi^2 = 10$ fetzt; letzteres ist nicht ganz genau, aber der Fehler kommt gar nicht in Betracht, da man je nach dem Baustoff mit einem Sicherheitscoefficienten 5, 8, bzw. 10 arbeitet. Man erhält dann für Fall 2 und Schweifseifen, da $P \text{kg} = 1000 Pt$, $l \text{cm} = 100 l^m$ und $l \text{cm}^2 = 10000 l^m^2$ ist,

$$\mathcal{F}_{min} \geq \frac{1000 Pt \cdot 5 \cdot 10000 \cdot l^m^2}{10 \cdot 2000000}, \text{ d. h. } \mathcal{F}_{min} \geq 2,5 Pt l^m^2.$$

Eben so ergeben sich für Holz und Gufseifen sehr einfache Ausdrücke; für die Hauptstoffe sind diese Ausdrücke für Fall 2 nachstehend zusammengestellt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Schweifs- und Flufseifen } \mathcal{F}_{min} \geq 2,5 Pt l^m^2 \\ \text{für Gufseifen } \mathcal{F}_{min} \geq 8 Pt l^m^2 \\ \text{für Holz } \mathcal{F}_{min} \geq 83 Pt l^m^2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots 146.$$

Die Zusammenstellung für alle vier Fälle ergibt die nachstehende Tabelle. \mathcal{F}_{min} muß sein \geq :

Constructions-material	Fall 1 (Fig. 149)	Fall 2 (Fig. 150)	Fall 3 (Fig. 151)	Fall 4 (Fig. 152)
Schweifseifen und Flufseifen .	10	2,5	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{4}$
Gufseifen	32	8	2	4
Holz	332	83	20	41

P Tonnen $\times l$ (Meter)²

Je mehr sich der Flächeninhalt des Querschnittes, welcher dem nothwendigen Trägheitsmomente entspricht, dem zulässigen Kleinstwerth $\frac{P}{K}$ nähert, desto zweckmäßiger ist die Construction. Man nimmt gewöhnlich zunächst einen Querschnitt an, für welchen $F = \frac{P}{K}$ stattfindet und ermittelt das Trägheitsmoment desselben. Genügt letzteres nicht, so ist die Querschnittsfläche entsprechend zu vergrößern, bis das verlangte \mathcal{F} vorhanden ist. Dieses Verfahren soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

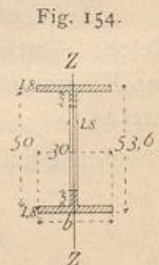
Beispiele. α) In einer gufeisernen Stütze sei der größte Druck $P = 50000 \text{ kg} = 50$ Tonnen; die Länge der Stütze sei $l = 4,5 \text{ m}$; die Enden sollen als bewegliche vorausgesetzt werden; die Querschnittsform sei die neben stehende (Fig. 154); die Querschnittsmaße sind zu ermitteln.

Für einfachen Druck muß $F = \frac{50000}{500} = 100 \text{ qcm}$ und nach Gleichung 146 muß $\mathcal{F}_{min} = 8 \cdot 50 \cdot 4,5^2 = 8100$ sein.

Die Höhe des Querschnittes sei durch bauliche Rücksichten zu $53,6 \text{ cm}$ vorgeschrieben, die Stärke des Steges und der Gurte sei $1,8 \text{ cm}$; alsdann findet, wenigstens bei nicht aufsergewöhnlich großer Breite der Gurtungen, das Minimal-Trägheitsmoment für die Axe ZZ statt, und es ist

$$\mathcal{F}_Z = \frac{2 \cdot 1,8 \cdot b^3}{12} + \frac{50 \cdot 1,8^3}{12} = 0,3 b^3 + 24,3.$$

Hiermit ist das erforderliche Trägheitsmoment als Function von b dargestellt, und da nach Obigem auch



$$J_{min} = 8100$$

fein muß, so lautet die Bedingungsgleichung für b :

$$0,3 b^3 + 24,3 = 8100,$$

woraus sich für $b = \infty 30$ cm ergibt.

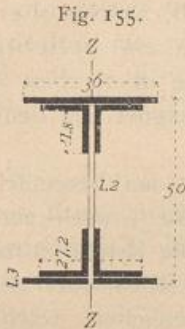
Die Querschnittsfläche wird $F = 2 \cdot 1,8 \cdot 30 + 50 \cdot 1,8 = 198$ qcm, während nur 100 qcm Querschnittsfläche nöthig sind. Daraus folgt, daß unbedenklich ein Theil des Steges auf einzelne Theile der Höhe fortfallen kann; alsdann bleibt als Querschnittsfläche der schraffierte Theil übrig, und zwar in diesem Falle $F = 2 \cdot 30 \cdot 1,8 + 2 \cdot 5 \cdot 1,8 = 126$ qcm, und diese Querschnittsgröße genügt. Auch das Trägheitsmoment wird durch Fortfall des Steges nur unwesentlich beeinflusst.

2) In einem schmiedeeisernen Stabe herrscht ein Druck $P = 130000$ kg = 130 Tonnen; die Stablänge betrage 6,0 m, der Stab sei beiderseits eingespannt.

Nach obiger Tabelle muß

$$J = \frac{5}{8} \cdot 130 \cdot 6^2 = 2925 \text{ cm}^4,$$

ferner $F = \frac{130000}{700} = 196$ qcm fein.



Der Querschnitt in Fig. 155 wurde vorläufig, wie folgt, zusammengesetzt:

4	Winkelisen zu $13 \times 13 \times 1,2$ cm	= 29,8 qcm	= 119,2 qcm
1	obere Deckplatte $36 \times 1,3$ cm	= 46,8 »	
1	untere Deckplatte $34,8 \times 1,3$ cm	= 45,2 »	
	Summe des Brutto-Querschnittes			211,2 qcm
ab für 4	Nietlöcher $4 \times 2,5 \times 2,3$ cm	= 23,0 »	
	bleibt Netto-Querschnitt			188,2 qcm,

der allerdings etwas kleiner als F ist, aber genügen dürfte.

Für diesen Querschnitt findet J_{min} für die ZZ-Axe statt, und es ist

$$J_z = \frac{1}{12} [2 \cdot 1,3 \cdot 36^3 + 2 \cdot 1,2 \cdot 27,2^3 + 2 \cdot 11,8 \cdot 3,6^3 - (2 \cdot 13 + 1,3) 1,2^3] - 4 \cdot 2,5 \cdot 2,3 \cdot 7^2 = 13094.$$

Das Trägheitsmoment ist also bei ausreichender Querschnittsfläche wesentlich größer, als es zu fein braucht, der Querschnitt sonach genügend.

Sehr einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn man den Querschnitt aus den »Deutschen Normal-Profilen für Walzeisen« bildet, für welche die Minimal-Trägheitsmomente im vorhergehenden Halbband dieses »Handbuches« (Abth. I: Die Technik der wichtigeren Baustoffe) angegeben sind. Man berechnet das nothwendige Trägheitsmoment und die nöthige Querschnittsfläche aus den Ausdrücken 145 und sucht aus den Tabellen ein Profileisen, bzw. einen aus Profileisen zusammengesetzten Querschnitt, dessen Minimal-Trägheitsmoment und Querschnittsfläche den verlangten zum mindesten gleich sind.

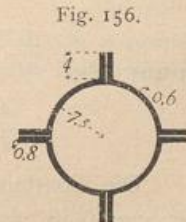
Beispiel. In einem schmiedeeisernen Stabe herrsche ein Druck $P = 18000$ kg = 18 Tonnen; die Stablänge sei $l = 5,0$ m; die Stabenden seien drehbar; mithin ist Fall 2 zu Grunde zu legen.

Nach Gleichung 146 muß $J = 2,5 \cdot 18 \cdot 5^2 = 1125$ cm⁴ und nach Gleichung 143: $F = \frac{18000}{700} = 26$ qcm fein.

Soll der Stab aus einem I-förmigen Walzbalken gebildet werden, so ist das Profil Nr. 38 (siehe die angezogenen Tabellen) zu wählen; bei demselben ist $J_{min} = 1138$, F (nach Abzug für Niete) = $107,5 - 4 \cdot 2 \cdot 2,05 = 91,1$ qcm und das Gewicht für 1 m 83,9 kg.

Wollte man statt dessen einen aus 4 kreuzförmig gestellten Winkelisen gebildeten Querschnitt verwenden, so könnte man 4 Winkelisen Nr. 9 (siehe die angezogenen Tabellen) zu $9 \times 9 \times 1,3$ cm verwenden, deren $J = 1284$ ist, also genügt; dabei ist der Netto-Querschnitt $F = 4 \cdot 21,7 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1,3$ (für Niete) = 76,4 qcm und das Gewicht $4 \cdot 16,9$ kg = 67,6 kg. Zweckmäßiger ist die Verwendung von 4 Winkelisen Nr. 10 zu $10 \times 10 \times 1$ cm mit $J = 1346$, $F = 4 \cdot 19 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 68$ qcm und einem Gewicht für 1 m von $4 \cdot 14,8$ kg = 59,2 kg.

Würde endlich der Querschnitt aus 4 Quadranteisen (nach Fig. 156) konstruirt, so wird bei neben stehendem Querschnitt (siehe die angezogenen Tabellen) $J = 2046$, $F = 54,9 - 4 \cdot 2 \cdot 0,8$ (für Niete) = 48,9 qcm und das Gewicht für das laufende Meter 42,9 kg.



Am ungünstigsten ist demnach im vorliegenden Falle das I-Profil mit 83,9 kg Gewicht; günstiger ist das kreuzförmige Profil mit 59,2 kg, und am günstigsten ist das aus Quadranteifen zusammengesetzte, röhrenförmige Profil mit 42,9 kg Gewicht.

3) Querschnittsermittlung bei excentrischer Druckbelastung.

142.
Zulässige
Beanspruchung.

Man ist neuerdings vielfach bestrebt gewesen, Grösse und Form des Querschnittes auf Knicken axial beanspruchter Stäbe aus der Bedingung zu bestimmen, dafs die grösste, wirklich auftretende Beanspruchung σ an keiner Stelle die für das Material als zulässig erachtete Beanspruchung überschreite. Die Spannung σ ist, sobald die Kraft für den Querschnitt ein Moment hat, in hohem Mafse von der Grösse der Ausbiegung y abhängig; da aber diejenige axial wirkende Kraft, welche überhaupt eine Ausbiegung y hervorrufen kann, nach Obigem auch ein beliebig grosses y und damit auch ein beliebig grosses σ erzeugen kann, so ist σ , eben so wie y , bei der oben betrachteten Aufgabe eine unbestimmte Grösse, eignet sich demnach nicht als Grundlage für die Querschnittsbestimmung.

Man darf weiter nicht erwarten, dafs die Versuchsergebnisse mit den theoretisch entwickelten Werthen der zerknickenden Kraft genau übereinstimmen; auch eine kleinere Kraft kann bereits Zerknicken herbeiführen, wenn etwa die Kräfte etwas excentrisch wirken oder nicht genau in die Richtung der Stabaxe fallen oder der Baustoff des Stabes nicht ganz gleichmäfsig ist. Allen diesen Möglichkeiten, welche theoretisch nicht gut verfolgt werden können, wird am besten dadurch Rechnung getragen, dafs man einen Sicherheits-Coefficienten n einführt, also nur den n -ten Theil derjenigen Kraft auf den Stab wirken läfst, welche denselben nach der Formel zerknicken könnte. Es ist gut, dafs man die Stelle ganz genau kennt, an welcher alle Unsicherheiten zusammentreffen und diese ganz klar bezeichnet.

143.
Querschnitts-
ermittlung.

Wenn das Mafs der Excentricität der wirkenden Kräfte bekannt wäre, so würde auch eine genaue Berechnung möglich sein; denn dann hätte der Pfeil einen ganz bestimmten Werth, und damit würden sich auch für σ gewisse, von der Grösse der Kraft P abhängige Werthe ergeben. Da unter Umständen die Grösse der Excentricität bekannt ist, bzw. angenommen werden kann, so soll die Berechnung hier vorgeführt werden.

Für irgend einen Punkt C des Stabes AB (Fig. 157), welcher ursprünglich mit der Axe AX zusammenfiel, ist

$$M = P(p + y_0 - y) = E \mathcal{J} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{E \mathcal{J}} (p + y_0 - y),$$

und wenn wieder, wie oben, abkürzungsweise $\frac{P}{E \mathcal{J}} = a^2$ gesetzt wird,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 (p + y_0 - y).$$

Die zweimalige Integration dieser Gleichung ergibt

$$y = (p + y_0) + A \sin ax + B \cos ax \quad \dots \quad 147.$$

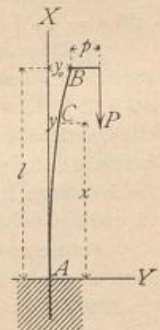
Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = A a \cos ax - B a \sin ax \quad \dots \quad 148.$$

Die Constanten A und B ergeben sich folgendermassen.

Für $x = 0$ ist $y = 0$, also $0 = p + y_0 + B$ und $B = -(p + y_0)$;

Fig. 157.



für $x = 0$ ist $\frac{dy}{dx} = 0$, also $0 = A a$ und $A = 0$; demnach heißt die Gleichung der elastischen Linie:

$$y = (p + y_0) (1 - \cos a x) \dots \dots \dots 149.$$

Für $x = l$ ist $y = y_0$, d. h. $y_0 = (p + y_0) (1 - \cos a l)$ oder

$$y_0 = p \frac{1 - \cos a l}{\cos a l} \dots \dots \dots 150.$$

y_0 ist also eine ganz bestimmte Größe. Das größte Moment findet am Einspannungspunkte A statt, wo es den Werth

$$P(p + y_0) = Pp \left(1 + \frac{1 - \cos a l}{\cos a l} \right) = \frac{Pp}{\cos a l}$$

hat. In diesem Querschnitte wird der größte Druck den Werth haben

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{Pp r}{\mathcal{F} \cos a l} \dots \dots \dots 151.$$

In dieser Gleichung ist r der Abstand des meist gespannten Querschnittspunktes von der Axe, \mathcal{F} das in Betracht kommende Trägheitsmoment. Stellt man die Bedingung, daß σ_{max} höchstens gleich K sein solle, so ergibt sich

$$K = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{Fp r}{\mathcal{F} \cos a l} \right), \dots \dots \dots 152.$$

und die zulässige Belastung der Stütze vom Querschnitt F und dem Trägheitsmomente \mathcal{F}

$$P = \frac{F K}{1 + \frac{Fp r}{\mathcal{F} \cos a l}} \dots \dots \dots 153.$$

Da $a = \sqrt{\frac{P}{E \mathcal{F}}}$ eine Größe ist, welche sowohl vom Drucke P , wie von der Querschnittsgealtung, also von Werthen abhängt, welche meistens von vornherein nicht gleichzeitig gegeben sind, so kann der Ausdruck für P aus Gleichung 153 nicht in geschlossener Form entwickelt werden; denn a kommt auch auf der rechten Seite vor. Man wird deshalb zunächst eine angenäherte Rechnung vornehmen, auf welche die genauere zu folgen hat. Aehnlich ist es, wenn P und das Maß der Excentricität gegeben sind und der Querschnitt gefucht wird. Dann ist aus Gleichung 153, wenn mit R der Trägheitsradius bezeichnet wird, also $\mathcal{F} = F R^2$ gesetzt wird,

$$F = \frac{P}{K} \left(1 + \frac{p r}{R^2 \cos a l} \right) \dots \dots \dots 154.$$

Die Anwendung dieses Ausdruckes soll an einem einfachen Beispiele gezeigt werden.

144.
Beispiel.

Die Stütze sei eine Holzstütze von der Länge $l = 5 \text{ m} = 500 \text{ cm}$; der Querschnitt sei quadratisch und habe die Seitenlänge d ; die Excentricität soll so weit gehen können, daß die Kraft P ungünstigstenfalls in der Kante des Quadrates angreift. Dann ist

$$p = \frac{d}{2}, \quad F = d^2, \quad r = \frac{d}{2}, \quad \mathcal{F} = F R^2 = \frac{d^4}{12} = d^2 R^2,$$

$$R^2 = \frac{d^2}{12}, \quad E = 120000 \text{ kg}, \quad K = 65 \text{ kg}, \quad p r = \frac{d^2}{4}.$$

Ferner solle eine Kraft $P = 16000$ kg ertragen werden. Es ist also

$$a = \sqrt{\frac{P}{E \mathcal{J}}} = \sqrt{\frac{16000 \cdot 12}{120000 d^4}} = \frac{1,265}{d^2}, \text{ ferner } al = \frac{632,5}{d^2}; \text{ ferner}$$

$$F = \frac{16000}{65} \left(1 + \frac{d^2 \cdot 12}{4 d^2 \cos al} \right) = 246 \left(1 + \frac{3}{\cos \frac{632,5}{d^2}} \right).$$

Zunächst werde $d = 25$ cm angenommen; dann wird $F = 246 (1 + 5,66) = 1638$ qcm; demnach müßte $d = \text{ca. } 40$ cm sein. Wählt man $d = 35$ cm, so wird

$$F = 246 (1 + 3,45) = 1095 \text{ qcm}.$$

Dieser Werth würde einer Seitenlänge $d = 33$ cm entsprechen; 35 cm ist also ein angemessener Werth.

4) Empirische Formeln.

145.
Allgemeine
Formel

Der Umstand, daß man je nach der größeren oder geringeren Länge des Stabes mit verschiedenen Formeln rechnen muß, ist eine Unbequemlichkeit, der man durch Einführung empirischer Formeln abzuhefen gestrebt hat. Eine solche Formel muß für P bei kleinen Werthen von l nahezu oder genau die für einfachen Druck entwickelte Gleichung 143, dagegen bei großen Werthen von l die mit Rücksicht auf Zerknicken gefundene Gleichung 142 ergeben. Diesen Anforderungen entspricht folgende Formel³⁰⁾:

$$P = \frac{K F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \frac{K s F l^2}{C E}} \dots \dots \dots 155.$$

in welcher alle Buchstaben die früheren Bedeutungen haben.

Für $l = 0$ wird entsprechend der für kurze Stäbe aufgestellten Gleichung 143 auch hier $P = K F$; für den Werth $l = \infty$ mag obiger Formel die Gestalt

$$P = \frac{K F}{1 + \frac{K s F l^2}{C \mathcal{J} E}} \dots \dots \dots 156.$$

gegeben werden. Ist l sehr groß, bzw. $= \infty$, so ist das erste Glied im Nenner verschwindend klein gegen das zweite; die Formel lautet alsdann:

$$P = \frac{K F}{\frac{K s F l^2}{C E \mathcal{J}}} = \frac{C E \mathcal{J}}{s l^2},$$

demnach übereinstimmend mit der Formel 142 für lange Stäbe. Die Gleichung 155 kann also als empirische Formel angewendet werden und giebt auch ziemlich gut mit den Versuchen übereinstimmende Werthe. Aus derselben folgt

$$\frac{P}{K} = \frac{F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \frac{K s}{C E} F l^2},$$

und wenn der nur vom Material des Stabes und der Endbefestigung abhängige Factor $\frac{K s}{C E} = \alpha$ gesetzt wird,

$$\frac{P}{K} = \frac{F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \alpha F l^2} \dots \dots \dots 157.$$

³⁰⁾ Siehe: SCHÄFFER, Bestimmungen der zulässigen Spannung und der Querschnitte für Eifenconstructions. Deutsche Bauz. 1877, S. 498.

$\frac{P}{K}$ ist diejenige Querschnittsfläche, welche der Stab haben müßte, wenn er einfachen Druck zu erleiden hätte. Wir bezeichnen dieselbe mit f ; alsdann ist

$$f = \frac{F \mathcal{J}}{\mathcal{J} + \alpha f l^2} \dots \dots \dots 158.$$

Die Gleichung 158 kann benutzt werden, um die wirklich nöthige Querschnittsfläche zu berechnen. Denn nach derselben ist

$$F = \frac{f \mathcal{J}}{\mathcal{J} - \alpha f l^2} \dots \dots \dots 159.$$

Das zur Ermittlung der nothwendigen Querschnittsform und -Größe einzuschlagende Verfahren ist nun folgendes. Der größte Druck P , welcher auf den Stab wirken kann, ist bekannt, durch Rechnung oder Zeichnung gefunden; alsdann ist $f = \frac{P}{K}$ ebenfalls leicht zu ermitteln. Man construirt nun einen dieser Querschnittsfläche entsprechenden Querschnitt und ermittle das kleinste Trägheitsmoment desselben für eine Schweraxe, also \mathcal{J} . Bekannt sind jetzt die Größen f , \mathcal{J} , α und l , und die Gleichung 159 ergibt nun die dem Querschnitt wirklich zu gebende Flächengröße F . Fällt dieselbe größer aus, als die angenommene Querschnittsfläche, so ist letztere entsprechend zu vergrößern, das neue Trägheitsmoment einzusetzen, F aus Gleichung 159 aufs Neue zu berechnen und dieses Verfahren so lange zu wiederholen, bis eine genügende Uebereinstimmung der wirklichen Querschnittsfläche mit der nöthigen stattfindet. Dabei hat man sich jedoch vor dem Fehler zu hüten, bei den späteren Berechnungen den neuen Werth der Querschnittsfläche für f einzuführen, da ja f nicht die wirkliche Querschnittsfläche, sondern den für einen bestimmten Stab unveränderlichen Werth $\frac{P}{K}$ angiebt. Bei einiger Uebung ist es leicht, bereits bei der zweiten Rechnung eine entsprechende Querschnittsfläche zu finden.

Tabelle für die Werthe von $\alpha = \frac{Ks}{CE}$.

Constructions- material	Allgemeine Formel	Fall 1: Ein Ende ein- gespannt, das andere frei drehbar	Fall 2: Beide Enden frei drehbar	Fall 3: Beide Enden eingespannt	Fall 4: Ein Ende ein- gespannt, das andere lothrecht geführt
Schweißseifen } Flußseifen }	$\frac{0,00175}{C}$	0,00072	0,00018	0,000045	0,00009
Gußseifen	$\frac{0,004}{C}$	0,0016	0,0004	0,0001	0,0002
Holz	$\frac{0,0054}{C}$	0,0022	0,00054	0,00013	0,00026

146
Beispiele.

Die Anwendung obiger Formel soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

a) Für einen gußeisernen Stab mit drehbaren Enden und kreuzförmigem Querschnitt (Fig. 158) sei $P = 4800 \text{ kg}$ und $l = 200 \text{ cm}$. Alsdann ist $f = \frac{4800}{500} = 9,6 \text{ qcm}$ und bei vorläufig, wie in Fig. 158 angenommenem Querschnitt:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{12} (1,5 \cdot 12^3 + 10,5 \cdot 1,5^3) = \approx 219 \text{ cm}^4.$$

Ferner ist $\alpha = 0,0004$ (vergl. die umstehende Tabelle); mithin müßte

$$F = \frac{219 \cdot 9,6}{219 - 0,0004 \cdot 9,6 \cdot 200^2} = 32 \text{ qcm}$$

fein. Der gewählte Querschnitt hat

$$1,5 \cdot 2 \cdot 12 = 1,5 \cdot 1,5 = 33,75 \text{ qcm},$$

ist also etwas größer, als er zu fein braucht; er empfiehlt sich für die Ausführung.

Die genauere Berechnung nach Formel 145 u. 146 ergibt auf wenigstens eben so einfachem Wege: es muß $F \geq 9,69 \text{ cm}^2$, $\mathcal{J} \geq 8 \cdot 4,8 \cdot 2^3$, d. h. $\mathcal{J} \geq 153,6 \text{ cm}^4$ fein. Der gewählte Querschnitt ist also sehr reichlich.

β) Es sei $P = 3300 \text{ kg}$, $l = 100 \text{ cm}$; der Stab werde durch ein einfaches gleichschenkeliges Winkel-eisen gebildet; der Fall 4 kann angenommen werden. Zunächst ist $f = \frac{3300}{700} = \infty 4,7 \text{ qcm}$. Gewählt werde ein Winkel-eisen von $5,5 \times 5,5 \times 0,8 \text{ cm}$; das \mathcal{J}_{\min} dieses Winkel-eisens ist nach dem Normal-Profil-buch $9,38 \text{ cm}^4$, ferner $\alpha = 0,00009$. Demnach muß

$$F = \frac{4,7 \cdot 9,38}{9,38 - 0,00009 \cdot 4,7 \cdot 100^2} = 8,55 \text{ qcm}$$

fein. Das gewählte Winkel-eisen hat eine Querschnittsfläche von $8,16 \text{ qcm}$.

Die genauere Berechnung nach Formel 145 u. 146 erweist, daß

$$\mathcal{J}_{\min} \geq \frac{5}{4} \cdot 3,3 \cdot 1^2, \text{ also } \mathcal{J}_{\min} \geq 4,125 \text{ cm}^4 \text{ und } F \geq 4,7 \text{ qcm}$$

fein muß. Das Winkel-eisen mit $F = 8,16 \text{ qcm}$ und $\mathcal{J}_{\min} = 9,38 \text{ cm}^4$ würde demnach reichlich genügen.

γ) In einem Holzstabe mit quadratischem Querschnitt und nicht beweglichen Enden, bei welchem Fall 4 vorausgesetzt werden kann, herrscht ein Druck $P = 9500 \text{ kg}$; ferner sei $l = 300 \text{ cm}$. Es ist $F = \frac{9500}{65} = 146 \text{ qcm}$. Wird vorläufig die Querschnittsseite mit 18 cm gewählt, so ist

$$\mathcal{J} = \frac{18^4}{12} = 8748 \text{ cm}^4, \quad \alpha = 0,00026 \quad \text{und} \quad F = \frac{146 \cdot 8748}{8748 - 0,00026 \cdot 146 \cdot 300^2} = \infty 240 \text{ qcm}.$$

Der angenommene Querschnitt hat $18 \times 18 = 324 \text{ qcm}$, ist also zu groß.

Wird $h = 17 \text{ cm}$ gewählt, so wird

$$\mathcal{J} = \frac{17^4}{12} = 6960 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad F = \frac{146 \cdot 6960}{6960 - 0,00026 \cdot 146 \cdot 300^2} = 286 \text{ qcm};$$

der gewählte Querschnitt hat $17 \times 17 = 289 \text{ qcm}$, ist also sehr passend.

Die genauere Berechnung ergibt, daß

$$\mathcal{J}_{\min} \geq 41 \cdot 9,5 \cdot 3^2, \text{ d. h. } \mathcal{J}_{\min} \geq 3505 \text{ cm}^4$$

fein muß; demnach würde schon ein quadratischer Querschnitt genügen, dessen Seitenlänge d aus der Bedingung folgt:

$$\frac{d^4}{12} = 3505 \quad \text{oder} \quad d = 14,32 \text{ cm}.$$

Da dieser Querschnitt außerdem eine Fläche $d^2 = 204,5 \text{ qcm}^2$ aufweist, während f nur gleich 146 qcm zu fein braucht, so ist er ausreichend.

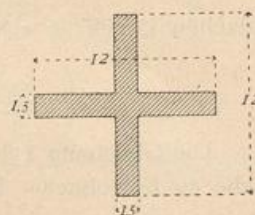
Aus vorstehenden Beispielen erhellt zur Genüge, daß das Bedürfnis für empirische Formeln nicht groß ist; die Berechnung nach den genauen Ausdrücken 145 u. 146 ist durchaus nicht schwierig.

Die üblen Erfahrungen, welche man neuerdings bei verschiedenen großen Bränden mit eisernen Stützen gemacht hat, führten zur Untersuchung der Frage, in welcher Weise die Tragfähigkeit solcher Stützen bei erhöhter Temperatur verändert werde, und zur Aufstellung von Formeln für diese Tragfähigkeit. Die nachstehend aufgeführten Formeln sind von Möller³¹⁾ auf Grund von Versuchen unter

147.
Tragfähigkeit
der Stützen
bei erhöhter
Temperatur.

³¹⁾ Siehe: MÖLLER, M. u. R. LÜHMANN. Ueber die Widerstandsfähigkeit auf Druck beanspruchter eiserner Baukonstruktionsteile bei erhöhter Temperatur. Berlin 1888.

Fig. 158.



folgenden Annahmen aufgestellt. Die dem Feuer zugewendete Seite der Stütze zeigt schwache Rothgluth; die andere Seite hat eine bis zu 600 Grad C. geringere Temperatur, welche durch Anspritzen der Säule mit kaltem Wasser herbeigeführt ist; die Beanspruchung der Stützen erfolgt um 1 cm excentrisch, zwischen Gelenken (Fall 2). Die Stütze soll die Last P noch mit einiger Sicherheit tragen. Die allgemeine Formel, in welcher alle Buchstaben die frühere Bedeutung haben, lautet (vergl. Art. 145, S. 136)

$$P = KF \frac{1}{1 + \alpha \frac{Fl^2}{\mathcal{F}}}$$

Die Zahlenwerthe K und α ergeben sich aus nachstehenden Formeln:

$$\text{für Schmiedeeisen: } P = 1000 F \frac{1}{1 + 0,0004 \frac{Fl^2}{\mathcal{F}}} \dots \dots \dots 160.$$

$$\text{für Gufseisen: } P = 1200 F \frac{1}{1 + 0,0004 \frac{Fl^2}{\mathcal{F}}} \dots \dots \dots 161.$$

In diesen Ausdrücken ist l die freie Länge zwischen den Gelenken; wenn die Stützung als zwischen parallelen Enden erfolgend angenommen werden kann, so ist statt l nur $\frac{2}{3}$ der wirklich vorhandenen freien Länge einzuführen.

2. Kapitel.

Träger.

Wie bereits im Eingange zum vorliegenden Abschnitte gefagt wurde, versteht man unter Trägern solche Bau-Constructionen, bei denen die Belastungen ausschließlich oder vorwiegend senkrecht zur Richtung der Längsaxe wirken. Die Längsaxe kann sowohl eine gerade, wie eine gebrochene, bezw. krumme Linie sein. Demnach rechnen wir zu den Trägern im weiteren Sinne auch die Dachstühle, die Sprengwerke u. A., bei denen die Längsaxe nicht so deutlich vor die Augen tritt, wie bei den gewöhnlichen Balken; ferner auch die Gewölbe, bei denen die Längsaxe eine krumme Linie ist.

148.
Allgemeines.

Um die obige Erklärung der Träger auch für diese Constructionen unbedingt richtig zu stellen, könnte man in die Erklärung statt der Längsaxe die Verbindungslinie der Auflagerpunkte einführen und demnach die Träger folgendermaßen erklären: Träger sind Bau-Constructionen, bei denen die Belastungen ausschließlich oder vorwiegend senkrecht zur Verbindungslinie der Auflager, d. h. der Stützpunkte der Construction, wirken. Im vorliegenden Kapitel sollen nur die Träger im engeren Sinne, welche man gewöhnlich als Balken bezeichnet, behandelt werden, während die Dachstühle und die Gewölbe in den beiden nächsten Abschnitten besprochen werden. Von den Sprengwerken wird bei den Dachstühlen eine besondere Form vorgeführt werden.

Die auf die Bau-Constructionen wirkenden äußeren Kräfte sind nach Art. 2 (S. 6):
1) die Belastungen, d. h. die Eigengewichte und die Nutzlasten, und 2) die Auf-

149.
Äußere
Kräfte.

lager- oder Stützendrücke (auch Reactionen der Auflager genannt), d. h. diejenigen Kräfte, welche in den Auflagern auf die Constructionen übertragen werden.

150.
Eintheilung.

Die Träger sind entweder:

1) Balkenträger, d. h. Träger, auf welche bei lothrechten Belastungen nur lothrechte Stützendrücke wirken.

Fig. 159 zeigt einen Balkenträger; D_0 und D_1 sind die Auflagerdrücke.

2) Sprengwerks- und Hängewerksträger, d. h. Träger, welche bei lothrechten Belastungen schiefe Stützendrücke erleiden; die schiefen Auflagerdrücke setzen sich aus wagrechten und lothrechten Seitenkräften zusammen.

Wirkt die wagrechte Seitenkraft auf den Träger als Druck, so hat man den Sprengwerksträger (Fig. 160); falls die Trägeraxe eine krumme Linie ist, den Bogenträger. Wirkt die wagrechte Seitenkraft auf den Träger als Zug, so hat man den Hängewerksträger (Fig. 161).

Ob ein Träger ein Balkenträger, Sprengwerks- oder Hängewerksträger ist, hängt von der Art seiner Auflagerung ab. Die Auflager sind entweder feste, d. h. solche, welche keine Bewegung des Trägerendes gegen die stützenden Theile (das Mauerwerk) gestatten, oder sie sind bewegliche, d. h. solche, bei denen das Trägerende gegen das Mauerwerk sich auf vorgeschriebener Bahn so weit verschieben kann, wie dies die elastischen, bei der Belastung auftretenden und die durch Temperatur bedingten Längenänderungen verlangen. Bei den festen Auflagern soll also eine Verschiebung des Trägerendes in jeder Richtung, sowohl wagrecht, wie lothrecht, verhindert werden; die an dieser Stelle auf den Träger übertragene Kraft, der Auflagerdruck, muß demnach sowohl eine wagrechte, wie eine lothrechte Seitenkraft haben können; bei den beweglichen Auflagern wird reibungslose Beweglichkeit angenommen; der Druck kann also zwischen den beiden einander hier berührenden Körpern — Träger und Pfeiler — nur senkrecht zur Berührungsfläche, d. h. zur Auflagerbahn gerichtet sein. Wenn diese Bahn wagrecht ist, so muß demnach der Auflagerdruck lothrecht sein.

Allgemein hat also bei einem festen Auflager der zwischen Träger- und Stützmauerwerk wirkende Druck eine schiefe Richtung, genauer gesagt: er kann eine beliebige Richtung in der Ebene der Construction haben; bei reibungslos wagrecht beweglichem Auflager muß der Druck dagegen lothrecht gerichtet sein. Ist bei einem Träger auf zwei Stützpunkten das eine Auflager wagrecht beweglich, also

Fig. 159.

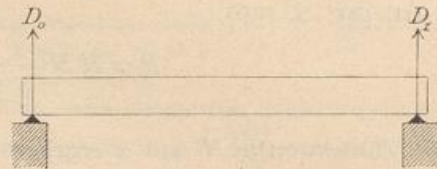


Fig. 160.

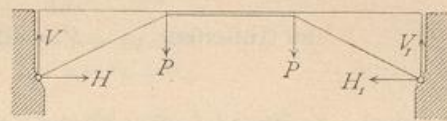
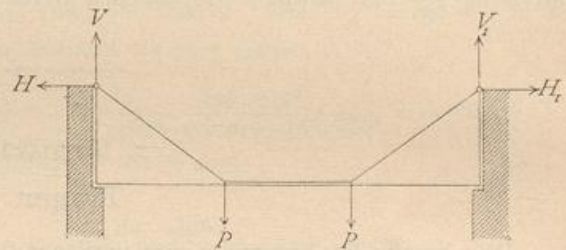


Fig. 161.



der Auflagerdruck an demselben lothrecht, so muß auch der Stützendruck des anderen Auflagers für lothrechte Belastung lothrecht sein; denn die etwaige wagrechte Seitenkraft desselben würde die einzige wagrechte Kraft sein, welche auf den Träger wirkt, und dieselbe muß des Gleichgewichtes wegen gleich Null sein. Wenn also ein Auflager fest ist und das andere wagrechte reibungslose Verschiebung des betreffenden Trägerendes gestattet, so ist der Träger ein Balkenträger. Auch wenn ein Auflager fest ist, eine Anzahl anderer aber wagrechte und reibungslose Verschiebung gestatten, hat man Balkenträger.

Für den Hochbau kommen die Hängewerkträger (Fig. 161) nur ganz ausnahmsweise zur Verwendung; auch die Sprengwerksträger werden wenig angewendet, weil die wagrechten durch sie auf die Mauern übertragenen Kräfte große Mauerflächen bedingen. Wenn es aber möglich ist, die Auflager der Sprengwerksträger tief zu legen, so daß die wagrechten Kräfte sofort in die Fundamente gelangen können, so empfehlen sich diese Träger sehr. In dieser Weise sind viele große Bahnhofshallen der Neuzeit mit Sprengwerkträgern ausgeführt. Immerhin sind die Balkenträger für den Hochbau die weitaus wichtigsten.

Man unterscheidet ferner statisch bestimmte Träger und statisch unbestimmte Träger.

Unter statisch bestimmten Trägern versteht man solche, bei denen zur Ermittlung der Stützendrücke die Gesetze der Statik starrer Körper hinreichen; bei den statisch unbestimmten Trägern genügen zur Ermittlung der Auflagerdrücke diese Gesetze nicht.

Zur Ermittlung der Stützendrücke bietet die Statik starrer Körper, wenn alle Kräfte in einer Ebene wirkend angenommen werden können, drei Gleichungen (vergl. Art. 6, S. 8); falls also in den Stützendrücken nur drei Unbekannte enthalten sind, so genügen diese drei Gleichungen zur Ermittlung der Unbekannten, d. h. die Construction ist statisch bestimmt. Enthalten dagegen die Auflagerdrücke mehr als drei Unbekannte, so genügen die drei Gleichungen zu ihrer Ermittlung nicht mehr; der Träger ist alsdann statisch unbestimmt. Die fehlenden Gleichungen liefert die Elasticitätslehre.

Hierbei kommen zwei Hauptfälle vor:

1) Alle drei Gleichgewichtsbedingungen sind anwendbar, d. h. die Stützendrücke enthalten sowohl wagrechte, wie lothrechte Seitenkräfte. Dieser Fall tritt bei den Sprengwerkträgern, Bogenträgern stets, bei den Balkenträgern dann ein, wenn die Belastungen auch wagrechte Seitenkräfte haben (z. B. bei Dachbindern mit Windbelastung);

2) Nur zwei Gleichgewichtsbedingungen geben verwendbare Gleichungen. Dieser Fall tritt bei nur lothrecht belasteten Balkenträgern ein. Alsdann wird die Gleichgewichtsbedingung, welche besagt, daß die wagrechten Kräfte die algebraische Summe Null haben müssen, dazu verwendet, nachzuweisen, daß die Auflagerdrücke lothrecht sind. Für die Berechnung bleiben dann von den in Art. 6 (S. 8) angegebenen Gleichgewichtsbedingungen die folgenden verwendbar:

- α) die algebraische Summe der lothrechten Kräfte muß gleich Null sein;
 - β) die algebraische Summe der statischen Momente aller äußeren Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene als Drehpunkt, muß gleich Null sein.
- Der einfachste Fall ist der des Balkens auf zwei Stützen. Bei diesem sind

zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten (D_0 und D_1 in Fig. 159) verfügbar; der Fall ist also statisch bestimmt. Sind dagegen drei Stützpunkte vorhanden, so hat man drei Unbekannte (D_0 , D_1 und D_2), aber nur zwei Gleichungen, also einen statisch unbestimmten Fall.

Man nennt die Träger, welche mehr als zwei Stützpunkte haben, kontinuierliche oder durchgehende Träger; dieselben sind statisch unbestimmte Träger.

a) Aeusere Kräfte der Balkenträger.

151.
Momente
und
Querkräfte.

Die Querschnitte der Balken, bzw. der Stäbe, aus denen sich die Balken zusammensetzen, sind so zu bestimmen, dass die zulässigen Beanspruchungen auch unter ungünstigsten Bedingungen in keinem Theile der Querschnittsflächen je überschritten werden. Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde, sind aber für die in den einzelnen Querschnittsstellen entstehenden Beanspruchungen oder Spannungen die äusseren Kräfte massgebend, insbesondere zwei von den äusseren Kräften abhängige Grössen: die Biegemomente, auch kurz Momente genannt, und die Quer- oder Transversalkräfte. Für jeden Querschnitt ergeben sich bei einer gegebenen Belastung ein ganz bestimmtes Moment und eine ganz bestimmte Querkraft. Wir haben bei den lothrecht belasteten Balkenträgern nur mit lothrechten Kräften zu thun und werden demnach zunächst und, falls das Gegentheil nicht besonders bemerkt wird, stets solche voraussetzen.

Es möge hier daran erinnert werden, dass man bei nur lothrechten Kräften als Querkraft eines Querschnittes die Mittelkraft aller an der einen Seite dieses Querschnittes auf den Balken wirkenden Kräfte bezeichnet (siehe Art. 94, S. 70). Die Querkraft hat, absolut genommen, dieselbe Grösse, möge man den Trägertheil rechts oder denjenigen links vom betreffenden Querschnitt gelegenen Trägertheil der Betrachtung zu Grunde legen; denn die Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden Kräfte muss derjenigen an der anderen Seite, des Gleichgewichtes wegen, genau gleich sein. Nennt man diese Mittelkräfte bzw. Q_{links} und Q_{rechts} , so muss, da diese beiden Kräfte alle an dem Körper wirkenden äusseren Kräfte in sich schliessen, stattfinden:

$$Q_{links} + Q_{rechts} = 0, \text{ also } Q_{rechts} = - Q_{links}.$$

Wirkt also die Querkraft auf den Theil links vom Querschnitt auf den Balken nach oben, so wirkt sie auf den Theil rechts vom Querschnitt nach unten und umgekehrt. Oder was dasselbe befragt: Führt man die Querkraft auf den Theil links vom Querschnitt als positiv ein, wenn sie nach oben wirkt, so muss man die Querkraft, welche auf den Theil rechts nach unten wirkt, ebenfalls als positiv einführen; beide Richtungen ergänzen einander. Bei den nachfolgenden Untersuchungen werden die Querkräfte als positiv eingeführt, wenn sie auf den Trägertheil links vom betrachteten Querschnitt nach oben, bzw. auf den Trägertheil rechts vom betrachteten Querschnitt nach unten wirken; als negativ, wenn sie auf den Theil links nach unten, bzw. auf den Theil rechts nach oben wirken. Eben so wird daran erinnert, dass das Biegemoment für einen Querschnitt das resultirende Moment aller an der einen Seite des Querschnittes wirkenden Kräfte, bezogen auf die im Schwerpunkt des Querschnittes senkrecht zur Kräfteebene stehende Axe als Drehaxe bedeutet. Bei den Trägern mit gegliederter Wand liegt die Drehaxe in der oberen oder unteren Gurtung, je nach der Form des Fachwerkes: bei nur lothrechten äusseren Kräften ändert sich dadurch am Werth des Moments nichts. In

Art. 94 (S. 70) ist bereits nachgewiesen, daß es gleichgültig ist, an welcher Seite des Querschnittes man die Kräfte betrachtet; nur muß man mit dem Vorzeichen vorsichtig sein. Weiterhin sollen die Momente als positiv eingeführt werden, wenn sie auf den Theil links vom Querschnitt nach rechts drehend (also in der Richtung des Uhrzeigers), bzw. auf den Theil rechts vom Querschnitt nach links drehend wirken, d. h. den Balken so zu drehen streben, daß er seine convexe Seite nach unten kehrt; als negativ, wenn sie den Balken so zu drehen streben, daß er seine convexe Seite nach oben kehrt.

Die Belastungen sind entweder nach einem bestimmten Gesetze fortlaufend über den Träger vertheilt — im Hochbau meistens gleichmäßig über die wagrechte Projection der Trägeraxe, oder sie greifen in einzelnen Punkten als Einzellaften an. Zu den gleichmäßig über die wagrechte Projection vertheilten Belastungen rechnet man die Eigengewichte der Träger, welche Annahme genügend genau ist.

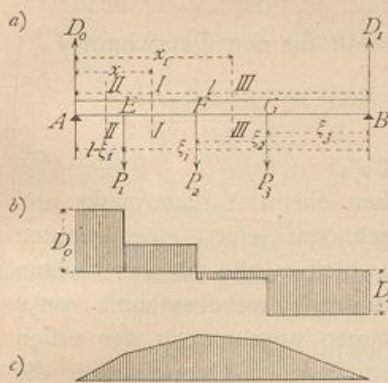
Die Größe des Eigengewichtes von Decken-Constructionen kann nach den Angaben in Art. 23 u. 24 (S. 18) angenommen werden; bezüglich der Annahmen für die Nutzlast sei auf Art. 26 (S. 20) verwiesen. Da die Belastungen bekannt sind, handelt es sich zunächst um die Ermittlung der durch dieselben erzeugten Stützendrücke, Momente und Querkräfte, ferner um die diesen entsprechenden Querschnitts-abmessungen. Für jeden Querschnitt ist die ungünstigste mögliche Belastung einzuführen.

In den folgenden Artikeln soll für die wichtigsten Balkenträger und für verschiedene Belastungsarten die Ermittlung der Auflagerdrücke, der Querkräfte und Momente auf dem Wege der Rechnung, bzw. auf demjenigen der Construction gezeigt werden; die Ergebnisse gelten sowohl für vollwandige, wie für Träger mit gegliederter Wand (Fachwerkträger).

1) Balkenträger auf zwei Stützen.

Die Stützweite des Trägers, von Auflagermitte zu Auflagermitte gerechnet, sei l .
Erster Belastungsfall: Der Träger wird durch beliebige Einzellaften belastet.

Fig. 162.



Die Laften sind P_1, P_2, P_3 , wie aus neben stehender Fig. 162 ersichtlich; für alle Querschnitte des Balkens sollen die Querkräfte und Momente ermittelt werden.

a) Berechnung. Zunächst sind die nicht gegebenen äußeren Kräfte, die Auflagerdrücke D_0 und D_1 , zu bestimmen. Da Gleichgewicht stattfindet, so ist die algebraische Summe der statischen Momente aller äußeren Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null. Um D_0 zu ermitteln, wählt man zweckmäßig einen Punkt auf der Richtungslinie von D_1 als Drehpunkt, damit die zweite Unbekannte D_1 das statische Moment

Null habe, also nur eine Unbekannte in der Gleichung vorkomme. Alsdann ist, wenn B als Drehpunkt für die Gleichung der statischen Momente gewählt wird,

$$0 = D_0 l - P_1 \xi_1 - P_2 \xi_2 - P_3 \xi_3,$$

$$D_0 = \frac{P_1 \xi_1}{l} + \frac{P_2 \xi_2}{l} + \frac{P_3 \xi_3}{l} = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) \dots \dots \dots 162.$$

152.
Belastungen.

153.
Belastung
durch
Einzellaften.

Wählt man in gleicher Weise ein zweites Mal A als Drehpunkt, so ergibt sich

$$D_1 = \frac{P_1(l - \xi_1)}{l} + \frac{P_2(l - \xi_2)}{l} + \frac{P_3(l - \xi_3)}{l} = \sum_0^l \left[\frac{P(l - \xi)}{l} \right] \quad 163.$$

Der Beitrag, welchen jede Einzellaft zum Gesamtauflagerdruck leistet, ist, wie man aus den Gleichungen 162 u. 163 erfieht, ganz unabhängig von der Gröfse und Art der übrigen Belastungen; die Auflagerdrücke sind die Summen der durch die einzelnen Lasten erzeugten Einzeldrücke.

Nunmehr lassen sich die Querkräfte ermitteln.

Für einen beliebigen Querschnitt II , im Abstände x vom linken Auflager A , ist die Querkraft, als Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden äufseren Kräfte,

$$Q_x = D_0 - P_1 \quad 164.$$

In diesem Ausdrucke kommt die Abscisse x des Querschnittes gar nicht vor; die Querkraft ist also, so lange der angegebene Ausdruck überhaupt gilt, ganz unabhängig von x , d. h. constant. Der Ausdruck gilt aber nur für die Querschnitte zwischen E und F ; denn für einen Querschnitt links von E , etwa für $IIII$, ist

$$Q_{II} = D_0;$$

für einen solchen rechts von F , etwa für $IIIIII$, ist

$$Q_{III} = D_0 - P_1 - P_2 = \sum_0^l \left(\frac{P\xi}{l} \right) - (P_1 + P_2) = \sum_0^l \left(\frac{P\xi}{l} \right) - \sum_0^{x_1} (P).$$

Daraus folgt: Falls eine Belastung nur durch Einzellaften stattfindet, ist die Querkraft für alle Querschnitte zwischen je zwei Lastpunkten, so wie zwischen einem Auflagerpunkt und einem Lastpunkt constant; eine Aenderung der Querkraft findet nur in den Lastpunkten statt.

Das Gesetz der Aenderung der Querkräfte wird sehr anschaulich, wenn man in jedem Querschnitte die daselbst stattfindende Querkraft als Ordinate nach beliebigem (aber für alle Querschnitte gleichem) Mafsstabe aufträgt und die Endpunkte der Ordinaten verbindet. Hierdurch ergibt sich die in Fig. 162 b gezeichnete Linie, in welcher die positiven Werthe von der Abscisse aus nach oben, die negativen Werthe nach unten getragen sind.

Was die Bestimmung der Momente anbelangt, so ist für den Querschnitt II

$$M_1 = D_0 x - P_1(x - l + \xi_1) \quad 165.$$

Für den Querschnitt $IIIIII$ ist

$$M_{III} = D_0 x_1 - P_1(x_1 - l + \xi_1) - P_2(x_1 - l + \xi_2) \quad 166.$$

Innerhalb je zweier Lastpunkte, so wie zwischen einem Auflagerpunkt und einem Lastpunkt ändert sich demnach das Moment nach dem Gesetze einer geraden Linie; denn für verschiedene Werthe von x , bzw. x_1 bleiben alle auf den rechten Seiten der Gleichungen 165 u. 166 vorkommenden Ausdrücke mit Ausnahme von x und x_1 constant; diese einzigen Veränderlichen kommen aber nur in der ersten Potenz vor. Trägt man also auch hier in den verschiedenen Querschnitten die Werthe von M als Ordinaten auf, so erhält man als Verbindungslinien der Endpunkte gerade Linien; in jedem Lastpunkt ändert sich der Ausdruck für M , also auch die Gerade. In Fig. 162 c ist die Aenderung der Momente graphisch dargestellt.

Da eine Gerade ihre grösste Ordinate nur am Anfangspunkte oder Endpunkte haben kann, diese aber hier mit den Lastpunkten zusammenfallen, so folgt, dafs die

größten Momentenwerthe an den Lastpunkten stattfinden. Dieses Ergebniss ist wichtig. Wenn nur eine Einzellaft P vorhanden ist, so ist demnach das grösste Moment stets am Lastpunkte. Liegt alsdann P in den Abständen ξ , bzw. $l - \xi$ von den beiden Auflagern, so ist das Moment am Lastpunkte, also das grösste Moment, welches für die Querschnittsbildung massgebend ist,

$$M_{max} = \frac{P(l - \xi)\xi}{l}$$

Liegt P in der Mitte des Balkens, so ist $\xi = (l - \xi) = \frac{l}{2}$, also

$$M_{max} = \frac{Pl}{4}$$

Sind zwei Einzellaften auf dem Balken, so braucht man nur die beiden Momente an den Lastpunkten zu ermitteln; das grösere von beiden ist zugleich das grösste. Wenn beide Lasten gleich gross, und zwar je gleich P sind und im gleichen Abstände $\frac{a}{2}$ von der Balkenmitte liegen, so ist das Moment an jedem Lastpunkte

$$M = \frac{P(l - a)}{2}$$

Wenn endlich mehrere Lasten vorhanden sind, braucht man nur die Momente an den Lastpunkten aufzufuchen. Falls der Balken constanten Querschnitt erhält (wie dies z. B. beim Walzbalken der Fall ist), so ist dieser nach dem grössten überhaupt stattfindenden Momente zu bestimmen.

Beispiel. Ein schmiedeeiserner Unterzug (Fig. 163) von 8 m Stützweite trägt 7 Balken, deren Abstand von Mitte zu Mitte je 1 m beträgt. Jeder Balken belastet den Unterzug mit einem Gewicht von 3000 kg. Die Auflagerdrücke, Querkräfte und Momente sind zu ermitteln. Nach Gleichung 162 ist

$$D_0 = \frac{3000}{8} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 10500 \text{ kg};$$

eben so nach Gleichung 163

$$D_1 = \frac{3000}{8} 28 = 10500 \text{ kg}.$$

In Fällen, wie der vorliegende, wo die Belastungen symmetrisch zur Mitte des Balkens liegen und die Abstände derselben gleich sind, fasst man bequemer alle Lasten zu einer Mittelkraft, hier ihrer Summe, zusammen, die in der Balkenmitte angreift. Alsdann ist

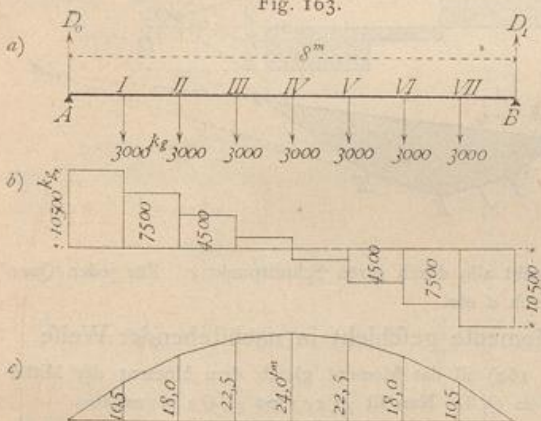
$$R = 7 \cdot 3000 = 21000 \text{ kg} \quad \text{und} \quad D_0 = \frac{21000}{l} \cdot \frac{l}{2} = 10500 \text{ kg} = D_1.$$

Die Querkräfte für die verschiedenen Querschnitte sind:

- | | |
|--|--|
| von A bis I = 10500 kg, | von IV bis V = 10500 - 4 · 3000 = - 1500 kg, |
| » I » II = 10500 - 3000 = 7500 kg, | » V » VI = 10500 - 5 · 3000 = - 4500 kg, |
| » II » III = 10500 - 2 · 3000 = 4500 kg, | » VI » VII = 10500 - 6 · 3000 = - 7500 kg, |
| » III » IV = 10500 - 3 · 3000 = 1500 kg, | » VII » B = 10500 - 7 · 3000 = - 10500 kg. |

Im Lastpunkte IV (in der Trägermitte) geht die Querkraft von den positiven zu den negativen Werthen über.

Fig. 163.



Die Momente in den Lastpunkten sind:

$$\begin{aligned} M_I &= 10500 \cdot 1 = 10500 \text{ kgm} = 1050000 \text{ kgcm}, \\ M_{II} &= 10500 \cdot 2 - 3000 \cdot 1 = 18000 \text{ kgm} = 1800000 \text{ kgcm}, \\ M_{III} &= 10500 \cdot 3 - 3000 \cdot 1 - 3000 \cdot 2 = 22500 \text{ kgm} = 2250000 \text{ kgcm}, \\ M_{IV} &= 10500 \cdot 4 - 3000 (1 + 2 + 3) = 24000 \text{ kgm} = 2400000 \text{ kgcm}, \\ M_V &= 10500 \cdot 5 - 3000 (1 + 2 + 3 + 4) = 22500 \text{ kgm} = 2250000 \text{ kgcm} = M_{III}, \\ M_{VI} &= M_{II}, \quad M_{VII} = M_I, \quad M_A = M_B = 0. \end{aligned}$$

Hiernach sind die Momente und Querkräfte in Fig. 163c u. 163b aufgetragen.

β) Graphische Ermittlung. Um die Auflagerdrücke zu ermitteln, construirt man für die gegebenen Kräfte und den beliebigen Pol O (Fig. 164) das Kraft- und Seilpolygon, ziehe die Schluslinie ab und parallel zu dieser die Linie $O\varepsilon$ durch den Pol O ; dieselbe theilt die Kraftlinie in zwei Theile, von denen $\overline{\delta\varepsilon} = D_1$ und $\overline{\varepsilon\alpha} = D_0$ ist (vergl. Art. 19, S. 16). Nun lassen sich die Querkräfte graphisch leicht ermitteln.

Für alle Querschnitte von A bis E ist die Querkraft gleich D_0 , d. h. gleich $\varepsilon\alpha$ (Fig. 164). Zieht man also durch ε und α je eine Wagrechte, so giebt deren Abstand die GröÙe der Querkraft zwischen A und E an. Zwischen E und F ist die Querkraft gleich $D_0 - P_1 = \varepsilon\alpha - \alpha\beta = \varepsilon\beta$; man ziehe also durch β eine wagrechte Linie; alsdann giebt deren Abstand von der durch ε gezogenen Geraden an jeder Stelle zwischen E und F die GröÙe der Querkraft. Eben so ist zwischen F und G die Strecke $\varepsilon\gamma$, zwischen G und B die Strecke $\varepsilon\delta$ die Querkraft.

Die Querkraft als Mittelkraft aller an der einen Seite des Querschnittes wirkenden Kräfte geht nach Art. 18 (S. 14) durch den Schnittpunkt derjenigen Seilpolygonseiten, welche bezw. der ersten und letzten dieser Kräfte vorangehen und folgen. Für einen Querschnitt zwischen E und F sind D_0 und P_1 die Kräfte, ab und III die betreffenden Seilpolygonseiten; die Querkraft geht also durch ihren Schnittpunkt c . Für jeden Querschnitt zwischen II und III geht die Querkraft durch d etc.

Die graphische Bestimmung der Momente geschieht in nachstehender Weise.

Für einen beliebigen Querschnitt II (Fig. 164) ist das Moment gleich dem Moment der Mittelkraft, d. h. hier der Querkraft. Demnach ist $M_1 = Q_1 h$. Nun ist $\triangle cef \sim \triangle O\varepsilon\beta$; mithin

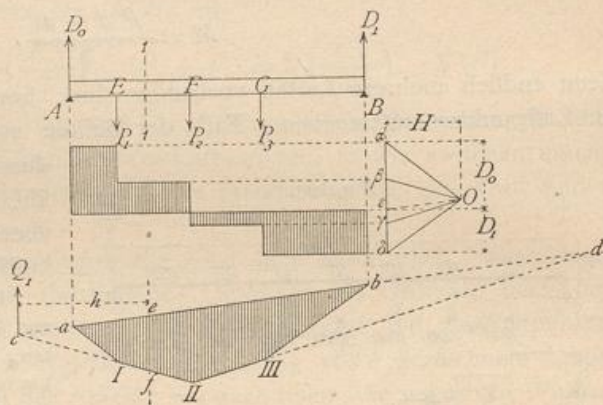
$$\frac{ef}{h} = \frac{\varepsilon\beta}{H}, \quad \text{und, da } \varepsilon\beta = Q_1 \text{ ist, } ef = \frac{Q_1 h}{H} = \frac{M_1}{H}, \quad \text{also } M_1 = H \cdot ef.$$

In vorstehendem Ausdruck für M ist H , der wagrechte Abstand des Poles von der Kraftlinie oder der Polabstand, für alle Querschnitte constant; die GröÙe des Momentes ist also mit ef , d. h. der lothrechten Höhe des Seilpolygons veränderlich. Daraus folgt:

Das Moment in jedem Querschnitte ist gleich dem Producte aus dem lothrechten Abstände der Seilpolygonseiten in diesem Querschnitte und dem Polabstand. Die vom Seilpolygon gebildete Fläche heißt die Momentenfläche.

Die Momente sind Producte aus Kräften und Längen; H ist eine Kraft, wie alle Strahlen und Linien im Kraftpolygon, und kann nach Obigem beliebig angenommen werden, etwa mit 10^t , 20^t etc. Da das Moment in irgend einem Querschnitt einen ganz bestimmten Werth hat, der natürlich von einem beliebig gewählten H unabhängig ist, so wird die Höhe des Seilpolygons desto größer, je kleiner H ist, und umgekehrt.

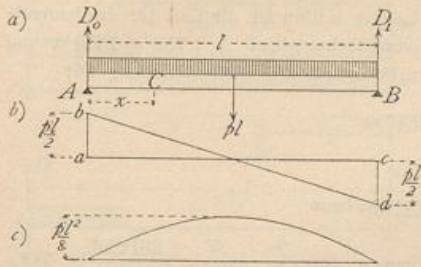
Fig. 164.



Zweiter Belastungsfall: Der Träger ist über seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

154.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.

Fig. 165.



Die Belastung für die Längeneinheit des Trägers (Fig. 165) sei p ; alsdann ist die Mittelkraft gleich der Gesamtlast, also gleich $p l$ und greift in der Trägermitte an. Die Gleichung der statischen Momente für B als Drehpunkt heisst demnach:

$$D_0 l - p l \frac{l}{2} = 0,$$

und es wird

$$D_0 = \frac{p l}{2}; \text{ eben so } D_1 = \frac{p l}{2}. \quad 167.$$

Die Querkraft für einen beliebigen Querschnitt C im Abstände x von A ist

$$Q_x = D_0 - p x = \frac{p l}{2} - p x = \frac{p}{2} (l - 2 x) \dots \dots \dots 168.$$

Die graphische Darstellung der Veränderung der Querkraft ergibt die Linie der Gleichung 168, d. h. eine Gerade. Für $x = 0$ ist $Q_0 = \frac{p l}{2}$; für $x = l$ ist $Q_l = -\frac{p l}{2}$. Q_x wird Null für $l - 2 x = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$. Die Ordinaten der Linie $b d$ (Fig. 165 b) sind also die Querkräfte an den verschiedenen Stellen des Balkens.

Das Moment für den Querschnitt C ist

$$M_x = D_0 x - p x \frac{x}{2} = \frac{p l}{2} x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l x - x^2) \dots \dots \dots 169.$$

Trägt man die Momente in den verschiedenen Querschnitten als Ordinaten auf, so erhält man die Linie der Gleichung 169, d. h. eine Parabel. Für $x = 0$ ist $M_0 = 0$; für $x = l$ ist $M_l = 0$. M_x hat seinen Größtwerth für

$$\frac{d M_x}{d x} = \frac{p}{2} (l - 2 x) = 0, \text{ d. h. für } x = \frac{l}{2}; \text{ demnach}$$

$$M_{max} = \frac{p}{2} \left[l \frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] = \frac{p l^2}{8} \dots \dots \dots 170.$$

Hiernach kann die Parabel leicht construirt werden (Fig. 165 c). Man trage $\frac{p l^2}{8}$ nach beliebig angenommenem Momenten-Maßstabe auf und verzeichne in bekannter Weise die Parabel; alsdann sind alle Ordinaten auf diesem Maßstabe zu messen.

Nennt man die gesammte auf den Träger entfallende Last $p l = P$, so kann man auch setzen

$$M_{max} = \frac{P l}{8} \dots \dots \dots 171.$$

Dieser Ausdruck ist oft bequemer, als Gleichung 170. Wenn eine Last P als Einzelkraft in der Mitte wirkt, so erzeugt sie nach Art. 153 (S. 145) ein Maximalmoment $M_{max} = \frac{P l}{4}$, d. h. ein doppelt so großes Moment, als die gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Last P .

Beispiele. 1) Ein Flurgang von 4 m Lichtweite ist mit einer Decke aus Kappengewölben zwischen eisernen I-Trägern zu überdecken; die Spannweite der Kappen sei 2,2 m; die Träger sollen berechnet werden.

Die Stützweite der Träger, d. h. die Entfernung von Auflagermitte zu Auflagermitte, kann zu 4,2 m, d. i. zu 430 cm angenommen werden; alsdann ist $l = 430$ cm. Auf das laufende Meter des Trägers kommt eine zu tragende Grundfläche von 2,2 m Breite und 1 m Länge; mithin ist die Last für das laufende Meter Träger, bei einer Größtbelastung von 750 kg für 1 qm Grundfläche, gleich $2,2 \cdot 750 = 1650$ kg und für das laufende Centimeter Träger $p = 16,5$ kg. Die Auflagerdrücke sind also nach Gleichung 167

$$D_0 = D_1 = \frac{16,5 \cdot 430}{2} = 3547 \text{ kg,}$$

und das Größtmoment nach Gleichung 170

$$M_{max} = M_{mitte} = \frac{16,5 \cdot 430^2}{8} = 381356 \text{ kgcm.}$$

Nun ist der Querschnitt nach Art. 97 (S. 76) so zu bestimmen, daß $\frac{\gamma}{a} = \frac{M}{K} = \frac{381356}{700} = 544,8$ ist. Falls ein I-Querschnitt gewählt wird, ist Nr. 28 der »Deutschen Normal-Profile« zu wählen, da bei demselben $\frac{\gamma}{a} = 547$ ist³²⁾.

2) Es sollen die Abmessungen bestimmt werden, welche einem Deckenbalken aus Kiefernholz bei einer Lichtweite von 6 m zu geben sind, wenn die Balkenentfernung von Mitte zu Mitte 0,9 m und die Gesamtbelastung der betreffenden Decke (Eigengewicht und Nutzlast) 500 kg für 1 qm beträgt.

Das laufende Meter Balken hat eine Grundfläche von 0,9 m Breite zu tragen, d. h. eine Last von $0,9 \cdot 500 = 450$ kg; mithin beträgt die Belastung für das laufende Centimeter des Balkens $p = 4,5$ kg. Die von Auflagermitte zu Auflagermitte zu rechnende Stützweite l nehmen wir zu $6,3$ m = 630 cm an. Das größte Moment, welches hier, da der Balkenquerschnitt constant ist, der Berechnung des ganzen Balkens zu Grunde gelegt werden muß, findet in der Balkenmitte statt und ist nach Gleichung 170

$$M_{max} = \frac{4,5 \cdot 630^2}{8} = 223256 \text{ kgcm;}$$

mithin nach Art. 100 (S. 79)

$$\frac{\gamma}{a} = \frac{M_{max}}{K} = \frac{223256}{60} = 3721.$$

Da nun nach Gleichung 19 (S. 35): $\gamma = \frac{b h^3}{12}$, ferner $a = \frac{h}{2}$ ist, wird $\frac{b h^2}{6} = 3721$, und wenn $b = 25$ cm angenommen wird,

$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 3721}{25}} = 29,9 \text{ cm} \approx 30 \text{ cm.}$$

Sonach genügt ein Querschnitt von 25×30 cm.

Dritter Belastungsfall: Der Träger ist auf einen Theil seiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Eine Last P im Abstände x vom linken Auflager A (Fig. 166) erzeugt die Auflagerdrücke

$$D_0 = \frac{P(l-x)}{l} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P x}{l}.$$

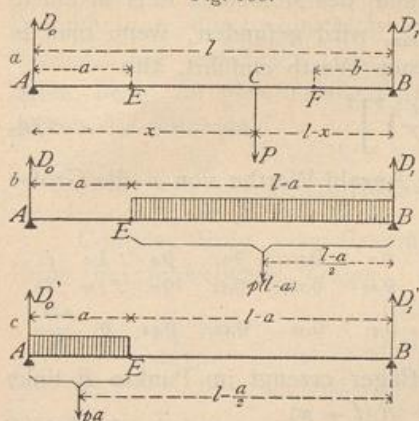
Die Querkraft ist für jeden Querschnitt E links vom Lastpunkte C

$$Q = D_0 = \frac{P(l-x)}{l}, \text{ d. h. positiv;}$$

für jeden Querschnitt F rechts vom Lastpunkt C :

³²⁾ Man muß beim Einsetzen der Zahlenwerthe für p und l vorsichtig sein. Es ist eigentlich selbstverständlich, daß, wenn man l in Metern einführt, p die Belastung für das laufende Meter Träger bedeutet, und wenn l in Centimetern eingeführt wird, p die Belastung für das laufende Centimeter Träger bedeutet. Gibt man ferner K , die zulässige Beanspruchung, in Kilogramm für 1 qm und das Moment M in Kilogramm-Centimetern an, so sind in der Gleichung $\frac{\gamma}{a} = \frac{M}{K}$ die Werthe für γ und a für Centimeter bezogen einzusetzen. Dennoch dürfte es nicht überflüssig sein, hier besonders darauf aufmerksam zu machen, da von Anfängern und Ungeübten oft in dieser Hinsicht Fehler gemacht werden. Es empfiehlt sich, stets Alles auf Centimeter und Kilogramm bezogen einzuführen.

Fig. 166.



$$Q_1 = D_0 - P = \frac{P(l-x)}{l} - P = -\frac{Px}{l},$$

d. h. negativ. Daraus folgt der Satz: In einem Querschnitt erzeugt jede rechts liegende Last eine positive, jede links liegende Last eine negative Querkraft. Demnach wird in irgend einem Querschnitte, etwa E, die grösste Querkraft (Q_{max}) stattfinden, wenn die ganze Trägerabtheilung rechts von E belastet, der übrige Trägertheil (AE) unbelastet ist (Fig. 166 b). Die kleinste Querkraft (Q_{min}) wird in E eintreten, wenn die Abtheilung AE links von E belastet, die Abtheilung EB rechts von E unbelastet ist (Fig. 166 c).

Man erhält die Werthe von Q_{max} , bezw. Q_{min} für den Querschnitt E, welcher um a vom linken Auflager entfernt liegt und für die Belastung p auf das laufende Meter, wie folgt. Für die Belastung nach Fig. 166 b ist

$$D_0 = Q_{max} = \frac{p(l-a)^2}{2l}; \dots \dots \dots 172.$$

für die Belastung nach Fig. 166 c ist

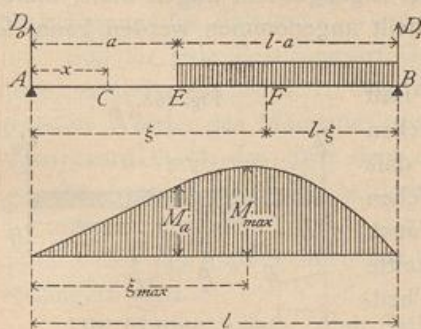
$$D_0' = \frac{pa}{l} \left(l - \frac{a}{2} \right) = pa - \frac{pa^2}{2l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = D_0' - pa;$$

sonach

$$Q_{min} = -\frac{pa^2}{2l} \dots \dots \dots 173.$$

Die Belastung nach Fig. 166 kommt im Hochbau sehr häufig vor, z. B. bei Trägern unter Mauern, in welchen sich Fenster- oder Thüröffnungen befinden. Für die Querschnittsbemessung ist das grösste Moment maßgebend, welches demnach aufgesucht werden soll.

Fig. 167.



Für irgend einen Punkt C der Strecke AE (Fig. 167) ist das Moment

$$M_x = D_0 x = \frac{p(l-a)^2}{2l} x;$$

die graphische Darstellung ergibt eine Gerade. Für einen Punkt F der Strecke CB ist das Moment bequem durch Betrachtung des rechts von F gelegenen Trägertheiles zu finden. Es ist

$$M_\xi = D_1 (l - \xi) - \frac{p(l-\xi)^2}{2}, \quad \text{woraus} \quad M_\xi = \frac{p}{2l} (l - \xi) (l\xi - a^2).$$

Auf dieser Strecke ergibt also die graphische Darstellung des Momentes eine Parabel. Dieselbe hat ihr Maximum für

$$\xi_{max} = \frac{l}{2} + \frac{a^2}{2l}.$$

Aus der Formel ergibt sich, daß das Maximum des Momentes stets in einem Punkte der belasteten Strecke EB stattfindet. M_{max} wird gefunden, wenn man in den Ausdruck für M_ξ statt ξ den für ξ_{max} gefundenen Werth einführt, also

$$M_{max} = \frac{p l^2}{8} \left[1 - \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right]^2 \dots \dots \dots 174.$$

Nachstehende kleine Tabelle ergibt für eine Anzahl Werthe von a die Größe von M_{max} und von ξ_{max} :

Für	$a = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	l
	$\xi_{max} = 0,5$	0,505	0,52	0,545	0,55	0,625	0,68	0,745	0,82	0,9	1,0	l
	$M_{max} = 1$	0,98	0,92	0,83	0,71	0,56	0,41	0,26	0,13	0,04	0	$\frac{p l^2}{8}$

156.
Größte Momente durch gleichförmig vertheilte Lasten.

Eine Last P im Abstände x vom linken Auflager erzeugt im Punkte E links vom Lastpunkte (Fig. 166 a) ein Moment $M_a = \frac{P(l-x)}{l} a$ und im Punkte F rechts vom Lastpunkte das Moment $M_b = \frac{P x}{l} b$. Beide Momentenwerthe sind positiv; also erzeugt eine jede Einzellast in allen Trägerquer schnitten positive Momente. Die größten Momente in den einzelnen Trägerquer schnitten werden demnach stattfinden, wenn alle Trägerpunkte belastet sind, d. h. bei voller Belastung des Trägers. Ist also volle Belastung eines Trägers mit gleichmäÙig vertheilter Last p möglich, so ruft diese die größten Momente hervor und ist deshalb der Berechnung zu Grunde zu legen. Bei dieser Belastung ist nach Gleichung 169 für einen Querschnitt mit der Abscisse x

$$M_x = \frac{p}{2} (l x - x^2) \dots \dots \dots 175.$$

157.
Gleichförmig vertheilte Last und Einzellasten, bezw. theilweise Belastung.

Vierter Belastungsfall: Der Träger wird auf seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last und außerdem durch Einzellasten oder auf einen Theil seiner Länge durch eine weitere gleichförmig vertheilte Last belastet.

Da jeder Träger außer der Nutzlast noch das Eigengewicht tragen muß, dieses aber als gleichförmig über die ganze Länge vertheilt angenommen werden kann, so ist dieser Fall der am häufigsten vorkommende.

In Art. 153 ist nachgewiesen, daß jede Last einen von den sonst noch auf dem Balken befindlichen Lasten unabhängigen Stützdruck erzeugt, und daß der Gesamt-Stützdruck gleich der algebraischen Summe der Einzeldrucke ist. Daraus folgt, daß auch die Querkräfte und Momente für alle Querschnitte gleich den algebraischen Summen der bez. Theil-Querkräfte und Momente sind.

Demnach brauchen im vorliegenden Falle nur die Stützdrücke, Querkräfte und Momente, welche bei den einzelnen bereits betrachteten Belastungen, derjenigen durch Einzellasten und derjenigen durch gleichförmig vertheilte Last u. s. w., sich ergeben haben, algebraisch addirt zu werden, was sowohl auf dem Wege der Rechnung, wie graphisch geschehen kann.

Fig. 168.

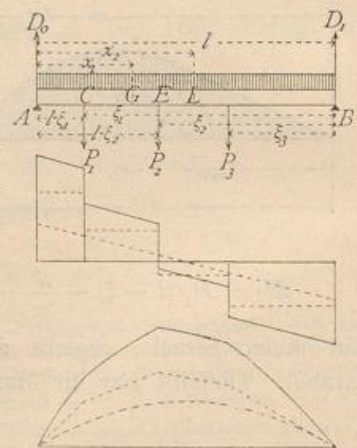


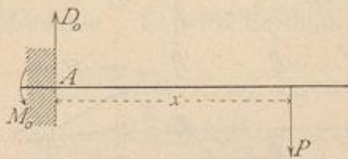
Fig. 168 stellt die Querkräfte und Momente dar, welche in den verschiedenen Querschnitten durch gleichförmig vertheilte Last und Einzellaften hervorgerufen werden. Die punktirten Linien geben die Werthe von Q und M nur für Einzellaften, bezw. für gleichförmig vertheilte Last an; die voll ausgezogenen Linien bedeuten die Summen.

2) Console-, Krag- oder Freitträger.

Console-, Krag- oder Freitträger sind am einen Ende unterstützte, am anderen Ende frei schwebende Träger. Als äußere Kräfte wirken auf dieselben die Belastungen und die Auflagerdrücke der Unterstützungs-

158.
Erklärung.

Fig. 169.



stelle. Letztere lassen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln. Damit der Träger im Gleichgewicht sei, muß zunächst die algebraische Summe der lothrechten Kräfte gleich Null sein, d. h. wenn die lothrechte Seitenkraft des Auflagerdruckes bei A (Fig. 169) gleich D_0 ist, wird $0 = D_0 - P$ oder

$$D_0 = P \dots \dots \dots 176.$$

Eine äußere wagrechte Belastung sei nicht vorhanden; daher wird der Auflagerdruck keine wagrechte Seitenkraft haben. Es muß aber auch die algebraische Summe der statischen Momente für einen beliebigen Punkt der Ebene, also etwa für A, gleich Null sein; mithin muß, da das Moment der gegebenen Kräfte für A nicht gleich Null ist, D_0 aber für den Drehpunkt A kein statisches Moment hat, an der Unterstützungsstelle noch eine Anzahl von Kräften wirken, deren resultirendes Moment mit demjenigen der Belastungen zusammen die Summe Null ergibt. Bei A wirkt also ein Moment M_0 , dessen Größe sich bei dem in Fig. 169 gezeichneten Dreh Sinn aus der Gleichung ergibt:

$$Px - M_0 = 0, \text{ d. h. } M_0 = + Px \dots \dots \dots 177.$$

Dieses Moment, dessen Dreh Sinn demjenigen von P entgegengesetzt ist, kann auf verschiedene Weise erzeugt werden, am einfachsten durch Einmauerung, bezw. Einspannung des Balkens.

Soll für jede Belastungsart Gleichgewicht vorhanden sein, so muß der Balken derart eingemauert werden, daß das von der Mauer geleistete Moment auch die größten Werthe des Momentes der Belastungen aufheben kann. Das Moment der Mauer wird durch das über dem eingemauerten Balkentheil liegende Mauergewicht geleistet, wonach dieses zu bestimmen ist.

Auch in anderer Weise kann ein Moment in A erzeugt werden, z. B. dadurch, daß der Balken über den Punkt A hinaus, bis zu einer zweiten Stütze B, verlängert wird.

Die Console-Träger sind statisch bestimmt, da die beiden Unbekannten: der Auflagerdruck D_0 und das Moment M_0 , nach den Gesetzen der Statik fester Körper ermittelt werden können. Im Folgenden werden der Auflagerdruck, die Querkräfte und die Momente, wie beim Balkenträger auf zwei Stützen gesucht; daher werden bezüglich der Belastungsart drei Fälle unterschieden:

Erster Fall: Der Console-Träger wird durch beliebige Einzellaften belastet.

Die freie Balkenlänge AB (Fig. 170) sei gleich l; alsdann ist der Stützdruck

159.
Belastung
durch
Einzellaften.

$$D_0 = P_1 + P_2 + P_3 = \sum_0^l (P) \dots \dots \dots 178.$$

und das Moment

$$M_0 = -(P_1 \xi_1 + P_2 \xi_2 + P_3 \xi_3) = -\sum_0^l (P \xi) \dots \dots \dots 179.$$

Für einen beliebigen Querschnitt C zwischen A und E beträgt die Querkraft $Q = D_0 = \Sigma (P)$; diesen Werth hat Q für alle Punkte zwischen A und E . Für irgend einen Querschnitt L zwischen E und F ist $Q_1 = D_0 - P_1$, und es ist allgemein

$$Q = \sum_0^l (P) - \sum_0^x (P) = \sum_x^l (P) \dots \dots \dots 180.$$

Die Querkraft in jedem Querschnitte ist also gleich der Summe der zwischen diesem Querschnitte und dem freien Ende befindlichen Lasten. Dies folgt schon aus der Erklärung der Querkraft. Als graphische Darstellung der Veränderung der Querkräfte ergibt sich die neben stehende Construction (Fig. 170 *b*).

Für einen beliebigen Punkt L mit der Abscisse x wird das Moment $M = - [P_3 (\xi_3 - x) + P_2 (\xi_2 - x)]$; allgemein wird fonach

$$M = - \sum_x^l [P (\xi - x)] \dots \dots \dots 181.$$

Die graphische Darstellung der Momente zwischen je zwei Lastpunkten ergibt also eine Gerade, wie in Fig. 170 *c* gezeichnet ist.

Die Momente sind als negativ einzuführen, weil die Kräfte das Bestreben haben den Balken so zu biegen, das er seine convexe Seite nach oben kehrt (vergl. Art. 151, S. 142).

Sowohl Querkraft, wie Moment ist bei dieser, demnach auch bei jeder Belastung, am Auflager-, bzw. Einspannungspunkte am grössten; diese Stelle ist also bei den Console-Trägern die am meisten gefährdete. Wird, wie im Hochbau meistens, der Balken mit constantem Querschnitt ausgeführt, so ist der am Einspannungspunkte nöthige Querschnitt der Ausführung zu Grunde zu legen.

Zweiter Fall: Der Console-Träger wird durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Für den Auflagerpunkt A (Fig. 171) ergeben sich der Auflagerdruck und das Moment zu

$$D_0 = p l \text{ und } M_0 = - \frac{p l^2}{2}; \dots \dots \dots 182.$$

für einen Punkt C mit der Abscisse x betragen die Querkraft und das Moment

$$Q_x = p (l - x) \text{ und } M_x = - \frac{p (l - x)^2}{2} \dots \dots \dots 183.$$

Die graphische Darstellung der Werthe von Q ergibt eine Gerade; für $x = 0$ ist

Fig. 170.

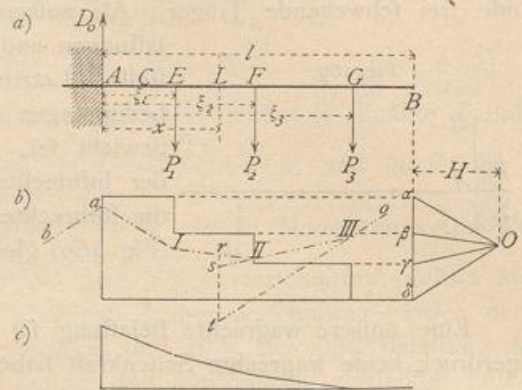
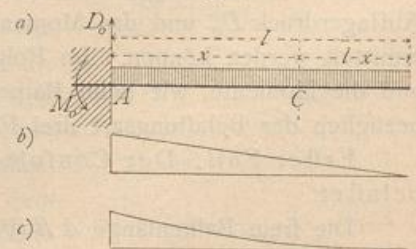


Fig. 171.



160.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.

$Q_0 = p l$, für $x = l$ ist $Q_l = 0$. Diejenige der Werthe von M ergibt eine Parabel; für $x = 0$ ist $M_0 = -\frac{p l^2}{2}$; für $x = l$ ist $M_l = 0$. Da ferner für $x = l$ auch $\frac{dM_x}{dx} = +p(l-x)$ Null wird, so ist die Abscissenaxe im Punkte $x = l$ eine Tangente an die Parabel. Die Momente und Querkräfte sind in Fig. 171 c und 171 b graphisch dargestellt. Der grösste Werth des Momentes und der Querkraft findet an derselben Stelle, an der Einspannungsstelle, statt.

Dritter Fall: Der Console-Träger wird durch eine gleichförmig vertheilte Belastung und durch Einzellaften belastet.

Die Stützendrucke, Querkräfte und Momente ergeben sich als die Summen der bei den einzelnen Belastungen stattfindenden Stützendrucke, Querkräfte und Momente. Es wird deshalb genügen, hier die Werthe anzugeben (Fig. 172):

161.
Gleichförmig
vertheilte
Last und
Einzellaften.



Fig. 172.

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= P_1 + P_2 + P_3 + p l = \sum_0^l P + p l \\ Q_x &= \sum_x^l P + p(l-x) \\ M_x &= -\sum_x^l [P(\xi-x)] - \frac{p(l-x)^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad 184.$$

Eben so wird die Veränderlichkeit der Q und M durch graphische Addition der für die Einzelbelastungen sich ergebenden Werthe von Q und M graphisch dargestellt.

Beispiel. Ein schmiedeeiserner Balcon-Träger von 2 m freier Länge hat als Eigengewicht eine gleichmässig vertheilte Belastung von 500 kg für das laufende Meter und eine Nutzlast von 800 kg für das laufende Meter zu tragen, ausserdem noch das Gewicht der Brüstung mit 800 kg in 1,8 m Abstand von der Wand. Demnach ist, wenn Alles in Centimetern angegeben wird, $g = 5$ kg, $p = 8$ kg, $P = 800$ kg, $\xi = 180$ cm und $l = 200$ cm.

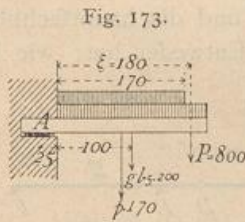


Fig. 173.

Die Nutzlast habe nur eine Länge von 170 cm.

Als Berechnungsweite darf man nicht die freie Länge bis zur Wand einführen, sondern muss diejenige bis zur Auflagermitte nehmen, welche hier etwa 25 cm hinter der Mauerkannte liegen möge. Alsdann ist für den Punkt A (Fig. 173), wenn M_g das Grösstmoment für ruhende, M_p dasjenige für bewegliche Last bezeichnet, absolut genommen

$$M_g = P(\xi + 25) + g l \left(\frac{l}{2} + 25 \right) = 800 \cdot 205 + 1000 \cdot 125 = 289\,000 \text{ kgcm},$$

$$M_p = p \cdot 170 \left(\frac{170}{2} + 25 \right) = 8 \cdot 170 \cdot 110 = 149\,600 \text{ kgcm}.$$

Der Querschnitt an der Stelle A ist so zu bestimmen, dass, wenn als zulässige Beanspruchung $K = 800$ kg gewählt wird, stattfindet:

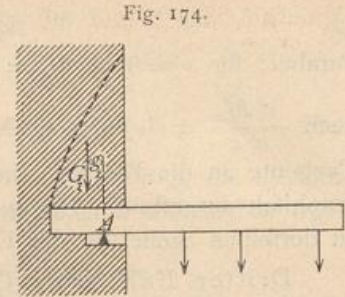
$$\frac{\gamma}{a} = \frac{M}{K} = \frac{289\,000 + 149\,600}{800} = 548.$$

Profil Nr. 28 der »Deutschen Normal-Profile für I-Eisen« hat ein Widerstandsmoment $\frac{\gamma}{a} = 547$, dürfte also für den vorliegenden Fall genügen.

Es möge hier noch einmal besonders darauf hingewiesen werden, dass die Console-Träger hauptsächlich dann gefährdet sind, wenn das am Einspannungspunkte von der Mauer geleistete Moment nicht die genügende Grösse hat. Damit Gleichgewicht bestehe, muss dieses Moment wenigstens so gross sein, wie das grösstmögliche

Moment der äußeren Kräfte für A . Auch hier ist aber ein Sicherheits-Coefficient n nöthig, und wenn beispielsweise dieses Einspannungsmoment durch das Gewicht des auf dem hinteren Balkentheile ruhenden Mauerwerkes geleistet wird (Fig. 174), so muß $G_1 g_1 = n M_0$ sein. Es dürfte sich empfehlen, n nicht kleiner als 4 zu nehmen.

Dabei ist aber auch zu beachten, daß die Art der Construction dafür Gewähr bieten muß, daß das Gewicht G_1 wirklich zur Wirksamkeit kommt — etwa durch angemessene Unterlagsplatten, Verband, Cementmörtel u. dergl. Unter Umständen kann man auch das Gewicht des unterhalb gelegenen Mauerwerkes durch Anker und Ankerplatten am Balkenende aufhängen und dadurch für die Stabilität des ConSOLE-Trägers nutzbar machen. Zu beachten ist auch, ob nicht ein Ausreißen nach der punktirten Linie in Fig. 174 möglich ist.



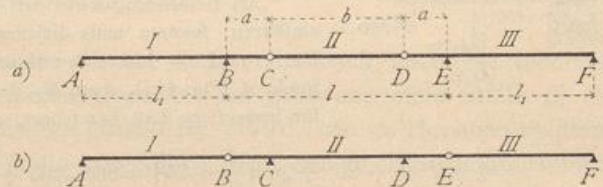
3) Continuirliche Gelenkträger, Auslegerträger oder Gerber-Träger.

162.
Princip.

Die Querschnittsgröße der Träger und damit die zu denselben gebrauchte Stoffmenge ist wesentlich von der Größe der in den einzelnen Querschnitten stattfindenden größten Momente abhängig. Eine Verminderung der Momente hat auch eine Querschnittsverringernng zur Folge. Eine solche Verringerung der Momente wird gegenüber den gewöhnlichen Trägern auf zwei Stützen durch die fog. continurlichen Gelenkträger oder Auslegerträger erreicht, bei denen die Stützpunkte eines Theiles der Träger durch die übergekragten Enden der Nachbarträger gebildet werden. Man erhält dadurch für die verschiedenen Oeffnungen verschiedene Trägerarten, und zwar wechselt immer ein Träger mit einem, bzw. zwei Auslegern an den Enden und ein solcher ohne Ausleger ab.

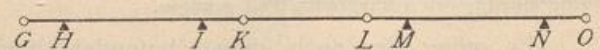
Für drei neben einander liegende Oeffnungen I, II, III sind die hauptsächlich vorkommenden Anordnungen in Fig. 175 a u. b dargestellt. Entweder hat, wie in Fig. 175 a gezeichnet ist, jeder Seitenträger I und III einen über das Auflager B , bzw. E vorragenden Ausleger BC , bzw. DE , auf deren Enden der Mittelträger CD frei aufruhrt, oder der Mittelträger CD hat, wie in Fig. 175 b , jederseits ein Kragstück BC , bzw. DE , und die Seitenträger AB und EF ruhen einerseits auf den Endstützpunkten A , bzw. F , andererseits auf den Enden B und E der erwähnten Kragstücke oder Ausleger.

Fig. 175.



Die Pfetten der größeren eisernen Dächer werden neuerdings meistens als solche Träger nach Fig. 176 hergestellt, wo immer ein Träger mit zwei Auslegern an den Enden und ein auf diesen Auslegern frei aufgelagerter Träger abwechseln. Die Beanspruchung in diesem Falle stimmt genau mit derjenigen der in Fig. 175 b angegebenen Anordnung überein; jeder Träger mit zwei Consolen an den Enden wird wie Träger $BCDE$ in Fig. 175 b beansprucht; jeder andere Träger wie AB ,

Fig. 176.



bezw. EF dieser Figur. Es genügt deshalb, die beiden Anordnungen in Fig. 175 a u. b in das Auge zu fassen.

Erste Anordnung: Die Kragstücke befinden sich an den Seitenträgern (Fig. 175 a).

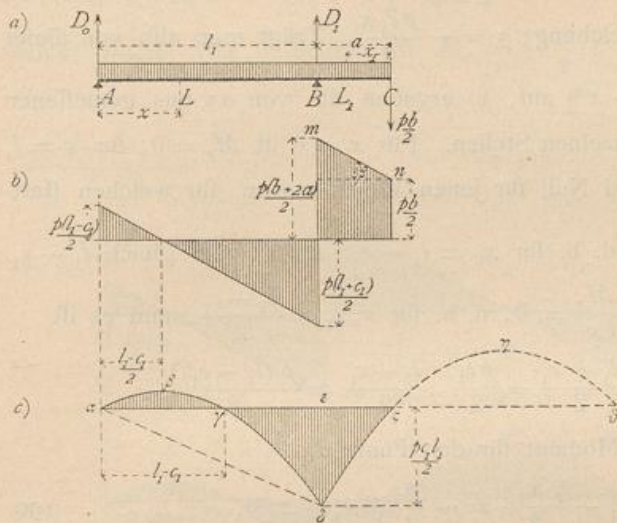
163-
Erste
Anordnung.

a) Erster Belastungsfall: Der Träger ist über seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

a) Seitenträger mit einseitigem Kragstück. Es sei $AB = l_1$, $BE = l$, $BC = DE = a$ und $CD = b$, also $l = 2a + b$; ferner sei die Belastung für die Längeneinheit des Trägers p . Alsdann wirkt aufer dieser Belastung auf den

Seitenträger in C eine Kraft nach unten, welche dem im Punkte C auf den Balken CD nach oben wirkenden Auflagerdruck (nach dem Gesetze der Wechselwirkung, vgl. Art. 9, S. 10) genau gleich ist, d. h. eine Kraft $\frac{pb}{2}$. Der Stützendruck im Auflagerpunkte A (Fig. 177 a) ergibt sich durch Aufstellung der Gleichung der statischen Momente für Punkt B zu

Fig. 177.



$$D_0 = \frac{pl_1}{2} - \frac{p}{2} \cdot \frac{ab + a^2}{l_1}$$

Setzt man die nur von den Längen abhängige Constante $\frac{ab + a^2}{l_1} = c_1$, so ist

$$D_0 = \frac{p}{2} (l_1 - c_1) \dots \dots \dots 185.$$

Weiters ist der Stützendruck im Auflagerpunkte B

$$D_1 = \frac{pl_1}{2} + \frac{pb}{2} \cdot \frac{l_1 + a}{l_1} + pa \frac{l_1 + \frac{a}{2}}{l_1} = \frac{p}{2} (l_1 + c_1 + 2a + b) \dots 186.$$

In der Strecke AB beträgt die Querkraft für einen Punkt L mit der Abscisse x , von A aus gerechnet,

$$Q_x = D_0 - px = \frac{p}{2} (l_1 - c_1 - 2x), \dots \dots \dots 187.$$

d. h. die graphische Darstellung ergibt eine Gerade. Für $x = 0$ ist $Q_0 = \frac{p}{2} (l_1 - c_1)$; für $x = l_1$ ist $Q_1 = -\frac{p}{2} (l_1 + c_1)$; die Querkraft wird Null für $x_0 = \frac{l_1 - c_1}{2}$.

In der Strecke BC ist die Querkraft für einen Punkt L_1 mit der Abscisse x_1 , von C aus gerechnet,

$$Q_{x_1} = \frac{p}{2} (b + 2x_1), \dots \dots \dots 188.$$

d. h. die graphische Darstellung derselben ergibt eine Gerade. Für $x_1 = 0$ ist $Q_0 = \frac{p b}{2}$; für $x_1 = a$ ist $Q_a = \frac{p}{2} (b + 2a)$. Die Querkräfte sind in Fig. 177 b graphisch dargestellt.

In der Strecke AB ist das Moment für den Punkt L

$$M_x = D_0 x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l_1 - c_1) x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l_1 x - x^2) - \frac{p c_1 x}{2} \quad . \quad . \quad 189.$$

Der erste Theil dieses Ausdruckes ist das Moment, welches in einem frei aufliegenden Balken AB von der Länge l_1 entstehen würde; in Folge des Auslegers und seiner Belaftung erhält man demnach hier an jeder Stelle ein um $\frac{p c_1 x}{2}$ kleineres Moment. Die graphische Darstellung ergibt eine Parabel $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 177 c); die Linie $\alpha\delta$ ist die Linie der Gleichung: $y = -\frac{p c_1 x}{2}$. Trägt man also von dieser

aus die Ordinaten $z = \frac{p}{2} (l_1 x - x^2)$ auf, so ergeben die von $\alpha\epsilon$ aus gemessenen Ordinaten die Momente an den einzelnen Stellen. Für $x = 0$ ist $M_x = 0$; für $x = l_1$ ist $M_{l_1} = -\frac{p c_1 l_1}{2} = \epsilon\delta$. M_x wird Null für jenen Werth von x , für welchen stattfindet: $0 = \frac{p}{2} (l_1 - x) - \frac{p c_1}{2}$, d. h. für $x_0 = l_1 - c_1$; $\alpha\gamma$ ist also gleich $l_1 - c_1$.

M_x hat seinen Größtwerth für $\frac{dM_x}{dx} = 0$, d. h. für $x_{max} = \frac{l_1 - c_1}{2}$, und es ist

$$M_{max} = \frac{p}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} \cdot \frac{l_1 + c_1}{2} - \frac{p c_1}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} = \frac{p (l_1 - c_1)^2}{8}.$$

In der Strecke BC ist das Moment für den Punkt L_1

$$M_{x_1} = -\frac{p b}{2} x_1 - \frac{p x_1^2}{2} = -\frac{p}{2} (b x_1 + x_1^2), \quad . \quad . \quad . \quad 190.$$

d. h. die graphische Darstellung liefert eine Parabel. M_{x_1} wird Null für $x_1 = 0$ und für $b + x_1 = 0$, d. h. für $x_1 = -b$, also für Punkt C, und wenn die Curve über den Nullpunkt C nach rechts auf die negative Seite der Abscissenaxe fortgesetzt wird, für den Punkt D (Fig. 175 a). Ferner wird M_{x_1} ein Größtwerth für $0 = b + 2x_1$, d. h. es wird $x_{1max} = -\frac{b}{2}$. Für $x_1 = a$, d. h. für den Auflagerpunkt B, wird

$M_{x_1} = -\frac{p}{2} (a b + a^2) = -\frac{p}{2} c_1 l_1$, wie bereits oben gefunden. Hiernach ist die Parabel $\delta\zeta\eta\theta$ in Fig. 177 c construiert.

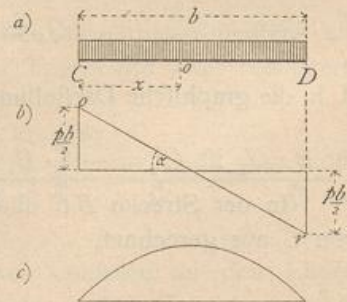
b) Balkenträger auf den beiden Kragstücken. Für diesen Träger CD (Fig. 178) gilt das unter 1 für den Träger auf zwei Stützen Gefundene. Daher ist für einen Punkt mit der Abscisse x

$$Q_x = \frac{p}{2} (b - 2x) \quad \text{und} \quad M_x = \frac{p}{2} (b x - x^2). \quad 191.$$

Die graphischen Darstellungen der Querkräfte und Momente giebt Fig. 178.

c) Ganzer Träger. Betrachtet man nun den ganzen Träger (Fig. 179), so sieht man zunächst, daß

Fig. 178.

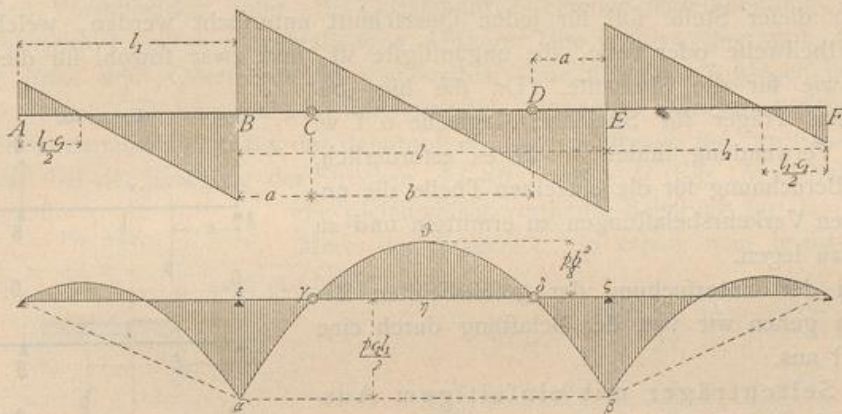


die Querkräfte und Momente in C gleiche GröÙe haben, ob man vom Träger ABC oder vom Träger CD ausgeht. Auch die Neigung der Linie or , welche die Querkraft auf CD darstellt (Fig. 178), stimmt mit derjenigen von mn (Fig. 177), welche die Querkraft der Strecke BC darstellt, überein; denn es ist (Fig. 178)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{p b}{2}}{\frac{b}{2}} = p \quad \text{und (Fig. 177 b)} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{p a}{a} = p, \quad \text{d. h. } \beta = \alpha;$$

demnach bilden die beiden Linien or und mn eine einzige Linie. Auch die Momenten-Curven beider Theile stimmen überein; denn für die Abtheilung BC ist nach Gleichung 190: $M_{x_1} = -\frac{p}{2} (b x_1 + x_1^2)$ und für negative x_1 , d. h. für Punkte, welche rechts von C liegen, ist $M_{x_1} = -\frac{p}{2} (-b x_1 + x_1^2) = +\frac{p}{2} (b x_1 - x_1^2)$.

Fig. 179.



Dies ist aber nach Gleichung 191 der Werth, welcher sich für das Moment auf der Strecke CD ergibt. Die in Fig. 177 c gezeichnete Curve $\delta \zeta \eta \vartheta$ ist also die richtige Momenten-Curve.

In Fig. 179 sind die Momente und Querkräfte für den ganzen Träger angegeben.

b) Vergleich mit dem Träger auf zwei Stützen. Für den mittleren Theil $BCDE$ (Fig. 179) sind die Querkräfte genau, wie bei einem frei aufliegenden Träger von der Spannweite $l = 2a + b$; für die Seitenträger sind die Querkräfte an jeder Stelle um $\frac{p c_1}{2}$ kleiner, als beim einfachen, auf den Stützen A und B aufliegenden Balkenträger. Die absoluten Werthe der Querkräfte sind also auf der positiven Seite um $\frac{p c_1}{2}$ kleiner, auf der negativen Seite um $\frac{p c_1}{2}$ größer, als dort.

Was die Momente anbelangt, so ist für die Seitenträger oben bereits nachgewiesen, daß das Moment an jeder Stelle um $\frac{p c_1 x}{2}$ kleiner ist, als beim frei aufliegenden Balkenträger von der Spannweite l . Falls der Mittelträger in B und E frei aufläge, würde an einer beliebigen Stelle mit der Abcisse ξ , von B aus gemessen, das Moment $M_\xi = \frac{p}{2} (l \xi - \xi^2) = \frac{p}{2} [(b + 2a) \xi - \xi^2] = p a \xi + \frac{p}{2} b \xi - \frac{p \xi^2}{2}$ sein,

oder, wenn man des bequemeren Vergleiches halber die Abcissen vom Punkt C aus rechnet und mit x bezeichnet (nach rechts positiv), so wird $\xi = a \pm x$ und nach einigen Umformungen

$$M_x = \frac{p}{2} (bx - x^2) + \frac{p}{2} c_1 l_1.$$

Für den Mittelträger $BCDE$ mit den Gelenken in C und D ist, wie oben gezeigt, das Moment $M_x = \frac{p}{2} (bx - x^2)$, also um $\frac{p}{2} c_1 l_1$ kleiner, als wenn die Auflagerung in gewöhnlicher Weise in B und E erfolgte. Nun ist aber diese Differenz $\frac{p}{2} c_1 l_1$ gerade das negative Moment an den Stützen B und E ; die von der Wagrechten $\alpha\beta$ in Fig. 179 aus gemessenen Ordinaten ergeben daher die Momente des in B und E frei aufliegenden Trägers. Construirt man demnach die Parabel der Gleichung $\frac{p}{2} (l\xi - \xi^2)$ in gewöhnlicher Weise und zieht durch die Punkte γ und δ , in welchen die Lothrechten der Auslegerenden die Parabel schneiden, eine Wagrechte $\varepsilon\zeta$, so sind die von dieser Linie aus gemessenen Ordinaten die Momente.

Es empfiehlt sich, die Auslegerlänge so zu bestimmen, daß das negative Moment über den Stützen abfolut genommen genau so groß ist, wie das positive Moment in der Mitte. Man theile zu diesem Zwecke einfach die Pfeilhöhe der Parabel $\alpha\beta$ in zwei gleiche Theile und ziehe durch den Theilpunkt eine Wagrechte; alsdann geben die Längen $\varepsilon\gamma$, bzw. $\delta\zeta$ die Längen der Ausleger.

β) Zweiter Belastungsfall: Der Träger ist auf einen Theil seiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

An dieser Stelle soll für jeden Querschnitt untersucht werden, welche Belastung, theilweise oder volle, die ungünstigste ist, und zwar sowohl für die Querkraften, wie für die Momente. Da die hier besprochenen Träger für Speicher, Magazine u. f. w. vielfach Verwendung finden, so ist es erforderlich, bei der Berechnung für die einzelnen Theile die ungünstigsten Verkehrsbelastungen zu ermitteln und zu Grunde zu legen.

Bei der Untersuchung der gefährlichsten Belastungen gehen wir von der Belastung durch eine Einzellaft aus.

a) Seitenträger mit einseitigem Ausleger. Es ist die Belastung zu ermitteln, welche in einem Querschnitt L im Abstände x vom linken Auflager A die größte Querkraft und das größte Moment hervorruft. Liegt eine Last P links von L im Abstände ξ von A (Fig. 180 a), so erzeugt sie die Auflagerdrücke

$$D_0 = \frac{P(l_1 - \xi)}{l_1} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P\xi}{l_1},$$

ferner

$$Q = -\frac{P\xi}{l_1} \quad \text{und} \quad M = \frac{P\xi}{l_1} (l_1 - x).$$

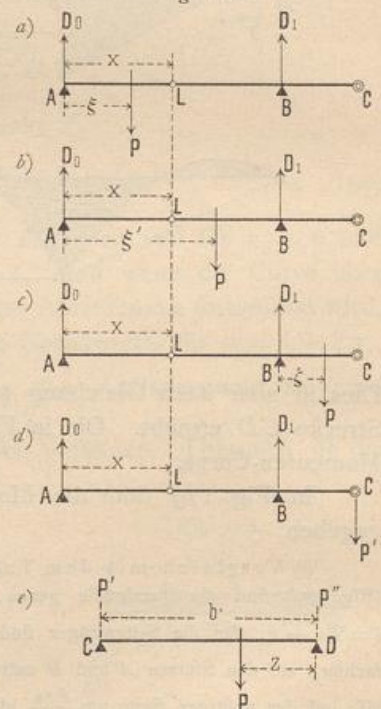
Liegt die Einzellaft P rechts vom Querschnitt L und links vom Auflager B (Fig. 180 b), so ist

$$D_0 = \frac{P(l_1 - \xi')}{l_1}, \quad D_1 = \frac{P\xi'}{l_1},$$

und für den Querschnitt L

$$Q = \frac{P(l_1 - \xi')}{l_1}, \quad M = \frac{P(l_1 - \xi')}{l_1} x.$$

Fig. 180.



Liegt die Einzellast auf dem Ausleger um ζ von B entfernt (Fig. 180c), so ist

$$D_0 = -\frac{P\zeta}{l_1}, \quad D_1 = \frac{P(l_1 + \zeta)}{l_1},$$

und für den Querschnitt L

$$Q = -\frac{P\zeta}{l_1}, \quad M = -\frac{P\zeta}{l_1} x.$$

Liegt endlich die Einzellast auf dem Zwischenträger CD im Abstände z vom rechten Auflager D (Fig. 180e), so überträgt sie im Lastpunkte C eine Last auf den Ausleger im Werthe von $P_1 = \frac{Pz}{b}$ und erzeugt die Auflagerdrücke (Fig. 180d):

$$D_0 = -\frac{Pz}{b} \frac{a}{l_1} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{Pz}{b} \frac{(a + l_1)}{l_1};$$

im Querschnitt L treten dadurch

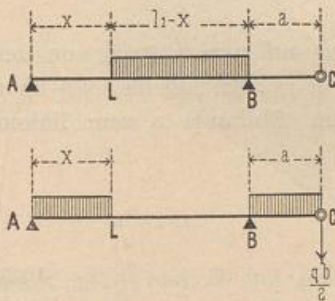
$$Q = -\frac{Pz}{b} \frac{a}{l_1} \quad \text{und} \quad M = -\frac{Pz}{b} \frac{a}{l_1} x$$

auf. Eine Belastung des Seitenträgers DEF ist ohne Einfluss auf die Momente und Querkräfte im Querschnitt L .

Aus Vorstehendem folgt: Im Querschnitt L erzeugt jede Belastung zwischen dem Querschnitt und dem rechtsseitigen Auflager eine positive Querkraft, jede Belastung links vom Querschnitt und außerdem jede auf dem Ausleger und dem Zwischenträger CD liegende Last eine negative Querkraft. Größte positive Querkraft findet demnach statt bei der Belastung der ganzen Strecke BL , grösste negative Querkraft bei der Belastung der Strecken AL , BC und CD (Fig. 181). Nennt man

die gleichmäÙig vertheilte Belastung für das laufende Meter des Trägers q , so erhält man leicht für den Querschnitt L :

Fig. 181.



$$Q_{xmax} = \frac{q(l_1 - x)^2}{2l_1} \dots 192.$$

$$Q_{xmin} = -\frac{qx^2}{2l_1} - \frac{q}{2} \frac{(a^2 + ab)}{l_1},$$

oder, da $\frac{a^2 + ab}{l_1} = c_1$ ist,

$$Q_{xmin} = -\frac{qx^2}{2l_1} - \frac{q}{2} c_1 \dots 193.$$

Ferner ergibt sich aus dem Vorstehenden: Jede Belastung der Strecke AB erzeugt im Querschnitt L ein positives Moment; jede Belastung des Auslegers BC und des Zwischenträgers erzeugt ein negatives Moment im Querschnitt L . Demnach findet statt: Größtes positives Moment in L bei voller Belastung des Seitenträgers AB , grösstes negatives Moment bei Belastung des Auslegers BC und des Zwischenträgers CD . Man erhält für Querschnitt L :

$$M_{max} = \frac{q}{2} (l_1 x - x^2) \dots 194.$$

$$M_{min} = -\frac{q}{2} \frac{(ab + a^2)}{l_1} x = -\frac{qc_1 x}{2} \dots 195.$$

Für einen Querschnitt O auf dem Ausleger (Fig. 182) ergibt sich: Eine Last P zwischen A und B ist ohne Einfluss auf den Querschnitt O , da die Kräfte P , D_0 und D_1

einander im Gleichgewicht halten; das Gleiche gilt von einer Last zwischen B und dem Querschnitt O . Liegt P rechts von O , so ist in O :

$$Q = P \quad \text{und} \quad M = -P(x - \xi).$$

Liegt endlich die Last auf dem Zwischenträger CD im Abstände z vom rechten Auflager D , so wird im Lastpunkte C ein Druck auf den Ausleger übertragen, $P' = \frac{Pz}{b}$, und für Querschnitt O ist

$$Q = \frac{Pz}{b} \quad \text{und} \quad M = -\frac{Pz}{b} x.$$

Es folgt: Jede Belastung links von O ist ohne Einfluss auf Q und M in O ; jede Last rechts von O auf Ausleger und Zwischenträger ruft in O positive Querkraft und negatives Moment hervor. Größtes positives Q und größtes negatives Moment werden demnach in O (und in jedem Querschnitte des Auslegers) stattfinden, wenn der Ausleger rechts vom Querschnitt und der Zwischenträger voll mit q belastet ist. Da aber die übrige Belastung des Trägers ohne Einfluss ist, so kann man auch sagen: Für alle Querschnitte O des Auslegers finden größte positive Querkraft und größtes negatives Moment bei voller Belastung des Balkens statt. Man erhält für Querschnitt O :

$$\left. \begin{aligned} Q_{max} &= \frac{q}{2} (b + 2x) \\ M_{max} &= -\frac{q}{2} (bx + x^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 196.$$

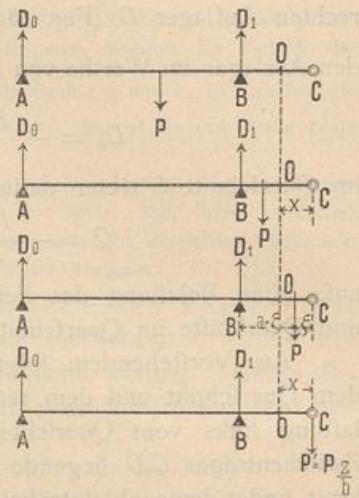
b) Zwischenträger CD . Derselbe ist ein Träger auf zwei Stützen von der Stützweite b ; es gilt von ihm dasselbe, was in Art. 151 u. 152 (S. 148 bis 150) über diesen Träger vorgeführt ist. Für einen Querschnitt im Abstände x vom linken Auflager ist also

$$\left. \begin{aligned} Q_{max} &= \frac{q(b-x)^2}{2b} \\ Q_{min} &= -\frac{qx^2}{2b} \\ M_{max} &= \frac{q}{2} (bx - x^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 197.$$

Für alle Querschnitte des Balkens sind in Fig. 183a u. 183b die Werthe Q_{max} und Q_{min} , M_{max} und M_{min} in Folge der gleichförmig vertheilten Verkehrslast q zusammengestellt; die Curven ergeben sich aus den vorstehend vorgeführten Gleichungen.

Aus den Gleichungen 192 u. 193 ergibt sich, dass auf dem Seitenträger in der Oeffnung AB die positiven Größtwerthe von Q genau so sind, wie bei einem in A und B frei gelagerten Träger (vergl. Art. 151, S. 148), die negativen Größtwerthe von Q dagegen um das für alle Querschnitte gleich große Stück $\frac{qc_1}{2}$, absolut genommen, größer sind, als jene. Auf dem Ausleger BC kann die Querkraft durch Verkehrslast nach Gleichung 196 nur positiv sein; ermittelt man die größte durch

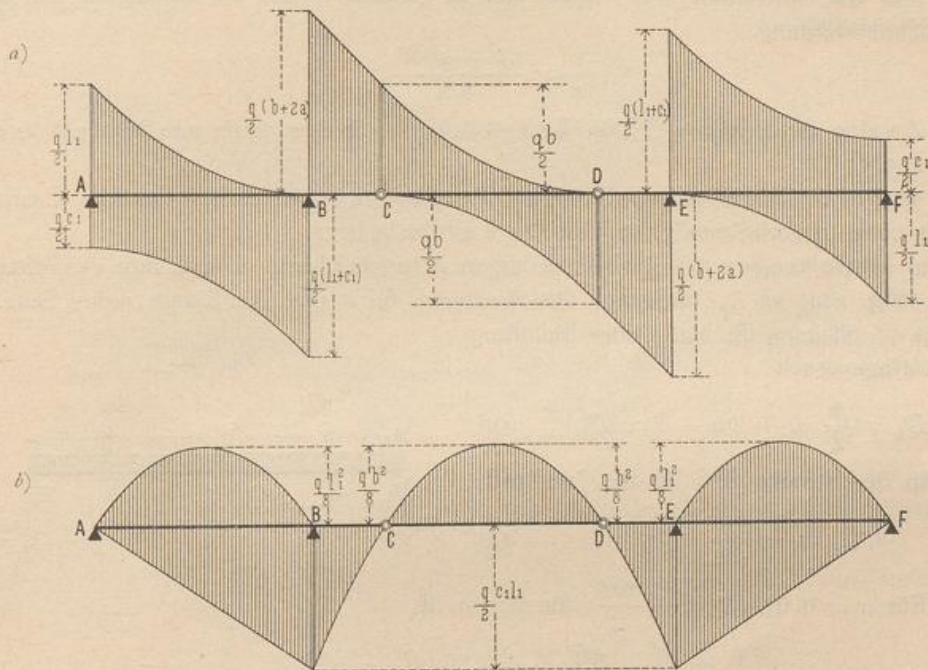
Fig. 182.



Verkehrslast hervorgerufene Querkraft für alle Querschnitte des Auslegers und trägt sie als Ordinaten in den bezw. Querschnitten auf, so ergibt sich eine Gerade. Im Zwischenträger CD ist wieder Alles wie beim Träger auf zwei Stützen. Beim rechtsseitigen Seitenträger ergeben sich dieselben Werthe, wie beim linksseitigen Seitenträger; nur kehren sich mit Rücksicht auf die Erläuterungen in Art. 151 (S. 142) die Vorzeichen um.

Was die positiven und negativen Größtmomente durch die angegebene Belastungsart anlangt, so ersieht man aus Gleichung 194, daß das positive Größtmoment im Seitenträger auf der Strecke AB genau dieselben Größen hat, wie bei

Fig. 183.



einem in A und B frei gelagerten Träger; die negativen Größtmomente in den einzelnen Querschnitten ändern sich geradlinig; der absolute Größtwert findet bei B statt und hat die Größe $\frac{q c_1 l_1}{2}$. Auf dem Ausleger BC kann nach Gleichung 196 nur ein negatives Größtmoment, im Zwischenträger CD nur ein positives Größtmoment stattfinden (siehe Gleichung 197). Vom Größtmoment auf der Strecke $BCDE$ gilt Alles, was in Art. 163 (S. 157) über die Momente durch volle Belastung p vorgeführt ist. Der rechte Seitenträger befindet sich in genau gleicher Lage, wie der linke.

Bei den im Hochbau verwendeten Auslegerträgern ist vielfach der Querschnitt für jeden der drei Einzelbalken constant gebildet; derselbe muß demnach unter Zugrundelegung des im betreffenden Theile möglichen größten Momentes, absolut genommen, bestimmt werden. Führt man das Eigengewicht als gleichförmig über den ganzen Balken vertheilte Last p auf das lauf. Meter ein, die Nutzlast eben so

als Last q , so ist für den Seitenträger gewöhnlich das Moment über der Stütze B maßgebend, d. h.

$$M_{B_{min}} = - \left(\frac{p}{2} c_1 l_1 + \frac{q}{2} c_1 l_1 \right) = - \frac{c_1 l_1}{2} (p + q).$$

Alsdann müßte die Querschnittsgröße und -Form nach der Gleichung bestimmt werden:

$$\frac{\gamma}{a} = \frac{(p + q) c_1 l_1}{2 K}.$$

Ob das größte positive Moment auf der Strecke AB , absolut genommen, größer ist, als $M_{B_{min}}$, wird leicht durch Auftragen von Fig. 179 u. 183 und durch Zusammenrechnen der für p und q erhaltenen Werthe ermittelt.

Für das Mittelfstück CD ergibt sich in gleicher Weise als Bedingung für die Querschnittsbildung:

$$\frac{\gamma}{a} = \frac{(p + q) b^2}{8 K}.$$

164.
Zweite
Anordnung.

Zweite Anordnung: Die Kragstücke befinden sich am Mittelträger (Fig. 175 *b*).

α) Erster Belastungsfall: Der Träger ist über seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belaftet.

α) Mittelträger mit beiderseitigen Kragstücken. Die Länge des Mittelfeldes (Fig. 184) sei l_1 , diejenige des Auslegers sei a und die Länge jedes Seitenträgers b ; alsdann ist bei voller Belaftung der Auflagerdruck

Fig. 184.

$$D_0 = \frac{p}{2} (l_1 + 2a + b) = D_1 \quad 198.$$

In der Strecke BC ist die Querkraft

$$Q_x = - \frac{pb}{2} - px \quad 199. \quad \frac{pb}{2} \downarrow$$

Für $x = 0$ ist $Q_0 = - \frac{pb}{2}$; für $x = a$ ist

$$Q_a = - \frac{pb}{2} - pa = - \frac{p}{2} (b + 2a).$$

In der Strecke CD ist die Querkraft

$$Q_{x_1} = D_0 - \frac{pb}{2} - pa - px_1 = \frac{p}{2} (l_1 - 2x_1), \dots \dots \dots 200.$$

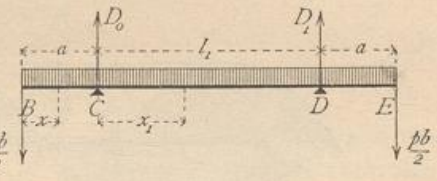
d. h. genau so groß, wie ohne Ausleger. Für $x_1 = 0$ ist $Q_0 = \frac{pl_1}{2}$; für $x_1 = l_1$

ist $Q_{l_1} = - \frac{pl_1}{2}$.

In der Strecke DE ist die Querkraft eben so groß, wie in BC ; nur ist hier positiv, was dort negativ ist. Die graphische Darstellung der Querkräfte ergibt Fig. 185 *a*.

In den Strecken BC und DE haben die Momente die gleichen Werthe, wie bei den in Art. 163 (S. 155) behandelten Auslegern. Demnach ist, vom Punkte B aus gerechnet,

$$M_x = - \frac{pb}{2} x - \frac{px^2}{2} = - \frac{p}{2} (bx + x^2) \quad \dots \dots \dots 201.$$



Für $x = 0$ ist $M_0 = 0$; für $x = a$ ist $M_a = -\frac{p}{2}(ab + a^2) = -\frac{p}{2}c_1 l_1$.

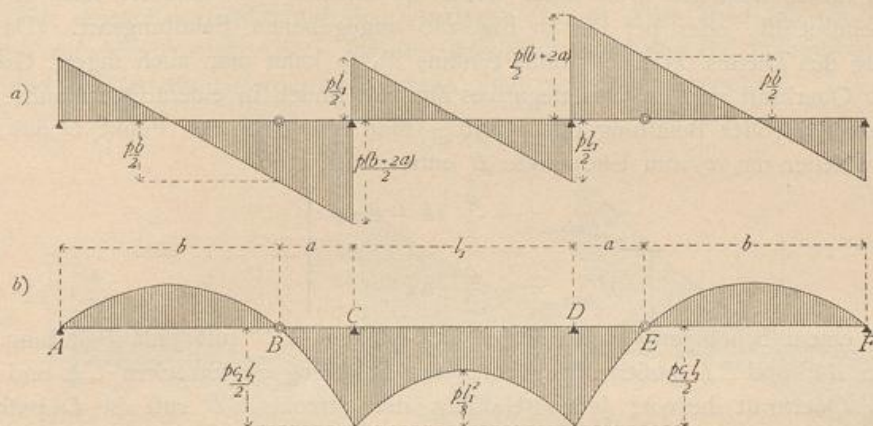
In der Strecke CD ist das Moment

$$M_{x_1} = D_0 x_1 - \frac{p x_1^2}{2} - p a \left(\frac{a}{2} + x_1 \right) - \frac{p b}{2} (a + x_1) = \frac{p}{2} (l_1 x_1 - x_1^2) - \frac{p}{2} c_1 l_1 \quad 202.$$

Der erste Theil des Momentes ist das Moment für einen frei aufliegenden Balken von der Stützweite l_1 ; der zweite Theil ist das Moment über der Stütze C , bzw. D .

Also auch hier gilt dasselbe, was im vorhergehenden Artikel über den dortigen Mittelträger ($BCDE$) gesagt wurde. Die graphische Darstellung der Momente ist in Fig. 185 *b* gegeben.

Fig. 185.



b) Seitenträger. Die Seitenträger sind frei auf zwei Stützpunkten gelagerte Träger, für welche Alles gilt, was in Art. 154 (S. 147) entwickelt wurde. Demnach ist, wenn der linke Auflagerpunkt hier als Anfangspunkt der Coordinaten gewählt wird,

$$Q_x = \frac{p}{2}(b - 2x) \quad \text{und} \quad M_x = \frac{p}{2}(bx - x^2), \quad \dots \quad 203.$$

und es ergibt sich leicht, wie in Art. 163, daß die Curven für die Momente und die Querkräfte dieselben sind, wie die für die Console BC gefundenen.

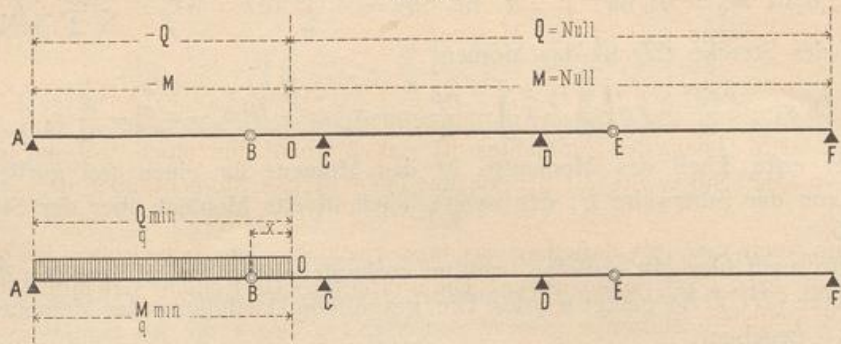
Die Momente und Querkräfte für die verschiedenen Querschnitte sind in Fig. 185 graphisch aufgetragen.

β) Zweiter Belastungsfall: Der Träger ist auf einen Theil seiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Geht man in derselben Weise, welche bei der ersten Anordnung gezeigt ist, vom Einflusse einer an verschiedenen Stellen des Trägers liegenden Einzellaft aus, so ergibt sich:

In einem beliebigen Querschnitt O des Auslegers BC (Fig. 186) erzeugt eine auf der Strecke AO befindliche Last negative Querkraft und negatives Moment; jede Belastung der anderen Trägertheile, also der Strecke $OCD E$, hat auf die Querkraft und das Moment in O keinen Einfluß. In Fig. 186 ist dem entsprechend die Strecke AO mit $-Q$, bzw. $-M$ überschrieben, der übrige Theil des Trägers mit $Q = \text{Null}$, bzw. $M = \text{Null}$. Größte negative Querkraft und größtes negatives

Fig. 186.

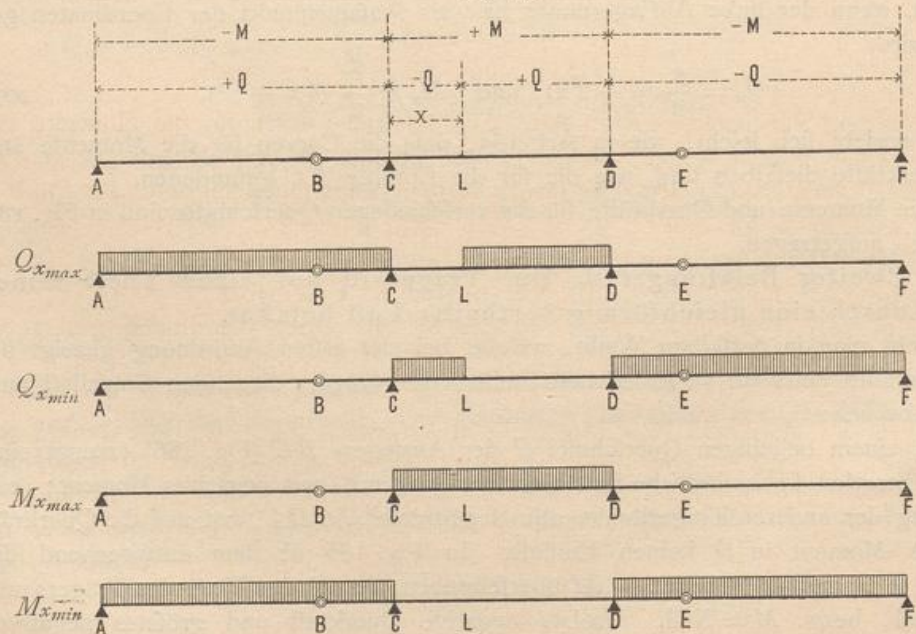


Moment finden demnach in O statt, wenn die Strecke \overline{AO} belaftet, alles Andere nicht belaftet ist, oder bei der in Fig. 186 angegebenen Belaftungsart. (Da die Belaftung des Theiles $OCDEF$ ohne Einfluss ist, so kann man auch sagen: Größte negative Querkraft und größtes negatives Moment finden in einem Querschnitt des Auslegers bei voller Belaftung mit q statt.) Man erhält für den Punkt O des Auslegers, welcher um x vom Endpunkte B entfernt ist,

$$\left. \begin{aligned} Q_{qmin} &= -\frac{q}{2} (b + 2x) \\ M_{qmin} &= -\frac{q}{2} (bx + x^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 204.$$

In einem beliebigen Querschnitt L des Balkens CD ruft jede Belaftung der Strecken AC und LD positive Querkraft, jede Belaftung der Strecken CL und DF negative Querkraft hervor; jede Belaftung der Strecke CD ruft in L positives Moment, jede Belaftung der Seitenöffnungen AC und DF erzeugt dagegen in L negatives Moment. In Fig. 187 find die betreffenden Strecken durch die Ueber-

Fig. 187.



schriften $+Q$ und $-Q$, bzw. $+M$ und $-M$ bezeichnet. Die sich demnach ergebenden ungünstigsten Belastungen, welche bzw. $+Q_{max}$ und $-Q_{max}$, $+M_{max}$ und M_{min} erzeugen, sind in Fig. 187 schematisch dargestellt.

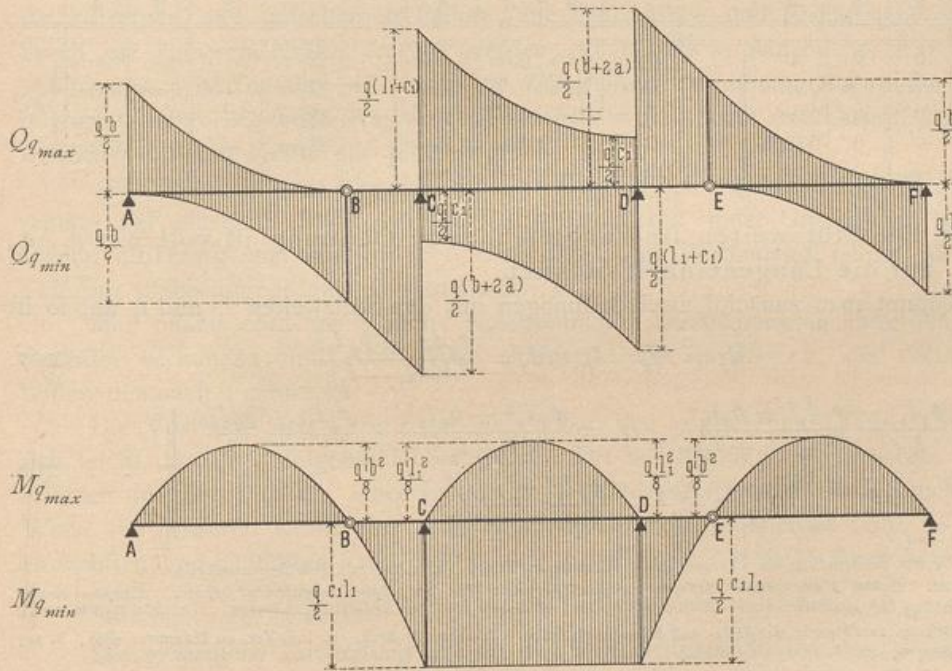
Man erhält für den Punkt L , welcher um x vom Stützpunkt C entfernt liegt,

$$\left. \begin{aligned} Q_{max} &= \frac{q}{2l_1} (l_1 - x)^2 + \frac{q}{2} c_1 \\ Q_{min} &= -\frac{qx^2}{2l_1} - \frac{q}{2} c_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 205.$$

$$\left. \begin{aligned} M_{max} &= \frac{q}{2} (l_1 x - x^2) \\ M_{min} &= -\frac{q}{2} c_1 l_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 206.$$

Für einen Querschnitt auf dem Ausleger DE ist Alles eben so, wie für denjenigen auf dem Ausleger BC ; für die Querschnitte auf den frei gelagerten Balken AB und EF ist das Erforderliche bereits oben mehrfach angegeben.

Fig. 188.



Ermittelt man nunmehr für jeden Querschnitt der ganzen Anordnung die Werthe Q_{max} und Q_{min} und eben so M_{max} und M_{min} und trägt die gefundenen Werthe als Ordinaten an den betreffenden Querschnitten auf, so ergeben sich die Zusammenstellungen in Fig. 188.

4) Continuirliche oder durchgehende Träger.

Die continuirlichen Träger oder Träger auf mehr als zwei Stützpunkten sind nach Art. 150 (S. 140) statisch unbestimmt. Die Stützendrücke werden mit Hilfe der Elasticitätslehre ermittelt. Bei der verhältnißmäfsig geringen Verwendung dieser

165.
Princip.

Träger im Hochbau und weil der Raum für die eingehende Besprechung im vorliegenden »Handbuch« nicht ausreicht, soll nur für eine Reihe von gewöhnlichen Belastungsfällen die Gröfse der Stützendrücke, der Momente und Querkräfte angegeben werden. Wegen des eingehenden Studiums wird auf die unten stehenden Werke³²⁾ verwiesen.

Im Folgenden bezeichnen: $D_0, D_1, D_2 \dots$ die Auflagerdrücke in den verschiedenen Stützpunkten $0, 1, 2 \dots$; $M_0, M_1, M_2 \dots$ die Momente an diesen Stützpunkten; $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3 \dots$ die Größtmomente in den Oeffnungen $1, 2, 3 \dots$; l die Stützweite jeder Oeffnung, falls alle Stützweiten gleich grofs sind; $l_1, l_2, l_3 \dots$ die Stützweiten der Oeffnungen $1, 2, 3 \dots$, falls nicht alle Stützweiten gleich grofs sind; $p_1, p_2, p_3 \dots$ die gleichförmig vertheilten Belastungen für die Längeneinheit in den Oeffnungen $1, 2, 3 \dots$ des Trägers.

$\alpha)$ Sämmtliche Oeffnungen haben die gleiche Stützweite l und die gleiche volle Belastung p für die Längeneinheit zu tragen. Die mafsgebenden Werthe von M, D und \mathfrak{M} sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Anzahl der Oeffnungen:																	
2			3			4			2			3			4		
$M_0 =$	0	0	0	}	$p l^2$	$D_0 =$	0,375	0,400	0,3929	}	$p l$	$\mathfrak{M}_1 =$	0,07031	0,08	0,0772	}	$p l^2$
$M_1 =$	0,125	0,10	0,10714			$D_1 =$	1,250	0,100	1,1428			$\mathfrak{M}_2 =$	0,07031	0,025	0,0363		
$M_2 =$	0	0,10	0,0714			$D_2 =$	0,375	0,100	0,9186			$\mathfrak{M}_3 =$	—	0,08	0,0363		
$M_3 =$	—	0	0,10714			$D_3 =$	—	0,400	1,1428			$\mathfrak{M}_4 =$	—	—	0,0772		
$M_4 =$	—	—	0			$D_4 =$	—	—	0,3929								

$\beta)$ Die Stützweiten sind ungleich; jede Oeffnung ist voll mit $p_1, p_2, p_3 \dots$ auf die Längeneinheit belastet.

Nimmt man zunächst zwei Oeffnungen mit den Stützweiten l_1 und l_2 an, so ist

$$M_0 = M_2 = 0, \quad M_1 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)}, \dots \dots \dots 207.$$

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_1 (l_1 + l_2)}, & D_1 &= \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_1 l_2} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2}, \\ D_2 &= \frac{p_2 l_2}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_2 (l_1 + l_2)}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 208.$$

³²⁾ Für das Studium der »Theorie der continuirlichen Träger« seien folgende Schriften empfohlen:
 CLAPEYRON. *Calcul d'une poutre elastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés.* Comptes rendus, Bd. 45, S. 1076.
 MOHR. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisen-Construction. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1860, S. 323; 1858, S. 19.
 CULMANN, K. Die graphische Statik. Zürich 1866. S. 273.
 WINKLER, E. Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit etc. Theil I. Prag 1867. S. 112.
 RITTER, W. Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken. 2. Aufl. Zürich 1883.
 OTT, K. v. Grundzüge der graphischen Statik. Prag 1870. — 4. Aufl. 1885.
 LIPPICH, F. Theorie des continuirlichen Trägers constanten Querschnittes. Allg. Bauz. 1871, S. 104 u. 175. (Auch als Sonderdruck erschienen: Wien 1871.)
 WEYKAUCH, J. J. Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.
 WINKLER, E. Vorträge über Brückenbau. Theorie der Brücken. Heft I: Aeusere Kräfte gerader Träger. 3. Aufl. Wien 1886.
 LAISSE, F. & A. SCHÜBLER. Der Bau der Brückenträger mit besonderer Rücksicht auf Eisen-Constructionen. Theil I. 4. Aufl. Stuttgart 1867. S. 161.
 GRASHOF, F. Theorie der Elasticität und Festigkeit etc. 2. Aufl. Berlin 1878. S. 100.
 CANOVETTI. *Théorie des poutres continues etc.* Paris 1882.
 STELZEL, K. Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf die continuirlichen Träger. Graz 1882.
 CASTIGLIANO, A. *Théorie de l'équilibre des systèmes elastiques.* Turin. — Deutsch von E. HAUFF. Wien 1886.

Bei drei Oeffnungen mit den Stützweiten l_1 , l_2 und l_1 ergeben sich folgende Werthe:

$$M_0 = M_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4(3l_2 + 2l_1)}, \quad \dots \quad 209.$$

$$D_0 = D_3 = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4l_1(3l_2 + 2l_1)}, \quad D_1 = D_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4l_1(3l_2 + 2l_1)} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2}. \quad 210.$$

Aus diesen allgemeinen Gleichungen kann man in besonderen Fällen die betreffenden Werthe leicht finden. Wenn z. B. eine ganze Oeffnung unbelastet ist, so ist einfach in den obigen Ausdrücken das entsprechende p gleich Null zu setzen.

b) Innere Kräfte der Gitterträger.

Die Balkenträger sind entweder vollwandige Träger oder gegliederte Träger, letztere gewöhnlich Gitterträger genannt. Bei den ersteren bildet der ganze Querschnitt eine zusammenhängende Fläche; bei den letzteren besteht derselbe aus zwei getrennten Theilen, den sog. Gurtungsquerschnitten; beide Gurtungen sind durch Stäbe mit einander verbunden.

Die Ermittlung der Spannungen, welche in den vollwandigen Trägern, wozu die hölzernen und gusseisernen Balken, die Walzbalken und Blechträger gehören, durch die äußeren Kräfte erzeugt werden, ist bereits in Abfchn. 2, Kap. 4 vorgeführt worden; dafelbst ist auch die Querschnittsbestimmung für diese Balken gezeigt. Im vorliegenden Kapitel sollen deshalb nur die in den Gitterträgern entstehenden inneren Kräfte entwickelt werden.

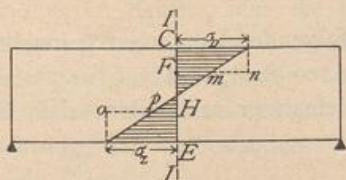
Gitterträger sind aus einzelnen Stäben zusammengesetzte Träger. Die Kreuzungspunkte der einzelnen Stäbe heißen Knotenpunkte. Jeder Gitterträger hat eine obere Gurtung und eine untere Gurtung. Zur Verbindung beider dient das zwischen ihnen angeordnete Gitterwerk.

Man nennt jedes aus Stäben, welche in den Schnittpunkten ihrer Axen mit einander verbunden sind, bestehende Stabwerk ein Fachwerk; die Gitterträger bilden demnach Fachwerke.

Die Vortheile der Gitterträger gegenüber den vollwandigen Trägern ergeben sich leicht durch die folgende Ueberlegung. Die auf Biegung beanspruchten Träger erleiden in allen Punkten eines jeden Querschnittes verschiedene Beanspruchungen. Wenn die äußeren Kräfte nur senkrecht zur Balkenaxe gerichtet sind, so ist im einfachsten und häufigsten Falle die Spannung eines in der Höhe z über, bezw. unter der wagrechten Schwerpunktsaxe liegenden Punktes nach Gleichung 56: $\sigma = \frac{M}{\mathcal{F}} z$.

Die graphische Darstellung der an den verschiedenen Stellen des Querschnittes auftretenden Spannungen σ ist die durch Fig. 189 veranschaulichte, da $\frac{M}{\mathcal{F}}$ für irgend einen Querschnitt constant ist. Im Punkte C des Querschnittes II ist die Spannung σ_D (Druck), in E ist sie σ_Z (Zug); in allen anderen Punkten des Querschnittes hat sie geringere Werthe. Da aber die Beanspruchungen σ_D und σ_Z die zulässigen Grenzen K'' für Druck und K' für Zug nicht überschreiten dürfen, so ist $\sigma_D = K''$ und $\sigma_Z = K'$ zu setzen und danach die Querschnittsfläche zu bestimmen. Die zulässige Beanspruchung

Fig. 189.



findet also nur in wenigen Querschnittspunkten statt, nämlich in denjenigen, welche am weitesten nach oben, bzw. unten von der wagrechten Schwerpunktsaxe abliegen. In allen anderen Querschnittspunkten ist die wirklich höchstens vorhandene Spannung viel kleiner, als zulässig wäre, so z. B. im Punkte F um mn und im Punkte H um op . Demnach wird bei einem vollwandigen, auf Biegung beanspruchten Träger der Baustoff durchaus nicht ausgenutzt. Eine Ausnutzung des Materials bis zur zulässigen Grenze kann nur stattfinden, wenn die Stäbe in der Richtung ihrer Axe, also auf Zug oder Druck beansprucht werden, weil nur dann die Annahme einer gleichmäßigen Vertheilung der Kraft über den ganzen Querschnitt annähernd erfüllt ist. Bei den richtig construirten Gitterträgern werden aber alle Stäbe nur auf Zug oder Druck in der Richtung ihrer Axe beansprucht, so daß man der Baustoff voll ausnutzen und folglich mit geringerem Stoffaufwande als bei vollwandigen Trägern auskommen kann. Hierzu möge noch bemerkt werden, daß diese Vortheile nur bei größeren Weiten voll in die Erscheinung treten; bei kleineren Weiten ergeben sich die Stabquerschnitte für die praktische Ausführung zu klein, so daß für solche Aufgaben vollwandige Träger vorzuziehen sind.

167.
Eintheilung
der
Gitterträger.

Nach der Form der Gurtung unterscheidet man:

1) Parallelträger, d. h. Träger, deren beide Gurtungen parallel (gewöhnlich auch wagrecht) sind.

2) Träger mit einer krummen und einer geraden Gurtung oder mit zwei krummen Gurtungen. Die ersteren nennt man, wenn die Endhöhe des Trägers gleich Null ist und die obere Gurtung krumm, die untere Gurtung gerade ist, Bogenföhnenträger; wenn die untere Gurtung gekrümmt, die obere Gurtung gerade ist, Fischbauchträger. Je nach der Curve der Krümmung unterscheidet man Parabelträger, Hyperbel- (Schwedler-) Träger, Ellipsenträger etc.

3) Dreieck- und Trapezträger, d. h. Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bzw. ein Paralleltrapez bilden.

Eintheiliges Gitterwerk ist solches, bei welchem sich jeder Gitterstab nur in den Gurtungen mit den anderen Gitterstäben kreuzt; mehrtheiliges Gitterwerk ist solches, bei welchem jeder Gitterstab sich aufer in den Gurtungen noch ein oder mehrere Male mit anderen Gitterstäben kreuzt.

Für die Zwecke des Hochbaues ist wohl immer das eintheilige Gitterwerk, welches eine genaue und einfache Berechnung zuläßt, ausreichend, so daß hier nur Träger mit eintheiligem Gitterwerk besprochen werden sollen.

Die Gitterstäbe sind entweder geneigt oder lothrecht; sie werden in der Folge bzw. als Diagonalen und Verticalen oder Pfoften bezeichnet werden.

Gitterwerk mit zwei Lagen Diagonalen nennt man Netzwerk; Gitterwerk mit einer Lage Diagonalen und einer Lage Pfoften bezeichnet man wohl im engeren Sinne mit dem Namen Fachwerk.

Die Dachbinder sind in den allermeisten Fällen Gitterträger, so daß die hier zunächst zu entwickelnden allgemeinen Regeln und Gesetze auch für die im nächsten Kapitel zu behandelnden Dachbinder giltig sind.

168.
Voraus-
setzungen.

Bei den nachstehenden Untersuchungen werden folgende Annahmen gemacht:

1) die Belastungen finden nur in den Knotenpunkten statt, und

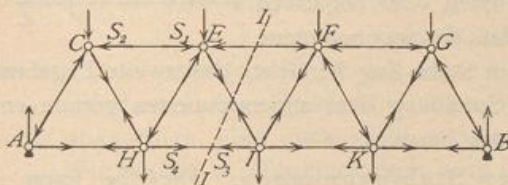
2) die Stäbe sind in den Knotenpunkten so mit einander verbunden, daß sie sich um dieselben frei drehen können.

1) Verfahren für die Bestimmung der Stabspannungen.

Die Ermittlung der Spannungen in den einzelnen Stäben des Fachwerkes erfolgt nach dem allgemeinen Verfahren, welches in Art. 4 (S. 6) angegeben worden ist. Man untersucht den Gleichgewichtszustand irgend eines Theiles des Fachwerkes unter der Einwirkung aller an demselben thätigen Kräfte. In jeder Stabaxe wirken zwei Kräfte, welche einander an Gröfse gleich sind, aber entgegengesetzten Sinn

169.
Erläuterungen.

Fig. 190.



haben: die Stabspannungen. Im Stabe CE (Fig. 190) wird von C eine Kraft S_1 auf E übertragen, und eine gleich große Kraft S_2 von E auf C ; beide sind Druck. In HI wird von H auf I ein Zug S_3 , von I auf H ein gleich großer Zug S_4 ausgeübt. In Fig. 190 sind alle auf die Knotenpunkte wirkenden Stabspannungen angegeben.

Betrachtet man nur einen Theil des Trägers, etwa den links vom Schnitte II gelegenen, so wirken auf denselben aufer den äußeren Kräften die Stabspannungen. Alle Stäbe, deren beide Knotenpunkte dem betreffenden Theile angehören, enthalten zwei Kräfte, die einander das Gleichgewicht halten, also für die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nicht in Betracht kommen. In anderer Lage sind diejenigen Stäbe, welche vom Schnitte II getroffen werden, von denen also nur ein Knotenpunkt links vom Schnitte liegt. Nur diejenigen Spannungen dieser Stäbe, welche auf die dem betreffenden Trägertheile angehörnden Knotenpunkte wirken, sind als auf das Bruchstück wirkende Kräfte einzufetzen; so viele Stäbe also durch den Schnitt getroffen werden, so viele Stabspannungen sind in den Gleichgewichtsgleichungen vorhanden, welche für den Trägertheil aufzustellen sind. Diese Spannungen sind die unbekannt Kräfte, für deren Ermittlung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen zu Gebote stehen. Da für Kräfte in der Ebene drei Gleichgewichtsbedingungen vorhanden sind, so ist die Aufgabe auf dem angegebenen, rein statischen Wege nur dann lösbar, wenn sich bei jedem Schnitte nur drei unbekannt Stabspannungen ergeben.

Ein solches Fachwerk, bei welchem sämtliche Stabspannungen durch die Gesetze des Gleichgewichtes starrer Körper bestimmbar sind, nennt man statisch bestimmt; reichen diese Gesetze dazu nicht aus, so ist das Fachwerk statisch unbestimmt. In letzterem Falle sind die Stabspannungen auch noch von den elastischen Formänderungen abhängig. Es ist aus verschiedenen Gründen empfehlenswerth, im Hochbau nur statisch bestimmte Fachwerke zu verwenden.

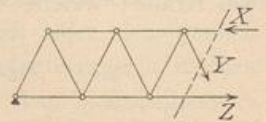
Unter Berücksichtigung des Vorstehenden ist nun folgendermaßen zu verfahren. Das Fachwerk wird an derjenigen Stelle durchschnitten gedacht, an welcher man die inneren Kräfte, hier die Stabspannungen, kennen lernen will; an den Schnittstellen werden die inneren Kräfte angebracht und auf das Bruchstück die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen angewendet. Da hier die Stäbe, wie angenommen wurde, um die Knotenpunkte frei drehbar sind, so muß jede Stabspannung mit der Richtung des betreffenden Stabes zusammenfallen. Sonach ergibt sich die folgende Regel.

170.
Verfahren
im
Allgemeinen.

Man denke sich den Träger so durchgeschnitten, daß die Stäbe, deren Spannung man sucht, durch den Schnitt getroffen werden, bringe die mit den Stabrichtungen zusammenfallenden Spannungen dieser Stäbe als vorläufig unbekannte Kräfte an (Fig. 191) und stelle für das Bruchstück die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

Die Stäbe werden gezogen oder gedrückt; im ersten Falle wirkt die Spannung vom Knotenpunkte ab (Y und Z in Fig. 191); im zweiten Falle wirkt sie nach dem Knotenpunkt hin (X in Fig. 191). Da man beim Beginne der Berechnung vielfach noch nicht den Sinn der Beanspruchung kennt, so werden wir zunächst stets alle Spannungen als Zugspannungen, d. h. vom Knotenpunkte ab gerichtet, einführen; die Rechnung ergibt entweder einen positiven oder negativen Werth. Das erstere Ergebniss bedeutet, daß die angenommene Pfeilrichtung die richtige war, d. h. daß im Stabe Zug herrscht; das zweite Ergebniss bedeutet, daß der Sinn der wirklichen Spannung dem angenommenen gerade entgegengesetzt ist, d. h. daß im Stabe Druck herrscht.

Fig. 191.



171.
Verfahren
durch
Rechnung.

a) Analytische Bestimmung der Stabspannungen. Dieselbe kann in zweifacher Weise geschehen: entweder durch Aufstellung aller Gleichgewichtsbedingungen oder nach der folg. Momenten-Methode.

172.
Gleichgewichts-
bedingungen.

a) Die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für das Bruchstück (Fig. 192), welches, wie in Art. 170 angegeben, behandelt ist, ergibt drei Gleichungen, welche nach Art 6 (S. 8) lauten:

$$\left. \begin{aligned} X \cos \sigma + Y \sin \tau + Z = 0; & \quad D_0 - P_1 - P_2 + X \sin \sigma - Y \cos \tau = 0 \\ D_0 \cdot 2a - P_1 a - Zz = 0 & \end{aligned} \right\} \dots 211.$$

Als Drehpunkt für die dritte Gleichung ist der Punkt C gewählt; alsdann haben X , Y und P_2 kein statisches Moment, weil sie für diesen Drehpunkt keinen Hebelsarm haben.

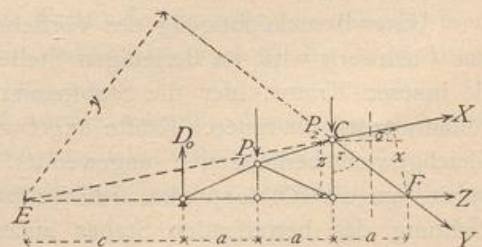
Der angegebene Weg führt stets, wenn nur 3 Unbekannte, also 3 geschnittene Stäbe vorhanden sind, zum Ziele; er hat den Nachtheil, daß meistens 3 Gleichungen gelöst werden müssen, selbst wenn man nur eine Spannung kennen lernen will.

173.
Ritter'sches
Verfahren.

b) Das Charakteristische der von Ritter angegebenen Momenten-Methode ist, daß man für jede Spannung nur eine Gleichung erhält; das Mittel dazu bietet die Gleichgewichtsbedingung, welche besagt, daß die algebraische Summe der statischen Momente aller Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene, gleich Null sein muß. Wird der Momentenpunkt so gewählt, daß zwei von den drei Unbekannten das Moment Null haben, so bleibt in der Gleichung nur eine Unbekannte. Das statische Moment jeder der beiden Kräfte ist aber gleich Null für den Schnittpunkt beider Krafrichtungen, weil für diesen Punkt jede der beiden Kräfte den Hebelsarm Null hat. Das Verfahren ist demnach das folgende.

Man lege durch den Träger einen Schnitt, so daß nur 3 Stäbe mit unbekanntem Spannungen geschnitten werden, bringe diese Spannungen und alle am

Fig. 192.



Bruchstück wirkenden äußeren Kräfte an, setze die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte gleich Null und wähle dabei als Momentenpunkt für die Ermittlung der Spannung eines Stabes stets den Schnittpunkt der beiden mitdurchschnittenen Stäbe.

Um in Fig. 192 die Spannung X zu finden, wählt man F als Momentenpunkt; die Gleichung der statischen Momente heißt dann

$$Xx + D_0 \cdot 3a - P_1 \cdot 2a - P_2 a = 0,$$

woraus sich die einzige Unbekannte X leicht finden läßt. Für C als Momentenpunkt ergibt sich

$$D_0 \cdot 2a - P_1 a - Zz = 0,$$

woraus Z zu berechnen ist, und für E als Momentenpunkt

$$Yy - D_0 c + P_1 (c + a) + P_2 (c + 2a) = 0,$$

woraus Y zu ermitteln ist.

Die Länge der Hebelsarme kann meistens genügend genau aus der Zeichnung abgegriffen, aber auch leicht rechnerisch ermittelt werden.

Wir werden den für einen Stab nach dieser Methode sich ergebenden Momentenpunkt den diesem Stabe conjugirten Punkt nennen.

β) Graphische Bestimmung der Stabspannungen. Auch das graphische Verfahren kann nach verschiedenen Arten durchgeführt werden, entweder nach der Schnittmethode oder nach der Vieleckmethode oder nach einer aus Zeichnung und Rechnung zusammengesetzten Weise (*Zimmermann's* Verfahren).

a) Die Schnittmethode wurde von *Culmann* angegeben.

Werden die sämtlichen am Bruchstück wirkenden äußeren Kräfte zu einer Mittelkraft Q (Fig. 193) zusammengefaßt, so wirken auf dasselbe 4 Kräfte, nämlich Q

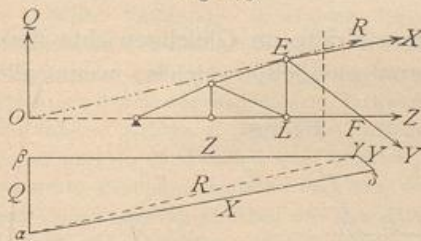
und die drei unbekanntenen Spannungen der durch den Schnitt getroffenen Stäbe. Für diese 4 Kräfte ergibt sich ein geschlossenes Kraftpolygon. Von einer dieser Kräfte, nämlich von Q , sind Größe, Richtung und Lage bekannt; von den drei anderen wohl die Richtung und Lage, nicht aber die Größe. Ersetzt man 2 der unbekanntenen Kräfte, etwa X und Y , durch ihre Mittelkraft R , so bleiben nur noch

die 3 Kräfte Q , Z und R , welche sich nach Art. 8 (S. 10) in einem Punkte schneiden müssen. R muß also durch den Schnittpunkt O von Q und Z gehen. Da R außerdem durch den Schnittpunkt E von X und Y geht, so sind 2 Punkte der Richtungslinie von R , somit ist auch diese Richtung selbst bekannt. R hat demnach die Richtung OE . Im Punkte O halten sich nun die 3 Kräfte Q , R und Z das Gleichgewicht; das für dieselben construirte Kraftpolygon ist eine geschlossene Figur, hier ein Dreieck. Ist $Q = \alpha\beta$, so ziehe man durch β eine Parallele zur Richtung von Z , durch α eine solche zur Richtung von R ; der Schnittpunkt γ beider Linien ergibt die beiden Kräfte $R = \gamma\alpha$ und $Z = \beta\gamma$.

In derselben Weise kann nun R in seine beiden Seitenkräfte X und Y zerlegt werden, indem man durch die beiden Endpunkte von R Parallelen zu den Richtungen von bezw. X und Y zieht. Es ergibt sich $\gamma\delta = Y$ und $\delta\alpha = X$.

Es ist für das Endergebnis gleichgiltig, welche beiden von den unbekanntenen Spannungen man zu einer Mittelkraft vereinigt. Man kann auch Y und Z (Fig. 194) durch ihre Mittelkraft R' ersetzen, welche dann durch F und den Schnittpunkt O' der Kraft X mit Q geht. Als Kraftpolygon erhält man $\alpha\beta\epsilon\zeta$.

Fig. 193.



174.
Graphisches
Verfahren.

175.
Culmann'sches
Verfahren.

Eben so kann man auch X und Z zu einer Mittelkraft vereinen und erhält die ebenfalls in Fig. 194 gezeichnete Construction.

Die angegebene Construction giebt zugleich Aufschluss darüber, ob die Stäbe gezogen oder gedrückt werden. Da die am Bruchstück wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sind, so haben sie nach Art. 15 (S. 12) denselben Umfahrungsinn, und demnach ist der Sinn aller im Kraftpolygon vorkommenden Kräfte bekannt, wenn der Sinn einer derselben bekannt ist. Hier ist stets der Sinn von Q bekannt; denn dies ist die Querkraft für den bezüglichen Querschnitt. Q hat den Sinn von α nach β ; also ist in Fig. 193 Z von β nach γ , d. h. vom Knotenpunkt L ab gerichtet, Y von γ nach δ und X von δ nach α gerichtet. X wirkt also nach dem Knotenpunkte E hin, ist demnach Druck, während Z und Y Zug bedeuten. Richtung, Gröfse und Lage der Kraft Q für eine gegebene Belastung sind mit Hilfe des Kraft- und Seilpolygons leicht bestimmbar. (Siehe Art. 153, S. 146.)

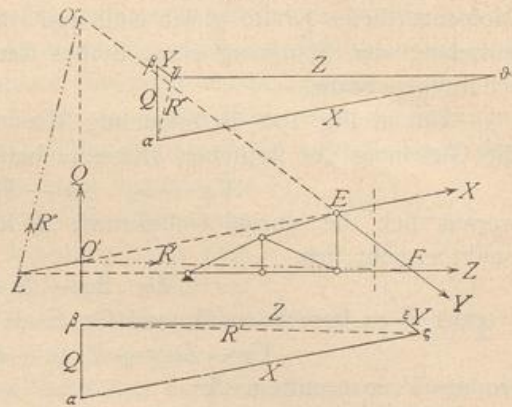
b) Die Vieleckmethode ist von *Cremona* angegeben worden.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein. Randstäbe seien Stäbe, welche zwei auf einander folgende äußere Knotenpunkte mit einander verbinden, also $I II, II III \dots$ in Fig. 195; Zwischenstäbe seien Stäbe, welche zwei nicht auf einander folgende äußere Knotenpunkte verbinden, also $II V, III V$ in Fig. 195.

Da alle auf das Fachwerk wirkenden äußeren Kräfte im Gleichgewichte sind, so ist für dieselben ein geschlossenes Kraftpolygon möglich, welches, wenn alle äußeren Kräfte nach Gröfse und Richtung gegeben sind, leicht construirt werden kann. Außerdem sind an jedem Knotenpunkte die an demselben wirkenden Kräfte für sich im Gleichgewicht; sonach ist für jeden dieser Knotenpunkte ein weiteres, sich schließendes Kraftpolygon zweiter Ordnung möglich. An jedem Knotenpunkte wirken: eine äußere Kraft, die im besonderen Falle Null sein kann, und die Spannungen der Stäbe, welche sich in ihm schneiden, also im Knotenpunkte II die Kräfte z, B, C, a .

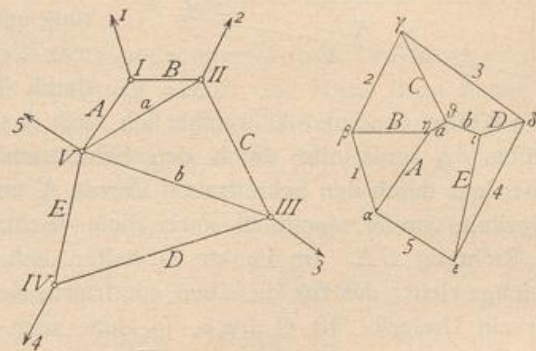
In den meisten der kleinen Kraftpolygone kommt nun je eine äußere Kraft vor, welche bereits im großen Hauptpolygon der äußeren Kräfte enthalten ist; es wird also offenbar möglich sein, jedes kleine Kraftpolygon so an das große zu legen, daß die beiden gemeinsame äußere Kraft durch dieselbe Gerade dargestellt wird. Da ferner jeder Stab zu zwei Knotenpunkten gehört, so kommt jede Stabsspannung

Fig. 194.



176.
Cremona'sches
Verfahren.

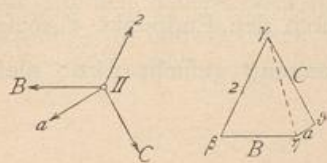
Fig. 195.



in zwei Kraftpolygone zweiter Ordnung vor. Es wird nun durch zweckmäßige Anordnung möglich, die kleinen Kraftpolygone so in das große einzufachtheln, daß nicht nur jede äußere Kraft, sondern auch jede Stabspannung nur einmal im Kräftezuge vorkommt, d. h. auch die kleinen Kraftpolygone hängen dann so zusammen, daß die zwei gemeinsame Stabspannung durch dieselbe Gerade dargestellt wird.

Für die Construction der kleinen Kraftpolygone ist Folgendes zu beachten. Wenn, wie hier, die Richtung sämtlicher Kräfte bekannt ist und das Kraftpolygon wegen des Gleichgewichtes der Kräfte sich schließt, so ist die Construction desselben stets möglich, falls am Knotenpunkte nur zwei unbekannte Kräfte vorhanden sind. Denn seien etwa in Fig. 196 B und a bekannt, a und C unbekannt, so erfordert

Fig. 196.



das Gleichgewicht, daß die Mittelkraft von a und C der bekannten Mittelkraft von a und B der Größe nach genau gleich ist. Die bekannte Mittelkraft von a und B ist aber die Verbindungslinie $\gamma\delta$ im Kraftpolygon, und dieselbe ist im entgegengesetzten Sinne genommen ohne Schwierigkeit in die beiden Seitenkräfte C und a zu zerlegen, indem durch den einen Endpunkt, etwa γ , eine Parallele zu C , durch den anderen Endpunkt, etwa δ , eine Parallele zu a gezogen wird. Der Schnittpunkt ϑ ergibt $\gamma\vartheta = C$ und $\vartheta\delta = a$. Alsdann ist $\beta\gamma\vartheta\delta$ das kleine Kraftpolygon für Punkt II . Man muß demnach die kleinen Kraftpolygone so construiren, daß sich stets nur 2 Unbekannte ergeben. Zu diesem Zwecke beginnt man mit demjenigen Knotenpunkte, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, hier (Fig. 195) also etwa mit I . Die äußere Kraft ist bekannt; unbekannt sind demnach nur A und B und nach Obigem leicht zu ermitteln. Man geht nun zu einem Knotenpunkt über, von welchem man wiederum alle Kräfte mit Ausnahme von zweien kennt, hier zu II . Bekannt sind hier a und B , unbekannt C und a , demnach leicht ermittelt. So schreitet man weiter. Ein Knotenpunkt, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, ist bei den in der Praxis üblichen Gitterträgern stets vorhanden.

Damit nun jede äußere Kraft und jede Stabspannung nur einmal in dem entstehenden Kräftezuge — dem Kräfteplan — vorkommen, ist folgende Regel zu befolgen. Man vereine sämtliche äußeren Kräfte zu einem geschlossenen Kraftpolygon, indem man sie in der Folge der Knotenpunkte oder, wie man sagt, in cyclischer Reihenfolge an einander legt, und ziehe nun durch die Eckpunkte dieses Kraftpolygons Parallelen zu den Randstäben derart, daß die Parallele zu einem Randstabe, etwa zu A , durch denjenigen Eckpunkt des großen Kraftpolygons geht, welcher zwischen den beiden äußeren Kräften liegt, zwischen denen der betreffende Randstab im Fachwerk sich befindet. Der Randstab A liegt im Fachwerk zwischen den äußeren Kräften 1 und 5 ; die Parallele zu A wird also durch den Punkt a zwischen 1 und 5 gezogen; eben so die Parallele zum Randstab B durch β zwischen 1 und 2 etc. Unter Benutzung der hier gezogenen Parallelen construirt man nun, wie oben angegeben, die kleinen Kraftpolygone; alsdann erhält man einen Linienzug zwischen den Randstäben, in welchem jede einzelne Linie eine Zwischenstabspannung darstellt und in welchem jede Zwischenstabspannung nur einmal vorkommt. Die auf den Parallelen zu den Randstäben abgechnittenen Längen geben die Spannungen der Randstäbe an.

Der Sinn der Stabspannungen wird hier genau in derselben Weise aus dem Kraftpolygon für einen Knotenpunkt ermittelt, wie im vorhergehenden Artikel angegeben ist.

c) Verfahren von Zimmermann für Fachwerke, welche durch parallele äußere Kräfte beansprucht werden.

177.
Zimmermann's
Verfahren.

Die wagrechte Projection des Abstandes je zweier Knotenpunkte derselben Gurtung sei constant; sie sei gleich a (abgesehen von derjenigen der zunächst an den Auflagern gelegenen Knotenpunkte der unteren Gurtung). In einem Stabe der oberen Gurtung (Fig. 197), etwa im Stabe $II III$, ist die Spannung bei einer Belastung, welche für den Punkt 3 das Moment M_3 erzeugt,

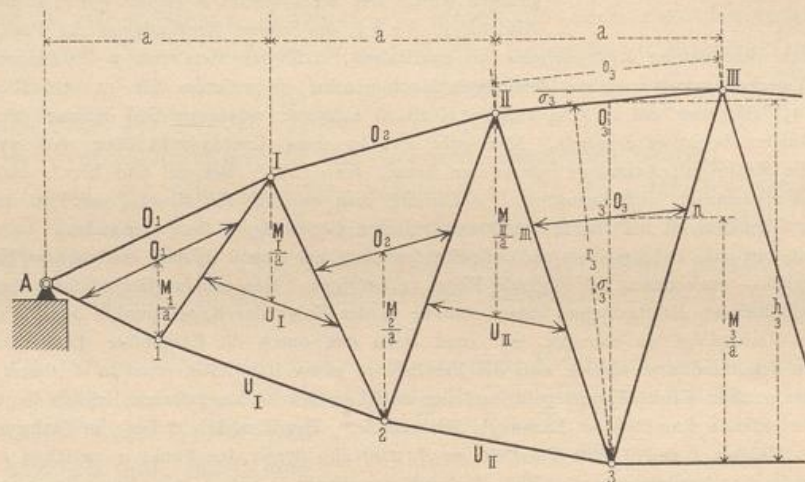
$$O_3 = - \frac{M_3}{r_3}.$$

Das Vorzeichen soll zunächst unberücksichtigt gelassen und nur die absolute Größe von O_3 in das Auge gefaßt werden. Alsdann ist

$$O_3 = \frac{M_3}{r_3} = \frac{M_3}{a} \cdot \frac{a}{r_3} = \frac{M_3}{a} \cdot \frac{a}{\frac{r_3}{\cos \sigma_3}}$$

Nun ist aber $\frac{a}{\cos \sigma_3} = o_3$ gleich der Länge des Stabes *II III* der oberen Gurtung, dessen Spannung gefucht wird; ferner ist $\frac{r_3}{\cos \sigma_3} = h_3$ gleich der Länge der lothrechten Linie, welche durch den Momentenpunkt *3* gelegt ist vom Momentenpunkt *3* bis zum Schnittpunkt mit dem Stabe *II III*. Trägt man nun $\frac{M_3}{a}$ (d. h. eine Kraft) nach beliebigem Maßstabe auf der durch den Momentenpunkt *3* gezogenen Lothrechten ab, so sei $33' = \frac{M_3}{a}$; nun ziehe man durch den Endpunkt $3'$ dieser Linie eine Parallele zu dem Stabe *II III*, dessen Spannung gefucht wird; diese

Fig. 197.



Parallele schneide die nächsten Diagonalen in *m* und *n*; dann ist \overline{mn} die gefuchte Spannung in O_3 , und zwar in demselben Kräftemaßstab, in welchem $\frac{M_3}{a}$ aufgetragen ist. Denn wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke *3 II III* und *3 mn* verhält sich

$$\frac{\overline{mn}}{o_3} = \frac{33'}{h_3}, \quad \text{d. h.} \quad \overline{mn} = o_3 \frac{33'}{h_3} = \frac{a}{\frac{r_3}{\cos \sigma_3}} \cdot \frac{M_3}{a}$$

Dies ist aber genau der Werth, welcher oben für die Spannung O_3 gefunden ist.

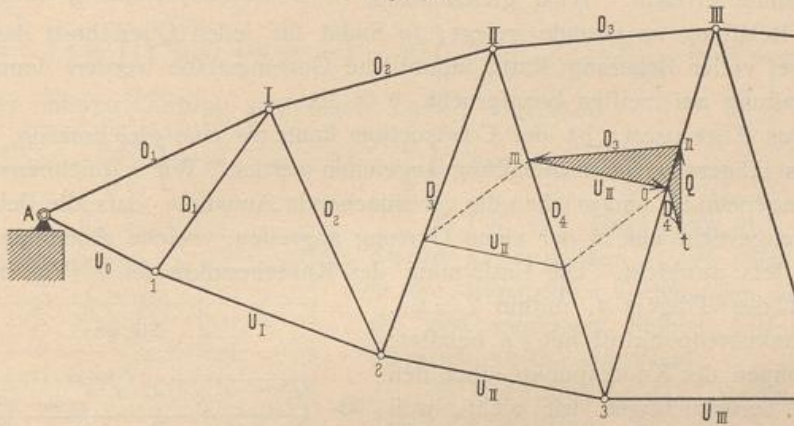
Was vom Stabe *II III* der oberen Gurtung nachgewiesen ist, gilt für alle Stäbe der oberen und unteren Gurtung. Demnach ergibt sich als Regel für die Aufindung der Gurtstab-Spannungen: Man trage von den Momentenpunkten der Gurtungsstäbe die Werthe $\frac{M}{a}$ nach beliebigem Kraftmaßstabe aus lothrecht ab und ziehe durch die erhaltenen Endpunkte Linien parallel zu den betreffenden Gurtungsstäben; alsdann geben die zwischen den Diagonalen erhaltenen Längen dieser

Parallelen die Spannungen der Gurtungsstäbe in demselben Maßstabe an, nach welchem $\frac{M}{a}$ aufgetragen ist.

In Fig. 197 sind für die Stäbe der oberen und unteren Gurtung die Stabspannungen nach vorstehendem Verfahren ermittelt.

Man kann nach diesem Verfahren auch die Spannungen der Gitterstäbe leicht finden. Denkt man in Fig. 198 einen Schnitt durch die Stäbe O_3 , U_{II} und D_4 gelegt, so wirken auf das links von diesem Schnitt liegende Trägerstück vier Kräfte, welche mit einander im Gleichgewicht sein müssen: die Mittelkraft aller auf das Trägerstück wirkenden Kräfte, d. h. die Querkraft Q , ferner die Spannungen O_3 , U_{II} , D_4 der drei vom Schnitt getroffenen Stäbe. Für diese vier Kräfte ergibt sich demnach ein sich schließendes Kraftpolygon. Bekannt sind O_3 und U_{II} nach Größe und Richtung, Q und D_4 nach ihrer Richtung. Man lege U_{II} in m an O_3 und ziehe durch den Endpunkt o dieser Linie die Parallele zu D_4 , durch n eine Parallele zu Q ,

Fig. 198.



d. h. die Lothrechte; beide Parallelen schneiden sich in t ; alsdann ist $ot = D_4$ und $tn = Q$. In Fig. 198 ist das Kraftpolygon schraffirt³³⁾. Die Art der Beanspruchung ergibt sich, wie stets, aus dem Umlaufsinne im Kraftpolygon.

Wenn einzelne Felder in der wagrechten Projection andere Knotenpunktabstände haben, als a , so ändert dies im Grundgedanken nichts; im Einzelnen wird die Construction etwas anders. Die Werthe $\frac{M}{a}$ kann man durch Rechnung oder durch Construction bestimmen.

2) Parallelträger mit Netzwerk oder zwei Scharen von Diagonalen.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Um diese Spannungen für eine beliebige Belastung zu ermitteln, bezeichnen wir die Mittelkraft aller auf das Bruchstück links vom Schnitte II (Fig. 199) wirkenden äußeren Kräfte mit Q . Für irgend einen Stab CE der oberen Gurtung ist F der Momenten- oder conjugirte Punkt, und das Moment der äußeren Kräfte in Bezug auf diesen Punkt ist $M = Q\eta$. Daraus folgt als Bedingungsgleichung:

$$0 = M + Xh, \text{ woraus } X = -\frac{M}{h} \dots \dots \dots 212.$$

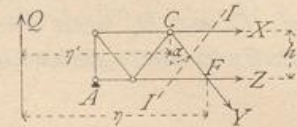
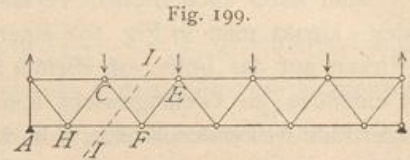
³³⁾ Daß in Fig. 198 der Endpunkt o von U_{II} auf die Diagonale $III3$ fällt, ist zufällig.

178.
Berechnung
der Gurtungs-
spannungen.

In gleicher Weise ergibt sich für C als Momentenpunkt, wenn M_1 das Moment von Q in Bezug auf C ist,

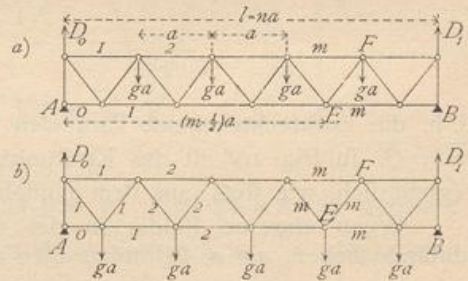
$$0 = M_1 - Zh, \text{ woraus } Z = \frac{M_1}{h} \dots \dots \dots 213.$$

Da bei einem Träger auf zwei Stützen M stets die angegebene Drehrichtung hat (stets positiv ist, vergl. Art. 156, S. 150), so folgt aus den Gleichungen 212 u. 213: Bei Trägern auf zwei Stützen werden die oberen Gurtungsstäbe stets gedrückt, die unteren Gurtungsstäbe stets gezogen. Ferner: X_{max} und Z_{max} werden bei derselben Belastung wie M_{max} stattfinden, d. h. in jedem Gurtungsstabe findet größte Beanspruchung bei derjenigen Belastung statt, bei welcher das Moment für den dem Stabe conjugirten Punkt sein Maximum erreicht. Wird gleichmäßig verteilte Belastung zu Grunde gelegt, so findet für jeden Querschnitt das größte Moment bei voller Belastung statt; sämtliche Gurtungsstäbe werden demnach bei voller Belastung am meisten beansprucht.



a) Das Eigengewicht der Construction kann als eine gleichmäßig über die Länge des Trägers verteilte Belastung angesehen werden. Wir bezeichnen es mit g für die Längeneinheit und machen die vereinfachende Annahme, dass alle Belastungen durch Eigengewicht nur in der einen Gurtung angreifen, welche Annahme für den Hochbau stets ausreicht. Die Entfernung der Knotenpunkte sei a (Fig. 200), die Felderzahl des Trägers n , mithin $l = na$. Jeder Mittenknotenpunkt ist mit ga belastet; die Belastungen der Knotenpunkte über den Auflagern berücksichtigen wir nicht, weil diese unmittelbar von den Auflagern aufgenommen werden.

Fig. 200.



Greifen die Lasten an der oberen Gurtung an (Fig. 200a), so ist bei der angenommenen Diagonalenanordnung der Auflagerdruck

$$D_0 = D_1 = (n - 1) \frac{g a}{2}.$$

Für den m -ten Stab der oberen Gurtung ist E der Momentenpunkt und

$$M = D_0 \left(m - \frac{1}{2} \right) a - (m - 1) g a \left(\frac{m - 2}{2} a + \frac{a}{2} \right);$$

$$M = \frac{g a^2}{2} \left[(n + 1) \left(m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right];$$

$$X_m^s = - \frac{g a^2}{2 h} \left[(n + 1) \left(m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right] \dots \dots \dots 214.$$

Für den m -ten Stab der unteren Gurtung ist F der Momentenpunkt und

$$M_1 = D_0 m a - (m - 1) g a \frac{m a}{2} = \frac{g a^2}{2} m (n - m);$$

$$Z_m^s = \frac{g a^2}{2 h} m (n - m) \dots \dots \dots 215.$$

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 200 b), so ist

$$D_0 = D_1 = \frac{n g a}{2}.$$

Genau wie oben erhält man

$$X_m^g = -\frac{g a^2}{2h} \left[m(n-m+1) - \frac{n}{2} \right] \quad \text{und} \quad Z_m^g = \frac{g a^2}{2h} m(n-m). \quad 216.$$

Wenn die Diagonalen eine andere Richtung haben, so daß die erste vom Auflagerpunkt nach der Mitte ansteigt, so ergeben sich etwas andere Formeln, die auf gleiche Weise, wie eben gezeigt, zu ermitteln sind.

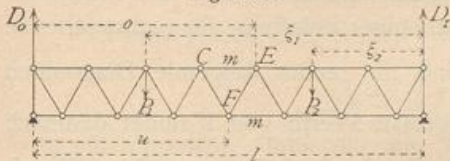
b) Die größten Gurtungsspannungen in Folge gleichmäßig vertheilter Nutzlast finden statt, wenn der ganze Träger belastet ist. Nennt man die gleichmäßig vertheilte Nutzlast für die Längeneinheit p , so ergeben sich offenbar für diese Belastung, die für den Knotenpunkt gleich $p a$ ist, genau dieselben Formeln, wie für das Eigengewicht, wobei nur g durch p zu ersetzen ist. Man erhält also für an der oberen Gurtung angreifende Lasten (Fig. 200 a)

$$X_m^p = -\frac{p a^2}{2h} \left[(n+1) \left(m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right] \quad \text{und} \quad Z_m^p = \frac{p a^2}{2h} m(n-m), \quad 217.$$

für an der unteren Gurtung angreifende Lasten (Fig. 200 b)

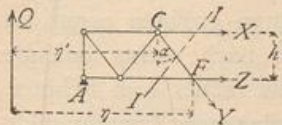
$$X_m^p = -\frac{p a^2}{2h} \left[m(n-m+1) - \frac{n}{2} \right] \quad \text{und} \quad Z_m^p = \frac{p a^2}{2h} m(n-m). \quad 218.$$

Fig. 201.



c) Für eine Belastung des Trägers durch Einzellasten P_1, P_2 (Fig. 201) sind in die allgemeinen Gleichungen 212 u. 213 die den einzelnen Stäben entsprechenden Momentenwerthe einzusetzen.

Fig. 202.

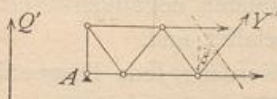


β) Berechnung der Spannungen in den Gitterstäben. Für eine beliebige Belastung sei Q die Mittelkraft aller links vom Schnitte II (Fig. 202) wirkenden äußeren Kräfte. Nennt man die Spannung der vom Schnitte getroffenen, nach rechts fallenden Diagonale Y , so muß, weil die algebraische Summe der auf das Bruchstück wirkenden lothrechten Kräfte gleich Null ist, stattfinden:

$$0 = Q - Y \cos \alpha, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{Q}{\cos \alpha}. \quad 219.$$

für eine nach rechts steigende Diagonale (Fig. 203) ist

Fig. 203.



$$0 = Q' + Y' \cos \beta, \quad \text{woraus} \quad Y' = -\frac{Q'}{\cos \beta}. \quad 220.$$

a) Das Eigengewicht erzeugt, wenn die Lasten an der oberen Gurtung angreifen, den Auflagerdruck (Fig. 200 a)

$$D_0 = D_1 = (n-1) \frac{g a}{2}.$$

Für den m -ten nach rechts fallenden Stab ist

$$Q_m = (n-1) \frac{g a}{2} - (m-1) g a = \frac{g a}{2} (n - 2m + 1),$$

179-
Berechnung
der
Gitterstäb-
spannungen.

fonach

$$Y_m^g = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2m + 1); \dots \dots \dots 221.$$

für den m -ten nach rechts steigenden Stab ist

$$Q'_m = \frac{g a}{2} (n - 2m + 1), \text{ daher } Y'_m^g = - \frac{g a}{2 \cos \beta} (n - 2m + 1) \dots 222.$$

Aus den Gleichungen 221 u. 222 für Y_m^g und Y'_m^g folgt leicht: Bei gleichmäÙig über den Träger vertheilter Belastung g (oder p) auf die Längeneinheit werden die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt.

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 200 b), so ist für die m -te rechts fallende Diagonale

$$Y = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2m + 2), \dots \dots \dots 223.$$

für die m -te rechts steigende Diagonale

$$Y' = - \frac{g a}{2 \cos \beta} (n - 2m) \dots \dots \dots 224.$$

Das Gesetz, daß bei dieser Belastungsart die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt werden, ist auch hier gültig.

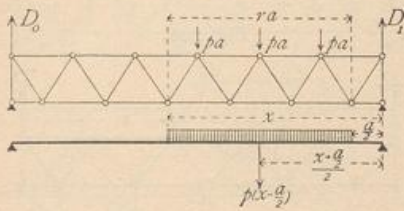
b) Um die ungünstigsten Gitterstabspannungen, welche in Folge der Nutzlast entstehen, zu ermitteln, erwäge man, daß bei beliebiger Belastung für rechts fallende Diagonalen nach Gleichung 219: $Y = \frac{Q}{\cos \alpha}$ und für rechts steigende Diagonalen nach Gleichung 220: $Y' = - \frac{Q'}{\cos \beta}$ ist. Der größte Werth von Y findet demnach bei derjenigen Belastung statt, bei welcher die Querkraft Q ihren größten Werth hat. Nach Art. 155 (S. 148) hat aber die Querkraft für einen Querschnitt ihren größten positiven Werth, wenn der Trägertheil rechts vom betrachteten Querschnitte belastet, der Trägertheil links davon unbelastet ist, ihren größten negativen Werth bei der umgekehrten Belastung. Daraus folgt: Jede nach rechts fallende Diagonale erleidet den größten Zug durch Nutzlast, wenn die rechts vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belastet, die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte unbelastet sind; dagegen den größten Druck, wenn die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belastet, die übrigen unbelastet sind. Da $Y' = - \frac{Q'}{\cos \beta}$, so findet in den nach rechts steigenden Diagonalen der größte Druck statt, wenn Q' seinen größten positiven Werth hat, wenn also nur die Knotenpunkte rechts vom Schnitte belastet sind, der größte Zug dagegen, wenn Q' seinen größten negativen Werth hat, wenn also nur die Knotenpunkte links vom Schnitte belastet sind.

Allgemeiner kann die Regel wie folgt ausgesprochen werden: Jede Diagonale erleidet den größten Zug, wenn nur die Knotenpunkte zwischen ihrem Fußpunkte und demjenigen Auflager, nach welchem dieser Fußpunkt zeigt, belastet sind; jede Diagonale erleidet den größten Druck, wenn nur die Knotenpunkte zwischen ihrem Kopfpunkte und demjenigen Auflager belastet sind, nach welchem dieser Kopfpunkt hinweist. Dieser Satz gilt allgemein, ob die Lastpunkte an der oberen oder unteren Gurtung liegen. Daraus folgt, daß für die Diagonalen nicht die volle, sondern die

theilweise Belaftung die ungünstigste ist und dafs man demnach auch im Hochbau, falls einseitige Belaftung möglich ist (in Verfammlungsräumen, Schulen etc.), bei der Berechnung der Träger auf dieselbe Rückficht nehmen mufs. Für jede Diagonale ist eine andere ungünstigste Belaftung einzuführen.

Nachdem nunmehr die ungünstigsten Belaftungsarten für die einzelnen Stäbe ermittelt sind, handelt es sich um die Auffuchung der durch dieselben erzeugten positiven, bezw. negativen Gröfstwerthe von Y und Y' . Greifen die Lasten an der oberen Gurtung an (Fig. 204), so ist Q genau eben so grofs, als wenn beim vollwandigen Träger die Einzellaften pa je auf die Längen a gleichmäfsig vertheilt wären, d. h. als wenn die Last p für die Längeneinheit von der Mitte des äufsersten Feldes am

Fig. 204.



rechten, bezw. linken Auflager bis zur Mitte desjenigen Feldes der oberen Gurtung vorgerückt ist, dem die Diagonale angehört. Denn im ersten Falle ist, wenn r belaftete Knotenpunkte vorhanden sind,

$$D_0 = \frac{rap}{l} \left(\frac{ra}{2} + \frac{a}{2} \right) = \frac{rapa^2}{2l} (r+1),$$

und da $x = ra + \frac{a}{2} = a \left(r + \frac{1}{2} \right)$, also $x + \frac{a}{2} = a(r+1)$ ist, so wird

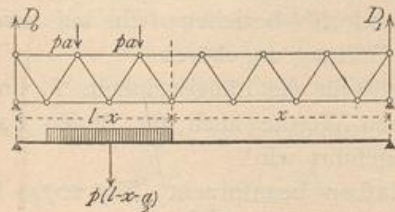
$$D_0 = \left(x + \frac{a}{2} \right) \frac{rap}{2l} = \frac{p}{2l} \left(x + \frac{a}{2} \right) \left(x - \frac{a}{2} \right) = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right].$$

Derselbe Werth ergibt sich für den vollwandigen Träger in Fig. 204, nämlich

$$D_0 = \frac{p}{2l} \left(x - \frac{a}{2} \right) \left(x + \frac{a}{2} \right).$$

Dies gilt allgemein, falls die den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte der mit der Nutzlast belafteten Gurtung um eine ganze Feldweite von den Auflagern abliegen.

Fig. 205.



Nun ist für diejenigen Diagonalen, für welche die gezeichnete Belaftung den grössten Zug, bezw. grössten Druck erzeugt, $Q_{max} = D_0$, also auch

$$Q_{xmax} = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

daher nach Gleichung 219

$$Y_{max} = \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \dots \dots \dots 225.$$

In gleicher Weise ergibt sich nach Fig. 205

$$D_0 = \frac{p \left(l - x - \frac{a}{2} \right)}{l} \left(x + \frac{l - x - \frac{a}{2}}{2} \right) = \frac{p}{2l} \left[\left(l - \frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right];$$

$$Q_{xmin} = \frac{p}{2l} \left[\left(l - \frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right] - p \left(l - \frac{a}{2} - x \right) = - \frac{p}{2l} \left[\left(l - x \right)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

und

$$Y_{min} = - \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[\left(l - x \right)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \dots \dots \dots 226.$$

Dem entsprechend wird

$$Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos \beta} = -\frac{p}{2l \cos \beta} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right], \dots \dots \dots 227.$$

$$Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos \beta} = \frac{p}{2l \cos \beta} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \dots \dots \dots 228.$$

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 206), so ist (wenn mit ganz geringem Fehler die Belastung der beiden den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte gleichfalls mit pa eingeführt wird) Q_{max} , bzw. Q_{min} eben so groß, wie bei einem vollwandigen Träger, bei welchem die Last p für die Längeneinheit vom rechten. bzw. linken Auflager aus bis zur Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vorgerückt ist, welchem die Diagonale angehört. Der Beweis ist in gleicher Weise, wie oben, zu führen und gilt allgemein, falls die den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte der mit Nutzlast belasteten Gurtung um eine halbe Feldweite von den Auflagern entfernt sind. Demnach ist

$$Q_{max} = \frac{p x^2}{2l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = -\frac{p (l-x)^2}{2l}.$$

x bedeutet in diesen Gleichungen den Abstand der Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vom rechten Auflager, zu welchem die Diagonale gehört.

Man erhält

$$Y_{max} = \frac{p x^2}{2l \cos \alpha} \quad \text{und} \quad Y_{min} = -\frac{p (l-x)^2}{2l \cos \alpha}, \dots \dots \dots 229.$$

$$Y'_{min} = -\frac{p x^2}{2l \cos \beta} \quad \text{und} \quad Y'_{max} = \frac{p (l-x)^2}{2l \cos \beta} \dots \dots \dots 230.$$

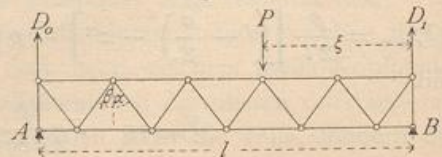
Die zusammengehörigen Werthe von Y und Y' beziehen sich auf zwei Diagonalen, welche demselben Felde der unteren Gurtung angehören.

c) Erfährt der Träger eine volle Belastung p für die Längeneinheit, so sind die unter a für Eigengewichtsbelastung gefundenen Werthe auch für diesen Fall gültig, wenn statt des dortigen g die Größe p eingeführt wird.

d) Wird endlich der Träger durch Einzellaften beansprucht (Fig. 207), so erzeugt die Last P im Abstände ξ von B den Stützendruck $D_0 = \frac{P\xi}{l}$. In sämtlichen rechts fallenden Diagonalen links vom Lastpunkt wird dann $Y = \frac{D_0}{\cos \alpha} = \frac{P\xi}{l \cos \alpha}$; in sämtlichen rechts steigenden Diagonalen links vom Lastpunkte ist $Y' = -\frac{P\xi}{l \cos \beta}$.

Eben so ist für alle Querschnitte rechts vom Lastpunkte $Q = D_0 - P = -\frac{P(l-\xi)}{l}$, mithin für die nach rechts fallenden Diagonalen dieser Strecke $Y_1 = -\frac{P(l-\xi)}{l \cos \alpha}$, für die nach rechts steigenden Diagonalen dieser Strecke $Y'_1 = \frac{P(l-\xi)}{l \cos \beta}$. Daraus folgt die

Fig. 207.

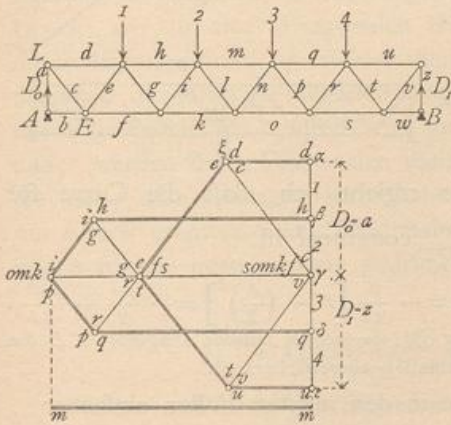


Regel: Die nach dem Lastpunkte zu fallenden Diagonalen werden gezogen, die nach demselben steigenden Diagonalen werden gedrückt.

γ) Graphische Ermittlung der Spannungen. Setzt man zunächst eine gleichmäßig vertheilte Belastung (Eigengewicht, bezw. volle Nutzlast) voraus, so macht es für das Verfahren keinen Unterschied, ob die Lasten an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen. Wenn in jedem Knotenpunkte, z. B. der oberen Gurtung (Fig. 208), die Belastung ga , bezw. pa wirkt, so empfiehlt sich für die Ermittlung der Spannungen die Vieleckmethode, weil dieselbe sämtliche Stabspannungen in einem Linienzuge giebt.

180.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen.

Fig. 208.



Nachdem D_0 und D_1 auf bekannte Art gefunden sind, trägt man alle äußeren Kräfte $1, 2, 3, 4, D_1$ und D_0 in der Reihenfolge der Knotenpunkte an einander. Es sei $\alpha\beta = 1, \beta\gamma = 2, \gamma\delta = 3, \delta\varepsilon = 4$; nun trägt man an ε (den Endpunkt von 4) $D_1 = \varepsilon\gamma$ und $D_0 = \gamma\alpha$. Damit schließt sich das Kraftpolygon der äußeren Kräfte. Wir gehen nun von demjenigen Knotenpunkte, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, d. h. von A aus. In A wirken D_0, a und b ; die Zerlegung von D_0 in die beiden Componenten a und b ergibt $a = D_0$ und $b = 0$. Im Knotenpunkte L wirken jetzt a, c und d . Bei der Zerlegung von $a (= \gamma\alpha)$ ist zu beachten, daß die Parallele zum Randstabe d durch den Punkt im Kraftpolygon gehen muß, der zwischen D_0 und 1 liegt, d. h. durch α . Man erhält $\alpha\xi = d$ und $\xi\gamma = c$. (Nach

Art. 175, S. 171 ist d Druck und c Zug.) Geht man nun zum Knotenpunkte E über, so wirken daselbst ($b = 0$) c, e und f ; bekannt ist $c = \gamma\xi$. Demnach sind e und f durch Zerlegung zu ermitteln, wobei die Parallele zum Randstabe f durch den Punkt γ im Kraftpolygon gehen muß, welcher zwischen D_1 und D_0 liegt, da der Randstab f im System sich zwischen den Kräften D_0 und D_1 befindet. Man erhält leicht e und f . (Da c , wie oben gefunden, Zug ist, erhält e Druck, f Zug.) Geht man so weiter, so ergibt sich der in Fig. 208 gezeichnete Kräfteplan. Darin sind die Druckspannungen durch doppelte, die Zugspannungen durch einfache Linien bezeichnet; m ist Druck, fällt aber mit einer Anzahl von Zugspannungen zusammen und ist deshalb besonders herausgezeichnet. Die Endpunkte der Stabspannungen sind stets durch diejenigen Buchstaben bezeichnet, welche die bezüglichen Stäbe im System führen. Die Spannungen b, l, n, w werden gleich Null.

Um die größten in den Gitterstäben durch die Nutzlasten erzeugten Zug-, bezw. Druckspannungen zu bestimmen, beachte man, daß $Y_{max} = \frac{Q_{max}}{\cos \alpha}, Y_{min} = \frac{Q_{min}}{\cos \alpha}, Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos \beta}$ und $Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos \beta}$ ist.

Wenn die Lasten pa an der oberen Gurtung angreifen oder allgemein, wenn die den Auflagern zunächst gelegenen Knotenpunkte der belasteten Gurtung von diesen um eine ganze Feldweite a abliegen, so ist

$$Q_{max} = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]. \dots \dots \dots 231.$$

Die graphische Darstellung von Q_{max} ergibt eine Parabel (Fig. 209a).

Für $x = 0$ wird $Q_{max} = -\frac{pa^2}{8l}$; für $x = l$ wird $Q_{max} = \frac{pl}{2} \left[l^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = \frac{pl}{2} - \frac{pa^2}{8l}$.

Q_{max} wird Null für $x = \frac{a}{2}$; die Curve hat ein Minimum für $0 = 2x$, d. h. für $x = 0$. Danach ist die Curve in Fig. 209a construirt.

In der Gleichung für Q_{max} bedeutet x den Abstand des Endes der Nutzlast vom rechten Auflager; diese Belastung ist die ungünstigste für die Diagonalen, deren Fußpunkte in demselben Abstände vom

rechten Auflager liegen (Fig. 204). Für die Berechnung der ungünstigsten Diagonalspannungen sind sonach diejenigen Werthe von x einzusetzen, welche den Fußpunkten der Diagonalen entsprechen und die zugehörigen Ordinaten aus Fig. 209 a zu entnehmen. Für die Diagonale CE ergibt sich \overline{mn} als Werth von Q_{max} . Die durch n parallel zur Diagonale CE gezogene Linie no ergibt den Werth von

$$Y = \frac{Q_{max}}{\cos \alpha}, \text{ weil } \overline{no} = \frac{\overline{mn}}{\cos \alpha} = \frac{Q_{max}}{\cos \alpha}$$

ist. Nach Gleichung 227 ist $Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos \beta}$, also \overline{nr} der größte Druck in der rechts steigenden Diagonale EF .

Ferner ist

$$Q_{min} = -\frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \quad 232.$$

Wird die Differenz $l-x = \xi$ gesetzt, so ergibt sich, daß die Curve für $Q_{min} = -\frac{p}{2l} \left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right]$ derjenigen für Q_{max} congruent ist.

Für $\xi = 0$ ist $Q_{min} = +\frac{pa^2}{8l}$; für $\xi = l$ ist $Q_{min} = -\frac{p}{2l} \left[l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] = -\frac{pl}{2} + \frac{pa^2}{8l}$. Man erhält die in Fig. 209 a gezeichnete Curve, in welcher für die rechts fallende Diagonale CE das Minimum nt , für die rechts steigende Diagonale das Maximum nu eingezeichnet ist.

Ohne bemerkenswerthen Fehler kann man in den meisten Fällen einfacher

$$Q_{max} = \frac{p}{2l} x^2 \quad \text{und} \quad Q_{min} = -\frac{p}{2l} (l-x)^2$$

setzen. Die Curven verlaufen dann genau so, wie in Fig. 210.

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an oder allgemein, sind die an der mobil belasteten Gurtung gelegenen Knotenpunkte zunächst den Auflagern von diesen

Fig. 209.

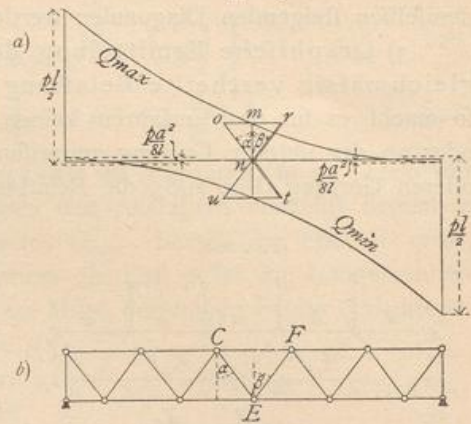


Fig. 210.

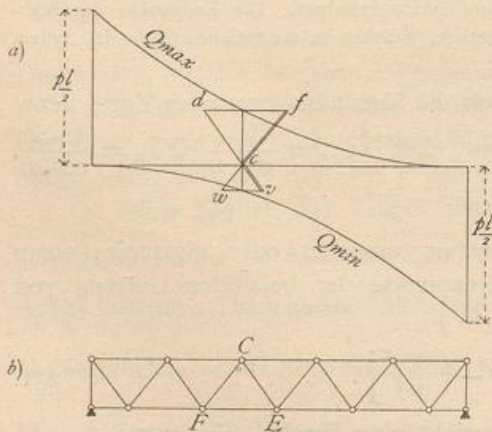
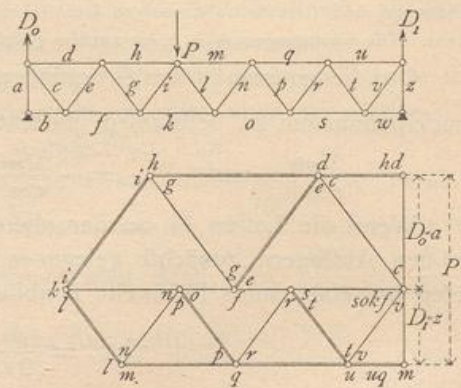


Fig. 211.



um je eine halbe Feldweite entfernt, so ergibt das Verzeichnen der Curven für Q_{max} und Q_{min} entsprechend den Gleichungen in Art. 179 (S. 180) die in Fig. 210 a dargestellten Parabeln.

Man erhält genau wie oben: der Maximalzug in CE ist cd ; der Maximaldruck in CF ist cf ; der Maximaldruck in CE ist cv ; der Maximalzug in CF ist cw .

183.
Berechnung
der
Gitterstäbs-
spannungen.

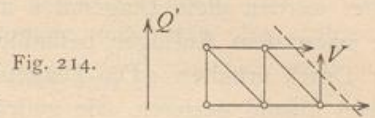
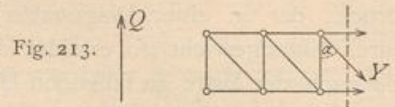
β) Berechnung der Spannungen in den Gitterstäben. Für das Bruchstück in Fig. 213 sei bei beliebiger Belastung die Querkraft Q ; alsdann ist für die Spannung in der Diagonalen

$$Y \cos \alpha = Q, \text{ woraus } Y = \frac{Q}{\cos \alpha} \dots \dots \dots 236.$$

Ist in Fig. 214 für das Bruchstück die Querkraft Q' , so ist die Spannung im Pfoften

$$V = -Q' \dots \dots \dots 237.$$

Für die Diagonalen ist es, da der Schnitt lothrecht gelegt werden kann, gleichgültig, ob die Last in der oberen oder unteren Gurtung liegt; für die Pfoften dagegen ergibt sich, da der Schnitt bei diesen schräg gelegt wird, ein anderes Q' , wenn die Last oben, als wenn sie unten liegt.



a) Das Eigengewicht erzeugt (Fig. 212) in der m -ten Diagonale (Schnitt II) die Querkraft $Q_m = D_0 - (m - 1) g a = \frac{g a}{2} (n - 2m + 1)$ und

$$Y_m^s = \frac{Q_m}{\cos \alpha} = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2m + 1) \dots \dots \dots 238.$$

Den selben Ausdruck fanden wir in Art. 179 (S. 178), Gleichung 221, für die beim Netzwerk rechts fallenden Diagonalen. Die in Bezug auf Zug und Druck dort gefundenen Ergebnisse gelten demnach auch hier: Die nach der Mitte fallenden Diagonalen erhalten durch das Eigengewicht Zug; die nach der Mitte steigenden Diagonalen erhalten Druck.

Für die Ermittlung der Spannungen in den Pfoften ist zu unterscheiden, ob sich die Lastpunkte oben oder unten befinden. Im ersteren Falle (Fig. 212) ist

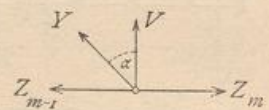
$$V_m = -Q_m = -\frac{g a}{2} (n - 2m + 1), \dots \dots \dots 239.$$

im zweiten Falle

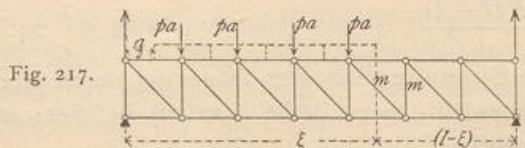
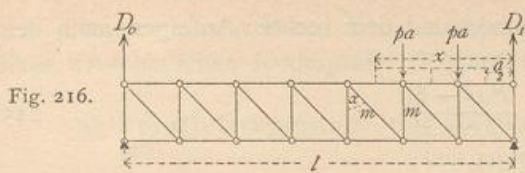
$$V'_m = -Q'_m = -\frac{g a}{2} (n - 1 - 2m) \dots \dots \dots 240.$$

Die Art der Beanspruchung ergibt sich durch Betrachtung eines beliebigen Knotenpunktes an der nicht belasteten Gurtung (Fig. 215). An einem Knotenpunkte der unteren Gurtung wirken, wenn die Lasten an der oberen Gurtung angenommen werden, nur die Spannungen der Stäbe, welche sich an ihm treffen. Die algebraische Summe aller lothrechten Seitenkräfte muß Null sein, d. h. es muß $0 = Y \cos \alpha + V$, also $V = -Y \cos \alpha$ sein. Hieraus folgt der Satz: Pfoften- und Diagonalspannung am Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung haben entgegengesetzte Beanspruchung; die Belastung, welche in einer Diagonalen Zug erzeugt, erzeugt in demjenigen Pfoften, welcher mit ihr an einem Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung zusammentrifft, Druck und umgekehrt.

Fig. 215.



b) Für die ungünstigste Beanspruchung der Gitterstäbe, welche durch die Nutzlast hervorgerufen wird, ergibt sich bezüglich der Diagonalen durch dieselbe Beweisführung, wie in Art. 179 (S. 178), die gleiche Regel wie dort. Für die Pfoften



ergibt sich zugleich aus dem Schlusssatze unter α : Jeder Pfosten erhält seinen größten Druck (bezw. Zug) bei derjenigen Belastung, bei welcher die mit ihm an einem unbelasteten Knotenpunkte zusammentreffende Diagonale ihren größten Zug (bezw. Druck) erhält.

Wirken die Lasten an der oberen Gurtung, so ergeben sich die Werthe für die Spannungen, wenn wir wiederum zur Ermittlung von Q die Knotenpunktsbelastungen durch gleichförmig vertheilte Lasten ersetzt denken, wie folgt. Für das Maximum von Y_m und das Minimum von V_m ergibt sich nach Fig. 216 der Auflagerdruck

Sonach

$$D_0 = \frac{p \left(x - \frac{a}{2} \right)}{2l} \left(x + \frac{a}{2} \right) = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = Q_m.$$

$$Y_{m_{max}} = \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad \text{und} \quad V_{m_{min}} = - \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]. \quad 241.$$

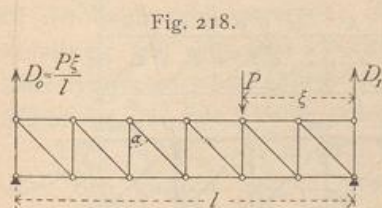
Für Y_{min} und V_{max} findet man nach Fig. 217

$$Q = - \frac{p}{2l} \left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right];$$

$$Y_{m_{min}} = - \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad \text{und} \quad V_{m_{max}} = + \frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]. \quad 242.$$

x bedeutet den Abstand der Mitte desjenigen Feldes, zu dem die Diagonale gehört, vom rechten Auflager; bei den Pfosten die Mitte des Feldes, zu welchem diejenige Diagonale gehört, die mit dem Pfosten an einem Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung zusammentrifft (hier also der unteren Gurtung).

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an, so stimmen die Formeln für die Diagonalen genau mit den eben entwickelten; auch diejenigen für die Pfosten, wenn man beachtet, daß x den soeben erwähnten Werth hat, daß sich also x hier auf die Mitte des Feldes bezieht, zu dem die Diagonale gehört, welche sich mit dem Pfosten an einem Knotenpunkte der oberen Gurtung schneidet; statt V_m ist also dann V_{m-1} zu setzen.



c) Wenn der Träger durch eine Einzellast belastet wird (Fig. 218), so erhält jede Diagonale zwischen dem Lastpunkt und dem linken Auflager, nach welchem hier die Diagonalen steigen, einen Zug

$$Y = \frac{P \xi}{l \cos \alpha}, \quad \dots \quad 243.$$

jeder Pfosten auf dieser Seite der Last einen Druck

$$V = - \frac{P \xi}{l}, \quad \dots \quad 244.$$

Jede Diagonale zwischen dem Lastpunkt und dem rechten Auflager, nach dem die Diagonalen hier fallen, erhält einen Druck

$$Y = - \frac{P(l - \xi)}{l \cos \alpha}, \dots \dots \dots 245.$$

jeder Pfosten auf dieser Seite einen Zug

$$V = \frac{P(l - \xi)}{l} \dots \dots \dots 246.$$

184.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen.

γ) Graphische Ermittlung der Spannungen. Der Träger sei durch eine gleichmäßig vertheilt Last (Eigengewicht, bzw. volle Nutzlast) belastet; in jedem Knotenpunkte der oberen Gurtung wirke die Last ga , bzw. pa . Hiernach ist in Fig. 219 der Kräfteplan nach dem *Cremona'schen* Verfahren gezeichnet, worüber weitere Bemerkungen unnöthig sind.

Wenn die Zeichnung für eine Belastung g auf die Längeneinheit contruirt ist, so geben die Längen der einzelnen Linien auch zugleich die Beanspruchungen für die Belastung p auf die Längeneinheit, falls dieselben nur auf einem Maßstabe abgegriffen werden, auf welchem diejenige Länge pa bedeutet, welche vorher ga bedeutet hatte.

Sind die Maximalspannungen in den Gitterstäben, welche durch Verkehrslast erzeugt werden, zu bestimmen, so ergibt die Vergleichung der in Art. 183 (S. 185) für Y_{max} und V_{max} gefundenen Werthe mit den in Art. 179 (S. 177) für den Parallelträger mit Netzwerk gefundenen Werthen für Y und Q die genaue Uebereinstimmung beider, falls x den in Art. 183 (S. 185) angegebenen Werth hat.

Die unten stehende Curve (Fig. 220) ergibt demnach die Werthe für Q_{max} , so wie Q_{min} und damit, wie gezeichnet, leicht die Werthe für Y und V . Der für V_{3min}

Fig. 219.

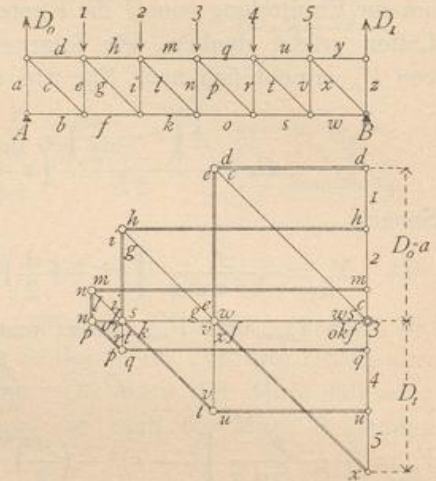


Fig. 220.

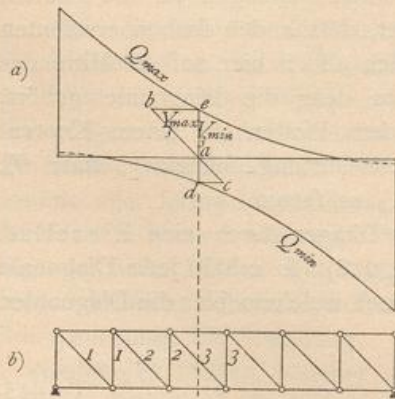
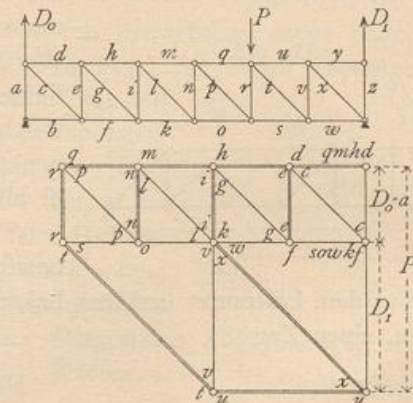


Fig. 221.



angegebene Werth entspricht einer Belastung der oberen Gurtung. Auch hier kann ohne merklichen Fehler an Stelle der Curve in Fig. 220 a diejenige in Fig. 210 a gesetzt werden.

Sämmtliche durch eine Einzellaft erzeugten Spannungen werden leicht mittels eines *Cremona'schen* Kräfteplanes (Fig. 221) ermittelt.

4) Parallelträger mit nur gezogenen, bzw. nur gedrückten Diagonalen.

Im vorhergehenden Kapitel ist gezeigt worden, daß die gedrückten Stäbe mit Rücksicht auf Widerstand gegen Zerknicken unter Umständen wesentlich stärker konstruirt werden müssen, als die einfache Druckbeanspruchung erfordert. Bei der Bestimmung der Querschnittsgröße sind vielfach Zuschläge zu machen, welche bei den gezogenen Stäben nicht nöthig sind. Man hat deshalb bei gewissen Baustoffen, besonders bei Schmiedeeisen und Flusseisen, die Verwendung gedrückter Stäbe möglichst beschränkt und statt derselben, wenn möglich, gezogene angeordnet. Wo aber gedrückte Stäbe nicht entbehrt werden können, empfiehlt es sich, die kürzeren Stäbe als gedrückte, die längeren als gezogene auszuführen. Bei manchen Baustoffen hingegen, insbesondere beim Holz, macht die Anordnung der Verbindungen eine möglichst geringe Verwendung von Zugstäben und eine möglichst ausgedehnte Verwendung von Druckstäben wünschenswerth.

Bei den Trägern mit Fachwerk ist die Anordnung von nur gezogenen, bzw. nur gedrückten Diagonalen möglich.

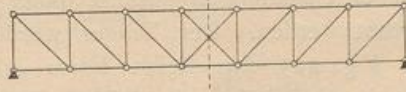
Wir betrachten zunächst die Träger mit nur gezogenen Diagonalen.

Wie in Art. 183 (S. 184) nachgewiesen ist, erzeugt das Eigengewicht, so wie auch eine gleichmäßige Belastung aller Knotenpunkte in den nach der Mitte fallenden Diagonalen Zug, in den nach der Mitte steigenden Diagonalen Druck. Soll also durch die angegebene Belastung, welche für den Hochbau weitaus die wichtigste ist, in den Diagonalen nur Zug entstehen, so ordnet man nur nach der Mitte fallende Diagonalen an, konstruirt also den Träger genau symmetrisch zur Mitte (Fig. 222).

Fig. 222.



Fig. 223.



Ist die Felderzahl ungerade, so erhalten die Diagonalen im Mittelfelde bei dieser Belastung den Zug und Druck Null (Fig. 223). Bei dieser Trägerform erhalten je zwei symmetrisch zur Mitte liegende Stäbe gleiche Spannungen; dieselben wurden früher für die eine Hälfte gefunden und sind demnach leicht zu übertragen.

Die in Fig. 222 u. 223 gezeichneten Diagonalen erhalten aber durch nicht über den ganzen Träger ausgedehnte Belastungen unter Umständen Druckbeanspruchungen, und zwar findet, wie in Art. 179 (S. 178) u. 183 (S. 184) ermittelt, in einer Diagonalen der größte Druck statt, wenn die Knotenpunkte vom Kopf der Diagonalen bis zu demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist, belastet, die übrigen Knotenpunkte aber unbelastet sind. Durch das stets noch vorhandene Eigengewicht findet andererseits in den Diagonalen eine beständige Zugspannung statt, welche die erwähnte Druckbeanspruchung vermindert. Diejenigen Diagonalen nun, bei denen (beides absolut genommen) die Zugspannung durch das Eigengewicht größer ist, als die größtmögliche Druckspannung in Folge der Verkehrslast, werden stets gezogen, nie gedrückt. Bei denjenigen Diagonalen

185.
Grundsatz.

186.
Träger
mit nur
gezogenen
Diagonalen.

dagegen, welche durch das Eigengewicht einen geringeren Zug erhalten, als ungünstigstenfalls der Druck durch Nutzlast beträgt (wiederum beides absolut genommen), wird eine Druckbeanspruchung eintreten, die zu vermeiden ist. Man bringt deshalb im betreffenden Felde eine zweite Diagonale mit einer solchen Richtung an, daß die Belastung, welche in der bereits im Felde vorhandenen Diagonalen Druck erzeugen würde, in der zweiten Diagonalen Zug hervorruft. Die Diagonale muß demnach so gerichtet sein, daß die erwähnte Nutzlast die Knotenpunkte vom Fußpunkte dieser Diagonalen an bis zu demjenigen Auflager belastet, nach welchem dieser Fußpunkt hinweist; mit anderen Worten, man bringt eine Diagonale an, welche die bereits vorhandene Diagonale kreuzt, eine sog. Gegendiagonale (in Fig. 224 die punktirte Diagonale $E'F'$).

Damit dieselbe aber auch wirksam sei, erhält die Hauptdiagonale EF einen derartigen Querschnitt, daß sie bei Druckspannungen ausbiegt, daß sie also in diesem Falle als nicht vorhanden angesehen werden kann.

Solche Gegendiagonalen sind in denjenigen Feldern anzuordnen, in welchen die Hauptdiagonalen unter Umständen Druckspannungen erhalten. In den Feldern nahe am Auflager ist die Zugspannung durch das Eigengewicht meistens groß, die Druckspannung durch Nutzlast meistens klein, so daß in diesen Feldern keine Gegendiagonalen nöthig sind; in den mittleren dagegen sind sie anzuordnen. Die Spannungen in den Gegendiagonalen sind dann genau so zu ermitteln, als wären die Hauptdiagonalen nicht vorhanden; jede Gegendiagonale, z. B. $E'F'$, befindet sich genau in derselben Lage, wie die symmetrisch zur Trägermitte liegende Hauptdiagonale im Träger mit nur nach einer Seite fallenden Diagonalen, also hier wie RS (Fig. 224). Die oben gefundenen Spannungen können daher hier sofort verwertet werden. Der Träger würde demnach die in Fig. 225 dargestellte Form erhalten, in welcher je zwei Stäbe mit gleichen Bezeichnungen gleiche Spannungen erleiden.

Fig. 224.

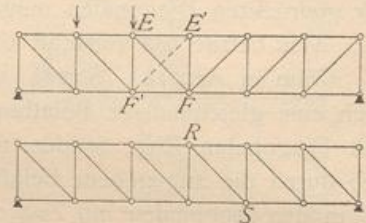
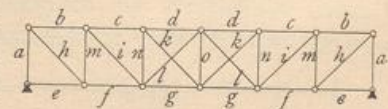
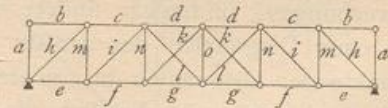


Fig. 225.



Bei der Construction eines Trägers mit nur gedrückten Diagonalen ist nach gleichem Grundsatze zu verfahren. Zunächst sind beiderseits nur nach der Mitte ansteigende Diagonalen zu verwenden, damit man für Belastung durch Eigengewicht, bzw. Gesamtlast nur Druck erhalte. In denjenigen Feldern alsdann, in welchen die Diagonalen unter Umständen Zugspannung erhalten würden, sind wie oben Gegendiagonalen anzuordnen (Fig. 226). Die Verbindung in den Knotenpunkten ist so anzuordnen, daß die Hauptdiagonalen keinen Zug übertragen können.

Fig. 226.



Die Beanspruchung der Pfosten ergibt sich nach Art. 183 (S. 184) stets der Beanspruchung derjenigen Diagonalen entgegengesetzt, welche an einem unbelasteten Knotenpunkte mit dem Pfosten zusammentrifft. Werden demnach alle Diagonalen nur gezogen, so werden alle Pfosten nur gedrückt (Fig. 225); werden alle Diagonalen

187.
Träger
mit nur
gedrückten
Diagonalen.

nur gedrückt, so werden alle Pfoften nur gezogen (Fig. 226). Im zweiten Falle werden dieselben meistens aus Schmiedeeisen hergestellt, während die Diagonalen aus Holz bestehen.

Beispiel. Ein als Parallelträger mit Diagonalen und Pfoften (nach Art von Fig. 222) hergestellter Unterzug hat folgende Abmessungen und Belastungen: Stützweite $l = 12$ m; Höhe zwischen den Gurtungs-Schwerpunkten $h = 1,5$ m; Anzahl der Felder $n = 8$; Feldweite $a = 1,5$ m. Die Diagonalen fallen jederseits nach der Trägermitte zu; Gegendiagonalen sind nicht vorhanden. Die Belastung durch das Eigengewicht für das laufende Meter ist $g = 1800$ kg, diejenige durch Nutzlast $p = 2400$ kg; mithin sind die Knotenpunktlasten bezw. $ga = 2700$ kg und $pa = 3600$ kg. Die Lastpunkte liegen in der oberen Gurtung. Die durch diese Belastungen entstehenden Spannungen sind zu berechnen.

188.
Beispiel.

a) Spannungen in den Gurtungen. Nach Gleichung 234 u. 235 sind für den m -ten Stab der oberen Gurtung

$$X_g = - \frac{1800 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 1,5} m (8 - m) = - 1350 m (8 - m)$$

und

$$X_p = - \frac{2400 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 1,5} m (8 - m) = - 1800 m (8 - m).$$

Für den m -ten Stab der unteren Gurtung sind nach Gleichung 234 u. 235

$$Z_g = \frac{1800 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 1,5} (m - 1) (9 - m) = 1350 (m - 1) (9 - m) \quad \text{und} \quad Z_p = 1800 (m - 1) (9 - m).$$

Man erhält aus vorstehenden Ausdrücken, indem man der Reihe nach für m die Werthe 1, 2, 3, 4 einführt, die Gurtungsspannungen der Stäbe links der Mitte. Die Spannungen in den symmetrisch zur Mitte liegenden Stäben sind den gefundenen genau gleich. Die Addition der Werthe X_g und X_p ergibt die Maximalspannungen in der oberen, die Addition der Werthe Z_g und Z_p die Maximalspannungen in der unteren Gurtung. Die Ergebnisse sind in umstehender Tabelle angegeben.

β) Spannungen in den Diagonalen. a) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 238 ist für die m -te Diagonale die Spannung durch das Eigengewicht, da hier $\cos \alpha = \cos 45^\circ = 0,707$ ist,

$$Y_g = \frac{1800 \cdot 1,5}{2 \cdot 0,707} (9 - 2m) = 1910 (9 - 2m).$$

Durch Einsetzung der Zahlenwerthe $m = 1, 2, 3, 4$ erhält man die Spannungen Y_g .

b) Durch die Nutzlast. Die größten Zug- und Druckspannungen, welche in den Diagonalen hervorgerufen werden, sind nach Gleichung 241 u. 242

$$Y_{pmax} = \frac{2400}{2 \cdot 12 \cdot 0,707} (x^2 - 0,75^2) = 141,4 (x^2 - 0,56)$$

und

$$Y_{pmin} = - \frac{2400}{2 \cdot 12 \cdot 0,707} [(l - x)^2 - 0,75^2] = - 141,4 [(l - x)^2 - 0,56].$$

Man erhält für

$m =$	1	2	3	4
$x =$	11,25	9,75	8,25	6,75 m
$(l - x) =$	0,75	2,25	3,75	5,25 m

und für Y_{pmax} , bezw. Y_{pmin} die Werthe, welche in der umstehenden Tabelle folgen.

γ) Spannungen in den Pfoften. a) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 239 ist, da die Lastpunkte oben liegen,

$$V_g = - \frac{1800 \cdot 1,5}{2} (9 - 2m) = - 1350 (9 - 2m).$$

b) Durch die Nutzlast. Die größten Druck-, bezw. Zugspannungen ergeben sich aus den Gleichungen 241 u. 242 zu

$$V_{pmin} = - \frac{2400}{2 \cdot 12} (x^2 - 0,75^2) = - 100 (x^2 - 0,56) \quad \text{und} \quad V_{pmax} = 100 [(l - x)^2 - 0,56].$$

Für x sind dieselben Werthe, wie bei den Diagonalen einzuführen. Man erhält die Werthe der umstehenden Tabelle.

Im Endpfoften ist die Druckspannung stets gleich dem Auflagerdruck, also hier, da die Belastung des Endknotenpunktes mit $\frac{ga}{2}$, bezw. $\frac{pa}{2}$ hinzukommt,

$$V_g = - (3,5 + 0,5) g a = - 4 g a = - 4 \cdot 1800 \cdot 1,5 = - 10800 \text{ kg,}$$

$$V_{pmin} = - 4 p a = - 4 \cdot 2400 \cdot 1,5 = - 14400 \text{ kg.}$$

Zug kann in diesem Pfoften nicht entstehen.

Auf den Mittelpfoften sind die obigen Gleichungen nicht anwendbar, weil an diesem unteren Endpunkte sich die zwei Diagonalen der anstoßenden Felder treffen, also der schräge Schnitt andere Stäbe trifft, als bei der Entwicklung der Formeln vorgesehen war. Da am oberen Endpunkt des Pfoftens keine Diagonale ansetzt, so kann derselbe nur solche lothrechte Kräfte aufnehmen, welche im oberen Knotenpunkte unmittelbar angreifen. Wir erhalten also die Spannungen in demselben genau so groß, wie die Knotenpunktsbelastungen. Diese Werthe sind in die Tabelle eingefetzt worden.

Tabelle der Stabspannungen.

Teil der Construction	m	=	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Obere Gurtung	X_g	=		- 9450	-16200	-20250	-21600	-21600	-20250	-16200	- 9450
	X_p	=		-12600	-21600	-27000	-28800	-28800	-27000	-21600	-12600
Untere Gurtung	Z_g	=		0	9450	16200	20250	20250	16200	9550	0
	Z_p	=		0	12600	21600	27000	27000	21600	12600	0
Diagonalen	Y_g	=		13370	9550	5730	1910	1910	5730	9450	13370
	Y_{pmax}	=		17820	13362	9545	6363	6363	9545	13362	17820
	Y_{pmin}	=		0	- 636	- 1910	- 3818	- 3818	- 1910	- 636	0
Pfoften	V_g	=	-10800	- 9450	- 6750	- 4050	- 2700	- 4050	- 6750	- 9450	-10800
	V_{pmin}	=	-14400	-12600	- 9450	- 6750	- 3600	- 6750	- 9450	-12600	-14400
	V_{pmax}	=	0	0	4500	1350	0	1350	450	0	0

K i l o g r a m m

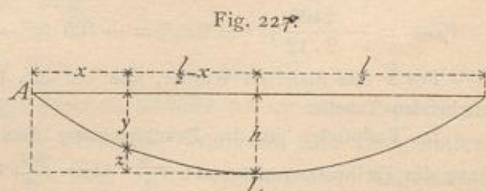
Zur Bestimmung der Querschnitte nach den Gleichungen 42 bis 48 (siehe Art. 84 u. 85, S. 62 u. 63) dient die Zusammenstellung der nachstehenden Tabelle.

Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen: Ueberwiegender Zug			Pfoften: Ueberwiegender Druck				
Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2
1 u. 8	- 9450	-12600	1 u. 8	0	0	1 u. 8	13370	17820	0	0 u. 8	-10800	-14400	0
2 u. 7	-16200	-21600	2 u. 7	9450	12600	2 u. 7	9550	13362	- 636	1 u. 7	- 9450	-12600	0
3 u. 6	-20250	-27000	3 u. 6	16200	21600	3 u. 6	5730	9545	-1910	2 u. 6	- 6750	- 9450	450
4 u. 5	-21600	-28800	4 u. 5	20250	27000	4 u. 5	1910	6363	-3818	3 u. 5	- 4050	- 6750	1350
										4	- 2700	- 3600	0
Kilogramm			Kilogramm			Kilogramm			Kilogramm				

5) Parabelträger.

189.
Berechnung
der
Spannungen:

Parabelträger sind Träger, bei denen die Knotenpunkte einer oder beider Gurtungen auf Parabeln liegen. Hier sollen nur solche Parabelträger behandelt werden, bei welchen die obere Gurtung eine gerade Linie, die untere Gurtung ein der Parabel eingeschriebenes Vieleck ist (Fig. 227). Bezeichnet man die Pfeilhöhe der Parabel mit h , die Trägerstützweite mit l und legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in das linke Auflager (nach A), so ist, wenn L der Scheitel der Parabel ist,



$$\frac{z}{h} = \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}, \text{ woraus } z = h \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2, \text{ ferner } y = (h - z);$$

folglich lautet die Gleichung der Parabel bezogen auf *A* als Koordinaten-Anfang:

$$y = \frac{4h}{l^2} (lx - x^2). \dots \dots \dots 247.$$

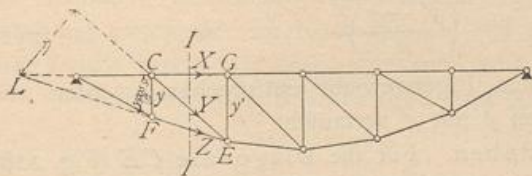
Die Spannungen in den sämtlichen Stäben können nun mittels der in Art. 170 bis 177 (S. 169 bis 173) vorgeführten Verfahren leicht ermittelt werden. Dabei macht es keine Schwierigkeit, die Berechnung auch für den Fall durchzuführen, daß die obere Gurtung gekrümmt, die untere eine gerade Linie ist.

a) Spannungen in den Gurtungen. Für einen Stab *FE* der unteren Gurtung (Fig. 228) ist *C* der conjugirte Punkt; wird mit *M* das Moment der an der einen Seite des Schnittes *II* wirkenden äußeren Kräfte bezeichnet, so ergibt sich

190.
in den
Gurtungen;

$$0 = M - Zy \cos \sigma, \text{ woraus } Z = \frac{M}{y \cos \sigma} \dots \dots \dots 248.$$

Fig. 228.



Für einen Stab *CG* der oberen Gurtung ist *E* der conjugirte Punkt, und wenn das Moment der äußeren Kräfte für diesen Punkt mit *M'* bezeichnet wird,

$$0 = M' + Xy', \text{ woraus } X = -\frac{M'}{y'} \dots 249.$$

Wie beim Parallelträger in Art. 178 (S. 175) ergibt sich auch hier, daß die oberen Gurtungsstäbe stets gedrückt, die unteren Gurtungsstäbe stets gezogen werden, so wie daß alle Gurtungsstäbe bei voller Belaftung am meisten beansprucht werden.

Nunmehr können die durch Eigengewicht, bezw. durch gleichmäßig über den ganzen Träger vertheilte Nutzlast erzeugten Gurtungsspannungen ermittelt werden. Das erstere sei *g*, die letztere *p* für die Längeneinheit; beide Belaftungsarten sind einander genau gleich; es genügt also eine, etwa die letztere, zu betrachten. Es wird wieder angenommen, daß die Lasten nur in den Knotenpunkten wirken; bei einer Feldweite *a* (Fig. 229) ist die Knotenpunktlast gleich *pa* (bezw. *ga*). Die Auflagerdrücke sind $D_0 = D_1 = \frac{pa(n-1)}{2}$ und, da $a(n-1) = (l-a)$ ist,

$$D_0 = D_1 = \frac{p(l-a)}{2} \dots \dots \dots 250.$$

Für einen beliebigen Knotenpunkt *E* mit der Abscisse *x* ist nun das Moment

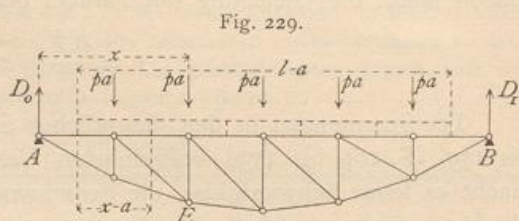
$$M_x = \frac{p(l-a)}{2} x - p(x-a) \left(\frac{x-a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2} (lx - x^2).$$

Dies ist aber nach Art. 154 (S. 147) auch der Ausdruck für das Moment im Punkte *E* bei einem vollwandigen, gleichmäßig mit *p* für die Längeneinheit belafteten Träger.

Werden die Werthe von *M* und *y* (Gleichung 247) in die Ausdrücke von *Z* und *X* eingeführt, so ergibt sich allgemein

$$\left. \begin{aligned} Z \cos \sigma &= \frac{M}{y} = \frac{p}{2} \cdot \frac{(lx - x^2) l^2}{4h(lx - x^2)} = \frac{pl^2}{8h} \\ X &= -\frac{p}{2} \cdot \frac{(lx - x^2) l^2}{4h(lx - x^2)} = -\frac{pl^2}{8h} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 251.$$

$Z \cos \sigma$ ist die wagrechte Seitenkraft der Spannung in der gekrümmten Gurtung. Die rechte Seite obiger Ausdrücke enthält nur constante Größen, so dass sich ergibt: Beim Parabelträger ist für gleichmäßige Belastung des ganzen Trägers die Spannung in der geraden Gurtung (X) und die wagrechte Seitenkraft der Spannung in der gekrümmten Gurtung constant.



Da $\cos \sigma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (y' - y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2}}$ ist, erhält man aus

Gleichung 251

$$Z = \frac{pl^2}{8h} \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \dots \dots \dots 252.$$

Die Spannungen Z und X , welche dem Eigengewicht entsprechen, werden aus obigen Gleichungen erhalten, indem man p mit g vertauscht.

191.
in den
Gitterstäben.

β) Spannungen in den Gitterstäben. Für die Diagonale CE (Fig. 228) ist L der conjugirte Punkt, η der Hebelsarm von Y , und wenn mit M_1 das Moment der äusseren Kräfte am Bruchstück links vom Schnitt II , bezogen auf L als Drehpunkt, bezeichnet wird, ist

$$0 = Y\eta - M_1, \text{ woraus } Y = + \frac{M_1}{\eta} \dots \dots \dots 253.$$

Liegt die Diagonale rechts der Mitte, so fällt der conjugirte Punkt rechts vom rechten Auflager. Die Aufstellung der Momentengleichung für diesen Punkt ergibt genau wie in Gleichung 253 die Diagonalspannung als Quotienten aus dem Moment der am Bruchstück wirkenden äusseren Kräfte, dividirt durch den Hebelsarm der Diagonalspannung.

Fig. 230.

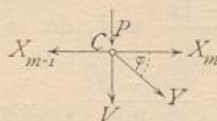
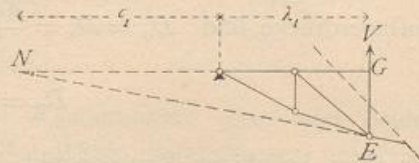


Fig. 231.



Häufig ist ein anderer Ausdruck der Diagonalspannung bequemer, als Gleichung 253. Die am Knotenpunkt C der geraden Gurtung (Fig. 230) angreifenden Kräfte sind im Gleichgewicht; die algebraische Summe aller wagrechten Seitenkräfte ist demnach gleich Null; mithin

$$0 = Y \cos \varphi + X_m - X_{m-1}, \text{ woraus } Y = - \frac{X_m - X_{m-1}}{\cos \varphi} \dots \dots 254.$$

Für die Bestimmung der Spannungen in den Pfoften ist der Schnitt schief zu legen (Fig. 231). Der conjugirte Punkt für den Pfoften EG ist N . Bezeichnet

— M_2 das Moment der am Bruchstück wirkenden äußeren Kräfte für N als Drehpunkt, so wird

$$0 = -V(\lambda_1 + c_1) - M_2, \text{ woraus } V = -\frac{M_2}{\lambda_1 + c_1} \dots 255.$$

Falls der conjugirte Punkt nach rechts vom rechten Auflager fällt, ergibt sich eine geringe Abänderung der Gleichung 255.

Ein für manche Fälle bequemerer Ausdruck wird wiederum durch Betrachtung des Knotenpunktes an der geraden Gurtung erhalten. Es ergibt sich, da die Kräfte an demselben im Gleichgewicht sind,

$$0 = Y \sin \varphi + V + P, \text{ woraus } V = -(Y \sin \varphi + P) \dots 256.$$

a) Das Eigengewicht, bezw. eine gleichmäßig über den ganzen Parabelträger vertheilte Last p für die Längeneinheit erzeugt in allen Diagonalen die Spannung Null. Denn bei dieser Belastung ist nach Art. 190 (S. 191) die Gurtungsspannung X constant, also $X_m = X_{m-1}$, mithin nach Gleichung 254: $Y = 0$.

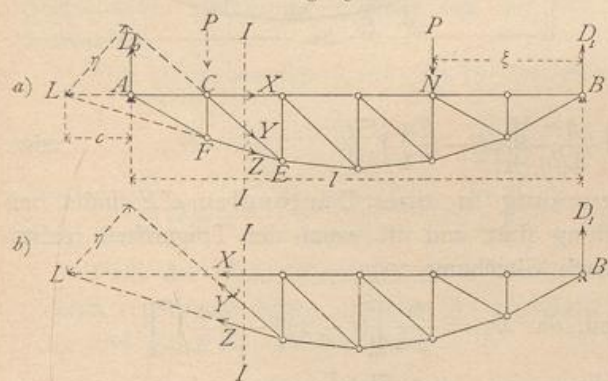
Die Spannung in den Pfoften ergibt sich nach Gleichung 256, da $Y = 0$ und $P = pa$ (bezw. ga) ist, zu

$$V_p = -pa, \text{ bezw. } V_g = -ga \dots 257.$$

Die Spannung in den Pfoften ist sonach beim Parabelträger und der angegebenen Belastung gleich der im Knotenpunkte der geraden Gurtung wirkenden Last, und zwar Druck, wenn, wie hier angenommen ist, die obere gerade Gurtung belastet ist.

b) Ungünstigste Belastungen und größte Stabspannungen der Gitter-

Fig. 232.



fläbe. Die ungünstigste Belastung für eine Diagonale CE (Fig. 232) wird folgendermaßen erhalten. Eine rechts von dem durch die Diagonale verlaufenden Schnitt II gelegene Last P erzeugt in A den Auflagerdruck $D_0 = \frac{P\xi}{l}$ und in CE eine Diagonalspannung Y , die aus der Momentengleichung für Punkt L und das links vom Schnitt liegende Bruchstück folgt:

$$0 = Y\eta - D_0 c,$$

woraus

$$Y = \frac{D_0 c}{\eta} = \frac{P\xi c}{l\eta} \dots 258.$$

So lange sich die Last rechts vom Schnitt II befindet, gilt der hier für Y gefundene Ausdruck. Jede Last rechts vom Schnitt erzeugt also in CE einen Zug.

Befindet sich die Last P links vom Schnitt II , so betrachte man das Bruchstück an der rechten Seite des Schnittes (Fig. 232 b). Auf dasselbe wirken der Auflagerdruck D_1 in B und die drei Spannungen X , Y' und Z ; die Gleichung der statischen Momente für L als Drehpunkt heißt dann:

$$0 = Y'\eta + D_1(l + c), \text{ woraus } Y' = -\frac{D_1(l + c)}{\eta} \dots 259.$$

Die Last P links von II erzeugt also in der Diagonale Druck und in gleicher Weise jede links vom Schnitt liegende Last.

Für die rechts von der Mitte gelegenen Diagonalen, bei welchen der Momentenpunkt rechts von *B* liegt, ergibt sich die gleiche Gesetzmäßigkeit.

Es folgt, daß auch hier das für die Parallelträger (Art. 179, S. 177) gefundene Gesetz gilt: Jede Belastung zwischen dem durch die Diagonalenmitte gelegten lothrechten Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Fußpunkt der Diagonalen hinweist, erzeugt in derselben Zug; jede Belastung zwischen dem erwähnten Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonale hinweist, erzeugt in derselben Druck.

Größter Zug findet demnach in einer Diagonalen dann statt, wenn alle Knotenpunkte zwischen dem Schnitte und demjenigen Auflager belastet sind, nach welchem der Fuß der Diagonale hinweist; größter Druck, wenn die Knotenpunkte zwischen dem Schnitte und demjenigen Auflager belastet sind, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist.

Die größte Zugbeanspruchung in einer Diagonalen *CE* findet daher bei der in Fig. 233 gezeichneten Belastung statt; sie ist

$$Y_{max} = \frac{D_0 c}{\eta}$$

Genau, wie in Art. 179 (S. 177), erhält man für den Auflagerdruck:

$$D_0 = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

also

$$Y_{max} = \frac{p c}{2l \eta} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \dots \dots \dots 260.$$

Die größte Druckbeanspruchung in einer Diagonalen *CE* findet bei der in Fig. 234 gezeichneten Belastung statt und ist (wenn der Trägertheil rechts vom Schnitte *II* betrachtet wird) nach Gleichung 259

$$Y_{min} = -D_1 \left(\frac{l+c}{\eta} \right) \text{ und, da } D_1 = \frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

$$Y_{min} = -\frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \left(\frac{l+c}{\eta} \right) \dots \dots \dots 261.$$

Die Gleichungen 260 u. 261 gelten, wenn die Diagonalen, wie hier, nach rechts fallen, nur für diejenigen links der Mitte; für die Diagonalen rechts der Mitte, bei denen der Momentenpunkt rechts von *B* fällt, ergeben sich folgende Werthe, in denen η_1 den Hebelsarm von *Y*, c_2 den Abstand des Momentenpunktes von *B* bedeutet:

$$Y_{max} = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{l+c_2}{\eta_1} \text{ und } Y_{min} = -\frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{c_2}{\eta_1} \dots \dots \dots 262.$$

Bei der angenommenen Belastungsart genügt es, entweder Y_{max} oder Y_{min} auszurechnen; denn für die Belastung aller Knotenpunkte mit je pa ist die Diagonalspannung (siehe oben) gleich Null. Sind nur die Knotenpunkte der Druckabtheilung belastet, so ist die Spannung in der Diagonalen gleich Y_{min} ; sind nur die Knoten-

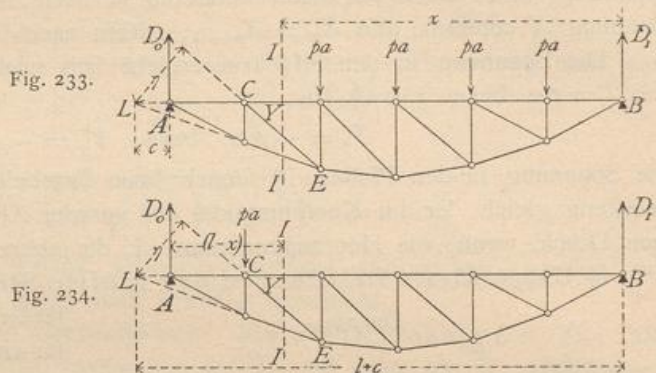
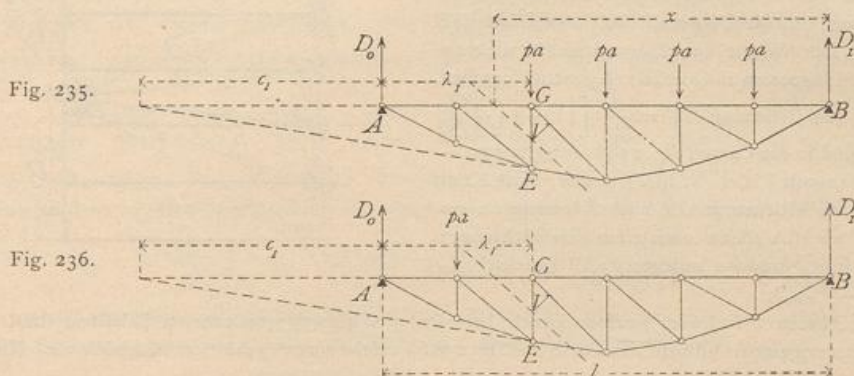


Fig. 233.

Fig. 234.

punkte der Zugabtheilung belastet, so ist die Spannung gleich Y_{max} . Bei voller Belastung ist die Spannung $Y_{summa} = Y_{max} + Y_{min}$, und zwar ist $Y_{summa} = 0$, d. h. $0 = Y_{max} + Y_{min}$ und $Y_{min} = -Y_{max}$.

Um die ungünstigste Belastung der Pfoften zu ermitteln, verfährt man eben so, wie bei den Diagonalen gezeigt ist. Man findet, dass Diagonale und Pfoften, welche an einem Knotenpunkte der unbelasteten Gurtung zusammentreffen, dieselbe ungünstigste Belastungsart haben; nur findet im Pfoften grösster Druck statt bei derjenigen Belastung, welche in der entsprechenden Diagonalen grössten Zug



erzeugt und umgekehrt. Somit wird grösster Druck in GE bei der in Fig. 235 gezeichneten Belastung, grösster Zug bei der in Fig. 236 gezeichneten Belastung stattfinden.

Die grössten Spannungen in den Pfoften ergeben sich mit

$$\left. \begin{aligned} V_{min} &= -\frac{D_0 c_1}{\lambda_1 + c_1} = -\frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \frac{c_1}{\lambda_1 + c_1} \\ V_{max} &= \frac{D_1 (l + c_1)}{\lambda_1 + c_1} = \frac{p}{2l} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \frac{l + c_1}{\lambda_1 + c_1} \end{aligned} \right\} \dots 263.$$

Falls der Momentenpunkt um c_1' nach rechts von B fällt, was hier bei allen Pfoften rechts der Mitte, einschl. der Mittelpfoften, stattfindet, so ergeben sich für V_{min} und V_{max} die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} V'_{min} &= -\frac{D_0 (l + c_1')}{c_1' + l - \lambda_1} = -\frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \frac{l + c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} \\ V'_{max} &= \frac{D_1 c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} = \frac{p}{2l} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \frac{c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} \end{aligned} \right\} \dots 264.$$

c) Bei entgegengesetzter Richtung der Diagonalen ergeben sich nur geringe Aenderungen, welche leicht aus Vorstehendem folgen.

Die Spannungen durch eine oder mehrere Einzellaften sind gleichfalls nach einem der in Art. 172 u. 173 (S. 170) angegebenen Verfahren leicht zu finden.

γ) Graphische Ermittlung der Spannungen. Wird eine gleichmässig vertheilte Belastung (Eigengewicht, bezw. volle zufällige Belastung) vorausgesetzt, so ergibt der in Fig. 237 gezeichnete *Cremona'sche* Kräfteplan sofort die Spannungen.

Was die durch zufällige Belastung erzeugten Maximalspannungen betrifft, so ergeben sich die grössten Gurtungsspannungen aus dem eben erwähnten Kräfte-

192.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen.

plan (Fig. 237), falls eine Belastung des ganzen Trägers mit der Last p für die Längeneinheit zu Grunde gelegt wird.

Zur Bestimmung der grössten Diagonalspannungen, welche bei den oben angegebenen Belastungen stattfinden, empfiehlt sich die Schnittmethode.

Auf das Trägerstück links vom Schnitte II wirken bei der in Fig. 238 *a* gezeichneten grössten Zugbelastung für die Diagonale CE die Kräfte D_0 , X , Y , Z . Die Werthe von D_0 , welche für die verschiedenen Diagonalen zu Grunde zu legen sind, ergeben sich aus der Gleichung $D_0 = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]$; dieselben sind in der Curve (Fig. 238 *b*) aufgetragen. — Für die Diagonale CE z. B. ist $D_0 = mn$; diese Kraft ist nach den Richtungen AE und X zerlegt in no und om ; no ist alsdann noch nach den Richtungen Z und Y in np und po zerlegt; po ist gleich Y_{max} ($Y_{min} = -Y_{max}$).

Im Pfosten CF findet grösster Druck bei der in Fig. 239 gezeichneten Belastung statt. D_0 ist hier gleich derjenigen Ordinate der Curve in Fig. 238 *b*, welche zu x' gehört, d. h. gleich rs . Nun wird

Fig. 237.

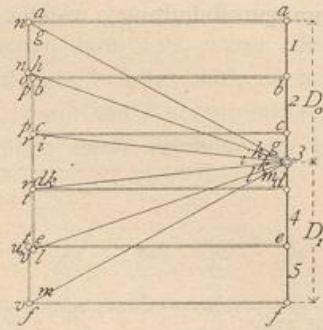
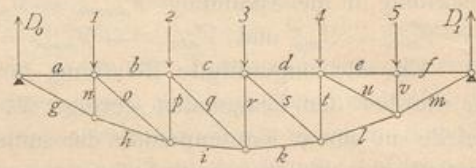


Fig. 238.

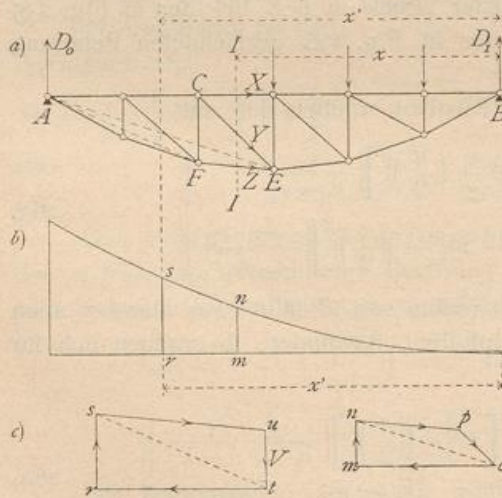


Fig. 239.

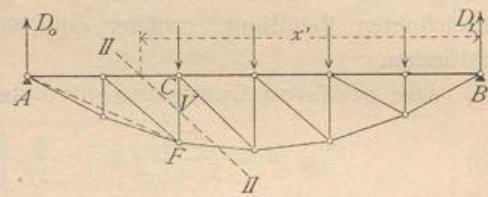
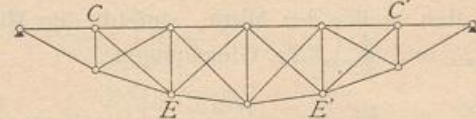


Fig. 240.



genau wie oben zerlegt. Es wird $V_{min} = ut$. Entsprechend ist der grösste in CF auftretende Zug zu ermitteln.

193.
Gegen-
diagonalen.

δ) Träger mit Gegendiagonalen. Durch die Verkehrslast erhält jede Diagonale sowohl Zug wie Druck, durch das Eigengewicht gar keine Spannung. Die ungünstigsten Zug-, bzw. Druckspannungen sind also genau so gross, wie diejenigen durch die ungünstigsten Verkehrslasten. Sollen nur gezogene Diagonalen vorkommen, so wird nach Art. 186 (S. 187) in jedem Felde eine Gegendiagonale angeordnet werden müssen. Man erhält die in Fig. 240 gezeichnete Trägerform. Die Gegendiagonale $C'E'$ wird genau eben so beansprucht, wie die symmetrisch zur Mitte liegende Hauptdiagonale CE des Trägers mit einseitig fallenden Diagonalen.

Dasselbe gilt von allen Gegendiagonalen; fomit wird die Berechnung eines Trägers mit nach einer Richtung fallenden Diagonalen genügen.

Beispiel. Ein als Unterzug dienender Parabelträger mit gerader oberer und gekrümmter unterer Gurtung hat die nachfolgenden Hauptabmessungen und Belastungen: Stützweite $l = 12,0$ m; Pfeilhöhe $h = 1,20$ m; Feldweite $a = 1,00$ m; Eigengewicht für das laufende Meter des Trägers $g = 320$ kg, also $ga = 320$ kg; Verkehrslast für das laufende Meter des Trägers $p = 1280$ kg, also $pa = 1280$ kg. Der Träger hat ein aus Pfosten und Diagonalen bestehendes Gitterwerk; die Diagonalen fallen beiderseits nach der Mitte zu; der Träger ist also zur Mitte symmetrisch angeordnet. Die in den einzelnen Stäben entstehenden Spannungen sind zu ermitteln. Wegen der Symmetrie des Trägers braucht man nur die Spannungen in den Stäben links der Mitte zu bestimmen; die symmetrisch zur Mitte liegenden Stäbe erhalten gleiche Beanspruchungen.

194.
Beispiel.

a) Form der unteren Gurtung. Die Parabel-Ordinaten ergeben sich nach Gleichung 247 aus der Beziehung $y = \frac{4 \cdot 1,2}{144} x(12 - x) = 0,033 x(12 - x)$. Man erhält:

für $x =$	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m	7 m	8 m	9 m	10 m	11 m
$y =$	0,36 m	0,66 m	0,89 m	1,06 m	1,16 m	1,2 m	1,16 m	1,06 m	0,89 m	0,66 m	0,36 m.

b) Spannungen in der oberen Gurtung. Durch das Eigengewicht, bzw. volle zufällige Belastung entsteht in sämtlichen Stäben der oberen Gurtung eine Spannung nach Gleichung 251

$$X_g = -\frac{320 \cdot 12^2}{8 \cdot 1,2} = -4800 \text{ kg} \quad \text{und} \quad X_p = -\frac{1280 \cdot 12^2}{8 \cdot 1,2} = -19200 \text{ kg.}$$

X_p ist zugleich die größte durch zufällige Belastung entstehende Spannung.

c) Spannungen in der unteren Gurtung. Nach Gleichung 252 sind

$$Z_g = 4800 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \quad \text{und} \quad Z_p = 19200 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2}.$$

Hiernach erhält man die in der linksseitigen Hälfte der nächstfolgenden Tabelle zusammengestellten Ergebnisse. Die Werthe Z_p sind zugleich die größten durch die zufällige Last entstehenden Spannungen.

b) Spannungen in den Diagonalen. Die Spannungen durch das Eigengewicht sind gleich Null (siehe Art. 191, S. 192). Die durch Verkehrslast erzeugten größten Zug- und Druckspannungen sind für die Diagonalen links der Mitte nach Gleichung 260 u. 261

$$Y_{max} = \frac{1280}{2 \cdot 12} (x^2 - 0,25) \frac{c}{\eta} = 53,33 \frac{c}{\eta} (x^2 - 0,25) \quad \text{und} \quad Y_{min} = -53,33 \left[(l - x)^2 - 0,25 \right] \frac{l + c}{\eta}.$$

Die Größen c und η können berechnet oder konstruiert werden; die Werthe für c werden besser berechnet, weil die Zeichnung wegen der spitzen Schnittwinkel der Gurtungsabrichtungen nicht genaue Werthe ergibt. Man erhält mit Hilfe ähnlicher Dreiecke leicht

$$\frac{c_2 + a}{\eta_1} = \frac{a}{\eta_2 - \eta_1}; \quad \frac{c_3 + 2a}{\eta_2} = \frac{a}{\eta_3 - \eta_2}; \quad \frac{c_4 + 3a}{\eta_3} = \frac{a}{\eta_4 - \eta_3} \quad \text{u. f. w.}$$

Die Werthe für η können in ähnlicher Weise leicht berechnet werden; doch kann man, besonders wenn c berechnet und der Schnittpunkt entsprechend den Rechnungsergebnissen aufgetragen wird, die η mit hinreichender Genauigkeit konstruieren. Die Werthe für c, η, x, Y_{max} und Y_{min} sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

Stab Nr.	y'	y	Z_g	Z_p	Diagonale Feld-Nr.	c	η	x	Y_{max}	Y_{min}
1	0,36	0,0	5102	20410	2	0,2	0,66	10,5	+ 1777	- 1971
2	0,66	0,36	5011	20045	3	0,37	1,91	9,5	+ 2186	- 2156
3	0,89	0,66	4925	19699	4	2,23	3,8	8,5	+ 2304	- 2396
4	1,06	0,89	4867	19469	5	6,6	8,03	7,5	+ 2449	- 2460
5	1,16	1,06	4824	19296	6	24	22,3	6,5	+ 2410	- 2582
6	1,20	1,16	4804	19216						
	Meter		Kilogramm			Meter		Kilogramm		

Nach Art. 191 (S. 192) müssen die absoluten Werthe von V_{max} und V_{min} einander gleich sein; dies ist hier nicht der Fall, was seinen Grund darin hat, daß nicht die genauen Parabel-Ordinaten der Berechnung zu Grunde gelegt sind, sondern eine Abrundung auf zwei Decimalen stattgefunden hat. Aus demselben Grunde würden sich auch die durch das Eigengewicht erzeugten Spannungen nicht genau gleich Null ergeben, wenn man sie nach Gleichung 253 berechnete. Immerhin ergeben sich diese Unterschiede so gering, daß sie vernachlässigt werden können.

e) Spannungen in den Pfosten. Durch das Eigengewicht entsteht in jedem Pfosten nach Art. 191 (S. 193) der Druck $V = -320$ kg. Die durch Verkehrslast in den Pfosten links der Mitte erzeugten Maximalspannungen sind nach Gleichung 263

$$V_{min} = -53,33 (x^2 - 0,25) \frac{c_1}{\lambda + c_1} \quad \text{und} \quad V_{max} = +53,33 [(l-x)^2 - 0,25] \frac{12 + c_1}{\lambda_1 + c_1}.$$

Man erhält die in folgender Tabelle zusammengestellten Werthe von c_1 , λ_1 , x , $(l-x)$, V_{min} und V_{max} . Der 6. (der Mittel-) Pfosten, an dessen Fußpunkt sich die beiden Diagonalen der anschließenden Felder schneiden, kann nicht nach den obigen Gleichungen berechnet werden, da die dort für den Schnitt gemachten Voraussetzungen hier nicht zutreffen. Da aber im oberen Knotenpunkte derselben keine Diagonale ansetzt, so kann dieselbe nur die Kräfte aufnehmen, welche unmittelbar in derselben wirken, d. h. der größte Druck ist gleich der Knotenpunktsbelastung dafelbst.

Pfosten Nr.	c_1	λ_1	x	$l-x$	V_{min}	V_{max}
1	0,2	1,0	11,5	0,5	- 1173	0
2	0,87	2,0	10,5	1,5	- 1778	+ 478
3	2,23	3,0	9,5	2,5	- 2047	+ 870
4	6,60	4,0	8,5	3,5	- 2391	+ 1123
5	24	5,0	7,5	4,5	- 2469	+ 1324
6	—	—	—	—	- 1280	0

Meter Kilogramm

f) Zur Bestimmung der Querschnitte nach den Gleichungen 42 bis 48 (siehe Art. 84 u. 85, S. 62 u. 63) dient die Zusammenstellung in der folgenden Tabelle:

Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen:				Pfosten: Druck überwiegt			
Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2
1 u. 13	-4800	-19200	1 u. 12	5102	20410					1 u. 11	-320	-1173	0
2 u. 11	-4800	-19200	2 u. 11	5011	20045	2 u. 11	0	1777	-1971	2 u. 10	-320	-1778	478
3 u. 10	-4800	-19200	3 u. 10	4925	19699	3 u. 10	0	2186	-2156	3 u. 9	-320	-2047	870
4 u. 9	-4800	-19200	4 u. 9	4867	19469	4 u. 9	0	2304	-2396	4 u. 8	-320	-2301	1123
5 u. 8	-4800	-19200	5 u. 8	4824	19296	5 u. 8	0	2449	-2460	5 u. 7	-320	-2469	1324
6 u. 7	-4800	-19200	6 u. 7	4804	19216	6 u. 7	0	2410	-2582	6	-320	-1280	0

Kilogr. Kilogr. Kilogramm Kilogramm

In die Gleichungen 42 bis 48 sind die absoluten Zahlenwerthe für P_0 , P_1 und P_2 einzusetzen.

6) Dreiecksträger.

195.
Trägerformen.

Dreieck- und Trapezträger sind, wie bereits in Art. 167 (S. 168) gesagt wurde, Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bzw. ein Paralleltapez bilden. Die eine Gurtung zeigt eine gerade, die andere eine gebrochene Linie. Ist die untere Gurtung gerade, so erhält man die unter dem Namen des einfachen, bzw. doppelten Hängebockes bekannte Trägerform (Fig. 241 a, bzw. 242 a) — nicht zu verwechseln mit den Hängewerkträgern, welche nach Art. 150 (S. 140) von den hier betrachteten

Fig. 241.

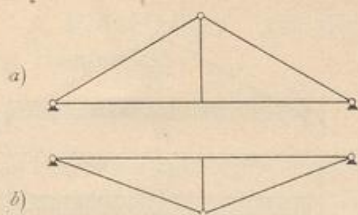
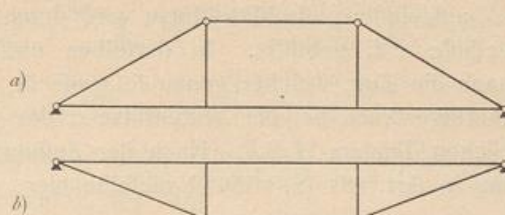


Fig. 242.

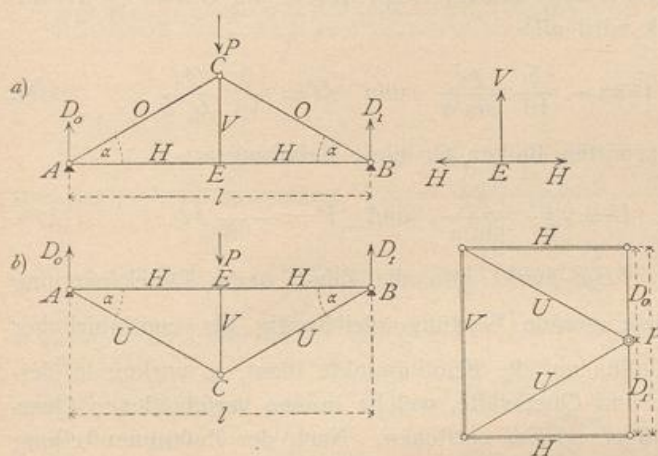


wesentlich verschieden sind. Ist die obere Gurtung gerade, so erhält man die unter dem Namen des armirten Balkens bekannte Trägeranordnung (Fig. 241 b u. 242 b).

α) Belastung durch Einzellaft (Fig. 243). Wenn im Knotenpunkte C oder E des Hängebockes (Fig. 243 a) die Last P wirkt, so wird der Auflagerdruck

196.
Belastung durch Einzellaft.

Fig. 243.



$$D_0 = D_1 = \frac{P}{2}.$$

Die im Punkte A wirkenden drei Kräfte D_0 , O und H halten einander im Gleichgewicht; demnach sind die algebraischen Summen der in diesem Knotenpunkte wirkenden wagrechten, bzw. lothrechten Seitenkräfte je gleich Null, d. h. es ist

$$0 = D_0 + O \sin \alpha, \text{ woraus } O = -\frac{P}{2 \sin \alpha} \dots \dots \dots 265.$$

$$0 = O \cos \alpha + H, \text{ woraus } H = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \dots \dots \dots 266.$$

Die Spannungen der symmetrisch zur Mitte liegenden Stäbe sind gleich.

Falls die Last P im Punkte C angreift, so ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung für den Punkt E die Beziehung $0 = V$; falls P in E angreift, so heißt die Gleichgewichtsbedingung: $0 = V - P$, woraus

$$V = P \dots \dots \dots 267.$$

Eben so ergibt sich für den armirten Träger (Fig. 243 b)

$$U = \frac{P}{2 \sin \alpha}, \quad H = -\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{und} \quad V = -P \dots \dots \dots 268.$$

Die Construction der Spannungen ergibt den Kräfteplan in Fig. 243, welcher ohne weitere Erläuterung verständlich ist.

β) Gleichförmig vertheilte volle Belastung. Wird der Berechnung eine gleichförmig vertheilte Belastung zu Grunde gelegt, so ist die volle Belastung für die Stabspannungen auch die ungünstigste; denn jede Last, wo sie auch liegen möge, erzeugt in A und B (Fig. 244) Auflagerdruck, also in den Stäben der oberen Gurtung Druck, in denen der unteren Gurtung Zug. Bei dieser Belastung ist AEB

197.
Gleichförmig vertheilte Belastung.

wie ein continuirlicher Balken auf drei Stützen *A*, *E* und *B* aufzufassen; die Mittelftütze wird durch die Hängefäule *CE* gebildet. In derselben entsteht demnach ein Zug, welcher genau so groß ist, wie der Auflagerdruck bei der Mittelftütze *E* des continuirlichen Trägers *AEB*. Nach der Zusammenstellung in Art. 165 (S. 166) ist dieselbe hier

$$d_1 = 1,25 p \frac{l}{2} = \frac{5}{8} pl,$$

während $d_0 = d_2 = 0,375 p \frac{l}{2} = \frac{3}{16} pl$ ist; die letzteren Drücke werden vom Auflager aufgenommen und belasten den Träger nicht. Die Stabspannungen werden demnach die unter α gefundenen Werthe haben, wenn statt *P* die Größe $\frac{5}{8} pl$ eingesetzt wird. Beim Hängebock wird also

$$V = P = \frac{5}{8} pl, \quad O = -\frac{5}{16} \frac{pl}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad H = \frac{5}{16} \frac{pl}{\operatorname{tg} \alpha} \quad 269.$$

Eben so ergibt sich im armirten Balken für diese Belastungsart

$$H = -\frac{5}{16} \frac{pl}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad U = \frac{5}{16} \frac{pl}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad V = -\frac{5}{8} pl. \quad 270.$$

In der geraden Gurtung *AEB* wirkt also die Zug-, bzw. Druckspannung $H = \pm \frac{5}{16} \frac{pl}{\operatorname{tg} \alpha}$; da aber diese gerade Gurtung gleichzeitig als continuirlicher Träger zum Übertragen der Lasten auf die Knotenpunkte dient, so wirken in derselben auch noch die Momente und Querkräfte, welche in den verschiedenen Querschnitten des continuirlichen Trägers *AEB* entstehen. Nach der Zusammenstellung in Art. 165 (S. 166) findet das größte Moment am Mittelauger statt, und daselbe ist

$$M_1 = 0,125 p \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{pl^2}{32}.$$

198.
Querschnitts-
bestimmung.

γ) Querschnittsbestimmung. Die Querschnitte der nur gezogenen, bzw. nur gedrückten Stäbe ergeben sich leicht, wie in Art. 82 bis 86 (S. 59 ff.) und im vorhergehenden Kapitel angegeben ist. Der Querschnitt der geraden Gurtung *AEB* ist für die gemeinsame Beanspruchung durch Zug, bzw. Druck und die Momente zu construiren. Wird der ganze Querschnitt (für Holz) als constant angenommen, so ist das größte im Balken wirkende Moment der Berechnung zu Grunde zu legen. An der Stelle, wo das größte Moment M_{max} wirkt, ist die größte in den äußersten Querschnittspunkten stattfindende Axialspannung für die Flächeneinheit nach Gleichung 54 (S. 75)

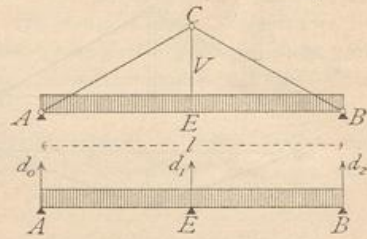
$$\sigma_{max} = \pm \left(\frac{H}{F} + \frac{M_{max} a}{\mathcal{I}} \right).$$

Beim Rechteckquerschnitt ist $F = bh$, und $\frac{\mathcal{I}}{a} = \frac{bh^2}{6}$; wenn noch statt σ_{max} die größte zulässige Spannung *K* eingeführt wird, so ergibt sich als Bedingungsgleichung für den Querschnitt:

$$K = \pm \left(\frac{H}{bh} \pm \frac{6 M_{max}}{bh^2} \right) \quad 271.$$

In dieser Gleichung sind *b* und *h* unbekannt. Man nimmt zunächst für *b* einen Werth probeweise an und bestimmt *h* aus Gleichung 271; ergibt sich für *h* eine unzuweckmäßige Größe, so nehme man für *b* einen anderen Werth an und bestimme wiederum *h* nach Gleichung 271. Meistens werden sich bei der zweiten Rechnung entsprechende Werthe für *b* und *h* ergeben.

Fig. 244.



Wenn, wie meistens, $P_1 = P_2 = P$ ist, wird

$$\left. \begin{aligned} O_1 &= -\frac{P}{\sin \alpha}; \quad U_1 = \frac{Pa}{h} = U_2; \quad O_2 = -\frac{Pa}{h}; \quad O_3 = -\frac{P}{\sin \alpha}; \\ U_3 &= \frac{Pa}{h}; \quad V_1 = 0; \quad V_2 = 0; \quad Y = 0 \end{aligned} \right\} 283.$$

Die Construction ergibt den auf der vorhergehenden Seite stehenden, ohne Erklärung verständlichen Kräfteplan (Fig. 245 b).

Was den armirten Balken anbelangt, so sind bei diesem die Spannungen sowohl in der oberen, wie in der unteren Gurtung den oben für die gerade, bzw. gebrochene Gurtung des doppelten Hängebockes gefundenen Spannungen der Grösse nach gleich, dem Sinne nach entgegengesetzt. Die Werthe derselben können demnach aus den Gleichungen 272 bis 283 durch Umkehrung der Vorzeichen entnommen werden. Die Spannungen in den Diagonalen und in den Pfosten ergeben sich leicht durch Betrachtung des Gleichgewichtes der einzelnen Knotenpunkte, wie beim doppelten Hängebock gezeigt ist.

200.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.

β) Gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Belastung (Fig. 246). Jede Belastung erzeugt in den Stäben der unteren Gurtung Zug, in denjenigen der oberen Gurtung Druck, wie sich aus den Gleichungen 272 bis 277 ergibt. Größter Zug, beziehungsweise Druck findet also in den Gurtungen bei Belastung des ganzen Trägers statt.

Die untere Gurtung wirkt, wenn keine Gelenke in den Knotenpunkten derselben angenommen werden, wie ein continuirlicher Balken auf 4 Stützen. Die Endstützen sind A und B ; die Mittelstützen werden durch die Pfosten FC und GE gebildet. Wird $a = b$ gesetzt, so ergibt sich bei Belastung des ganzen Trägers mit der Last p für die Längeneinheit als Auflagerdruck der Mittelstützen nach der Zusammenstellung in Art. 165 (S. 166) $d_1 = d_2 = 1,1 \frac{pl}{3} = 0,37 pl$. Eben so groß ist die Last, welche in den Knotenpunkten C und E des Systems nach unten wirkt. Werden diese Werthe für P_1 und P_2 in die obigen Gleichungen eingeführt, so ergibt sich

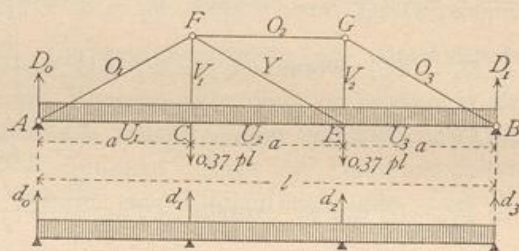
$$\left. \begin{aligned} O_1 &= -\frac{0,37 pl}{\sin \alpha}; \quad U_1 = 0,37 pl \frac{a}{h}; \quad O_2 = -0,37 pl \frac{a}{h}; \quad O_3 = -\frac{0,37 pl}{\sin \alpha}; \\ U_2 &= 0,37 pl \frac{a}{h}; \quad U_3 = 0,37 pl \frac{a}{h}; \quad V_1 = 0,37 pl; \quad V_2 = 0,37 pl; \quad Y = 0 \end{aligned} \right\} 284.$$

Die hier gefundenen Spannungen O und U sind die größten Stabspannungen, welche durch gleichförmig vertheilte Nutzlast entstehen. Wird statt p das Eigengewicht g für die Längeneinheit eingeführt, so ergeben sich die durch das Eigengewicht entstehenden Stabspannungen.

201.
Ungünstigste
Beanspruchung
der
Gitterstäbe.

γ) Ungünstigste Beanspruchung der Diagonale und der Pfosten. Den allgemeinen Ausdruck für die Diagonalspannung giebt die Gleichung 281. Y wird seinen größten positiven Werth (Zug) haben, wenn P_2 möglichst groß, P_1 möglichst klein ist; Y wird seinen größten negativen Werth (Druck) erreichen, wenn P_2 mög-

Fig. 246.



licht klein, P_1 möglichst groß ist. Wird als Nutzlast eine gleichmäßig verteilte Last eingeführt, so kann man, wenn $a = b$ ist, mit einer für die Zwecke des Hochbaues hinreichenden Sicherheit annehmen, dass die Diagonale den größten Zug erleidet, wenn der Punkt E am Fußpunkte derselben mit $p a + 0,37 g l$ belastet ist, der Punkt C (in der Lothrechten des Kopfes der Diagonalen) nur das Eigengewicht $0,37 g l$ trägt. Bei der umgekehrten Belastung dagegen erleidet die Diagonale ihren größten Druck. Demnach wird

$$Y_{\max} = \pm \frac{p a^2}{l \sin \beta} \dots \dots \dots 285.$$

Ferner ist hier, wo die Lasten unten wirken, $V_1 = P_1$, d. h.

$$V_{1\max} = 0,37 (g + p) l \quad \text{und} \quad V_{1\min} = 0,37 g l \dots \dots \dots 286.$$

Auch V_2 erleidet den größten Zug bei voller Belastung; da bei dieser Belastung $Y = 0$ ist, so wird auch

$$V_{2\max} = 0,37 (g + p) l \quad \text{und} \quad V_{2\min} = 0,37 g l \dots \dots \dots 287.$$

δ) Die Querschnittsbestimmung ist in genau gleicher Weise vorzunehmen, wie dies in Art. 198 (S. 200) beim Dreiecksträger gezeigt ist. Die Maximalmomente in der geraden Gurtung finden bei C und E statt und sind genau genug für $a = b$ nach der Zusammenstellung in Art. 165 (S. 166) $M = p \left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{1}{10} = \frac{p l^2}{90}$. Die Abmessungen b und h des rechteckigen Querschnittes (für Holz) sind demnach aus der Gleichung zu bestimmen:

$$\tau_{\max} = K = \pm \left(\frac{U}{b h} + \frac{6 M_{\max}}{b h^2} \right).$$

Die Dreieck- und Trapezträger mit einer größeren Anzahl von Lastpunkten werden durch Einfügen von Dreiecken in die oben (Fig. 241 u. 242) dargestellten Trägerformen hergestellt. Die Berechnung entspricht der vorstehenden, kann aber auch bequem nach der Momentenmethode vorgenommen werden.

202.
Querschnitts-
bestimmung.

Literatur.

Bücher über »Statik der Stützen und Träger«.

- KLOSE, H. A. Theorie der eisernen Träger mit Doppelflanchen. Hannover 1862.
 RITTER, A. Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructionen. Berlin 1863. —
 5. Aufl.: Hannover 1894.
 ASSMANN, G. Hilfstabeln zur Berechnung eiserner Träger und Stützen. Berlin 1865.
 FRANCIS, J. B. On the strength of cast-iron pillars. New-York 1866.
 KLERITJ, L. J. Abhandlung über genauere Berechnung und Construction einiger Träger von gleichem Widerstande. Freiberg 1869.
 LIPPICH, F. Theorie des continuirlichen Trägers constanten Querschnittes. Elementare Darstellung der von CLAPEYRON und MOHR begründeten analytischen und graphischen Methoden und ihres Zusammenhanges. Wien 1871.
 RITTER, W. Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken etc. Zürich 1871. —
 2. Aufl. 1883.
 KECK, W. Ueber die Ermittlung der Spannungen in Fachwerkträgern, mit Hilfe der graphischen Statik. Hannover 1872.
 WEYRAUCH, J. Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.
 TETMAJER, L. Die äußern und innern Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhl-Constructionen. Zürich 1875.
 PINZGER, L. Neue Methode zur Berechnung von Trägern mit unsymmetrischen Querschnittsformen. München 1879.

- CLERC, A. *Mémoire sur une nouvelle théorie de la résistance des poutres*. Paris 1880.
- ZIMMERMANN, H. Trägheitsmomente, Widerstandsmomente und Gewichte genieteteter Blechträger. Berlin 1881. 3. Aufl. 1893.
- CANOVETTI. *Théories des poutres continues etc.* Paris 1882.
- HULEWICZ. *Calcul de résistance des poutres droites à plusieurs travées*. Paris 1882.
- MÜLLER-Breslau, H. F. B. Die wichtigsten Resultate für die Berechnung eiserner Träger und Stützen etc. Berlin 1883.
- STONE, B. B. *The theory of stresses in girders and similar structures*. London 1886.
- WEYRAUCH, J. J. Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1887.
- WEYRAUCH, J. J. Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1888.
- ALLIEVI, L. Inneres Gleichgewicht der Pfeiler aus Metallconstruction nach den Gesetzen der elastischen Deformation. Aus dem Ital. von R. TOTZ. Wien 1888.
- KOENEN, M. Tabellen der Spannweiten für Träger und Balken etc. Leipzig 1888.
- MÖLLER, M. & R. LÜHMANN. Ueber die Widerstandsfähigkeit auf Druck beanspruchter eiserner Bauconstructiontheile bei erhöhter Temperatur etc. Berlin 1888.
- KOECHLIN, M. *Applications de la statique graphique*. Paris 1889.
- MÜLLER-Breslau, F. B. Beiträge zur Theorie der ebenen elastischen Träger. Berlin 1890.
- RITTER, W. Anwendungen der graphischen Statik. Theil II: Das Fachwerk. Zürich 1890.
- FROELICH, H. Elementare Anleitung zur Anfertigung statischer Berechnungen für die im Hochbau üblichen Constructionen mit eisernen Trägern und Stützen etc. Berlin 1892.
- KRÜGER, R. Graphische Pläne zur Ermittlung der Höhen schmiedeeiserner Träger und Holzbalken, der Durchmesser gußeiserner Voll- und Hohl Säulen und der Stärke hölzerner Stützen. Bremen 1896.
- DOMITROWICH, A. Statische Berechnung von Balkendecken, Säulen und Stützen im Holzbaufache. Wien 1897.