Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

Zweite Abtheilung. Die Statik der Hochbau-Constructionen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

Handbuch der Architektur.

I. Theil:

ALLGEMEINE HOCHBAUKUNDE.

ZWEITE ABTHEILUNG.

DIE STATIK
DER HOCHBAU-CONSTRUCTIONEN.

VON THEODOR LANDSBERG.

I. Theil, 2. Abtheilung:

DIE STATIK DER HOCHBAU-CONSTRUCTIONEN.

1. Abfchnitt.

Grundlagen.

Die Statik der Hochbau-Conftructionen ift die Lehre vom Gleichgewichte der Hochbauten; fie unterfucht, welche Bedingungen erfüllt fein müffen, damit die Bauwerke und ihre Theile im Gleichgewichte find und bleiben; fie beftimmt danach die denfelben zu gebenden Conftructionsformen. 1. Vorbemerkungen.

Die Statik der Bau-Conftructionen, wohl auch Baumechanik genannt, hat haupt-fächlich zwei Aufgaben zu erfüllen: fie lehrt erftens, die Abmeffungen aller Theile der Bauwerke fo zu beftimmen, dafs diefelben mit Sicherheit den auf fie einwirkenden Kräften widerftehen können; fie hat zweitens für die einzelnen Conftructionen zweckmäfsige Formen zu ermitteln.

Die Löfung der erften Aufgabe erheifcht, dafs jeder Conftructionstheil genügend ftark, auch für die ungünftigften Falles wirkenden Kräfte, angeordnet wird. Die dazu nöthigen Abmeffungen find wefentlich von der für die ganze Conftruction gewählten Form abhängig. Durch günftige Wahl diefer Form ift es möglich, an Bauftoff zu fparen, ohne die Sicherheit zu verringern. Die Ermittelung derjenigen Form, bei welcher die verlangte Sicherheit mit geringftem Stoffaufwande oder, was annähernd daffelbe befagt, mit geringftem Koftenaufwande erreicht wird, ift die zweite Aufgabe der Statik der Bau-Conftructionen.

Literatur.

Bücher über »Statik der Bau-Conftructionen«.

EYTELWEIN, J. A. Handbuch der Statik fefter Körper. Mit vorzüglicher Rückficht auf ihre Anwendung in der Architektur. Berlin 1826.

NAVIER, L. M. H. *Réfumé des leçons données à l'école des ponts et chauffées fur l'application de la mécanique à l'établiffement des conftructions et des machines.* Paris 1826. — Deutfche Bearbeitung (3. Aufl.) von G. WESTPHAL & A. FOEPPL. Hannover 1881.

MOSELEY, H. *The mechanical principles of engineering and architecture.* London 1843. — Deutfch von H. SCHEFFLER. Braunfchweig 1845.

WEISBACH, J. Lehrbuch der Ingenieur- und Mafchinen-Mechanik. II. Theil, 1. Abth.: Statik der Bauwerke. Braunfchweig 1847. — 5. Aufl. von G. HERMANN. 1882.

RIEDLIN, C. Anweifung und Berechnung des Mauerwerkes und der am häufigften vorkommenden Dachftühle. München 1856.

REBHANN, G. Höhere Ingenieurwiffenfchaften. Wien. I. Bd.: Theorie der Holz- und Eifenconftructionen mit befonderer Rückficht auf das Bauwefen. 1856. — II. Bd.: Theorie des Erddrucks und der Futtermauern mit befonderer Rückficht auf das Bauwefen. 1876.

BRESSE, J. A. CH. *Cours de mécanique appliquée. 1re partie: Résistance des matériaux et stabilité des constructions.* Paris 1859. — 3. Aufl. 1880.

RANKINE, W. J. M. *Manual of civil engineering.* London 1862. — 12. Aufl. 1877. — Deutsch von F. KREUTER. Wien 1879.

RITTER, A. Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructionen. Berlin 1863. — 5. Aufl. Hannover 1894.

BEHSE, W. H. Die Berechnung der Festigkeit von Holz- und Eisenconstructionen ohne höhere mathematische Vorkenntnisse. Leipzig 1864.

CULMANN, K. Die graphische Statik. Zürich 1866. — Von der 2. Aufl. nur Bd. 1 (Zürich 1875) erschienen.

HEINZERLING, F. Die angreifenden und widerstehenden Kräfte der Brücken- und Hochbau-Constructionen. Zum Gebrauch beim Berechnen von Brücken- und Hochbauten. Berlin 1867. — 2. Aufl. 1876.

HUMBER, W. *Handy book for the calculation of strains on girders and similar structures.* London 1868. — 3. Aufl. 1879.

HEINZERLING, F. Grundzüge der constructiven Anordnung und statischen Berechnung der Brücken- und Hochbau-Constructionen. Leipzig 1870.

WENCK, J. Die Baumechanik etc. Leipzig 1870. — 2. Aufl. 1882. — Neue Titelausg. 1884.

COLLIGNON, E. *Cours élémentaire de mécanique (statique).* Paris 1870.

OTT, K. v. Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik. Prag 1870. — 4. Aufl. 1885.

BAUSCHINGER, J. Elemente der graphischen Statik. München 1871.

OTT, K. v. Vorträge über Baumechanik. Prag. I. Theil: Die Statik des Erdbaues, der Futtermauern und der Gewölbe. 1871. (3. Aufl. 1888.) — II. Theil: Die Zug-, Druck- und Schubfestigkeit, resp. Elasticität sammt deren Anwendung. 1876. (3. Aufl. 1891—93.)

KOPKA, C. Die Baumechanik. Leipzig 1872.

HOLZHEY, E. Vorträge über Baumechanik. Wien 1872—76.

LEVY, M. *La statique graphique et ses applications aux constructions.* Paris 1874. — 2. Aufl. 1887.

CREMONA, L. *Elementi di calcolo grafico.* Turin 1874. — Deutsch von M. CURTZE. Leipzig 1875.

RITTER, A. Lehrbuch der höheren Mechanik. II. Theil: Ingenieur-Mechanik. Hannover 1875. (2. Aufl. 1885.)

Deutsche bautechnische Taschenbibliothek. Heft 9: Die Baumechanik. Von W. JEEP. Leipzig 1876.

DU BOIS, A. J. *Elements of graphical statics etc.* New-York 1876.

ROLLA, L. *Elementi di statica grafica etc.* Mailand 1876.

CROFTON, M. W. *Lectures on the elements of applied mechanics, comprising: I. Stability of structures. II. Strength of materials.* London 1877.

EDDY, H. T. *New constructions in graphical statics.* New-York 1877. — Deutsche vom Verf. verm. u. verb. Ausgabe. Leipzig 1880.

KLASEN, L. Graphische Ermittelung der Spannungen in den Hochbau- und Brücken-Constructionen. Leipzig 1878.

ZUCCHETTI, F. *Statica grafica, sua teoria ed applicazioni.* Torino 1878.

WENCK, J. Die graphische Statik etc. Berlin 1879.

CAIN, W. *Theory of solid and braced elastic arches, applied to arch bridges and roofs in iron, wood, concrete, or other material. Graphical analysis.* New-York 1879.

WITTMANN, W. Statik der Hochbau-Constructionen. Berlin. Theil I: Steinconstructionen. 1879. — Theil II: Holzconstructionen. 1882. — Theil III: Eisenconstructionen. 1884.

FOEPPL, A. Theorie des Fachwerks. Leipzig 1880.

CLARKE, G. S. *The principles of graphic statics.* London 1880. — 2. Aufl. 1888.

ORLANDER, E. *A new method of graphic statics applied to the construction of wrought-iron girders.*

MÜLLER-Breslau, H. F. B. Elemente der graphischen Statik der Bauconstructionen für Architekten und Ingenieure. Berlin 1881.

ALBERT, F. Die technische Mechanik im Hochbau. Plauen 1881.

CHALMERS, J. B. *Graphical determination of forces in engineering structures.* London 1881.

CROFTON, M. W. *Lectures on the elements of applied mechanics.* London 1881.

BELLOT. Die wichtigsten Lehren der Baumechanik. Leipzig 1881.

HINTZ, L. Die Baustatik etc. Weimar 1882.

STELZEL, K. Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf den continuirlichen Träger. Graz 1882.

PETERSEN, J. Lehrbuch der Statik fefter Körper. Deutfche Ausg. von R. v. FISCHER-Benzon. Kopenhagen 1882.
MAURER, M. *Statique graphique appliquée aux conftructions, toitures, planchers, poutres etc.* Paris 1882. — 2. Aufl. 1885.
GRAHAM, R. H. *Graphic and analytic ftatics in theory and comparifon etc.* London 1883. (New-York 1887.)
WILDA, E. Statik fefter Körper. Brünn 1884.
GRUNER, O. Formeln und Tabellen zu einfachen ftatifchen Berechnungen der bei Hochbauten vorkommenden Eifenconftructionen. Leipzig 1885.
SCHLOESSER, H. Anleitung zur ftatifchen Berechnung von Eifenconftructionen. Berlin 1885.
CREMONA, L. *Les figures réciproques en ftatique graphique.* Paris 1885. — Mit Anhang von SAVIATTI.
JENTZEN, E. Baumechanik mit befonderer Rückficht auf die Berechnung der Träger und Stützen aus Holz und Eifen etc. Hamburg 1886.
FLAMANT, A. *Stabilité des conftructions, réfiftance des matériaux.* Paris 1886. — 2. Aufl. 1896.
Praktifche Unterrichtsbücher für Bautechniker. III. Die Feftigkeitslehre und die Statik im Hochbau. Von H. DIESENER. Halle 1886.
HENNEBERG, L. Statik der ftarren Syfteme. Darmftadt 1886.
HAUSSER, A. E. & L. CUNQ. *Statique graphique appliquée etc.* Paris. Erfcheint feit 1886.
SCHLOTKE, J. Lehrbuch der graphifchen Statik. Hamburg 1887.
MÜLLER-Breslau, H. F. B. Die graphifche Statik der Bauconftructionen. Leipzig 1887—96.
RITTER, W. Anwendung der graphifchen Statik. Theil I: Die im Innern eines Balken wirkenden Kräfte. Zürich 1888. — Theil II: Das Fachwerk. Zürich 1890.
BALL, R. S. Theoretifche Mechanik ftarrer Syfteme. Herausg. von H. GRAVELIUS. Berlin 1889.
KOECHLIN, M. *Applications de la ftatique graphique.* Paris 1889.
LAUENSTEIN, R. Die graphifche Statik. Stuttgart 1889. — 4. Aufl. 1898.
SCHMID, C. Statik und Feftigkeitslehre. Stuttgart 1891. — 2. Aufl. 1897.
MÜLLER-Breslau, F. B. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Berlin 1892.
BAKER, W. L. *The beam etc.* London 1892.
KECK, W. Vorträge über Elafticitätslehre. Hannover 1892—93.
MÜLLER-Breslau, F. B. Die neueren Methoden der Feftigkeitslehre und der Statik der Bauconftructionen. Leipzig 1893.
CLAUSSEN, E. Statik und Feftigkeitslehre in ihrer Anwendung auf Bauconftructionen. Berlin 1893.
KECK, W. Vorträge über graphifche Statik. Hannover 1894.
BAYER, A. Handbuch zur Berechnung der im Hochbau vorkommenden Conftructionen in Eifen, Stein und Holz. Wien 1896.
PULLEN, W. W. F. *The application of graphic methods to the defign of ftructures.* Manchefter 1896.
DOMITROWICH, A. v. Statifche Berechnung von Balkendecken, Säulen und Stützen im Hochbaufache. Wien 1897.
KECK, W. Vorträge über Mechanik etc. Hannover 1897.
FROELICH, H. Elementare Anleitung zur Anfertigung ftatifcher Berechnungen für die im Hochbau üblichen Conftructionen mit eifernen Trägern und Stützen etc. Berlin 1892. — 2. Aufl. 1897.
ROUTH, E. J. Die Dynamik der Syfteme ftarrer Körper. Deutfch von A. SCHEPP. Leipzig 1898.

1. Kapitel.

Allgemeines.

Für die Löfung der beiden in Art. 1 bezeichneten Aufgaben ift die Kenntnifs derjenigen Kräfte nöthig, welche bei den verfchiedenartigen möglichen Belaftungszuftänden im Inneren der Conftructionen entftehen, d. h. der fog. inneren Kräfte oder Spannungen, welche auch wohl widerftehende Kräfte genannt werden. Die inneren Kräfte ftehen aber wiederum in einem ganz beftimmten Verhältnifs zu

2. Aeufsere und innere Kräfte.

BRESSE, J. A. CH. *Cours de mécanique appliquée. 1re partie: Réſiſtance des matériaux et ſtabilité des conſtructions.* Paris 1859. — 3. Aufl. 1880.

RANKINE, W. J. M. *Manual of civil engineering.* London 1862. — 12. Aufl. 1877. — Deutſch von F. KREUTER. Wien 1879.

RITTER, A. Elementare Theorie und Berechnung eiſerner Dach- und Brücken-Conſtructionen. Berlin 1863. — 5. Aufl. Hannover 1894.

BEHSE, W. H. Die Berechnung der Feſtigkeit von Holz- und Eiſenconſtructionen ohne höhere mathematiſche Vorkenntniſſe. Leipzig 1864.

CULMANN, K. Die graphiſche Statik. Zürich 1866. — Von der 2. Aufl. nur Bd. 1 (Zürich 1875) erſchienen.

HEINZERLING, F. Die angreifenden und widerſtehenden Kräfte der Brücken- und Hochbau-Conſtructionen. Zum Gebrauch beim Berechnen von Brücken- und Hochbauten. Berlin 1867. — 2. Aufl. 1876.

HUMBER, W. *Handy book for the calculation of ſtrains on girders and ſimilar ſtructures.* London 1868. — 3. Aufl. 1879.

HEINZERLING, F. Grundzüge der conſtructiven Anordnung und ſtatiſchen Berechnung der Brücken- und Hochbau-Conſtructionen. Leipzig 1870.

WENCK, J. Die Baumechanik etc. Leipzig 1870. — 2. Aufl. 1882. — Neue Titelausg. 1884.

COLLIGNON, E. *Cours élémentaire de mécanique (ſtatique).* Paris 1870.

OTT, K. v. Die Grundzüge des graphiſchen Rechnens und der graphiſchen Statik. Prag 1870. — 4. Aufl. 1885.

BAUSCHINGER, J. Elemente der graphiſchen Statik. München 1871.

OTT, K. v. Vorträge über Baumechanik. Prag. I. Theil: Die Statik des Erdbaues, der Futtermauern und der Gewölbe. 1871. (3. Aufl. 1888.) — II. Theil: Die Zug-, Druck- und Schubfeſtigkeit, reſp. Elaſticität ſammt deren Anwendung. 1876. (3. Aufl. 1891—93.)

KOPKA, C. Die Baumechanik. Leipzig 1872.

HOLZHEY, E. Vorträge über Baumechanik. Wien 1872—76.

LEVY, M. *La ſtatique graphique et ſes applications aux conſtructions.* Paris 1874. — 2. Aufl. 1887.

CREMONA, L. *Elementi di calcolo grafico.* Turin 1874. — Deutſch von M. CURTZE. Leipzig 1875.

RITTER, A. Lehrbuch der höheren Mechanik. II. Theil: Ingenieur-Mechanik. Hannover 1875. (2. Aufl. 1885.)

Deutſche bautechniſche Taſchenbibliothek. Heft 9: Die Baumechanik. Von W. JEEP. Leipzig 1876.

DU BOIS, A. J. *Elements of graphical ſtatics etc.* New-York 1876.

ROLLA, L. *Elementi di ſtatica grafica etc.* Mailand 1876.

CROFTON, M. W. *Lectures on the elements of applied mechanics, compriſing: I. Stability of ſtructures. II. Strength of materials.* London 1877.

EDDY, H. T. *New conſtructions in graphical ſtatics.* New-York 1877. — Deutſche vom Verf. verm. u. verb. Ausgabe. Leipzig 1880.

KLASEN, L. Graphiſche Ermittelung der Spannungen in den Hochbau- und Brücken-Conſtructionen. Leipzig 1878.

ZUCCHETTI, F. *Statica grafica, ſua teoria ed applicazioni.* Torino 1878.

WENCK, J. Die graphiſche Statik etc. Berlin 1879.

CAIN, W. *Theory of ſolid and braced elaſtic arches, applied to arch bridges and roofs in iron, wood, concrete, or other material. Graphical analyſis.* New-York 1879.

WITTMANN, W. Statik der Hochbau-Conſtructionen. Berlin. Theil I: Steinconſtructionen. 1879. — Theil II: Holzconſtructionen. 1882. — Theil III: Eiſenconſtructionen. 1884.

FOEPPL, A. Theorie des Fachwerks. Leipzig 1880.

CLARKE, G. S. *The principles of graphic ſtatics.* London 1880. — 2. Aufl. 1888.

ORLANDER, E. *A new method of graphic ſtatics applied to the conſtruction of wrought-iron girders.*

MÜLLER-Breslau, H. F. B. Elemente der graphiſchen Statik der Bauconſtructionen für Architekten und Ingenieure. Berlin 1881.

ALBERT, F. Die techniſche Mechanik im Hochbau. Plauen 1881.

CHALMERS, J. B. *Graphical determination of forces in engineering ſtructures.* London 1881.

CROFTON, M. W. *Lectures on the elements of applied mechanics.* London 1881.

BELLOT. Die wichtigſten Lehren der Baumechanik. Leipzig 1881.

HINTZ, L. Die Bauſtatik etc. Weimar 1882.

STELZEL, K. Grundzüge der graphiſchen Statik und deren Anwendung auf den continuirlichen Träger. Graz 1882.

PETERSEN, J. Lehrbuch der Statik fester Körper. Deutfche Ausg. von R. v. FISCHER-Benzon. Kopenhagen 1882.
MAURER, M. *Statique graphique appliquée aux conftructions, toitures, planchers, poutres etc.* Paris 1882. — 2. Aufl. 1885.
GRAHAM, R. H. *Graphic and analytic ftatics in theory and comparifon etc.* London 1883. (New-York 1887.)
WILDA, E. Statik fefter Körper. Brünn 1884.
GRUNER, O. Formeln und Tabellen zu einfachen ftatifchen Berechnungen der bei Hochbauten vorkommenden Eifenconftructionen. Leipzig 1885.
SCHLOESSER, H. Anleitung zur ftatifchen Berechnung von Eifenconftructionen. Berlin 1885.
CREMONA, L. *Les figures réciproques en ftatique graphique.* Paris 1885. — Mit Anhang von SAVIATTI.
JENTZEN, E. Baumechanik mit befonderer Rückficht auf die Berechnung der Träger und Stützen aus Holz und Eifen etc. Hamburg 1886.
FLAMANT, A. *Stabilité des conftructions, réfiftance des matériaux.* Paris 1886. — 2. Aufl. 1896.
Praktifche Unterrichtsbücher für Bautechniker. III. Die Feftigkeitslehre und die Statik im Hochbau. Von H. DIESENER. Halle 1886.
HENNEBERG, L. Statik der ftarren Syfteme. Darmftadt 1886.
HAUSSER, A. E. & L. CUNQ. *Statique graphique appliquée etc.* Paris. Erfcheint feit 1886.
SCHLOTKE, J. Lehrbuch der graphifchen Statik. Hamburg 1887.
MÜLLER-Breslau, H. F. B. Die graphifche Statik der Bauconftructionen. Leipzig 1887—96.
RITTER, W. Anwendung der graphifchen Statik. Theil I: Die im Innern eines Balken wirkenden Kräfte. Zürich 1888. — Theil II: Das Fachwerk. Zürich 1890.
BALL, R. S. Theoretifche Mechanik ftarrer Syfteme. Herausg. von H. GRAVELIUS. Berlin 1889.
KOECHLIN, M. *Applications de la ftatique graphique.* Paris 1889.
LAUENSTEIN, R. Die graphifche Statik. Stuttgart 1889. — 4. Aufl. 1898.
SCHMID, C. Statik und Feftigkeitslehre. Stuttgart 1891. — 2. Aufl. 1897.
MÜLLER-Breslau, F. B. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Berlin 1892.
BAKER, W. L. *The beam etc.* London 1892.
KECK, W. Vorträge über Elafticitätslehre. Hannover 1892—93.
MÜLLER-Breslau, F. B. Die neueren Methoden der Feftigkeitslehre und der Statik der Bauconftructionen. Leipzig 1893.
CLAUSSEN, E. Statik und Feftigkeitslehre in ihrer Anwendung auf Bauconftructionen. Berlin 1893.
KECK, W. Vorträge über graphifche Statik. Hannover 1894.
BAYER, A. Handbuch zur Berechnung der im Hochbau vorkommenden Conftructionen in Eifen, Stein und Holz. Wien 1896.
PULLEN, W. W. F. *The application of graphic methods to the defign of ftructures.* Manchefter 1896.
DOMITROWICH, A. v. Statifche Berechnung von Balkendecken, Säulen und Stützen im Hochbaufache. Wien 1897.
KECK, W. Vorträge über Mechanik etc. Hannover 1897.
FROELICH, H. Elementare Anleitung zur Anfertigung ftatifcher Berechnungen für die im Hochbau üblichen Conftructionen mit eifernen Trägern und Stützen etc. Berlin 1892. — 2. Aufl. 1897.
ROUTH, E. J. Die Dynamik der Syfteme ftarrer Körper. Deutfch von A. SCHEPP. Leipzig 1898.

---

1. Kapitel.

Allgemeines.

Für die Löfung der beiden in Art. 1 bezeichneten Aufgaben ift die Kenntnifs derjenigen Kräfte nöthig, welche bei den verfchiedenartigen möglichen Belaftungszuftänden im Inneren der Conftructionen entftehen, d. h. der fog. inneren Kräfte oder Spannungen, welche auch wohl widerftehende Kräfte genannt werden. Die inneren Kräfte ftehen aber wiederum in einem ganz beftimmten Verhältnifs zu

2. Aeufsere und innere Kräfte.

den von aufsen auf die Conftructionen wirkenden Kräften, zu den fog. äufseren Kräften, welche auch als die angreifenden Kräfte bezeichnet werden.

Eine jede ftatifche Unterfuchung zerfällt defshalb zunächft in zwei Theile: in die Ermittelung der äufseren Kräfte, bezw. der für den zu unterfuchenden Conftructionstheil ungünftigften äufseren Kräfte, und in die Ermittelung der inneren Kräfte oder Spannungen, welche durch die äufseren Kräfte hervorgerufen werden.

Die äufseren Kräfte laffen fich in zwei Hauptgruppen theilen:

1) Die Belaftungen. Diefelben find beim Beginne der Unterfuchung nur zum Theile bekannt; die Eigengewichte z. B. find zunächft noch unbekannt, da erft die vorzunehmende Berechnung die genauen Abmeffungen und damit die Gewichte feftftellen foll. Meiftens kann das Eigengewicht nach ausgeführten ähnlichen Conftructionen genügend genau angenommen werden.

2) Die Auflager- oder Stützendrücke derjenigen feften Punkte, welche die zu betrachtenden Conftructionen ftützen. Diefelben find meiftens von vornherein nicht gegeben; fie find nach den Gefetzen der Statik, bezw. der Elafticitätslehre zu ermitteln.

3. Ermittelung der äufseren Kräfte.

Da die Statik der Bau-Conftructionen fich nur mit folchen Körpern befchäftigt, welche unter der Einwirkung der äufseren Kräfte im Gleichgewichte find, fo kann man für die fämmtlichen äufseren Kräfte, welche auf eine Conftruction wirken, die Gleichgewichtsbedingungen aufftellen und mittels der fo gefundenen Gleichungen die unbekannten äufseren Kräfte, die Stützendrücke, ermitteln. Man führt die letzteren defshalb als vorläufig unbekannte Kräfte ein und ftellt die Gleichgewichtsbedingungen auf. Wenn alle Kräfte in einer Ebene wirken, wie es in den hier zu betrachtenden Fällen meiftens angenommen werden kann, giebt es drei Gleichgewichtsbedingungen, alfo auch drei Gleichungen für die Ermittelung der Unbekannten. Aus drei Gleichungen kann man aber nur drei Unbekannte finden; find alfo mehr als drei Unbekannte vorhanden, fo genügt die angegebene Methode nicht mehr. Die Gleichungen für die Stützendrücke dürfen in diefem Falle nicht mehr als drei Unbekannte enthalten, wenn die Aufgabe auf dem angegebenen Wege lösbar fein foll; anderenfalls ift zur Ermittelung derfelben die Elafticitätslehre zu Hilfe zu nehmen.

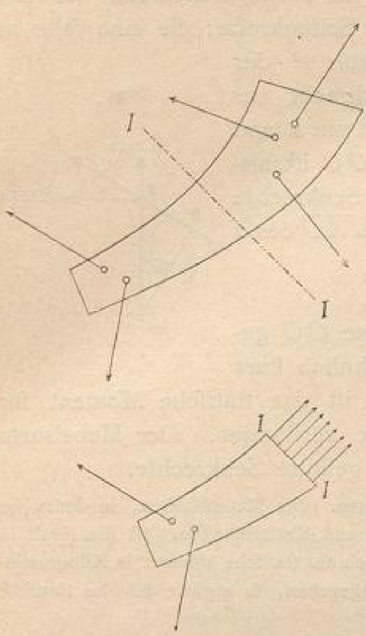
Wirken die Kräfte in verfchiedenen Ebenen, wie bei den Thürmen, Kuppeln u. f. w., fo ftehen fechs Gleichgewichtsbedingungen, alfo fechs Gleichungen zur Verfügung; die Gleichungen für die zu ermittelnden Stützendrücke dürfen alsdann fechs Unbekannte enthalten.

4. Ermittelung der inneren Kräfte.

Nachdem die fämmtlichen äufseren Kräfte gefunden find, müffen die inneren Kräfte oder Spannungen aufgefucht werden. Das hierbei einzufchlagende Verfahren ift folgendes.

Man denkt fich durch den Körper an derjenigen Stelle, an welcher man die inneren Kräfte kennen lernen will, eine Ebene *II* (Fig. 1) hindurchgelegt und unterfucht den an der einen Seite diefer Ebene liegenden Theil; hier möge der Theil links von *II* betrachtet werden. Auf diefen Theil werden von dem an der anderen Seite der Ebene *II* liegenden Körpertheile gewiffe innere Kräfte übertragen, welche denfelben im Vereine mit den auf ihn wirkenden äufseren Kräften im Gleichgewichte halten; denn nicht nur der ganze Körper, fondern auch jeder Theil deffelben mufs unter der Einwirkung aller auf ihn wirkenden Kräfte, der äufseren und der inneren,

Fig. 1.



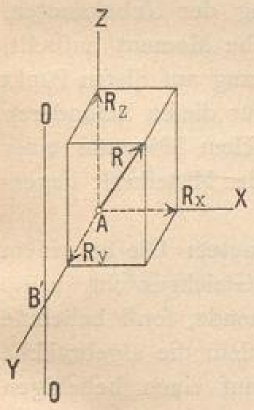
im Gleichgewichte fein. Bringt man demnach die inneren Kräfte am linken Körpertheile an, fo kann man auf die fämmtlichen jetzt auf diefen Theil wirkenden Kräfte die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anwenden und aus diefen die nach Gröfse und Richtung unbekannten inneren Kräfte ermitteln. Wie oben, ftehen auch hier, falls alle Kräfte in einer Ebene liegen, drei Bedingungsgleichungen, falls die Kräfte in verfchiedenen Ebenen liegen, fechs Bedingungsgleichungen zu Gebote; defshalb ift auch hier die Ermittelung der unbekannten inneren Kräfte auf diefem Wege nur möglich, wenn diefelben nicht mehr als drei, bezw. fechs Unbekannte enthalten. Selbftverftändlich ift das Ergebnifs das gleiche, ob man den Körpertheil an der einen oder anderen Seite der Ebene *II* unterfucht.

Die aus Vorftehendem fich ergebende Regel wird folgendermafsen ausgedrückt: Man lege durch den Körper einen Schnitt, denke den Theil an der einen Seite des Schnittes fortgenommen und bringe an dem übrig bleibenden Bruchftück alle Kräfte an, welche vor dem Durchfchneiden auf daffelbe wirkten, d. h. die äufseren Kräfte und die an der Schnittftelle Seitens des anderen Bruchftückes übertragenen inneren Kräfte. Alsdann befindet fich daffelbe in demfelben Zuftande wie vor dem Durchfchneiden, d. h. im Gleichgewichte; man ftelle nun für diefe Kräfte die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

a) Grundgefetze der Statik fefter Körper.

Obgleich die Statik fefter Körper im Allgemeinen hier als bekannt vorausgefetzt werden kann, follen im Folgenden doch einige der wichtigften anzuwendenden Sätze kurz angeführt werden, damit über die gemachten Annahmen keine Unklarheit herrfche. 5. Statifche Momente.

Fig. 2.

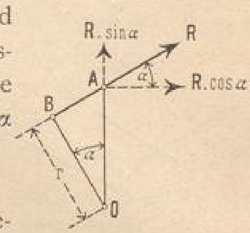


1) Satz des ftatifchen Momentes. Es fei eine Kraft R und eine Axe $O\,O$ gegeben (Fig. 2); man denke eine fenkrecht zur Axe ftehende Ebene hindurchgelegt, welche die Kraftrichtung im Punkte A fchneidet; in diefem Punkte zerlege man die Kraft R in drei fenkrecht zu einander ftehende Seitenkräfte R_x, R_y, R_z. Die eine Seitenkraft (R_z) fei parallel zur Axe $O\,O$; die zweite (R_y) falle in die Verbindungslinie des Punktes A mit dem Punkte B', in welchem die Axe $O\,O$ von der obigen Ebene gefchnitten wird; die dritte Seitenkraft (R_x) fteht fenkrecht zur zweiten und liegt, wie diefe, in der fenkrecht zur Axe $O\,O$ hindurchgelegten Ebene. Alsdann nennt man das Product $R_x \,.\, \overline{AB'}$ das ftatifche Moment der Kraft R für die Axe $O\,O$.

Wenn alle Kräfte in derfelben Ebene wirken und die Axe $O\,O$ fenkrecht zu diefer Kraftebene fteht, fo find für jede Kraft nur zwei Seitenkräfte (R_x und R_y) in Betracht zu ziehen; R_z ift dann gleich Null. Der Schnittpunkt der Axe mit der

Kraftebene fei O (Fig. 3); alsdann zerlege man R in einem beliebigen auf der Richtungslinie der Kraft gelegenen Punkte A in zwei Seitenkräfte: die eine falle in die Richtung der Verbindungslinie des Angriffspunktes A der Kraft mit dem Axenpunkt O; die andere ftehe fenkrecht zur erfteren. Die beiden Seitenkräfte haben die Gröfse $R \sin \alpha$ und $R \cos \alpha$. Das ftatifche Moment von R für die Axe OO ift alsdann: $M = R \cos \alpha \, . \, \overline{AO}$. Fällt man von O die Senkrechte $\overline{OB} = r$ auf die Richtung der Kraft R, fo ift $\overline{OB} = \overline{AO} \cos \alpha = r$, alfo

Fig. 3.



$$M = R \, . \, r.$$

r wird der Hebelsarm der Kraft R für die Axe OO genannt. Bei Kräften in einer Ebene fpricht man gewöhnlich kurz vom ftatifchen Moment für den Punkt O; darunter ift das ftatifche Moment für die im Punkte O fenkrecht zur Ebene errichtete Axe verftanden. Der Hebelsarm ift die vom Punkte O auf die Richtung der Kraft R gefällte Senkrechte.

Die ftatifchen Momente find Producte von Kräften und Längen. Die Mafseinheiten, in denen fie ausgedrückt werden, find demnach gleichfalls Producte aus Längen- und Krafteinheiten. Ift die Kraft in Kilogrammen und die Länge in Centimetern angegeben, fo ergiebt fich das ftatifche Moment in Kilogramm-Centimetern; ift die Kraft in Tonnen und die Länge in Metern angegeben, fo ergiebt fich das ftatifche Moment in Tonnen-Metern [1]) etc.

Die Kraft R hat das Beftreben, die Ebene um den als feft gedachten Punkt O, bezw. um eine im Punkte O fenkrecht zur Kraftebene errichtete Axe zu drehen, hier alfo nach rechts. Wenn die ftatifchen Momente mehrerer in derfelben Ebene liegender Kräfte aufzuftellen find, fo ift zu beachten, dafs die verfchiedenen Kräfte allgemein verfchiedene Drehrichtungen haben. Welche von diefen als pofitiv eingeführt wird, ift gleichgiltig; ift aber die eine Drehrichtung als pofitiv angenommen, fo ift die entgegengefetzte als negativ einzuführen.

Der in Folgendem häufig anzuwendende Satz des ftatifchen Momentes lautet: Das ftatifche Moment der Mittelkraft in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene, in welcher die Kräfte liegen, ift gleich der algebraifchen Summe der ftatifchen Momente der Einzelkräfte in Bezug auf denfelben Punkt.

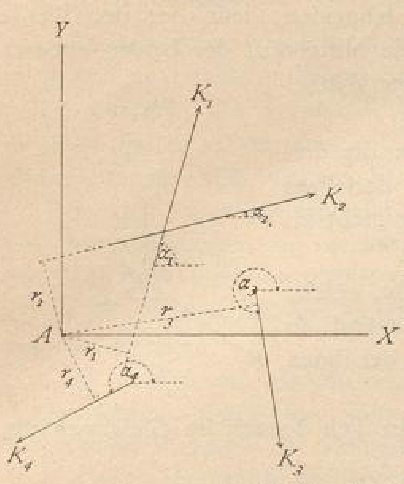
Diefer Satz giebt oft ein bequemes Mittel zur Ermittelung der Unbekannten. Wählt man den Punkt, in Bezug auf welchen man das ftatifche Moment aufftellt, auf der Richtungslinie der Mittelkraft, fo hat die letztere in Bezug auf diefen Punkt den Hebelsarm Null, alfo auch das ftatifche Moment Null. Für diefen befonderen Fall heifst der obige Satz: Die algebraifche Summe der ftatifchen Momente einer Reihe von Kräften in Bezug auf einen auf der Richtungslinie der Mittelkraft liegenden Punkt ift gleich Null.

6. Gleichgewicht der Kräfte.

2) Satz vom Gleichgewicht der Kräfte. Derfelbe lautet: Die an einem Körper angreifenden, in einer Ebene liegenden Kräfte find im Gleichgewicht, wenn die algebraifche Summe der in zwei fenkrecht zu einander ftehende, fonft beliebige Richtungen fallenden Seitenkräfte je gleich Null ift und aufserdem die algebraifche Summe der ftatifchen Momente fämmtlicher Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null ift.

[1]) Ein Tonnen-Meter ift gleich 100 Tonnen-Centimetern und gleich 100 000 Kilogramm-Centimetern. Danach kann ein Moment, welches in der einen Einheit, etwa in Tonnen-Metern, berechnet ift, leicht in eine andere Einheit, etwa Kilogramm-Centimeter, umgerechnet werden.

Fig. 4.



Man zerlege demnach fämmtliche Kräfte (K_1, K_2, K_3 . . . in Fig. 4) nach zwei zu einander fenkrechten Richtungen, von denen die eine ganz willkürlich angenommen werden kann. Alsdann erhält man als Gleichgewichtsbedingungen für die fämmtlichen Kräfte die Gleichungen:

$\Sigma(K \cos \alpha) = 0$, $\Sigma(K \sin \alpha) = 0$ und $\Sigma(K r) = 0$.

Hier ift A als Momentenpunkt angenommen; indefs hätte auch jeder beliebige andere Punkt der Kraftebene gewählt werden können.

In fehr vielen Fällen ift die Mehrzahl aller äufseren Kräfte lothrecht gerichtet; alsdann empfiehlt es fich, die Kräfte K_1, K_2, K_3 . . . nach der wagrechten und lothrechten Richtung zu zerlegen. In diefem Falle heifsen die Bedingungsgleichungen, wenn wiederum alle Kräfte in einer Ebene liegen: Die an einem Körper angreifenden Kräfte find im Gleichgewicht, wenn

α) die algebraifche Summe der wagrechten Seitenkräfte gleich Null ift,

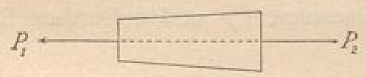
β) die algebraifche Summe der lothrechten Seitenkräfte gleich Null ift,

γ) die algebraifche Summe der ftatifchen Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene, gleich Null ift.

Für Kräfte, welche nicht in derfelben Ebene wirken, lautet der Satz vom Gleichgewicht der Kräfte: Die an einem Körper angreifenden Kräfte find im Gleichgewichte, wenn für drei rechtwinkelig zu einander ftehende Axen die algebraifchen Summen der in die Axenrichtungen fallenden Seitenkräfte je gleich Null find und aufserdem die algebraifchen Summen der ftatifchen Momente aller Kräfte, bezogen auf diefe Axen, je gleich Null find.

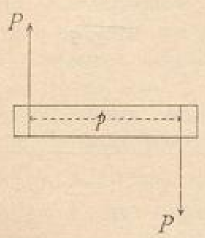
3) Zwei auf einen Körper wirkende Kräfte halten denfelben nur dann im Gleichgewicht, wenn beide der Gröfse nach genau gleich, dem Sinne nach genau einander entgegengefetzt find und mit ihren Richtungslinien zufammenfallen (Fig. 5); denn nur dann find alle drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. 7. Zwei Kräfte auf einen Körper wirkfam; Kräftepaar.

Fig. 5.



Haben zwei Kräfte P (Fig. 6) parallele Richtung, gleiche Gröfse und entgegengefetzten Sinn, fallen fie aber mit ihren Richtungslinien nicht zufammen, fo ift allerdings jede der beiden erften Gleichgewichtsbedingungen α und β erfüllt, nicht aber die dritte. Man nennt zwei folche Kräfte ein **Kräftepaar** und verfteht unter dem Momente des Kräftepaares das Product aus der Gröfse der Kraft P in den fenkrechten Abftand der beiden Richtungslinien der Kräfte; d. h. es ift das Moment $M = Pp$.

Fig. 6.

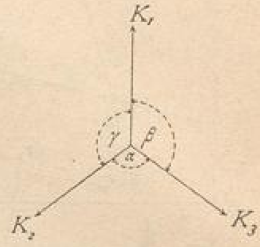


Die Summe der ftatifchen Momente beider zu dem Kräftepaar vereinten Kräfte hat für jeden beliebigen Punkt der Ebene die gleiche Gröfse $M = Pp$. In den Berechnungen kommt vielfach das (unter Umftänden vorläufig noch unbekannte) Moment M eines Kräftepaares vor; wird alsdann für einen beliebigen Punkt der Ebene die algebraifche Summe der ftatifchen Momente aufgeftellt, fo ift, wo **auch** der **Punkt** liege, der Beitrag des Kräftepaares mit dem Werthe M einzuführen.

8. Drei Kräfte auf einen Körper wirksam.

4) Drei auf einen Körper wirkende Kräfte sind nur dann im Gleichgewicht, wenn sich ihre Richtungslinien in einem Punkte schneiden, jede der drei Kräfte absolut genommen genau eben so grofs ist, wie die Mittelkraft der beiden anderen Kräfte, und mit der betreffenden Mittelkraft einen Winkel von 180 Grad einschliefst.

Fig. 7.



Diese Bedingungen sind nur erfüllbar, wenn die drei Kräfte in derselben Ebene liegen; drei nicht in derselben Ebene liegende Kräfte können daher mit einander nicht im Gleichgewicht sein.

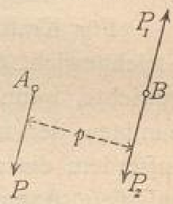
5) Wenn drei in derselben Ebene liegende Kräfte, welche sich in einem Punkte schneiden, im Gleichgewichte sind, so verhalten sich die Kräfte zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüber liegenden Winkel.

Die drei Kräfte K_1, K_2, K_3 (Fig. 7) befinden sich sonach im Gleichgewicht, wenn

$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

6) Eine in irgend einem Punkte A (Fig. 8) angreifende Kraft P kann stets ersetzt werden durch eine nach einem beliebigen anderen Punkte B parallel verschobene Kraft P von gleicher Gröfse, gleicher Richtung und gleichem Sinne mit der gegebenen, und ein Kräftepaar, dessen Moment dem Momente der gegebenen Kraft in Bezug auf den Punkt B nach Gröfse und Drehrichtung gleich ist.

Fig. 8.



Denn es wird nichts geändert, wenn im Punkte B zwei Kräfte, P_1 und P_2, angebracht werden, welche der gegebenen Kraft in Gröfse und Richtung gleich, dem Sinne nach einander entgegen gesetzt sind. Zwei dieser drei Kräfte, P und P_1, ergeben ein Kräftepaar, welches für jeden Punkt der Ebene, also auch für B, das Moment $M = Pp$ und gleiche Drehrichtung hat, wie die ursprünglich gegebene Kraft; die dritte Kraft P_2 ist eben die parallel verschobene Kraft P. Jede Kraft P wirkt also auf einen nicht auf ihrer Richtung liegenden Punkt, dessen senkrechter Abstand von der Kraft gleich p ist, mit einem Drehmoment Pp und aufserdem so, als ob sie in ihm selbst angriffe.

9. Gesetz der Wechselwirkung.

7) Gesetz der Wechselwirkung. Dasselbe lautet: Wenn ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, so erleidet er durch diesen Körper eine Kraft, welche der von ihm ausgeübten der Gröfse nach genau gleich, der Richtung nach genau entgegengesetzt ist.

Fig. 9.

Dieses Gesetz wird in der Folge sehr häufig angewendet werden. Es kommt unter Anderem bei den Auflagern der Träger in Betracht. Ein Träger AB (Fig. 9) übt durch sein Eigengewicht und die wirkenden Belastungen auf die Auflagerpunkte A und B die Drücke K und K_1 aus; dieselben sind nach unten gerichtet. Genau eben so grofs sind die Gegendrücke, welche die Auflager auf die Träger ausüben. Diese sind nach oben gerichtet, da sie den ersteren Drücken K und K_1 genau entgegengesetzt gerichtet sein müssen.

Betrachtet man nur den Träger, so hat man die nach oben wirkenden Kräfte K und K_1 — als Stützendrücke — einzuführen; betrachtet man die Auflager, so sind die nach unten gerichteten Drücke K und K_1 der Untersuchung zu Grunde zu legen.

b) Grundlagen für die graphiſche Behandlung bauſtatiſcher Aufgaben.

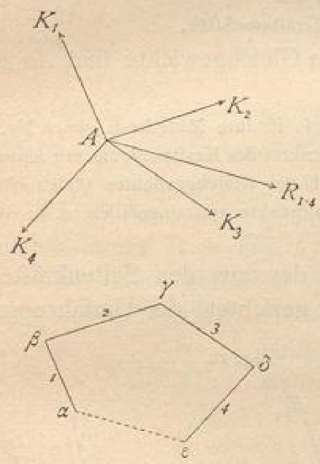
Die Aufgaben der Statik der Bau-Conſtructionen können ſowohl durch Rechnung (auf analytiſchem Wege), als auch durch Zeichnung (auf graphiſchem Wege) gelöst werden. Die graphiſche Behandlung hat manche Vortheile. Dieſelbe führt in vielen Fällen raſcher und leichter zum Ziele und gewährt faſt immer eine klarere Ueberſicht über die Wirkung der Kräfte, als die Rechnung. 10. Graphiſche Methode.

In den folgenden Unterſuchungen werden beide Wege eingeſchlagen werden. Um Wiederholungen zu vermeiden, ſollen die Grundlagen für die graphiſche Behandlung hier kurz vorgeführt werden. Da bei den meiſten Aufgaben die Kräfte als in einer Ebene wirkend angenommen werden können, werden wir uns auf dieſen Fall beſchränken.

1) Kräfte an einem Angriffspunkte. Die an einem Punkte angreifenden Kräfte können durch ihre Mittelkraft erſetzt werden. Um dieſe Mittelkraft nach Gröſse und Richtung zu erhalten, zeichnet man das ſog. Kraftpolygon. 11. Kraftpolygon.

Das Kraftpolygon für eine Anzahl von Kräften iſt derjenige Linienzug, welchen man erhält, wenn man ſämmtliche Kräfte nach irgend einem Maſsſtabe ſo an einander reiht, daſs die Gröſse, die Richtung und der Sinn einer jeden Kraft in dieſem Linienzuge mit der Gröſse, der Richtung und dem Sinne der gegebenen Kraft übereinſtimmt und daſs der Anfangspunkt jeder Kraft mit dem Endpunkte der vorhergehenden Kraft zuſammenfällt.

Fig. 10.



Der Maſsſtab für das Auftragen der Kräfte kann beliebig angenommen werden; doch ſind ſämmtliche Kräfte nach demſelben Maſsſtabe aufzutragen.

Um das Kraftpolygon für die Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 zu erhalten, welche im Punkte A (Fig. 10) angreifen, trage man zunächſt von einem beliebig anzunehmenden Punkte α aus nach irgend einem Maſsſtabe ſo viele Krafteinheiten ab, wie K_1 enthält, und zwar nach einer Richtung $\alpha\beta$, welche mit derjenigen von K_1 übereinſtimmt. Iſt etwa $K_1 = 20^t$ und der Maſsſtab ſo gewählt, daſs $1^{cm} = 20^t$ bedeutet, ſo würde man von α aus 1^{cm} abzutragen haben. Man ziehe alſo durch α eine Linie parallel zur Richtung von K_1 und trage auf dieſer Linie $\alpha\beta = K_1$ ab. Daran trage man K_2 ab; zu dieſem Zwecke ziehe man durch β eine Linie parallel zur Richtung von K_2 und trage auf dieſer Linie $\beta\gamma = K_2$ ab. In derſelben Weiſe verfahre man weiter und erhält ſo $\gamma\delta = K_3$, $\delta\varepsilon = K_4$. Alsdann iſt $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ das Kraftpolygon für die Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4.

Es iſt oben angegeben, daſs der Sinn der Kraft im Kraftpolygon mit dem der gegebenen Kraft übereinſtimmen muſs. In der gegebenen Kraft iſt der Sinn durch einen Pfeil ausgedrückt, ſo daſs Unklarheit über denſelben nicht beſtehen kann; im Kraftpolygon ergiebt ſich der Sinn ebenfalls unzweideutig, wenn man die Kräfte ſtets ſo aufträgt, daſs die Richtung vom früheren Buchſtaben des Alphabetes bis zum höheren Buchſtaben deſſelben mit der Pfeilrichtung der gegebenen Kraft übereinſtimmt. Die Kraft $\alpha\beta$ wirkt alſo im Sinne von α nach β, nicht im Sinne von β nach α.

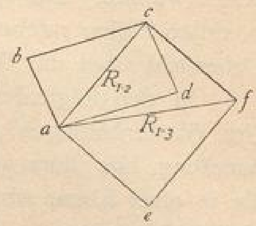
Gröſse, Richtung und Sinn der Mittelkraft aller an einem Punkte A (Fig. 10) angreifenden Kräfte werden erhalten, indem man den Anfangspunkt des für dieſe Kräfte conſtruirten Kraftpolygons mit ſeinem Endpunkte verbindet. 12. Satz I.

In Fig. 10 giebt alſo $\alpha\varepsilon$ die Gröſse, die Richtung und den Sinn der Mittelkraft der vier Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 an.

Die Mittelkraft der beiden Kräfte K_1 und K_2 wird nach dem bekannten Satz vom Parallelogramm der Kräfte durch die Diagonale des aus dieſen beiden Kräften conſtruirten Parallelogramms dargeſtellt, d. h. in Fig. 11 ſtellt ac die Mittelkraft von K_1 und K_2 nach Gröſse und Richtung dar, wenn

$ab = K_1$, $ad = K_2$ ist. Die Diagonale ac theilt das Parallelogramm $abcd$ in zwei congruente Dreiecke; es wird also genügen, das Dreieck abc zu construiren, in welchem $ab = K_1$ und $bc = K_2$ ist. Alsdann ist die dritte Seite ac des Dreieckes gleich der Mittelkraft R_{1-2} von K_1 und K_2. Der Linienzug abc ist aber nach der oben gegebenen Erklärung das Kraftpolygon für die beiden Kräfte K_1 und K_2, und ac verbindet den Anfangspunkt a desselben mit dem Endpunkte c. Für zwei Kräfte ist damit obiger Satz bewiesen.

Fig. 11.



Kommt eine dritte Kraft K_3 hinzu, so ist die Mittelkraft R_{1-2} von K_1 und K_2 mit K_3 zu vereinen, um die Resultirende R_{1-3} von K_1, K_2 und K_3 zu erhalten. Ist $K_3 = ae$, so construire man das Parallelogramm $acfe$, und ziehe die Diagonale af desselben; die letztere ist die gesuchte Mittelkraft. Auch hier genügt es, um af zu erhalten, nur das Dreieck acf zu zeichnen. Man erhält also die Mittelkraft R_{1-3}, indem man an den Endpunkt von $R_{1-2} = ac$ die Kraft K_3 nach Gröfse und Richtung gleich cf anträgt und a mit f verbindet. Der Linienzug $abcf$ ist aber nach obiger Erklärung das Kraftpolygon für die drei Kräfte K_1, K_2 und K_3 und af die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit dessen Endpunkte. Damit ist der Beweis unseres Satzes auch für drei Kräfte geliefert. In derselben Weise kann er ohne Schwierigkeit für eine beliebige Anzahl von Kräften geführt werden.

Das Kraftpolygon ist nur eine Hilfsfigur, welche wohl Gröfse, Richtung und Sinn der Mittelkraft, nicht aber ihre Lage in der Ebene angiebt. Die Lage derselben ist aber nicht zweifelhaft, sobald man aufser der Richtung der Kraft einen Punkt kennt, durch welchen die Kraft hindurchgeht. Die Richtung wird hier durch das Kraftpolygon gegeben. Der Durchgangspunkt für die Kraft ist ebenfalls bekannt; denn die Mittelkraft aller Kräfte mufs durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt derselben, d. h. durch A (Fig. 10), gehen. Zieht man also durch A eine Linie parallel zu $\alpha\varepsilon$, so ergiebt diese die Mittelkraft nach Lage und Richtung; die Gröfse derselben ist $\alpha\varepsilon$.

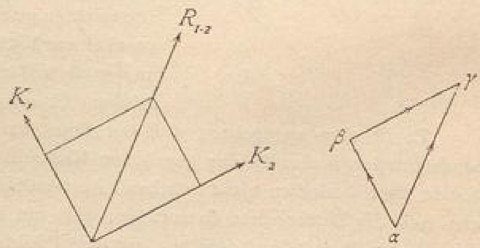
Zu jedem Kraftpolygon gehört als nothwendige Ergänzung ein Kräftemafsstab.

13. Satz II. Wenn die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewichte sind, so ist das Kraftpolygon eine geschlossene Figur.

Sind die auf einen Punkt wirkenden Kräfte im Gleichgewichte, so ist ihre Mittelkraft gleich Null; dieselbe wird aber nach Satz I durch die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit seinem Endpunkte dargestellt. Diese Verbindungslinie mufs also für den Fall des Gleichgewichtes gleich Null sein; demnach mufs der Anfangspunkt des Kraftpolygons mit seinem Endpunkte zusammenfallen, d. h. das Kraftpolygon mufs eine geschlossene Figur sein.

14. Satz III. Der Sinn der Mittelkraft ist vom Anfangspunkte des aus den Seitenkräften construirten Kraftpolygons nach dem Endpunkte desselben gerichtet; der Umfahrungssinn des ganzen Polygons mit Einschlufs der Mittelkraft erleidet also am Endpunkte der Einzelkräfte eine Unterbrechung.

Fig. 12.



Um diesen Satz zu beweisen, genügt es, die Mittelkraft zweier Kräfte aufzusuchen. Ist in Fig. 12 $\alpha\beta = K_1$ und $\beta\gamma = K_2$, so haben beide den durch die Pfeile angedeuteten Umfahrungssinn, welcher, wenn noch eine beliebige Anzahl von Kräften hinzukommt, immer derselbe bleibt, d. h. er ist stets vom Anfangspunkte des Kraftpolygons nach dem Endpunkte desselben gerichtet. Der Sinn der Resultirenden $R_{1-2} = \alpha\gamma$ ist aber, wie sich aus der Parallelogramm-Construction in Fig. 12 ergiebt, von α nach γ gerichtet; er ist also dem Umfahrungssinne der Einzelkräfte direct entgegengesetzt. Damit ist der Satz für zwei Kräfte bewiesen. Jede dritte Kraft K_3 läfst sich aber mit R_{1-2} in derselben Weise, wie bei K_1 und K_2 gezeigt ist, zusammensetzen; es handelt sich dabei auch stets nur um zwei Kräfte, und defshalb gilt das Gesagte auch für R_{1-2} und K_3, d. h. für K_1, K_2, K_3. Die Mittelkraft der durch das Kraftpolygon $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ dargestellten Kräfte (Fig. 10) ist $\alpha\varepsilon$, der Sinn ist von α nach ε gerichtet; der Umfahrungssinn erleidet sonach bei ε eine Unterbrechung.

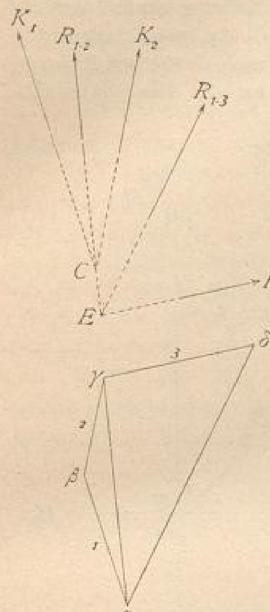
15. Satz IV. Sind die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewichte, so ist für das ganze Kraftpolygon der Umfahrungssinn derselbe.

Denn alsdann ist die Mittelkraft gleich Null, und diese ist nach Satz III die einzige Kraft, welche einen anderen Umfahrungssinn hat, als die übrigen Kräfte. Diese einzige Kraft fällt hier fort; mithin haben in diesem Falle alle Kräfte denselben Umfahrungssinn.

16. Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten.

2) Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten. Wenn die auf einen Körper wirkenden Kräfte an verschiedenen Punkten desselben angreifen, so ist zunächst die Ermittelung der Gröfse und Richtung der Mittelkraft genau, wie unter 1 angegeben, vorzunehmen.

Fig. 13.



Denn man kann (Fig. 13) zunächst die beiden Kräfte K_1 und K_2 auf ihren Richtungslinien beliebig verschieben, also auch bis zu dem Schnittpunkte C derselben. Für die beiden im Punkte C angreifenden Kräfte liegt nun die Aufgabe genau so, wie oben entwickelt ist. Ist $K_1 = \alpha\beta$ und $K_2 = \beta\gamma$, so ist $\alpha\gamma$ die Mittelkraft R_{1-2} von K_1 und K_2.

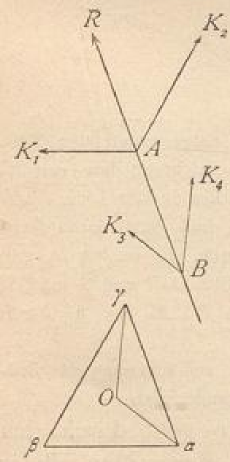
Diese Mittelkraft R_{1-2} greift in C, dem Schnittpunkte der beiden Kräfte K_1 und K_2, an und hat die durch $\alpha\gamma$ bestimmte Richtung, d. h. sie ist parallel zu $\alpha\gamma$. Um jetzt die Mittelkraft von R_{1-2} und K_3, d. h. diejenige von K_1, K_2, K_3 zu finden, verfährt man genau so, wie bei der Zusammensetzung von K_1 und K_2. Man verschiebt R_{1-2} und K_3 bis zum Schnittpunkte E ihrer Richtungslinien; in diesem mufs die gesuchte Mittelkraft R_{1-3} angreifen. Die Zusammensetzung von R_{1-2} ($= \alpha\gamma$ im Kraftpolygon) und K_3 ($= \gamma\delta$ im Kraftpolygon) kann nun wiederum genau in der oben gezeigten Weise erfolgen, indem man $\gamma\delta = K_3$ an γ anträgt und $\alpha\delta$ zieht. $\alpha\delta$ giebt die Gröfse und Richtung der Mittelkraft R_{1-3} von K_1, K_2, K_3 an; dieselbe geht durch den Punkt E. In der gleichen Weise kann man auch bei mehreren Kräften weiter verfahren.

Wenn Gröfse und Richtung der Mittelkraft gefunden sind, ist auch die Lage derselben bekannt, sobald ein Punkt bekannt ist, durch welchen sie gehen mufs; denn durch diesen Punkt läfst sich nur eine Parallele zu der im Kraftpolygon gefundenen Richtung der Mittelkraft legen. Ein solcher Punkt ist in Fig. 13 bei R_{1-2} der Punkt C, bei R_{1-3} der Punkt E etc.

17. Seilpolygon.

Bei einer gröfseren Anzahl von Kräften würde die gezeigte Ermittelung der Lage der Mittelkraft sehr umständlich sein; defshalb hat man zur Erleichterung eine Hilfsconstruction eingeführt, das sog. Seilpolygon. Dasselbe ergiebt sich durch die folgende Betrachtung.

Fig. 14.



Wie man die Gröfse und Richtung der Mittelkraft zweier Kräfte K_1 und K_2 in der dritten Seite $\alpha\gamma$ (Fig. 14) des für die beiden Kräfte construirten Kraftpolygons $\alpha\beta\gamma$, hier der Schlufsseite des Kraftdreieckes, findet, so kann man auch irgend eine gegebene Kraft R als Mittelkraft zweier Kräfte K_1 und K_2 auffassen. Diese beiden Kräfte müssen nur zwei Bedingungen genügen, und zwar:

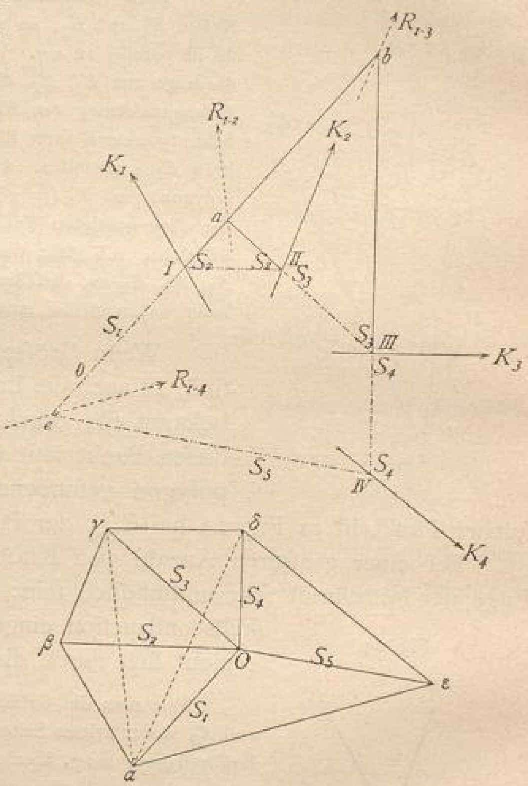
α) Das aus ihnen construirte Kraftpolygon mufs als dritte Seite die gegebene Kraft nach Gröfse und Richtung enthalten, und

β) die beiden Kräfte müssen sich auf einem Punkte der gegebenen Kraftrichtung schneiden.

Man kann also R als Mittelkraft der beiden Kräfte K_1 und K_2 auffassen, die im Kraftpolygon durch bezw. $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ dargestellt sind und deren Richtungslinien sich auf dem Punkte A der Kraftrichtung R schneiden. In gleicher Weise kann R auch als Mittelkraft der beiden Kräfte K_3 und K_4 angesehen werden, denen das Kraftdreieck $\alpha O \gamma$ entspricht, die also im Kraftpolygon durch bezw. αO und $O\gamma$ dargestellt werden und deren Richtungslinien sich im Punkte B der gegebenen Kraftrichtung schneiden. Man kann demnach die gegebene Kraft R sowohl durch die Kräfte K_1 und K_2, wie durch K_3 und K_4 erfetzen. Daraus folgt, dafs man für die Zerlegung einer gegebenen Kraft den Punkt O ganz beliebig, den Punkt B auf der Richtungslinie der gegebenen Kraft beliebig wählen kann.

Iſt eine gröſsere Anzahl von Kräften K_1, K_2, K_3, K_4 .... gegeben (Fig. 15), ſo kann man zunächſt K_1 in der angegebenen Weiſe zerlegen. K_1 werde im Kraftpolygon durch $\alpha\beta$ dargeſtellt und möge in $\alpha O = S_1$ und $O\beta = S_2$ zerlegt werden. Nach Früherem iſt, da K_1 den Sinn von α nach β hat, S_1 von α nach O, S_2 von O nach β gerichtet. Als Schnittpunkt dieſer beiden Seitenkräfte von K kann der Punkt I auf der Richtungslinie von K_1 beliebig angenommen werden. Ferner kann K_2, welches im Kraftpolygon durch $\beta\gamma$ dargeſtellt wird, ebenfalls in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche mit $\beta\gamma$ zuſammen ein Dreieck bilden müſſen. Die Spitze des Dreieckes kann wiederum beliebig gewählt werden; man kann alſo den Punkt O als dieſe Spitze annehmen. Sodann erhält man als die beiden Seitenkräfte von K_2 $(= \beta\gamma)$ die Kraftlinien βO und $O\gamma$. Die erſte dieſer Seitenkräfte iſt nach Gröſse und Richtung der zweiten Seitenkraft von K_1 genau gleich, da dieſe $O\beta$ war. $S_2 = \beta O$ hat den Sinn von β nach O, $S_3 = O\gamma$ den Sinn von O nach γ. Wählt man jetzt als Zerlegungspunkt der Kraft K_2 den Punkt II, in welchem die Richtungslinie der Kraft K_2 von der zweiten Seitenkraft S_2 der Kraft K_1 geſchnitten wird, ſo greifen in dieſem Punkte die beiden Kräfte S_2 und S_3 an. In der Richtungslinie $I\,II$ wirken alſo die beiden Kräfte S_2, deren eine in I, deren andere in II angreift. Beide ſind, wie eben entwickelt iſt, der Gröſse nach einander gleich; ſie haben dieſelbe Richtung, aber entgegengeſetzten Sinn, heben ſich alſo gegenſeitig auf. Die beiden gegebenen Kräfte K_1 und K_2 ſind alſo durch vier neue Kräfte erſetzt, nämlich durch S_1, S_2, S_2, S_3; zwei von dieſen Kräften heben einander auf, nämlich die beiden S_2; es bleiben alſo zwei Kräfte S_1 und S_3, welche die gegebenen Kräfte K_1 und K_2 vollſtändig erſetzen. Die Mittelkraft von K_1 und K_2 iſt demnach derjenigen von S_1 und S_3 gleich in der Gröſse, in der Richtung, im Sinn und in der Lage. Die Mittelkraft von S_1 und S_3 geht aber durch den Schnittpunkt a der Richtungslinien derſelben; durch dieſen Punkt a muſs alſo auch die Mittelkraft von K_1 und K_2 gehen.

Fig. 15.



Verfährt man nun mit der dritten Kraft K_3 eben ſo, wie mit K_2, d. h. zerlegt man K_3 in zwei Seitenkräfte ſo, daſs der Punkt O als Spitze des Kraftdreieckes für die Zerlegung von $K_3 = \gamma\delta$ gewählt wird, ſo werden die beiden Seitenkräfte $S_3 = \gamma O$ und $S_4 = O\delta$ ſein. Die erſte dieſer beiden Seitenkräfte iſt wiederum gleich der zweiten Seitenkraft von K_2, hat aber entgegengeſetzten Sinn. Wählt man ferner als Zerlegungspunkt von K_3 den Punkt III, in welchem die Richtungslinie von K_3 durch die Richtungslinie der Seitenkraft S_3 der Kraft K_2 geſchnitten wird, ſo wirken in der Linie $II\,III$ zwei Kräfte S_3, welche einander wiederum aufheben. Die Kräfte K_1, K_2, K_3 ſind jetzt durch ſechs Kräfte erſetzt, nämlich durch S_1, S_2, S_2, S_3, S_3, S_4, von denen ſich die vier mittleren, die beiden S_2 und die beiden S_3, gegenſeitig aufheben, ſo daſs nur S_1 und S_4 übrig bleiben. Die Mittelkraft von S_1 und S_4 iſt alſo auch diejenige von K_1, K_2 und K_3. Daraus folgt, daſs die Mittelkraft von K_1, K_2 und K_3 durch den Schnittpunkt der Kraftrichtungen S_1 und S_4, alſo durch den Punkt b geht.

Verfährt man ſo weiter, ſo erhält man einen Linienzug $O\,I\,II\,III\,IV\ldots$, welchen man das Seilpolygon nennt. Aus der vorſtehenden Erklärung der Entſtehung ergiebt ſich folgender Satz:

18. Satz V. Die Mittelkraft einer Anzahl auf einander folgender Kräfte geht durch den Schnittpunkt der Richtung derjenigen Seilpolygonſeite, welche der erſten dieſer Kräfte vorhergeht, mit der Richtung derjenigen Seilpolygonſeite, welche auf die letzte dieſer Kräfte folgt.

Denn die in den mittleren Seilpolygonfeiten wirkenden Kräfte heben fich fämmtlich gegenfeitig auf, und es bleiben nur die in den äufseren Seilpolygonfeiten wirkenden Kräfte übrig, deren Mittelkraft mit derjenigen der gegebenen Kräfte in jeder Beziehung übereinftimmt[2]).

Den Punkt O (Fig. 15) nennt man den **Pol** des Seilpolygons.

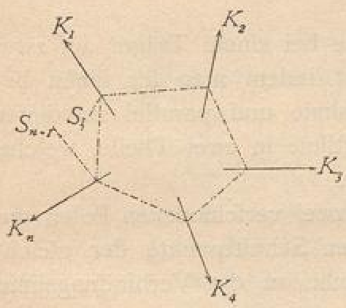
Durch das Kraft- und Seilpolygon ift die Mittelkraft ganz beliebig in einer Ebene wirkender Kräfte beftimmt. Die Gröfse, die Richtung und den Sinn derfelben giebt das Kraftpolygon, die Lage in der Ebene giebt das Seilpolygon an, da daffelbe einen Punkt der Richtungslinie der Mittelkraft ergiebt. Zieht man durch diefen die Parallele zu der mit Hilfe des Kraftpolygons gefundenen Richtung der Mittelkraft, fo erhält man die wirkliche Lage derfelben, über welche ein Zweifel nicht mehr herrfchen kann, da durch einen Punkt nur eine Parallele zu einer gegebenen Richtung möglich ift.

Aus dem Vorftehenden folgt, dafs Kraft- und Seilpolygon nicht nur die Mittelkraft der fämmtlichen wirkenden Kräfte, fondern auch diejenige einer beliebigen Gruppe diefer Kräfte ergeben. So ift die Mittelkraft von K_1 und K_2 (Fig. 15) nach Gröfse und Richtung gleich $\alpha\gamma$ und geht durch a. Zieht man alfo durch a eine Linie parallel zu $\alpha\gamma$, fo erhält man diefe Mittelkraft R_{1-2}. So ift ferner die Mittelkraft von K_1, K_2 und K_3 nach Gröfse und Richtung gleich $\alpha\delta$ und geht durch b; eine durch b parallel zu $\alpha\delta$ gezogene Linie ergiebt R_{1-3}. Die Mittelkraft von K_1, K_2, K_3 und K_4 ift nach Gröfse und Richtung gleich $\alpha\varepsilon$ und geht durch c etc.

Wenn die an verfchiedenen Punkten eines Körpers angreifenden Kräfte im Gleichgewicht find, fo ift fowohl das Kraftpolygon, wie auch das Seilpolygon eine gefchloffene Figur. 19. Satz VI.

Dafs das Kraftpolygon in dem angegebenen Falle eine gefchloffene Figur fein mufs, geht aus dem Früheren hervor; denn es ift nachgewiefen, dafs das Kraftpolygon für an verfchiedenen Punkten angreifende Kräfte genau eben fo conftruirt wird und genau diefelbe Bedeutung hat, wie für an einem Punkte angreifende Kräfte. Nach Satz II mufs alfo das Kraftpolygon eine gefchloffene Figur fein, auch wenn die im Gleichgewicht befindlichen Kräfte an verfchiedenen Punkten angreifen.

Fig. 16.



Dafs fich auch das Seilpolygon fchliefsen mufs, ergiebt fich folgendermafsen.

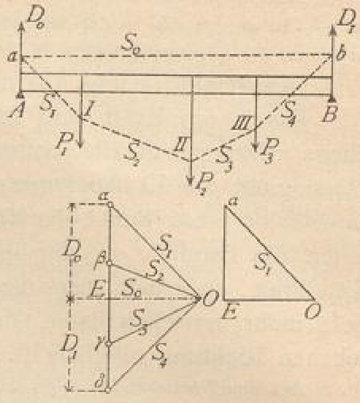
Conftruirt man das Seilpolygon für eine beliebige Anzahl von Kräften, fo heben fich, wie oben auseinandergefetzt, die fämmtlichen in den mittleren Seilpolygonfeiten wirkenden Kräfte auf, und es bleiben als einzig wirkende Kräfte diejenigen übrig, welche in den beiden äufserften Seilpolygonfeiten wirken, d. h. diejenige, welche der erften Kraft K_1 vorangeht, und diejenige, welche auf die letzte Kraft K_n folgt, alfo S_1 und S_{n+1} (Fig. 16). Diefe beiden Kräfte erfetzen alle gegebenen Kräfte $K_1, K_2, K_3 \ldots K_n$. Die letzteren find nach der Vorausfetzung im Gleichgewicht; folglich müffen auch S_1 und S_{n+1} im Gleichgewicht fein. Gleichgewicht zwifchen zwei Kräften ift aber nur möglich, wenn ihre Richtungslinien in diefelbe Gerade fallen. Sonach mufs diejenige Seilpolygonfeite, welche der erften Kraft K_1 vorhergeht, mit derjenigen Seilpolygonfeite, welche auf die letzte Kraft K_n folgt, zufammenfallen, d. h. das Seilpolygon mufs eine gefchloffene Figur fein.

Die fchliefsende Seilpolygonfeite nennt man die **Schlufslinie des Seilpolygons**.

In der Statik der Bau-Conftructionen kommt fehr häufig der Fall vor, dafs alle wirkfamen Kräfte parallel find. In diefem Falle wird das Kraftpolygon eine Gerade. Sind diefe Kräfte im Gleichgewicht, fo fchliefst fich nach Satz VI das Kraftpolygon; fomit fallen alsdann Anfangs- und Endpunkt des Kraftpolygons auch hier zufammen.

[2]) Kehrt man die Richtungen der in einem Eckpunkte des Seilpolygons wirkenden zwei Seitenkräfte S um, fo halten fich diefelben offenbar mit der auf den Eckpunkt wirkenden Kraft K im Gleichgewicht. In jedem Eckpunkte eines Seilpolygons befindet fich demnach die äufsere Kraft K mit den im entgegengefetzten Sinne genommenen Spannungen S im Gleichgewicht.

Fig. 17.



Für neben ftehenden Balken AB (Fig. 17) fei im Kraftpolygon $P_1 = \alpha\beta$, $P_2 = \beta\gamma$, $P_3 = \gamma\delta$; das Kraftpolygon mufs fich fchliefsen, wenn die aufserdem noch wirkenden Kräfte D_1 und D_0, die Stützendrücke, an δ angetragen werden, d. h. es müffen D_0 und D_1, welche, eben fo wie P_1, P_2, P_3, lothrecht find, mit $\delta\alpha$ zufammenfallen, und der Endpunkt von D_0 mufs auf α fallen. Unbekannt ift zunächft noch der Punkt E im Kraftpolygon, welcher die Grenze zwifchen D_1 und D_0 bildet. Da aber Gleichgewicht ftattfindet, fo mufs fich auch das Seilpolygon fchliefsen, welches für einen beliebigen Pol und die fünf Kräfte P_1, P_2, P_3, D_1, D_0 conftruirt wird. Es fei der Pol O, das Seilpolygon $I\,II\,III$ und a der Schnittpunkt der erften Seilpolygonfeite mit der Richtungslinie von D_0, b der Schnittpunkt der letzten Seilpolygonfeite mit der Richtungslinie von D_1; alsdann müffen nach dem Satze VI die vor D_0 liegende und die auf D_1 folgende Seilpolygonfeite, d. h. S_0 und S_{n+1} zufammenfallen; es mufs alfo ab die fchliefsende Seilpolygonfeite, d. h. die Schlufslinie des Seilpolygons fein.

Nach der Erklärung des Seilpolygons in Art. 17 (S. 13) ftellen die von den Ecken des Kraftpolygons nach dem Pol O laufenden Strahlen die in den Seilpolygonfeiten auftretenden Kräfte oder, wie man fagt, die Spannungen im Seilpolygon vor, natürlich in demfelben Mafsftabe, in welchem die Kräfte P aufgetragen find. Im Punkte a des Seilpolygons halten fich nun folgende Kräfte das Gleichgewicht: der Stützendruck D_0, die Spannung in der Seilpolygonfeite $a\,I$ und diejenige in der Schlufslinie ab (beide in dem gleichen Sinne, wie in Fufsnote 2 [S. 15] genommen). Von diefen drei Kräften find die Richtungen bekannt, von einer — der Seilpolygonfpannung in $a\,I$ — auch die Gröfse; diefelbe ift gleich αO. Man kann alfo für diefe drei Kräfte das Kraftpolygon, hier das Kraftdreieck, conftruiren, indem man durch den einen Endpunkt der bekannten Kraft αO, durch α, die Parallele zur Richtung von D_0, durch den anderen Endpunkt, durch O, die Parallele zur Schlufslinie ab zieht. Dann ift $OE\alpha$ das gefuchte Kraftdreieck, $E\alpha = D_0$ und OE gleich der Seilfpannung in der Schlufslinie. Gewöhnlich benutzt man zu diefer Conftruction unmittelbar das Kraftpolygon $\alpha\beta\gamma\delta$. Selbftverftändlich ift dann auch fofort $\delta E = D_1$, da $D_0 + D_1 = P_1 + P_2 + P_3$ ift.

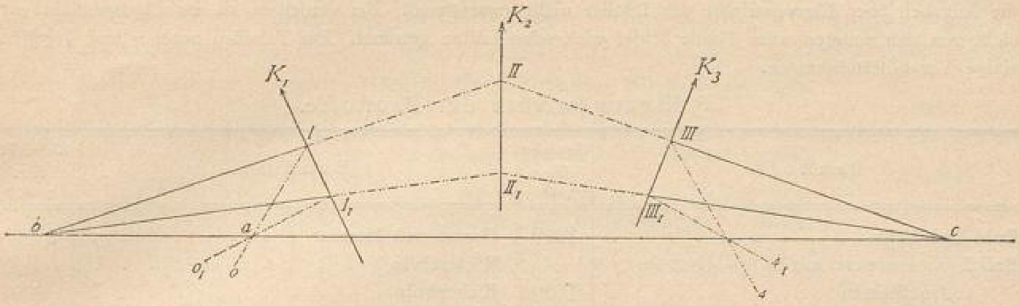
Hieraus ergiebt fich die Regel: Die Stützendrücke bei einem Träger auf zwei Stützen mit nur lothrechten Kräften werden erhalten, indem man für einen beliebigen Pol O das Seilpolygon conftruirt, die Schlufslinie und parallel zu diefer eine Linie durch den Pol zieht; letztere theilt die Kraftlinie in zwei Theile, welche nach Gröfse und Richtung die Stützendrücke darftellen.

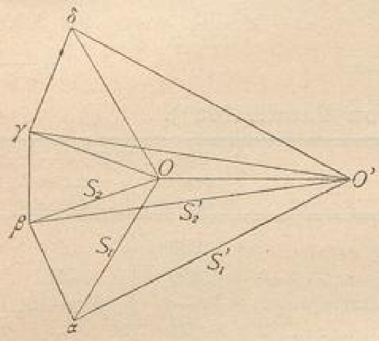
20. Satz VII. Conftruirt man für eine Anzahl von Kräften aus zwei verfchiedenen Polen die entfprechenden Seilpolygone, fo liegen die fämmtlichen Schnittpunkte der gleichvielten Seilpolygonfeiten auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie beider Pole parallel ift.

Das aus einem beliebigen Pole O (Fig. 18) conftruirte Seilpolygon fei $o\,I\,II\,III\,4$, das aus einem anderen Pole O' conftruirte fei $o_1\,I_1\,II_1\,III_1\,4_1$. Alsdann fchneiden fich die beiden erften Seiten $o\,I$ und $o_1\,I_1$ in a, die beiden zweiten Seiten $I\,II$ und $I_1\,II_1$ in b, die dritten Seiten $II\,III$ und $II_1\,III_1$ in c etc. Die fämmtlichen Punkte $a, b, c, d \ldots$ liegen auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie der Pole, d. h. zu $O\,O'$ parallel ift.

Nach der Erklärung des Seilpolygons ift $K_1 = \alpha\beta$ im erften Seilpolygon in zwei Seitenkräfte S_1 und S_2 zerlegt, deren Gröfse und Richtung fich im Kraftpolygon zu bezw. αO und $O\beta$ ergiebt; diefelbe Kraft ift im zweiten Seilpolygon in zwei Seitenkräfte S_1' und S_2' zerlegt, deren Gröfse und Richtung bezw. $\alpha O'$ und $O'\beta$ ift. Denkt man nun den Sinn der beiden Seitenkräfte S_1' und S_2' umgekehrt, fo find diefe beiden Kräfte die Seitenkräfte einer Kraft K_1, welche mit der gegebenen Kraft K_1 nach Gröfse und Richtung genau übereinftimmt, deren Sinn aber demjenigen der gegebenen gerade entgegengefetzt ift. Diefe neue Kraft K_1 mufs fich alfo mit der gegebenen Kraft K_1 im Gleichgewicht halten; folglich müffen auch die vier Seitenkräfte diefer beiden Kräfte K_1 im Gleichgewicht fein. Verbindet man S_1 und S_1' zu einer, S_2 und S_2' zur anderen Mittelkraft, fo geht die erftere durch den Schnittpunkt a diefer beiden Kräfte, die zweite durch den Schnittpunkt b der beiden Kräfte S_2 und S_2'. Beide Mittelkräfte halten

Fig. 18.





fich im Gleichgewicht; fie müffen alfo in die gerade Linie fallen, welche durch die beiden Punkte a und b beftimmt ift.

Nun ift die Mittelkraft von S_1 und S_1' nach Gröfse und Richtung die Schlufslinie des Kraftpolygons $O' \alpha O$, d. h. $O' O$. Die Richtungslinie der Mittelkraft ift alfo parallel zu $O' O$, d. h. die Linie $a b$ ift parallel zu $O' O$, zur Verbindungslinie der beiden Pole.

Genau in derfelben Weife ift zu beweifen, dafs der Schnittpunkt b von S_2 und S_2' mit dem Schnittpunkte c von S_3 und S_3' auf einer zu $O O'$ parallelen Geraden liegt, d. h. auf der Linie $a b$, da durch b zu $O O'$ nur eine Parallele möglich ift.

---

2. Kapitel.

Aeufsere Kräfte, Schwerpunkte, ftatifche und Trägheitsmomente.

a) Belaftungen.

Als Belaftungen der Conftructionen treten auf:

1) das Eigengewicht,
2) die Nutzlaft,
3) die Schneelaft und
4) der Winddruck.

1) Eigengewicht der Conftruction.

Das Eigengewicht der Conftruction ift beim Beginne jeder Berechnung nur angenähert bekannt. Für die gewöhnlichen Anordnungen genügt es, die aus den vorhandenen Bauwerken ermittelten Erfahrungswerthe bei der Berechnung einzuführen. Meiftens kann man das Eigengewicht mit hinreichender Genauigkeit als gleichmäfsig über die ganze Ausdehnung (des Trägers, der Balkendecke, des Daches etc.) vertheilt annehmen. 21. Eigengewichte.

Nachftehend (unter α) find die Eigengewichte einiger wichtiger Bauftoffe und (unter β) diejenigen von verfchiedenen Bautheilen angegeben, und zwar hauptfächlich in der Gröfse, wie fie vom Berliner Polizei-Präfidium nach einer Bekanntmachung vom 21. Februar 1887 den Berechnungen zu Grunde gelegt werden. Die Zufammenftellung (unter β) »Eigengewichte und Belaftung von Bautheilen« enthält in der letzten Spalte auch die Nutzlaft, welche erft im folgenden Artikel befprochen werden foll; es fcheint aber dennoch zweckmäfsig, die betreffenden Angaben hier fogleich mit zu machen.

Die Angaben der Tabellen unter α und β genügen in ſehr vielen Fällen nicht; insbeſondere ſind die Angaben über Eigengewichte der Dächer nicht ausreichend. Bei denſelben iſt das Eigengewicht gar nicht von den anderen, zum Theile ſchief wirkenden Laſten getrennt. Die Tabellen unter γ und δ geben einige Vervollſtändigungen.

22. Bauſtoffe.

α) Eigengewichte der Bauſtoffe.

Bauſtoff	Gewicht für 1 cbm	Bauſtoff	Gewicht für 1 cbm
Erde und Lehm	1600	Granit und Marmor	2700
Backſteinmauerwerk aus		Kiefernholz [3]	650
vollen Steinen	1600	Eichenholz	800
poröſen Steinen	1300	Eiſen	7500
Lochſteinen	1100	Beton	2000
Sandſteinmauerwerk	2400		
	Kilogr.		Kilogr.

23. Bautheile.

β) Eigengewichte und Belaſtung von Bautheilen [4].

Bezeichnung der Conſtruction	Eigengewicht für 1 qm	Eigengewicht und Nutzlaſt für 1 qm
Balkendecke in Wohnhäuſern, geſtaakt und geſchalt	250	500
» » Fabrik- und Lagergebäuden, ſo wie für Tanzſäle	250	750
» » Getreideſpeichern, einſchl. der Belaſtung, zum Nachweis	—	850—1000
Dachbalkenlage (unter dem Dachbodenraum)	375	—
Dachflächen, in der wagrechten Projection gemeſſen, einſchl. Schnee- und Winddruck, bei Metall- oder Glasdeckung gemäſs der Neigung	—	125—150
desgl. bei Schieferdeckung	—	200—240
desgl. bei Pappdeckung	—	120—130
desgl. bei Ziegeldeckung	—	250—300
desgl. bei Holzcementdeckung	—	350
Steile Manſarden-Dächer	—	400
Kappengewölbe aus poröſen Steinen in Wohngebäuden	350	600
desgl. in Fabrik- und Lagerräumen	—	850
desgl. aus vollen Steinen, in Wohngebäuden	500	750
desgl. für Treppen und Treppen-Ruheplätze	500	1000
desgl. in Fabrik- und Lagerräumen	—	1000
desgl. unter Durchfahrten und befahrbaren Höfen	—	1250
Schmiedeeiſerne Treppen, einſchl. Nutzlaſt	—	600—650
Betonirtes Wellblech, für Wohnräume	350	600
desgl. für Treppen und Treppen-Ruheplätze	—	850
	Kilogr.	Kilogr.

24. Decken mit eiſernen Trägern.

γ) Eigengewichte der Decken mit eiſernen Trägern [5].

(Mittelwerthe.)

Bezeichnung der Conſtruction	Gewicht für 1 qm Deckenfläche
Eiſerne Balken, $0{,}9$ bis $1{,}2$ m von einander entfernt, einſchl. Dielung, Deckenputz, Sandausfüllung auf etwa halbe Höhe der Träger	260
Eiſerne Balken, $1{,}0$ bis $1{,}5$ m von einander entfernt, mit zwiſchengeſpannten Kappengewölben aus porigen Steinen	250
	Kilogr.

[3] Nach genauen Ermittelungen wiegt 1 cbm Fichtenholz, lufttrocken, im Winter geſchlagen: 550 kg,
1 cbm Lärchenholz, desgl. 730 kg.
(Siehe: Wochſchr. d. öſt. Ing.- u. Arch.-Ver. 1887, S. 277.)

[4] Nach: Froelich, H. Elementare Anleitung zur Anfertigung ſtatiſcher Berechnungen etc. 2. Aufl. Berlin 1897.

[5] Nach: Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 134 u. ff.

Bezeichnung der Conftruction	Gewicht für 1 qm Deckenfläche
Eiferne Balken, Abftand wie vor, mit Eifenwellblech-Ausfüllung der Zwifchenräume, in den Wellen Beton	150
daffelbe, jedoch 8 cm hohe Sandausfüllung über dem Beton	300
Eiferne Balken, Abftand wie vor, über den Zwifchenräumen *Monier*-Platten, je nach der Ausfüllung der Zwifchenfache	170—300
Eiferne Balken, Abftand wie vor, Ausfüllung der Zwifchenräume mit *Klette*'s Holz-Afphaltdecke auf Wellblech oder *Zorès*-Eifen, mit Fufsboden und Deckenfchalung [6])	170—180
Eiferne Balken, Syftem *Klette*, glatte Putzdecke, Dielenfufsboden, Ausfüllung auf Fehlboden von Holz	310
daffelbe mit Gewölben aus Lochfteinen, Dielenfufsboden, Hinterfüllung	320
daffelbe, Ausfüllung: Schlacken-Beton auf *Monier*-Platten, Cement-Eftrich, glatte Cementbeton-Decke [7])	330
daffelbe mit Ausfüllung durch *Kleine*'fche Decke (D.R.P. 71 102)	220—350
» » » » *Schürmann*'fche Decke (D.R.P. 80653)	220—350
» » » » *Koenen*'fche Decke (Voutenplatte) (Abftand der Balken bis 6,0 m)	300
» » » » *Foerfter*'fche Maffivdecke	200
	Kilogr.

δ) Eigengewichte der Dächer.

Die Eigengewichte der Dächer fetzen fich aus dem Gewichte der Dachdeckung nebft Zubehör, dem Gewichte der Pfetten, Sparren, des Windverbandes etc. und aus dem Gewichte der Binder zufammen. Der erfte Theil ift beim Beginn der Berechnung für die Flächeneinheit fchräger Dachfläche ziemlich genau bekannt und von der Weite des Daches unabhängig; auch der zweite Theil ift, wenn die Binderentfernung einigermafsen feft fteht, leicht zu ermitteln. 25. Dächer.

Der dritte dagegen ift vorläufig unbekannt, kann aber nach ausgeführten, ähnlichen Conftructionen gefchätzt und demnach vorläufig angenommen werden; derfelbe ift übrigens den beiden erften Werthen gegenüber meiftens gering.

Für die erfte Berechnung kann man die nachfolgenden vorläufigen Annahmen über das Eigengewicht der Dächer [8]) machen; die nachherige Gewichtsberechnung mufs ergeben, ob diefe Annahmen entfprechend waren oder ob eine zweite Rechnung durchzuführen ift.

Eigengewichte der Dächer (für 1 qm fchräger Dachfläche).

Holzdächer				Metalldächer	
Art des Daches	Mittl. Gewicht	Art des Daches	Mittl. Gewicht	Art des Daches	Mittl. Gewicht
Einfaches Ziegeldach	102	Afphaltdach mit Fliefenunterlage	102	Schiefer auf Winkeleifen	51
Doppel- u. Kronenziegeldach	127	Theerpappendach	30	Ebenes Eifenblech auf Winkeleifen	25
Falzziegeldach	72	Rohr- und Strohdach ohne Lehm	61	Eifenwellblech auf Winkeleifen	22
Gewöhnliches Schieferdach	76	Rohr- und Strohdach mit Lehm	76	Zinkwellblech auf Winkeleifen	24
Holzcementdach	135	Zink- und Eifenblechdach auf Holzfchalung	41	Gufszinkplatten auf hölzernen Latten u. Sparren	70
Afphaltdach mit Lehmunterlage	61 bis 76			Glas auf Winkel-, bezw. Sproffeneifen	35—50
	Kilogr.		Kilogr.		Kilogr.

6) Nach: Deutfche Bauz. 1883, S. 397.

7) Nach: Deutfche Bauz. 1886, S. 297.

8) Nach: Deutfches Bauhandbuch. Berlin 1879. Bd. I. S. 229. — Bd. II. S. 127.
HEINZERLING, F. Der Eifen-Hochbau der Gegenwart. Aachen 1876—78. Heft I, S. 9.
TETMAJER, L. Die äufseren und inneren Kräfte an ftatifch beftimmten Brücken- und Dachftuhlconftructionen Zürich 1875. S. 8.
MÜLLER-Breslau, H. F. B. Die graphifche Statik der Bauconftructionen. Leipzig 1887—92. S. 430.
LANDSBERG, TH. Die Glas- und Wellblechdeckung der eifernen Dächer. Darmftadt 1887.

Die Zahlen der vorftehenden Tabelle enthalten die Eigengewichte der Dachbinder noch nicht, fondern nur die Gewichte der Deckmaterialien einfchl. Hilfsmaterial, der Lattung, bezw. Schalung, der Sparren und der Pfetten.

Für die Dachbinder können folgende Gewichtsannahmen gemacht werden:

a) Holzdächer (für 1 qm fchräger Dachfläche):

Dachbinder, ftehende oder liegende, mit allem Zubehör an Holztheilen, bei Spannweiten von 7,5 bis 15 m . . . . 7 bis 13 kg

einfache Hängeböcke, desgl., bei Spannweiten von 10 bis 18 m . . . . . 12 » 18 kg

combinirte Spreng- und Hängeböcke, desgl., bei Spannweiten von etwa 20 m 20 » 24 kg

frei tragende Dachbinder verfchiedener Conftructionsformen, desgl., bei 10 bis 18 m Spannweite . . . . 20 » 30 kg

b) Eifendächer (für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche):

bei leicht conftruirten Dachftühlen . . . . 14 » 20 kg

bei fchwer conftruirten Dachftühlen . . . . 20 » 30 kg

Da es oft bequemer ift, die Belaftungen aus der überdeckten Grundfläche ftatt aus der fchrägen Dachfläche zu ermitteln, fo find in der folgenden Tabelle die Eigengewichte der Dächer, ausfchl. des Gewichtes der Dachbinder, für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche, und zwar für die verfchiedenen vorkommenden Dachneigungen (*h* bezeichnet die Höhe, *L* die Stützweite des Daches) angegeben.

Eigengewichte der Dächer, ausfchl. des Gewichtes der Dachbinder (für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche).

Art des Daches: $\frac{h}{L}$ =	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
a) Holzdächer:									
Einfaches Ziegeldach	144	122	114	—	—	—	—	—	—
Doppel- und Kronenziegeldach	180	152	142	—	—	—	—	—	—
Falzziegeldach	102	87	81	77	76	75	74	—	—
Gewöhnliches Schieferdach	108	91	85	82	—	—	—	—	—
Afphaltdach mit Lehmunterlage	106	91	84	81	79	78	77	77	77
» » Fliefenunterlage	144	122	114	110	107	106	105	104	104
Theerpappendach	42	36	34	32	32	31	31	31	30
Zink- und Eifenblechdach auf Holzfchalung .	58	49	46	44	43	42	42	42	42
b) Metalldächer:									
Schiefer auf Winkeleifen	72	61	56	54	—	—	—	—	—
Ebenes Eifenblech auf Winkeleifen	35	30	28	27	26	26	26	26	26
Eifenwellblech auf Winkeleifen	28	24	23	22	21	21	21	21	20
Zinkwellblech auf Winkeleifen	34	29	27	26	26	25	25	24	24
Glas auf Winkel-, bezw. Sproffeneifen . . .	71	60	56	54	—	—	—	—	—
	Kilogramm.								

Beim Holzcementdach hat das Dach eine fo geringe Neigung (etwa 1 : 20), dafs man als Belaftung für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche unbedenklich den Werth der Tabelle auf S. 19 (unter δ), d. i. 135 kg annehmen kann.

2) Nutzlaft.

26. Nutzlaft. Die Nutzlaften find hauptfächlich bei den Decken-Conftructionen von Wichtigkeit; fie beftehen in der Belaftung durch Menfchen, ungünftigenfalls durch Menfchengedränge in öffentlichen Sälen, Theatern, Concert- und Ausftellungsfälen, Gerichtsräumen, Schulzimmern etc., in der Belaftung durch Waaren in Speichern, durch Bücher in Bibliotheken u. dergl. mehr. Dabei ift für die Berechnung auf die Lage der Nutzlaft Rückficht zu nehmen und zu beachten, dafs nicht für alle Theile der tragenden Conftruction die Belaftung des ganzen Raumes die gefährlichfte ift, dafs

vielmehr theilweife Belaftung für viele Theile wefentlich ungünftiger ift. Demnach mufs bei der Berechnung für jeden Theil die gefährlichfte mögliche Belaftungsart aufgefucht und diefe der Berechnung zu Grunde gelegt werden. Weiter ift zu beachten, dafs die Belaftung mit Erfchütterungen, felbft mit Stöfsen verbunden fein kann. Wenn eine grofse Verfammlung fich plötzlich erhebt oder niederfetzt, wenn beim Beginne der Schule die Säle fich fchnell füllen, wenn am Schluffe einer Vorftellung der Saal rafch entleert wird, wenn ein Tanzfaal beftimmungsgemäfs benutzt wird; fo treten Erfchütterungen und Stöfse auf, welche den Einflufs der Laft wefentlich vergröfsern können und auf welche zweckmäfsig Rückficht genommen wird. Es ift üblich, die ftofsweife wirkenden Belaftungen mit einem Coefficienten, welcher gröfser als 1 ift, multiplicirt in die Berechnung einzuführen. Für Hochbauten empfiehlt es fich, diefen Coefficienten mit $1{,}2$ bis $1{,}5$ anzunehmen.

Bezüglich der Nutzlaften können bei den Berechnungen folgende Annahmen zu Grunde gelegt werden: 27. Zahlenangaben.

Nutzlaft für 1 qm Grundfläche

in Wohnräumen	150	in Haferfpeichern und Fruchtböden[9]	480 bis 500
» Tanzfälen	250	» Waarenfpeichern[10]	760
» Heufpeichern[9]	500	durch Menfchengedränge	400
	Kilogr.		Kilogr.

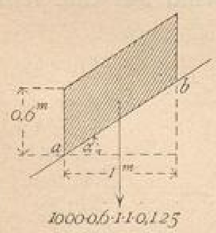
In den Speichern wird je nach der Waare, welcher der Speicher dienen foll, die gröfste Belaftung verfchieden fein, und defshalb ift zuvor über die Bedingungen, unter welchen die Waare gelagert wird (Höhe, Breite, Gewicht etc.), Erkundigung einzuziehen.

Für Bibliotheken kann das fpecififche Gewicht der Bücher im Mittel zu $0{,}6$ angenommen werden; weiter kann der Rauminhalt der Büchergerüfte als nur zur Hälfte gefüllt berechnet werden, fo dafs 1 cbm Rauminhalt der Büchergerüfte 300 kg fchwer gefetzt werden kann. Auf eine ftärkere Beftellung mit Büchern ift in deutfchen Bibliotheken nicht zu zählen[11]).

3) Schneelaft.

Die Schneelaft kommt nur bei den Dächern in Frage. Als gröfste Schneehöhe, welche ungünftigftenfalls in unferem Klima fällt, ohne dafs mittlerweile eine Befeitigung des gefallenen Schnees möglich ift, kann man etwa $0{,}6^{\mathrm{m}}$ annehmen; das fpecififche Gewicht des Schnees beträgt etwa $0{,}125$; mithin ift das gröfste Gewicht der Schneelaft für 1 qm der wagrechten Projection (Fig. 19) $0{,}125 \cdot 0{,}6 \cdot 1000 = 75^{\mathrm{kg}}$. Diefe Zahl ift innerhalb gewiffer Grenzen von der Dachneigung unabhängig. Handelt es fich dagegen um die gröfste Schneebelaftung für 1 qm der fchrägen Dachfläche, fo kann diefelbe wie folgt ermittelt werden. 28. Schneelaft.

Fig. 19.



Die Laft von 75 kg kommt auf $\overline{ab}$ Quadrat-Meter der Dachfläche; da $\overline{ab} = \frac{1}{\cos \alpha}$ ift, fo kommt auf 1 qm der fchrägen Dachfläche eine Schneelaft

$$p_s = \frac{75}{\overline{ab}} = 75 \cos \alpha .$$

---

9) Siehe: Frangenheim. Der Hauptbahnhof der Kölnifchen Strafsenbahn-Gefellfchaft zu Köln. Deutfche Bauz. 1887, S. 421.

10) Für den Seine-Speicher zu Paris wurden die Nutzlaften wie folgt berechnet: im I. Obergefchofs mit 1500 kg, im II. Obergefchofs mit 1250 kg, im III. bis V. Obergefchofs mit je 1000 kg und im VI. Obergefchofs mit 800 kg für 1 qm Lagerung von Mehl und Getreide. (Siehe: Centralbl. d. Bauverw. 1884, S. 509.)

11) Nach: Tiedemann, v. Die Univerfitäts-Bibliothek in Halle a. S. Zeitfchr. f. Bauw. 1885, S. 338.

Für die verſchiedenen Verhältniſſe der Firſthöhe h zur Stützweite L ergeben ſich demnach folgende

Gröſste Belaſtungen p_s durch Schneedruck
für 1 qm ſchräger Dachfläche:

Für $\frac{h}{L}$ =	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	
α =	45°	33°41′	26°40′	21°50′	18°25′	16°	14°	12°30′	11°20′	
p_s =	(53)	62	67	70	71	72	73	73	73	Kilogr.

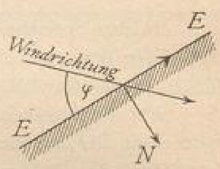
Für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche beträgt die ungünſtigſte Schneebelaſtung 75 kg.

Wenn die Dachneigung ſo ſteil iſt, daſs $\frac{h}{L} \gtrless \frac{1}{2{,}8}$ iſt, ſo bleibt der Schnee nicht mehr liegen, gleitet vielmehr ab; für derartige Dachneigungen braucht man alſo auf Schneelaſt gar keine Rückſicht zu nehmen. Deſshalb iſt in der Tabelle der Werth von p_s, welcher ſich für $\frac{h}{L} = \frac{1}{2}$ ergeben hat, eingeklammert.

4) Winddruck.

29. Winddruck. Der Winddruck iſt von hervorragender Bedeutung ſowohl für die Dächer, wie für hohe Mauern, Schornſteine etc. In der Technik iſt vor Allem wichtig, zu wiſſen, welchen Druck der Wind auf eine Ebene EE (Fig. 20) ausübt, die ſeinen Strom unter einem ſpitzen Winkel φ ſchneidet.

Fig. 20.



Dieſer Druck kann nur ſenkrecht zu der Ebene gerichtet ſein; denn der Druck zwiſchen zwei ſich berührenden Körpern kann höchſtens um einen Winkel von der Senkrechten zur Berührungsfläche abweichen, welcher gleich iſt dem Reibungswinkel. Zwiſchen der Dachfläche und der ſie umſpielenden Luft findet keine Reibung ſtatt, der Reibungswinkel iſt hier alſo gleich Null; mithin iſt der Druck zwiſchen der Dachfläche und der Luft ſtets ſenkrecht zur Dachfläche gerichtet.

Bis vor Kurzem wurde allgemein angenommen, der ſenkrechte Druck N auf die Ebene EE ſei der zweiten Potenz von $\sin\varphi$ proportional; neuere theoretiſche Unterſuchungen und praktiſche Verſuche haben jedoch nachgewieſen, daſs man der Wirklichkeit weſentlich näher kommt, wenn man einführt

$$N = P \sin\varphi, \quad \text{1.}$$

in welcher Gleichung P die Gröſse des Druckes iſt, welche der Wind auf eine ſenkrecht getroffene Fläche ausübt. Man kann ſetzen

$$P = \frac{v^2 F \gamma}{g}, \quad \text{2.}$$

mithin

$$N = \frac{v^2 F \gamma}{g} \sin\varphi \quad \text{3.}$$

In dieſen Gleichungen bedeutet: F den Flächeninhalt der vom Winde getroffenen Fläche, v die Geſchwindigkeit des Windes (in Met. für die Secunde), γ das Gewicht von 1 cbm Luft (in Kilogr.) und g die Beſchleunigung des freien Falles $= 9{,}81$ m.

Für 15 Grad C. und 760 mm Barometerſtand iſt $\frac{\gamma}{g} = 0{,}12458$, alſo rund

$$P = 0{,}125\, F v^2,$$

demnach der Winddruck für 1 qm ſenkrecht getroffener Fläche

$$p = 0{,}125\, v^2.$$

Nimmt man als gröfste Windgefchwindigkeit $v = 30^m$ an, fo wird rund

$$\left.\begin{array}{ll} & p = 120 \text{ Kilogr.} \\ \text{und} & n = p \sin\varphi = 120 \sin\varphi \text{ Kilogr.} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6.$$

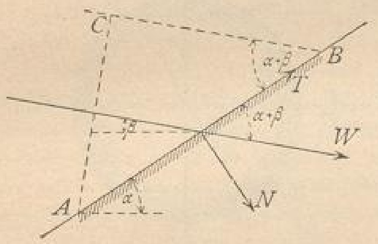
Es ift im Hochbau üblich, als gröfsten Winddruck $p = 120^{kg}$ für 1^{qm} einzuführen; im Brückenbau rechnet man mit einem Gröfstwerth von p, welcher 250 bis 280^{kg} für 1^{qm} erreicht. Wenn auch bei den gewöhnlichen Dach-Conftructionen, befonders an gefchützten Orten, der Werth 120^{kg} nicht zu klein ift, fo ift doch bei Berechnung von hohen Schornfteinen und Thurmdächern, Gasbehältern u. dergl. zu überlegen, ob nicht die Vorficht gebietet, einen gröfseren Werth als 120^{kg} für 1^{qm} der Rechnung zu Grunde zu legen. Alljährlich fällt eine nicht geringe Zahl von Thürmen und Schornfteinen den Stürmen zum Opfer. An freien Stellen und bei den genannten hohen Bauten follte man bis $p = 200^{kg}$ für 1^{qm} gehen. Für die nachfolgenden Unterfuchungen ift

$$p = 120^{kg} \text{ für } 1^{qm}$$

angenommen.

α) Winddruck auf Dachflächen. Die Windrichtung fchliefst nach den gemachten Beobachtungen einen Winkel von nahezu 10 Grad mit der wagrechten Ebene ein [12]). Diefer Winkel möge β, der Winkel der Dachfläche gegen die Wagrechte α genannt werden; dann ift nach Fig. 21 der Winkel der Windrichtung mit der Dachfläche $\varphi = (\alpha + \beta)$ und demnach der auf 1^{qm} fchräger Dachfläche entfallende fenkrechte Winddruck 30. Dachflächen.

Fig. 21.



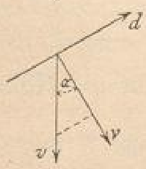
$$\nu = p \sin(\alpha + \beta) = 120 \sin(\alpha + 10^0) \quad . \quad 7.$$

Aus Gleichung 7 ergeben fich für die verfchiedenen Dachneigungen die in folgender Tabelle angeführten Werthe für ν.

Senkrechte Belaftungen ν durch Winddruck
für 1^{qm} fchräger Dachfläche.

Für $\frac{h}{L}$ =	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	
α =	45°	33°41′	26°40′	21°50′	18°25′	16°	14°	12°30′	11°20′	
abgerundet ν =	98	83	72	63	57	53	49	46	44	Kilogr.

Fig. 22.



Zerlegt man den Normaldruck ν in eine lothrechte und eine in die Richtung der Dachfläche fallende Seitenkraft (Fig. 22), fo wird die erftere für 1^{qm} der Dachfläche $v = \frac{\nu}{\cos\alpha}$ und für 1^{qm} wagrechte Projection der Dachfläche

$$\mathfrak{v} = \frac{\nu}{\cos^2\alpha} = \frac{120 \sin(\alpha + 10^0)}{\cos^2\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8.$$

Die Werthe für $\mathfrak{v}$ find in der nachftehenden Tabelle angegeben.

Für $\frac{h}{L}$ =	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	
α =	45°	33°41′	26°40′	21°50′	18°25′	16°	14°	12°30′	11°20′	
$\mathfrak{v}$ =	196	120	90	73	64	57	52	48	46	Kilogr.

[12]) Nach neueren Verfuchen von *Lilienthal* hat der Wind eine unter etwa 3 Grad von unten anfteigende Richtung; die Annahme wagrechter Richtung des Windes fcheint demnach als die einfachfte und mit den beiden Richtungen am beften vereinbare empfehlenswerth zu fein.

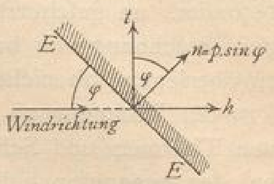
31. Mauerflächen.

β) Winddruck gegen Mauerflächen. Bei Auſſuchung des auf lothrechte oder ſchwach geneigte Mauern wirkenden Winddruckes wird zweckmäſsig der Winddruck als wagrechte Kraft eingeführt.

Der ſenkrechte Druck des Windes gegen eine Mauerfläche EE (Fig. 23), welche den Winkel φ mit der Windrichtung bildet, iſt für die Flächeneinheit

$$n = p \sin \varphi;$$

Fig. 23.



die Seitenkraft von n, welche in die Richtung des Windes fällt, iſt alsdann

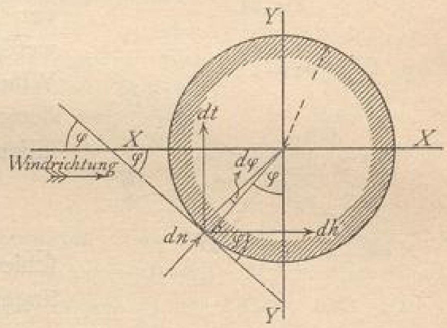
$$h = n \sin \varphi = p \sin^2 \varphi,$$

während die Seitenkraft, welche ſenkrecht zur Windrichtung wirkt, die Gröſse hat

$$t = p \sin \varphi \cos \varphi.$$

Die erſtere Seitenkraft iſt beſonders dann wichtig, wenn es ſich um Bautheile handelt, welche im Grundriſs nach einem Vielecke, einem Kreiſe, einer Ellipſe etc. geformt ſind, ſo bei Schornſteinen, Thürmen etc. Bei ebenen Mauern iſt der Berechnung ſtets als ungünſtigſte Windbelaſtung diejenige zu Grunde zu legen, bei welcher der Wind die Mauer ſenkrecht trifft.

Fig. 24.



a) Winddruck gegen eine ebene Mauer. Wenn die getroffene Fläche F Quadr.-Met. enthält, ſo iſt

$$N = pF = 120\ F \text{ Kilogr.}$$

Als Angriffspunkt der Mittelkraft kann der Schwerpunkt der getroffenen Fläche eingeführt werden.

b) Winddruck gegen einen Kreiscylinder. Es ſoll der Winddruck ermittelt werden, welcher auf die Längeneinheit der Höhe, alſo auf das ſteigende Meter wirkt. Gegen das Bogentheilchen ds, deſſen Tangente mit der X-Axe den Winkel φ (Fig. 24) bildet, wirkt der Normaldruck

$$dn = p \,.\, ds \,.\, \sin \varphi = p\, r\, d\varphi \,.\, \sin \varphi .$$

Die ſenkrecht zur Windrichtung wirkende Seitenkraft von dn wird durch eine gleich groſse, entgegengeſetzt wirkende aufgehoben, welche auf den ſymmetriſch zur XX-Axe liegenden Bogentheil wirkt; die andere Seitenkraft iſt

$$dh = dn \sin \varphi = pr \sin^2 \varphi\, d\varphi .$$

Die geſammte Kraft, welche ein Umſturz-Moment erzeugt, iſt für die Höheneinheit offenbar

$$H = \int_0^{\pi} pr \sin^2 \varphi\, d\varphi = 2\,pr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi\, d\varphi,$$

ſonach

$$H = pr\frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9.$$

Wird $p = 120^{\text{kg}}$ eingeführt, ſo iſt die Kraft H für das ſteigende Meter

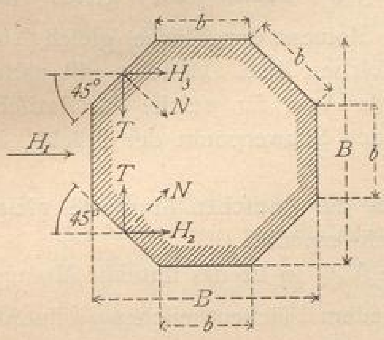
$$H = 188{,}4\ r = \sim 190\ r \text{ Kilogr.},$$

worin r in Metern einzuſetzen iſt.

Die Kraft H liegt in der lothrechten Ebene der Axe XX und greift in halber Höhe des Cylinders an.

c) Winddruck gegen ein regelmäfsiges achtfeitiges Prisma (Fig. 25). Die Breite des umfchriebenen Quadrates fei B, die Seitenlänge der achteckigen Grundfläche fei b; dann ift $b = 0,414\ B$. Der Winddruck gegen die fenkrecht getroffene Fläche ift für die Längeneinheit der Höhe

Fig. 25.



$$H_1 = p\, b,$$

derjenige gegen die unter 45 Grad getroffenen Seitenflächen je

$$N = p\, b \sin 45^0,$$

und die in die Windrichtung fallende Seitenkraft von N ift

$$H_2 = p\, b \sin^2 45^0 = \frac{p\, b}{2}.$$

Eben fo grofs ift H_3; mithin wird die gefammte Kraft, welche ein Umfturz-Moment erzeugt, für das fteigende Meter fein

$$H = H_1 + H_2 + H_3 = 2\, p\, b.$$

Die Mittelkraft aller H greift, wie oben, in halber Höhe des Prismas an und liegt in der durch die Axe des Prismas und H_1 beftimmten lothrechten Ebene.

Die bisher ganz allgemein und auch in vorftehenden Entwickelungen gemachte Annahme einer gleichmäfsigen Vertheilung des Winddruckes über eine getroffene ebene Fläche fcheint nach den neueren Verfuchen und theoretifchen Ermittelungen nicht ganz richtig zu fein; demnach ift auch nicht ohne Weiteres richtig, dafs die Mittelkraft durch den Schwerpunkt der getroffenen Fläche geht. Es fcheint, dafs der Druck an den Rändern am kleinften ift und nach der Mitte der Ebene hin zunimmt. Bis über die Gefetzmäfsigkeit genauere Angaben vorliegen, wird man jedoch für die Zwecke des Hochbaues unbedenklich die vorgeführten Annahmen den Berechnungen zu Grunde legen können.

b) Schwerpunkte und ftatifche Momente.

1) Schwerpunkte von ebenen Figuren.

Um den Schwerpunkt einer beliebigen ebenen Figur zu finden, genügt es, zwei Linien zu beftimmen, auf deren jeder der Schwerpunkt liegen mufs; alsdann ift der Schnittpunkt beider Linien der gefuchte Schwerpunkt. Werden in der Ebene, in welcher die betreffende Figur liegt, zwei Coordinaten-Axen OX und OY beliebig angenommen, fo erhält man die Abftände x_0 und y_0 des Schwerpunktes von den beiden Axen OY und OX aus den Gleichungen 32. Grund-gleichungen.

$$x_0 = \int \frac{x\, df}{F} \quad \text{und} \quad y_0 = \int \frac{y\, df}{F}, \quad \ldots\ldots \quad 10.$$

in denen F die ganze Querfchnittsfläche, df den Flächeninhalt eines beliebigen Theilchens mit den Coordinaten x und y bedeutet und die Summirung über die ganze Fläche auszudehnen ift. Die vorftehenden beiden Gleichungen können hier als aus der Mechanik bekannt vorausgefetzt werden. Man kann ftatt der unendlich kleinen Theilchen df Flächentheile f von endlicher Gröfse einführen, alfo die obigen Gleichungen fchreiben:

$$x_0 = \frac{\Sigma\,(f\,x)}{F} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{\Sigma\,(f\,y)}{F}, \quad \ldots\ldots \quad 11.$$

wenn x und y die Schwerpunkts-Coordinaten der Flächentheile f bedeuten.

Die Zähler der Gleichungen nennt man die ftatifchen Momente der Fläche, bezogen auf die *Y*- und *X*-Axe; denn denkt man in jedem Theile der Fläche den Inhalt deffelben als Kraft fenkrecht zur Ebene der Figur wirkend, fo find die ftatifchen Momente diefer Kräfte für die beiden Axen eben die Zählergröfsen obiger Gleichungen.

33. Folgerungen. Aus den Schwerpunktsgleichungen folgt:

α) x_0 wird gleich Null, wenn der Zähler $\Sigma\ (fx)$, bezw. $\int x\,df$ gleich Null wird, d. h. für eine Axe, für welche das ftatifche Moment der Fläche gleich Null wird. Der Schwerpunkt liegt demnach auf einer folchen Axe. Daffelbe gilt natürlich für y_0, fo dafs man allgemein fagen kann: Jede Axe, für welche das ftatifche Moment einer Fläche gleich Null ift, geht durch den Schwerpunkt der Fläche, ift alfo, wie man fagt, eine Schwerpunktsaxe.

Man fuche daher zwei Axen auf, für welche die ftatifchen Momente gleich Null find; alsdann ift ihr Schnittpunkt auch der Schwerpunkt.

β) Liegt eine Figur fymmetrifch zu einer Axe *XX*, fo ift das ftatifche Moment $\int y\,df$ der Figur für diefe Axe gleich Null; denn jedem Flächentheilchen f_1 im Abftande y_1 von der Axe entfpricht ein eben fo grofses Theilchen f_1 im Abftand $-y_1$ von der Axe; der Beitrag beider Theile zum ftatifchen Momente ift alfo $f_1 y_1 - f_1 y_1 = 0$. Das Gleiche gilt von je zwei anderen Theilen, fo dafs alfo das gefammte ftatifche Moment gleich Null wird. Daraus folgt: Jede Symmetrie-Axe einer Fläche ift eine Schwerpunktsaxe.

Hat fonach ein Querfchnitt eine Symmetrie-Axe, fo ift nur noch die Lage des Schwerpunktes auf derfelben zu beftimmen; hat ein Querfchnitt zwei Symmetrie-Axen, fo ift der Schnittpunkt beider auch der Schwerpunkt.

γ) Nach Gleichung 10 ift $F x_0 = \int x\,df$. Ift es möglich, die ganze Fläche in eine Anzahl Gruppen F_1, F_2, F_3 . . . zu zerlegen, von deren jeder der Schwerpunktsabftand (x_1, x_2, x_3 . . .) bekannt ift, fo mufs für diefe fein

$$F_1 x_1 = \left(\int x\,df_1\right), \quad F_2 x_2 = \left(\int x\,df_2\right), \quad F_3 x_3 = \left(\int x\,df_3\right), \quad . \quad 12.$$

in welchen Ausdrücken fich die Einzelintegrale auf die einzelnen Gruppen beziehen. Dann ift fonach

$$F x_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \ldots + F_n x_n ,$$

und es wird

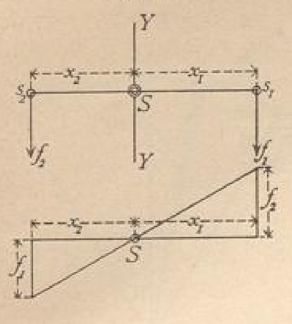
$$x_0 = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \ldots + F_n x_n}{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13.$$

Es ift fehr oft möglich, die gegebene Figur in Rechtecke, bezw. folche kleinere Figuren zu zerlegen, deren Schwerpunkte bekannt find und alsdann mit Hilfe obiger Formel die Lage des Gefammtfchwerpunktes zu finden.

δ) Der Schwerpunkt S zweier Flächen F_1 und F_2 (Fig. 26) mit den Schwerpunkten s_1 und s_2 liegt auf der Verbindungslinie $s_1 s_2$ beider Schwerpunkte. Nennt man nämlich den Abftand des Gefammtfchwerpunktes von diefer Verbindungslinie y_0, fo ift $F y_0 = F_1 y_1 + F_2 y_2$. Die Abftände y_1 und y_2 der beiden Schwerpunkte s_1 und s_2 von derfelben Axe find aber gleich Null, weil die Axe durch diefe Schwerpunkte gelegt ift. Demnach ift für diefe Axe $F y_0 = 0$, alfo auch $y_0 = 0$.

Hieraus folgt weiter, dafs, wenn die Schwerpunkte noch weiterer Flächen auf

Fig. 26.



dieſer Linie liegen, der Geſammtſchwerpunkt gleichfalls auf derſelben liegt; kann man alſo eine Fläche in eine Anzahl Streifen zerlegen, deren Schwerpunkte auf einer geraden Linie liegen, ſo befindet ſich auch der Schwerpunkt der geſammten Fläche auf dieſer Linie.

Die Lage des Schwerpunktes auf der Linie $s_1 s_2$ (Fig. 26) iſt leicht zu finden. Werden die Abſtände desſelben von s_1 und s_2 mit bezw. $+x_1$ und $-x_2$ bezeichnet, ſo muſs für eine ſenkrecht zu $s_1 s_2$ durch den Schwerpunkt S gelegte Axe YY ſein

$$0 = f_1 x_1 - f_2 x_2 \quad \text{oder} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{f_2}{f_1}.$$

Daraus ergiebt ſich die nachfolgende Conſtruction.

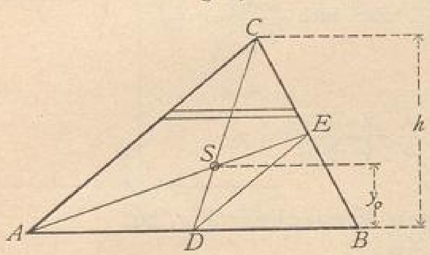
Man errichte in s_1 eine Senkrechte, welche f_2 Flächeneinheiten in beliebigem Maſsſtabe enthält, in s_2 eine Senkrechte, jedoch nach entgegengeſetzter Seite, welche f_1 Flächeneinheiten in demſelben Maſsſtabe enthält, und verbinde die Endpunkte; alsdann ſchneidet dieſe Verbindungslinie die Axe $s_1 s_2$ im Schwerpunkte S.

2) Schwerpunkte von einfachen Figuren.

α) Schwerpunkt eines Quadrates, Rechteckes, Parallelogrammes, Kreiſes und einer Ellipſe. Jede dieſer Figuren hat wenigſtens zwei Symmetrie-Axen, bezw. Halbirungslinien, in deren Schnittpunkt der Schwerpunkt ſich befindet. 34. Regelmäſsige Figuren.

Demnach liegt er beim Rechteck und Quadrat in der Mitte der Höhe und Breite, beim Parallelogramm im Schnittpunkte der Halbirungslinien der Seiten und beim Kreiſe und bei der Ellipſe im Mittelpunkte.

Fig. 27.



β) Schwerpunkt eines Dreieckes (Fig. 27). 35. Dreieck.

Zerlegt man die Dreiecksfläche durch Linien, welche einer Seite (AB in Fig. 27) parallel ſind, in eine Anzahl ſehr ſchmaler Streifen, ſo liegt der Schwerpunkt eines jeden Streifens in der Mitte ſeiner Breite, und nach der Folgerung unter δ in Art. 33 liegt der Geſammtſchwerpunkt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Streifen. Der Schwerpunkt liegt alſo auf der Linie CD, welche die Mitte D einer Dreieckſeite mit der gegenüber liegenden Ecke (C) verbindet. Aus demſelben Grunde liegt er auch auf der Linie AE, wenn $CE = EB$ iſt. Der Schwerpunkt S iſt der Schnittpunkt beider. Da aber DE und AC parallel ſind, ſo iſt

$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CA}} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \overline{DS} = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{\overline{CD}}{3}.$$

Daraus folgt, daſs der ſenkrechte Abſtand des Schwerpunktes S von der Grundlinie AB des Dreieckes ein Drittel der Höhe iſt, d. h. es iſt

$$y_0 = \frac{h}{3}.$$

Da jede Seite des Dreieckes als Grundlinie angeſehen werden kann, ſo liegt S auch auf einer Parallelen zu BC, deren ſenkrechter Abſtand ein Drittel desjenigen beträgt, in welchem A von BC liegt. Das Gleiche gilt von AC, bezw. B. Mittels dieſes Geſetzes können daher leicht zwei Linien gezeichnet werden, auf denen der Schwerpunkt liegt.

γ) Schwerpunkt eines Parallel-Trapezes (Fig. 28). 36. Parallel-Trapez.

Der Schwerpunkt des Trapezes in Fig. 28 liegt auf der Verbindungslinie der beiden Punkte E und F, welche die beiden parallelen Seiten halbiren. Ferner iſt

$$F y_0 = \int y \, df.$$

Nennt man die Breite eines Streifens z und feine Höhe dy, fo ift

$$df = z\,dy, \quad z = b - \frac{b-a}{h}\,y \quad \text{und} \quad F = (a+b)\,\frac{h}{2};$$

fonach

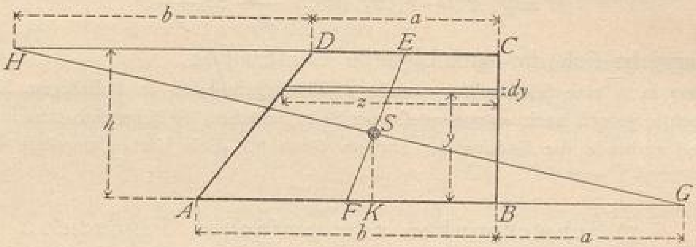
$$Fy_0 = \int_0^h \left(by - \frac{b-a}{h}\,y^2\right) dy = \frac{bh^2}{2} - \frac{(b-a)}{h}\,\frac{h^3}{3},$$

und

$$y_0 = \frac{h}{3}\,\frac{(2a+b)}{(a+b)}.$$

Daraus ergiebt fich die folgende Conftruction.

Fig. 28.



Man halbire die beiden parallelen Seiten in E und F, trage $BG = a$ und $DH = b$ nach rechts, bezw. links in den Verlängerungen der beiden parallelen Seiten auf und ziehe HG; alsdann ift der Schnittpunkt von HG mit EF der Schwerpunkt S. Denn es ift

$$\frac{\overline{SF}}{\overline{EF}} = \frac{a + \frac{b}{2}}{a + \frac{b}{2} + b + \frac{a}{2}} = \frac{2a+b}{3(a+b)}, \quad \text{aber auch} \quad \frac{SF}{EF} = \frac{\overline{SK}}{h}$$

mithin ift

$$\frac{\overline{SK}}{h} = \frac{2a+b}{3(a+b)} \quad \text{und} \quad \overline{SK} = \frac{h}{3}\,\frac{(2a+b)}{(a+b)} = y_0.$$

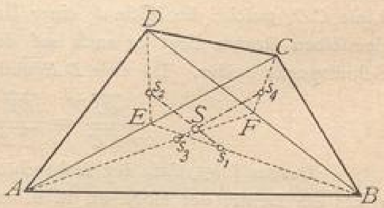
Der Punkt S ift alfo in der That der Schwerpunkt.

37. Unregelmäfsiges Viereck.

δ) Schwerpunkt eines unregelmäfsigen Viereckes (Fig. 29).

Um den Schwerpunkt des unregelmäfsigen Viereckes $ABCD$ zu beftimmen, ziehe man die Gerade AC und ermittele die Schwerpunkte s_1 und s_2 der beiden Dreiecke ACB und ACD, wie unter β gezeigt; alsdann liegt der Gefammtfchwerpunkt auf der Linie $s_1 s_2$. Nun ziehe man BD und ermittele die Schwerpunkte s_3 und s_4 der beiden Dreiecke ABD und BCD; alsdann liegt der Gefammtfchwerpunkt auch auf der Linie $s_3 s_4$. Demnach ift der Schnittpunkt der beiden Linien $s_1 s_2$ und $s_3 s_4$ der gefuchte Schwerpunkt.

Fig. 29.



In ganz ähnlicher Weife kann man weiter verfahren, wenn es fich um den Schwerpunkt eines Vieleckes handelt, welches in Dreiecke zerlegt werden kann. Doch wird in einem folchen Falle vielfach das unten vorzuführende graphifche Verfahren bequemer fein.

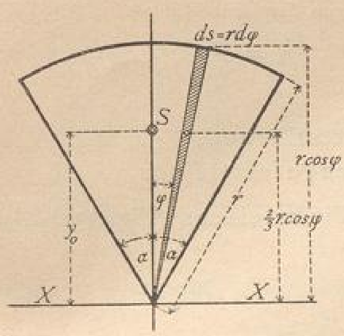
38. Kreisausfchnitt.

ε) Schwerpunkt eines Kreisausfchnittes (Fig. 30).

Der ganze zum Kreisausfchnitt gehörige Winkel fei 2α; die Halbirungslinie des Winkels ift eine Symmetrie-Axe, enthält alfo den Schwerpunkt; fomit ift nur noch der Abftand deffelben vom Kreismittelpunkte oder, was daffelbe befagt, von einer durch diefen fenkrecht zur Winkelhalbirenden gelegten Axe XX zu fuchen.

Für den zu einem Bogenftück $ds = r\,d\varphi$ gehörigen Theil des Ausfchnittes (Fig. 30), welcher als

Fig. 30.



Dreieck aufgefafft werden kann, ift der Schwerpunktsabftand von der Axe XX: $y = \frac{2}{3} r \cos \varphi$, der Flächeninhalt

$$df = ds \frac{r}{2} = \frac{r^2 d\varphi}{2};$$

mithin ift

$$y_0 = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} y\,df}{F} = \frac{2\int_0^\alpha y\,df}{F} = \frac{\frac{2}{3} r^3 \int_0^\alpha \cos \varphi\, d\varphi}{r^2 \alpha}$$

$$y_0 = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14.$$

Für den Halbkreis wird $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\sin \alpha = 1$, fonach

$$y_0 = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}425\, r.$$

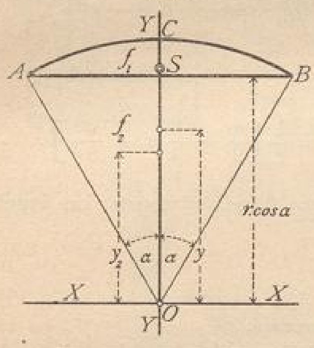
Für den Viertelkreis ift $\alpha = \frac{\pi}{4}$, daher $y_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r = 0{,}6\, r$.

Für den Sechftelkreis ift $\alpha = \frac{\pi}{6}$, mithin $y_0 = \frac{2}{\pi} r = 0{,}637\, r$.

ζ) Schwerpunkt eines Kreisabfchnittes (Fig. 31).

39. Kreisabfchnitt.

Fig. 31.



Der Schwerpunkt des Kreisabfchnittes liegt zunächft wieder auf der Winkelhalbirenden; ferner ift aber nach der Folgerung δ in Art. 33 (S. 26), wenn F der Flächeninhalt des Kreisausfchnittes $ACBO$, y der Abftand des Schwerpunktes diefer Fläche von XX ift, wenn ferner f_1 und f_2 die Flächeninhalte des Kreisabfchnittes ACB, bezw. des Dreieckes ABO und y_1, bezw. y_2 die Schwerpunktsabftände diefer Flächen von XX find,

$$Fy = f_1 y_1 + f_2 y_2 \quad \text{oder} \quad y_1 = \frac{Fy - f_2 y_2}{f_1}.$$

Nun ift $F = r^2 \alpha$, $y = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ und $f_2 = r^2 \sin \alpha \cos \alpha$;

ferner

$$y_2 = \frac{2}{3} r \cos \alpha \quad \text{und} \quad f_1 = r^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha);$$

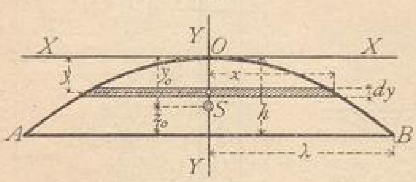
mithin wird

$$y_1 = \frac{\frac{2}{3} r \sin^3 \alpha}{\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15.$$

η) Schwerpunkt einer Parabelfläche (Fig. 32).

40. Parabelfläche.

Fig. 32.



Die Gleichung der Parabel AOB, bezogen auf O als Anfangspunkt der Coordinaten-Axen, ift

$$\frac{x^2}{\lambda^2} = \frac{y}{h}.$$

Der Schwerpunkt der Fläche AOB liegt zunächft auf der Symmetrie-Axe YY; der Abftand deffelben von XX ift

$$y_0 = \frac{\int y\,df}{F} = \frac{\int y\,df}{\int df}.$$

Es ift $df = 2x\,dy$, $y = \frac{h x^2}{\lambda^2}$ und $dy = \frac{2xh}{\lambda^2} dx$, alfo $df = \frac{4x^2 h}{\lambda^2} dx$, fomit

$$y_0 = \frac{\frac{4h^2}{\lambda^4} \int_0^\lambda x^4 dx}{\frac{4h}{\lambda^2} \int_0^\lambda x^2 dx} = \frac{h}{\lambda^2} \frac{3}{5} \lambda^2 = \frac{3}{5} h.$$

Der Schwerpunkt liegt alfo vom Scheitel O um

$$y_0 = \frac{3}{5} h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16.$$

entfernt.

von der Linie AB um

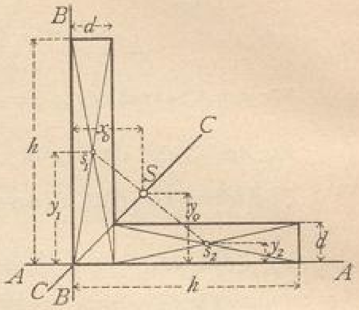
$$z_0 = \frac{2}{5} h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17.$$

3) Schwerpunkte von Querfchnittsflächen, die aus einfachen Figuren zufammengefetzt find.

41. Gleichfchenkeliges Winkeleifen.

α) Schwerpunkt des gleichfchenkeligen Winkeleifens (Fig. 33). Auf die Ausrundung im Winkel und die Abrundung der Ecken foll keine Rückficht genommen werden; diefelbe kann fowohl bei diefer, wie bei den folgenden Querfchnittsformen meiftens unbeachtet gelaffen werden.

Fig. 33.



Der Abftand des Schwerpunktes S von AA, bezw. BB ift

$$y_0 = x_0 = \frac{\Sigma (f y)}{F} = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Hierin ift f_1 der Flächeninhalt des lothrecht, f_2 derjenige des wagrecht gezeichneten Schenkels, bei letzterem nach Abzug des Flächentheiles, der mit dem lothrechten Schenkel zufammenfällt; y_1 und y_2 find die Abftände der Schwerpunkte von AA.

Eine angenäherte, faft ftets genügend genaue Formel wird folgendermafsen gefunden[13]. Es ift

$$y_0 = \frac{\frac{d h \cdot h}{2} + (h-d)\, d \frac{d}{2}}{2 d h - d^2} = \frac{h^2 + (h-d)\, d}{2\,(2 h - d)} = \frac{h^2 + h d - d^2}{2\,(2 h - d)} = \frac{1}{2}\left[\frac{h}{2} + \frac{3}{4} d - \frac{d^2}{8 h}\right].$$

Innerhalb der für $\frac{d}{h}$ vorkommenden Grenzen liegt $\frac{d^2}{2 \cdot 8 h}$ zwifchen $0{,}0125$ und $0{,}00625$, hat fonach etwa den Mittelwerth $0{,}009$. Wird diefer eingeführt, fo erhält man

$$y_0 = x_0 = \frac{h}{4} + 0{,}366\, d.$$

Sehr leicht kann der Schwerpunkt durch Conftruction gefunden werden.

Man zerlege den Querfchnitt in zwei Rechtecke, ermittele ihre Schwerpunkte s_1 und s_2, die nach Art. 33 (unter δ) die Schnittpunkte der Diagonalen find; dann liegt der Gefammtfchwerpunkt auf der Linie $s_1 s_2$; da er auch auf der Symmetrie-Axe CC liegt, fo ift der Schnittpunkt S der genannten beiden Linien der gefuchte Schwerpunkt.

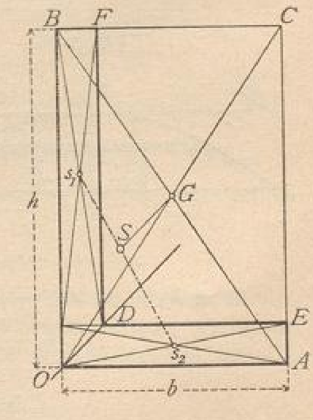
Beifpiel. Es fei die Schenkellänge $h = 10$ cm und die Dicke $d = 1$ cm; alsdann ift $f_1 = 10$ qcm, $f_2 = 9$ qcm, $y_1 = 5$ cm und $y_2 = 0{,}5$ cm; fonach

$$y_0 = \frac{10 \cdot 5 + 9 \cdot 0{,}5}{10 + 9} = 2{,}87 \text{ cm} = x_0.$$

Die angenäherte Formel giebt

$$y_0 = 2{,}5 + 0{,}366 = 2{,}866 \text{ cm} = x_0.$$

Fig. 34.



42. Ungleichfchenkeliges Winkeleifen.

β) Schwerpunkt des ungleichfchenkeligen Winkeleifens (Fig. 34).

Hier ift keine Symmetrie-Axe vorhanden; man mufs alfo x_0 und y_0 getrennt berechnen. Es ift

$$x_0 = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2}{f_1 + f_2} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Die Conftruction des Schwerpunktes ift in ähnlicher Weife möglich, wie unter α[13]. Man ermittelt zunächft s_1 und s_2, wie oben; alsdann liegt der Gefammtfchwerpunkt auf $s_1 s_2$. Der Querfchnitt kann

[13] Siehe: Zimmermann. Ueber Winkeleifen-Querfchnitte. Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 33.

Fig. 35.

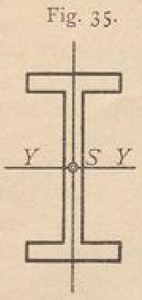


Fig. 36.

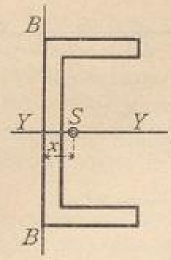
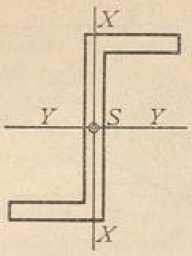
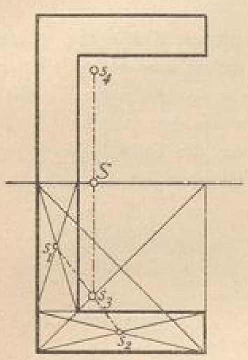


Fig. 37.



ferner als Differenz der beiden Rechtecke $OACB$ und $DECF$ betrachtet werden; der Schwerpunkt liegt also auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte dieser beiden Rechtecke; da diese Schwerpunkte jedoch sehr nahe zusammenfallen, so ergiebt sich die Richtung der Verbindungslinie nicht genügend genau. Nun muss aber die Verbindungslinie zur Linie OD parallel sein; man ziehe also durch den Schwerpunkt G des umschriebenen Rechteckes $OACB$ die Parallele zu OD; alsdann ist der Schnittpunkt dieser mit $s_1 s_2$ der gesuchte Schwerpunkt.

Fig. 38.



γ) Schwerpunkt des **I**-Eisens (Fig. 35). 43. I-Eisen.

Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt beider Symmetrie-Axen.

δ) Schwerpunkt des **[**-Eisens (Fig. 36 u. 38). 44. [-Eisen.

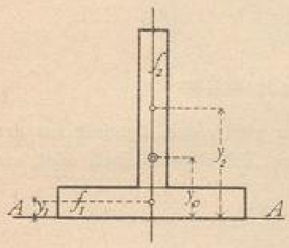
Der Schwerpunkt liegt auf der wagrechten Symmetrie-Axe im Abstande x_0 von BB; x_0 ist nach obiger Gleichung aufzufinden, durch Construction wie folgt. Die wagrechte Symmetrie-Axe theilt das [-Eisen in zwei Theile, deren jeder einen Winkeleisen-Querschnitt darstellt. Man ermittelt ihre Schwerpunkte s_3 und s_4; wie eben gezeigt wurde, ist der Gesammtschwerpunkt der Schnittpunkt der Linie $s_3 s_4$ mit der Symmetrie-Axe.

ε) Schwerpunkt des **Z**-Eisens (Fig. 37). 45. Z-Eisen.

Der Schwerpunkt fällt mit demjenigen des lothrechten Rechteckes, des sog. Steges, zusammen; denn sowohl für die Axe XX, wie für die Axe YY ist das statische Moment der beiden wagrechten Rechtecke zusammen gleich Null; dieselben sind also ohne Einfluss auf die Schwerpunktlage. Dabei ist vorausgesetzt, dass dieselben gleichen Flächeninhalt haben.

ζ) Schwerpunkt des **T**-Eisens (Fig. 39 u. 40). 46. T-Eisen.

Fig. 39.

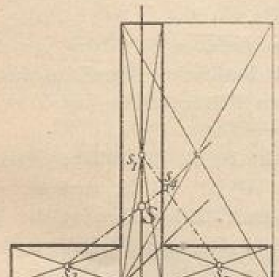


Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrie-Axe im Abstande y_0 von der Axe AA, und es ist

$$y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Durch Construction ist derselbe folgendermassen zu finden. Man zerlege den Querschnitt in drei Rechtecke, ein lothrechtes und zwei wagrechte. Die Schwerpunkte seien s_1, s_2, s_3. Das lothrechte und das eine wagrechte Rechteck bilden zusammen einen Winkeleisenquerschnitt, dessen Schwerpunkt s_4, wie unter β angegeben, zu finden ist. Dann liegt der Gesammtschwerpunkt auf der Linie $s_3 s_4$, ferner auch auf der lothrechten Symmetrie-Axe, also auf dem Schnittpunkt S dieser beiden Linien.

Fig. 40.



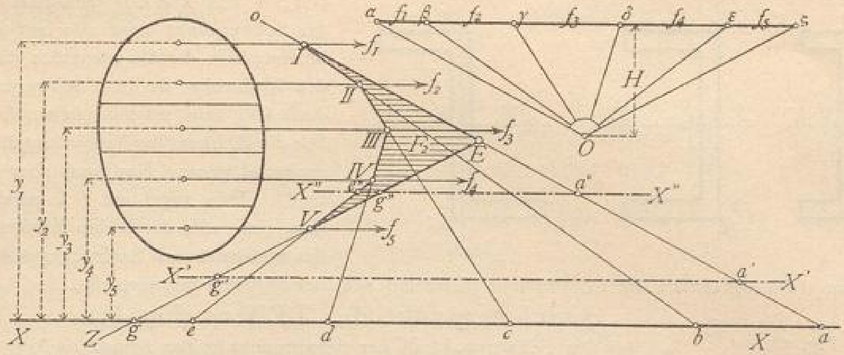
4) Graphische Ermittelung der statischen Momente und der Schwerpunkte von Flächen.

Wenn die Figur, deren statisches Moment, bezw. deren Schwerpunkt ermittelt werden soll, eine unregelmässige Form hat, so ist die graphische Behandlung der Aufgabe zu empfehlen. 47. Statisches Moment.

Man zerlege die ganze Figur in Streifen, welche derjenigen Axe parallel laufen, für welche das statische Moment gesucht wird (Fig. 41). Es seien die Flächeninhalte der einzelnen Streifen $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$, die Abstände der Schwerpunkte derselben von der Axe XX bezw. $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$; alsdann ist das statische Moment der ganzen Fläche nach Obigem

$$M = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \cdots + f_n y_n .$$

Fig. 41.



Man führe nun die einzelnen Flächengröfsen als parallel zur Axe XX wirkende Kräfte ein, welche in den Einzelschwerpunkten angreifen, füge fie zu einer Kraftlinie zufammen, indem man fie nach einem beliebigen, jedoch für alle gleichen Mafsftabe aufträgt. Es fei $\alpha\beta = f_1$, $\beta\gamma = f_2$, $\gamma\delta = f_3 \ldots$ Nun nehme man im Abftande H von diefer Kraftlinie einen Pol O an und conftruire das den Werthen f_1, f_2, $f_3 \ldots$ und diefem Pol entfprechende Seilpolygon $o\,I\,II\,III \ldots$ Verlängert man die Seilpolygon-Seiten, welche die erfte Kraft f_1 begrenzen, bis zum Schnitte mit der Axe XX, fo erhält man ein Dreieck Iab, und es ift

$$\triangle\, Iab \backsim \triangle\, O\alpha\beta,$$

da die Seiten diefer Dreiecke einander bezw. parallel find; in Folge deffen ift

$$\frac{\overline{ab}}{y_1} = \frac{\overline{\alpha\beta}}{H} = \frac{f_1}{H}, \text{ d. h. } H.\overline{ab} = f_1 y_1.$$

Der Abfchnitt $\overline{ab}$ der die Kraft f_1 begrenzenden Seilpolygon-Seiten auf der Axe XX multiplicirt mit dem Polabftand H giebt fonach das ftatifche Moment von f_1 für diefe Axe.

Eben fo ift

$$\triangle\, IIbc \backsim \triangle\, Ob\gamma;$$

alfo

$$\frac{\overline{bc}}{y_2} = \frac{\overline{\beta\gamma}}{H} = \frac{f_2}{H}, \quad H.\overline{bc} = f_2 y_2 \text{ und } H.\overline{cd} = f_3 y_3 \text{ u. f. w.}$$

Das ftatifche Moment der ganzen Fläche für die Axe XX ift daher gleich dem Product aus dem Stück ag, welches von den beiden äufserften Seilpolygon-Seiten auf der Axe XX abgefchnitten wird, und dem Polabftand H, oder es ift

$$H.\overline{ag} = \Sigma\,(f\,y).$$

Für die Anwendung ift zu beachten: Die Abfchnitte ab, bc, $cd \ldots$ auf der Axe XX liegen in den Dreiecken Iab, $IIbc$, bedeuten demnach Längen; die Werthe von H dagegen find auf diefelbe Einheit zu beziehen, wie die Gröfsen $f_1, f_2, f_3 \ldots$, bedeuten alfo Flächen. Daher ift H auf dem Flächenmafsftabe, $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd} \ldots$ hingegen find auf dem Längenmafsftabe zu meffen.

Beim Zerlegen der betreffenden Figur in parallele Streifen müffen diefelben fo fchmal gewählt werden, dafs man mit genügender Genauigkeit die einzelnen Streifen als Rechtecke, Parallelogramme, Paralleltrapeze, überhaupt als folche einfache Figuren anfehen kann, deren Flächeninhalte und Schwerpunktslagen leicht beftimmt werden können.

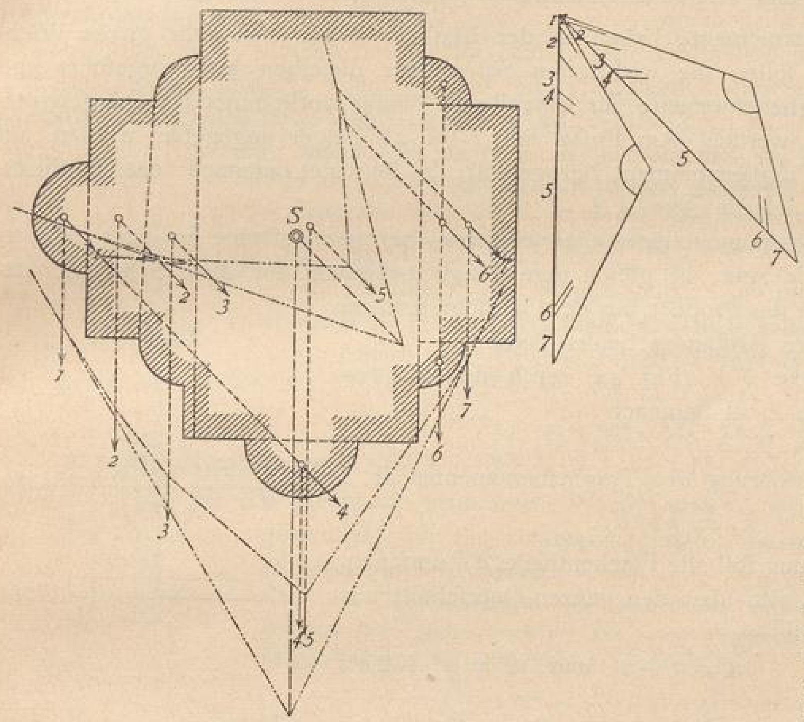
Handelt es fich um das ftatifche Moment der Fläche für die Axe $X'X'$, fo ift daffelbe offenbar gleich $H.\overline{a'g'}$. Rückt aber die Axe zwifchen die Kräfte f, etwa nach $X''X''$, fo ift zunächft das ftatifche Moment der oberhalb liegenden Flächentheile gleich $H.\overline{a''e''}$; im ftatifchen Moment der gefammten Fläche ift aber auch der Beitrag der an der anderen Seite der Axe gelegenen Theile enthalten, welche einen negativen Beitrag liefern, weil die y-Werthe für diefelben von der Axe $X''X''$ aus nach unten gerechnet werden müffen; die von der Axe nach oben gerechneten Werthe der y find ja pofitiv eingeführt. Demnach liefert hier f_5 ein ftatifches Moment gleich $-H.\overline{g''e''}$, und daher ift das ftatifche Moment der ganzen Fläche, bezogen auf die Axe $X''X''$, gleich $H.\overline{a''g''}$.

Demnach ift allgemein nachgewiefen: Das ftatifche Moment einer Fläche F, bezogen auf eine Axe XX, wird erhalten, wenn man das von den beiden äufserften Seilpolygon-Seiten auf diefer Axe abgeſchnittene Stück ($a\,g$, bezw. $a'\,g'$, $a''\,g''$) mit dem Polabſtand H multiplicirt. Dabei muſs das Stück $a\,g$ auf dem Längenmaſsſtabe, der Polabſtand H auf dem Flächenmaſsſtabe gemeſſen werden, nach welchem die Werthe von f aufgezeichnet ſind.

Rückt die Axe XX weiter nach oben, ſo wird das von den äuſserſten Seilpolygon-Seiten auf derſelben abgeſchnittene Stück immer kleiner; geht die Axe durch den Schnittpunkt E der äuſserſten Seilpolygon-Seiten, ſo iſt das abgeſchnittene Stück gleich Null; alſo wird auch das ſtatiſche Moment in Bezug auf dieſe Axe gleich Null; dieſelbe iſt alſo eine Schwerpunktsaxe. Hieraus folgt: Die durch den Schnittpunkt E der äuſserſten Seilpolygon-Seiten parallel zu XX gelegte Axe enthält den Schwerpunkt der Fläche. 48. Schwerpunkt.

Das ſoeben gefundene Ergebniſs folgt auch mit Nothwendigkeit aus nachſtehender Ueberlegung. Da die Flächen als Kräfte eingeführt ſind, ſo kann man annehmen, dieſe Kräfte ſeien die Gewichte der einzelnen Theile einer an allen Stellen gleich ſtarken Platte, welche dieſelbe Form hat, wie die gegebene Fläche, und in eben ſolche Theile getheilt iſt, wie dieſe. Um die wirklichen Gewichte zu erhalten, braucht man nur alle Werthe f mit demſelben Factor γ, dem Gewichte der Flächeneinheit, zu multipliciren. Da man aber die Platte aus beliebigem Material hergeſtellt und beliebig ſtark annehmen kann, ſo iſt γ ganz beliebig, kann alſo auch gleich 1 geſetzt werden; die Werthe f können demnach auch als die Gewichte ſelbſt angeſehen werden. Die Mittelkraft aller dieſer parallel gerichteten Kräfte geht demnach durch den Schwerpunkt der Fläche; ſie geht aber auch durch den Schnittpunkt der äuſserſten Seilpolygon-Seiten und iſt der Richtung der anderen Kräfte parallel. Die durch dieſen Schnittpunkt parallel zur Axe XX gezogene Linie iſt alſo die Mittelkraft nach Richtung und Lage und geht durch den Schwerpunkt. Das Gleiche gilt von jeder anderen beliebigen Lage, welche für die Richtung der Axe, alſo auch der Kräfte angenommen wird. Man kann demnach leicht noch eine zweite Axe finden, auf welcher der Schwerpunkt liegt; der Schnittpunkt beider Axen iſt dann der geſuchte Schwerpunkt.

Fig. 42.



Die gezeigte graphiſche Ermittelung des Schwerpunktes iſt beſonders bei unregelmäſsigen Querſchnitten empfehlenswerth; Fig. 42 zeigt dieſe Beſtimmung für den Querſchnitt eines Vierungspfeilers.

c) Trägheitsmomente und Centrifugalmomente.

Wird jedes Theilchen df einer Querſchnittsfläche F mit dem Product $u\,v$ ſeiner ſenkrecht genommenen Abſtände von zwei Axen AA und BB multiplicirt (Fig. 43) und die Summe aller dieſer Producte gezogen, ſo erhält man einen Ausdruck 49. Erläuterung.

$$\mathfrak{J}_{AB} = \int u\,v\,df,$$

welchen man das Centrifugalmoment des Querſchnittes F für die Axen AA und BB nennt. Fallen beide Axen zuſammen, ſo geht der Ausdruck in

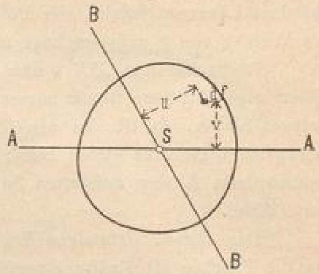
$$\mathfrak{J}_A = \int v^2\, df$$

über, wenn BB mit der urſprünglichen Lage von AA zuſammenfällt, bezw. in

$$\mathfrak{J}_B = \int u^2\, df,$$

wenn AA mit der urſprünglichen Lage von BB zuſammenfällt. Man nennt $\mathfrak{J}_A = \int v^2\, df$ das Trägheitsmoment der Querſchnittsfläche F für die Axe AA; eben ſo bezeichnet man $\mathfrak{J}_B = \int u^2\, df$ als das Trägheitsmoment des Querſchnittes für die Axe BB.

Fig. 43.

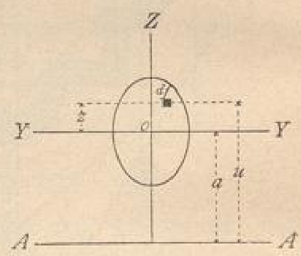


Die Trägheitsmomente haben in der Elaſticitätslehre eine ſehr groſse Wichtigkeit; deſshalb ſollen die wichtigſten Sätze über dieſelben hier vorgeführt und zugleich die Trägheitsmomente für eine Reihe häufig vorkommender Querſchnittsformen entwickelt werden. Am Fuſse von $\mathfrak{J}$ ſoll als Zeiger angegeben werden, auf welche Axe das Trägheitsmoment bezogen iſt; $\mathfrak{J}_A$ bedeutet demnach: das Trägheitsmoment bezogen auf die Axe AA.

50. Trägheitsmomente für zur Schwerpunktsaxe parallele Axen.

Das Trägheitsmoment eines Querſchnittes, bezogen auf eine zu einer Schwerpunktsaxe parallele Axe, iſt gleich dem Trägheitsmoment für dieſe Schwerpunktsaxe, vermehrt um das Product aus der Querſchnittsfläche in das Quadrat des Abſtandes beider Axen.

Fig. 44.



Geht die Axe YY (Fig. 44) durch den Schwerpunkt der Fläche, ſo iſt demnach

$$\mathfrak{J}_A = \mathfrak{J}_Y + F a^2.$$

Nach der Erklärung des Trägheitsmomentes iſt

$$\mathfrak{J}_A = \int u^2\, df.$$

Die Summirung ſoll alle Flächentheile df umfaſſen; die Integration iſt alſo über den ganzen Querſchnitt auszudehnen. Nun iſt

$$u = a + z \quad \text{und} \quad u^2 = a^2 + 2az + z^2,$$

alſo

$$\mathfrak{J}_A = \int u^2\, df = a^2 \int df + 2a \int z\, df + \int z^2\, df.$$

Es iſt jedoch $\int df = F$ und $\int z^2\, df = \mathfrak{J}_Y$, ferner nach der Lehre vom Schwerpunkt $\int z\, df = 0$, weil YY eine Schwerpunktsaxe iſt; mithin in der That

$$\mathfrak{J}_A = F a^2 + \mathfrak{J}_Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18.$$

Im Folgenden ſollen für einige häufig vorkommende Querſchnittsformen die Trägheitsmomente rechneriſch ermittelt werden.

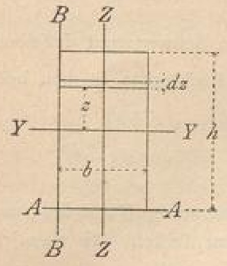
51. Trägheitsmomente für rechteckige Querſchnitte.

α) Trägheitsmoment für den rechteckigen Querſchnitt (Fig. 45).

Für dieſen iſt, bezogen auf die Schwerpunktsaxe YY,

$$\mathfrak{J}_Y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2\, df.$$

Fig. 45.



Da für alle Theile eines zu YY parallelen Streifens z dieselbe Gröfse hat, fo kann man $df = b\,dz$ fetzen, und es wird

$$\mathfrak{J}_Y = b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2\,dz = \left[\frac{b\,z^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3}\left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right] = \frac{b\,h^3}{12} \quad \ldots \quad 19.$$

Das Trägheitsmoment für eine Axe AA, welche mit einer Seite des Rechteckes zufammenfällt, ift nach Gleichung 18

$$\mathfrak{J}_A = \frac{b\,h^3}{12} + b\,h\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{b\,h^3}{12} + \frac{b\,h^3}{4} = \frac{b\,h^3}{3}.$$

Für eine zu YY normal ftehende Schwerpunktsaxe ZZ ift nach Obigem

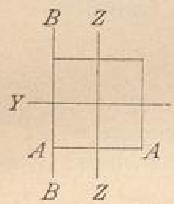
$$\mathfrak{J}_Z = \frac{h\,b^3}{12},$$

und für die Axe BB ift

$$\mathfrak{J}_B = \frac{h\,b^3}{3}.$$

Man kann dies in Worten folgendermafsen ausdrücken: Das Trägheitsmoment eines Rechteckes für eine zu einer der Seiten parallele Schwerpunktsaxe ift gleich dem Producte: Breite mal dritte Potenz der Höhe, dividirt durch zwölf; für eine mit einer Seite des Rechteckes zufammenfallende Axe ift das Trägheitsmoment dagegen gleich dem Producte: Breite mal dritte Potenz der Höhe, dividirt durch drei. Als Breite gilt die Abmeffung des Rechteckes in der Richtung der betreffenden Axe, als Höhe die zu erfterer fenkrechte Abmeffung.

Fig. 46.



Mit Zuhilfenahme diefes Ergebniffes kann man für eine grofse Zahl von Querfchnitten der Praxis die Trägheitsmomente leicht finden.

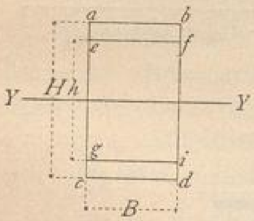
Das Quadrat ift ein Rechteck mit gleich langen Seiten; ift feine Seitenlänge $b = h = d$, fo wird (Fig. 46)

$$\mathfrak{J}_Z = \mathfrak{J}_Y = \frac{d^4}{12} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_A = \mathfrak{J}_B = \frac{d^4}{3}.$$

β) Trägheitsmomente für aus Rechtecken zufammengefetzte Querfchnitte. Die für das Rechteck gefundenen Werthe von $\mathfrak{J}$ werden vielfach angewendet, um für zufammengefetzte Querfchnitte die Trägheitsmomente zu finden.

52.
Symmetrifche I- u. E-förmige Querfchnitte.

Fig. 47.



Das Trägheitsmoment des Querfchnittes in Fig. 47 ift gleich der Differenz des Trägheitsmomentes des ganzen Rechteckes $a\,b\,c\,d$ weniger dem Trägheitsmoment des Rechteckes $e\,f\,i\,g$, d. h. es ift

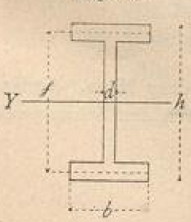
$$\mathfrak{J}_Y = \frac{1}{12}\,B\,H^3 - \frac{1}{12}\,B\,h^3 = \frac{B}{12}\,(H^3 - h^3).$$

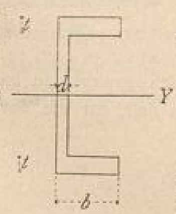
Für den fymmetrifchen I-förmigen (Fig. 48) und für den E-förmigen Querfchnitt (Fig. 49) ergiebt fich hiernach

$$\mathfrak{J}_Y = \frac{1}{12}\left\{b\left[h^3 - (h - 2\,t)^3\right] + d\,(h - 2\,t)^3\right\}.$$

Diefer für die Berechnung unbequeme Ausdruck kann wefentlich vereinfacht werden. Wird der Abftand der Schwerpunkte des oberen, bezw. unteren Rechteckes mit $\mathfrak{h}$ bezeichnet, alfo $h - t = \mathfrak{h}$ gefetzt und im letzten Gliede obigen Ausdruckes ftatt $h - 2\,t$ (nicht ganz genau, jedoch mit kleinem Fehler) $\mathfrak{h}$ eingeführt, fo ift

Fig. 48. Fig. 49.





$$\mathfrak{J}_Y = \frac{1}{2}\,b\,t\,(h^2 - 2\,h\,t + t^2) + \frac{1}{6}\,b\,t^3 + \frac{d\,\mathfrak{h}^3}{12}.$$

Wir fetzen $b\,t = f$; alsdann wird

$$\mathfrak{J}_Y = \frac{1}{2}\,f\,(h - t)^2 + \frac{f\,t^2}{6} + \frac{d\,\mathfrak{h}^3}{12}.$$

$\frac{f\,t^2}{6}$ ift gegen das erfte Glied fehr klein und kann ohne Bedenken vernachläffigt werden; alsdann ift der Ausdruck für das Trägheitsmoment:

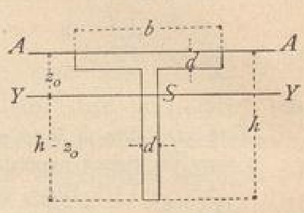
$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{2} f \mathfrak{h}^2 + \frac{d \mathfrak{h}^3}{12} = \frac{\mathfrak{h}^2}{2} \left(f + \frac{d \mathfrak{h}}{6}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 20.$$

Denkt man sich die ganze Querschnittsfläche f des oberen Rechteckes im Schwerpunkt desselben vereinigt, also im Abstande $\frac{\mathfrak{h}}{2}$ von der Axe YY, und eben so die des unteren Rechteckes in dem bez. Schwerpunkt, so ist das Trägheitsmoment eines solchen Querschnittes

$$i = 2f \left(\frac{\mathfrak{h}}{2}\right)^2 = \frac{f \mathfrak{h}^2}{2}.$$

Dies ist aber der erste Theil unseres obigen Ausdruckes 20 für $\mathcal{J}_Y$; der zweite Theil des Ausdruckes stellt demnach den Beitrag dar, welchen der Steg zum Trägheitsmoment leistet. Mit ziemlich genauer Annäherung erhält man demnach das Trägheitsmoment des symmetrischen I-förmigen Querschnittes, indem man die Querschnittsfläche des oberen und unteren Gurtes vermehrt um je $^1/_6$ der Querschnittsfläche des Steges (bis zu den Gurtschwerpunkten gerechnet), im Schwerpunkt des oberen und unteren Gurtes vereinigt denkt und dafür das Trägheitsmoment aufsucht.

Fig. 50.



53. T-förmige Querschnitte.

Wird beim T-förmigen Querschnitt (Fig. 50) der Abstand des Schwerpunktes von der durch die eine Kante gelegten Axe AA mit z_0 bezeichnet, so ist nach der Schwerpunktslehre

$$F z_0 = d\,(b - d)\,\frac{d}{2} + d h \,\frac{h}{2}, \text{ ferner } F = (b - d)\, d + d h.$$

Sonach ist

$$z_0 = \frac{(b - d)\, d^2 + d h^2}{2\left[(b - d)\, d + d h\right]} = \frac{(b - d)\, d + h^2}{2\,(b - d) + 2\,h},$$

und das Trägheitsmoment für die wagrechte Schwerpunktsaxe YY

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{3}\left[d\,(h - z_0)^3 + b\, z_0^3 - (b - d)\,(z_0 - d)^3\right].$$

Das Trägheitsmoment für die Axe AA ist

$$\mathcal{J}_A = \frac{1}{3}\left[d h^3 + (b - d)\, d^3\right].$$

54. Unsymmetrische I-förmige Querschnitte.

Für den unsymmetrischen I-förmigen Querschnitt (Fig. 51) ist, wenn man die früheren Bezeichnungen beibehält

$$z_0 = \frac{\frac{d h \,.\, h}{2} + (b - d)\, t \left(h - \frac{t}{2}\right) + \frac{(B - d)\, t^2}{2}}{d h + (b - d)\, t + (B - d)\, t} = \frac{d h^2 + (b - d)\, t\,(2 h - t) + (B - d)\, t^2}{2\left[d h + (b - d)\, t + (B - d)\, t\right]}$$

und

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{3}\left[b\,(h - z_0)^3 + B z_0^3 - (b - d)\, c^3 - (B - d)\,(z_0 - t)^3\right].$$

Fig. 51.

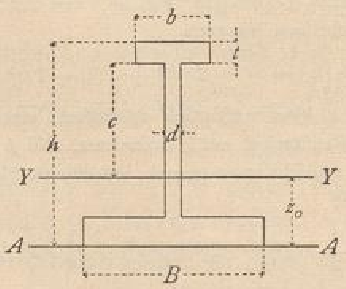
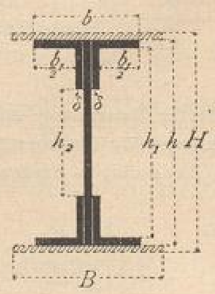


Fig. 52.



55. Blechträger-Querschnitte.

Bei den Querschnitten der Blechträger (Fig. 52) liegt der Schwerpunkt in halber Höhe. Alsdann ist, falls nur das lothrechte Blech und die 4 Winkeleisen vorhanden sind, für die durch den Schwerpunkt gelegte wagrechte Axe

$$\mathcal{J} = \frac{1}{12}\left(b h^3 - b_1 h_1^3 - 2\,\delta\, h_2^3\right).$$

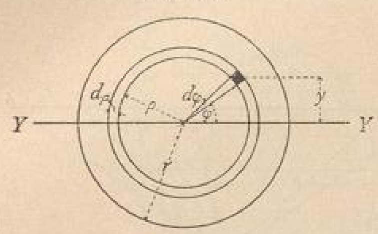
Falls noch Blechplatten vorhanden ſind, ermittelt man ihre Trägheitsmomente am beſten beſonders und zählt ſie zum Trägheitsmoment des Querſchnittes ohne Deckplatten. Das Trägheitsmoment dieſer Deckplatten (Fig. 52) iſt alsdann

$$\triangle \mathcal{J} = \frac{1}{12} B (H^3 - h^3).$$

γ) Trägheitsmoment für kreisförmige Querſchnitte (Fig. 53). 56. Kreisförmige Querſchnitte.

Der Halbmeſſer des kreisförmigen Querſchnittes ſei r, der Durchmeſſer d. Zuerſt ſoll das Trägheitsmoment der oberen Halbkreisfläche für die Axe YY beſtimmt werden. Man zerlege die Kreisfläche in ſchmale Ringe, deren Mittelpunkte mit demjenigen der gegebenen Fläche zuſammenfallen, und beſtimme zunächſt das Trägheitsmoment einer ſolchen Ringfläche. Der Halbmeſſer eines ſolchen Ringes ſei ρ, ſeine ſehr geringe Breite ſei $d\rho$. Der Flächeninhalt eines Theilchens df dieſer Ringfläche, welches zum Mittelpunktswinkel $d\varphi$ gehört, iſt $df = \rho \,.\, d\varphi \,.\, d\rho$, und ſein Trägheitsmoment bezogen auf die Axe YY

Fig. 53.



$$d(i) = y^2 \,.\, df = \rho^2 \,.\, \sin^2\varphi \,.\, df = \rho^3 d\rho \sin^2\varphi \, d\varphi \,.$$

Das Trägheitsmoment des halben Ringes wird erhalten, indem man für alle Theile df deſſelben $d(i)$ aufſucht, d. h. indem man zwiſchen den Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ integrirt, wobei natürlich ρ und $d\rho$ als Feſtwerthe (Conſtante) zu betrachten ſind, da ſie für alle Theilchen des Ringes gleiche Gröſse haben.

Man erhält

$$i = \rho^3 d\rho \int_0^\pi \sin^2\varphi \, d\varphi = \rho^3 d\rho \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2}\right]_0^\pi = \frac{\rho^3 d\rho \,.\, \pi}{2}.$$

Um aus dieſem Trägheitsmomente einer halben Ringfläche dasjenige der halben Kreisfläche zu erhalten, beachte man, daſs die letztere ſich aus lauter halben Ringflächen zuſammenſetzt; demnach iſt

$$\frac{\mathcal{J}}{2} = \Sigma(i) = \int_0^r \rho^3 d\rho \,.\, \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} r^4,$$

und das Trägheitsmoment der ganzen Kreisfläche für die Axe YY

$$\mathcal{J} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21.$$

Bei allen Angaben von Trägheitsmomenten iſt zu beachten: Die Maſseinheit der Trägheitsmomente iſt die Längeneinheit in der vierten Potenz (alſo entweder: Meter zur vierten, oder Centimeter zur vierten, oder Millimeter zur vierten Potenz etc.); denn jeder Theil des Trägheitsmomentes, alſo auch das Ganze, iſt das Product einer Fläche in das Quadrat einer Länge. Deſshalb iſt ſtets mit der ziffermäſsigen Gröſse auch die Maſseinheit des Trägheitsmomentes anzugeben. 57. Maſseinheit für die Trägheitsmomente.

Um ein Trägheitsmoment, welches in cm^4 angegeben iſt, in ein ſolches zu verwandeln, deſſen Maſseinheit mm^4 ſind, muſs man mit $10^4 = 10000$ multipliciren; umgekehrt iſt mit $10^4 = 10000$ zu dividiren, wenn ein in mm^4 gegebenes Trägheitsmoment in eines mit der Maſseinheit cm^4 verwandelt werden ſoll.

Für die Statik und die Aufgaben derſelben empfiehlt es ſich, die Trägheitsmomente in cm^4 anzugeben.

Wenn die Querſchnitte eine unregelmäſsige Form haben, ſo iſt es oft vortheilhaft, die Trägheitsmomente graphiſch zu ermitteln. Nennt man, wie oben, die einzelnen Flächentheile, in welche die ganze Querſchnittsfläche zerlegt wird, $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$, die Abſtände der Schwerpunkte derſelben von derjenigen Axe XX, für welche das Trägheitsmoment geſucht wird, bezw. $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$, ſo iſt 58. Graphiſche Ermittelung der Trägheitsmomente.

$$\mathcal{J} = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots i_n = \Sigma(fy^2) = f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + f_3 y_3^2 + \ldots,$$

$$\mathcal{J} = f_1 y_1 \cdot y_1 + f_2 y_2 \cdot y_2 + f_3 y_3 \cdot y_3 + \ldots$$

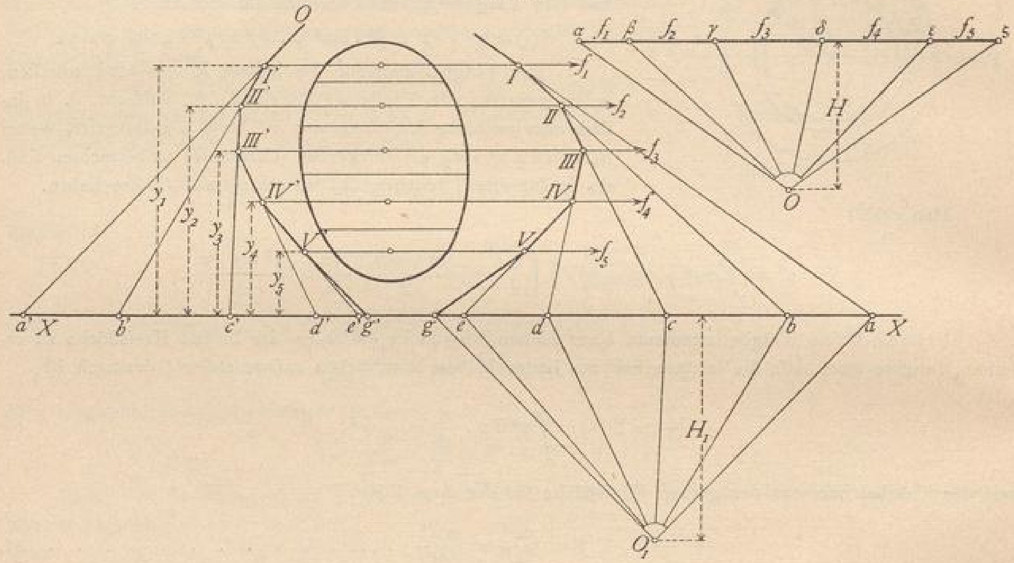
Nun find $f_1 y_1$, $f_2 y_2$, $f_3 y_3$ . . . die ftatifchen Momente der einzelnen Flächentheile für die Axe XX; fetzt man $f_1 y_1 = m_1$, $f_2 y_2 = m_2$, $f_3 y_3 = m_3$ . . ., fo wird

$$\mathfrak{J} = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots$$

59. *Culman*'fches Verfahren. Man braucht alfo nur mit den Werthen m_1, m_2, m_3 . . . genau fo zu verfahren, wie oben (in Art. 47, S. 31) mit den Werthen f_1, f_2, f_3 . . ., um die ftatifchen Momente von m_1, m_2, m_3 . . ., d. h. die Trägheitsmomente zu erhalten. Darauf beruht das nachfolgende von *Culman* angegebene Verfahren (Fig. 54).

Man zerlege den Querfchnitt in Streifen, die zu derjenigen Axe parallel find, für welche das Trägheitsmoment gefucht wird, und ermittele zunächft, wie oben (in Art. 47, S. 31) gezeigt ift, die ftatifchen Momente für die Axe XX. Die Stücke ab, bc, cd . . . find den ftatifchen Momenten proportional. Man

Fig. 54.



nehme nun einen neuen Pol O_1 an, ziehe die Strahlen $O_1 a$, $O_1 b$, $O_1 c$ . . . und conftruire für die Kräfte $m_1, m_2, m_3 \ldots$, die in denfelben Linien wirkend angenommen werden, wie die $f_1, f_2, f_3 \ldots$, das zugehörige Seilpolygon $O\,I'\,II'\,III' \ldots g' \ldots$ Werden die Seilpolygonfeiten über die Eckpunkte hinaus bis zu den Schnittpunkten mit der Axe XX verlängert, fo ift

$$\triangle\, I'\,a'\,b' \backsim \triangle\, O_1\,a\,b, \quad \text{alfo} \quad \frac{\overline{a'b'}}{y_1} = \frac{\overline{ab}}{H_1}.$$

Es ift aber (fiehe Art. 47, S. 31)

$$\overline{ab} = \frac{f_1 y_1}{H}, \quad \text{mithin} \quad \overline{a'b'} = \frac{f_1 y_1^2}{H H_1} = \frac{i_1}{H H_1} \quad \text{und} \quad i_1 = H H_1 \,.\, \overline{a'b'}.$$

Eben fo ergiebt fich

$$\triangle\, II'\,b'\,c' \backsim \triangle\, O_1\,b\,c, \quad \text{mithin} \quad \frac{\overline{b'c'}}{y_2} = \frac{\overline{bc}}{H_1} = \frac{f_2 y_2}{H H_1} \quad \text{und} \quad \overline{b_1'c'} = \frac{f_2 y_2^2}{H H_1} = \frac{i_2}{H H_1};$$

fonach

$$i_2 = H \,.\, H_1 \,.\, \overline{b'c'}; \quad \text{eben fo} \quad i_3 = H \,.\, H_1 \,.\, \overline{c'd'} \ldots$$

Man erhält demnach

$$\mathfrak{J} = \Sigma\,(i) = H H_1\,(a'b' + b'c' + c'd' + \ldots) = H H_1 \,.\, \overline{a'g'}.$$

Das Trägheitsmoment der Fläche F für eine Axe XX ift alfo gleich dem von den äufserften Seiten des Seilpolygons $O\,I'\,II'\,III'$ . . . auf der Axe abgefchnittenen Stücke $\overline{a'g'}$, multiplicirt mit dem Producte der beiden Polabftände H und H_1.

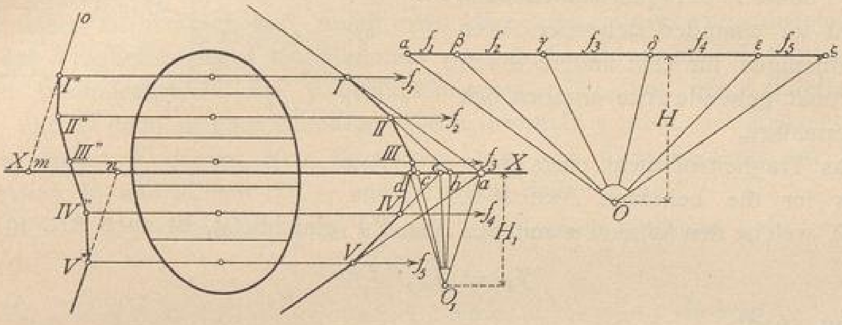
Genau eben fo, wie oben bei den ftatifchen Momenten (fiehe Art. 47, S. 31) nachgewiefen ift, ergiebt fich auch hier, dafs die Strecke $\overline{a'g'}$ und H_1 auf dem Längenmafsftabe, H auf demjenigen Flächenmafsftabe zu meffen ift, nach welchem $f_1, f_2, f_3 \ldots$ aufgetragen find; das Ergebnifs ift jedoch das gleiche, wenn $\overline{a'g'}$ auf dem Flächenmafsftabe, H und H_1 auf dem Längenmafsftabe gemeffen werden.

Ein Querfchnitt fei in natürlicher Gröfse aufgezeichnet, $H = 5$ cm und $H_1 = 5$ cm; ferner feien $f_1, f_2, f_3 \ldots$ in einem Mafsftabe aufgetragen, in welchem 1 cm = 10 qcm ift; alsdann wird, wenn $\overline{a'g'} = 4{,}6$ cm ift,

$$\mathcal{J} = 4{,}6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5 \text{ cm}^4.$$

Wenn die Axe XX eine Schwerpunktsaxe ift (Fig. 55), fo find zunächft die ftatifchen Momente genau wie oben gezeigt zu ermitteln; die ftatifchen Momente der oberhalb von XX liegenden Flächentheile haben entgegengefetzten Sinn, wie diejenigen der unterhalb von XX liegenden Flächen, weil die

Fig. 55.



Hebelsarme verfchiedene Vorzeichen haben. Der Sinn der einzelnen Momente ift ab, bc, cd, de, ea; Anfangspunkt a und Endpunkt a fallen zufammen. Wird jetzt der Pol O_1 angenommen, fo find die Strahlen O_1a, O_1b, O_1c, O_1d, O_1e, O_1a; der letzte Strahl fällt mit dem erften zufammen. Als Seilpolygon erhält man $O\,I''\,II'' \ldots V''$, und es ift

$$\mathcal{J}s = H \cdot H_1 \cdot \overline{mn}.$$

Ein anderes Verfahren hat *Mohr* angegeben. 60. *Mohr*'fches Verfahren.

Wenn die ftatifchen Momente nach dem in Art. 47 (S. 31) vorgeführten Verfahren conftruirt find (Fig. 54), fo ift der Flächeninhalt des Dreieckes $I\,a\,b$

$$\varphi_1 = \frac{\overline{ab} \cdot y_1}{2} = \frac{f_1 y_1}{H} \cdot \frac{y_1}{2} = \frac{f_1 y_1^2}{2H} = \frac{i_1}{2H}$$

und der Flächeninhalt des Dreieckes $II\,b\,c$

$$\varphi_2 = \frac{\overline{bc} \cdot y_2}{2} = \frac{f_2 y_2}{H} \cdot \frac{y_2}{2} = \frac{f_2 y_2^2}{2H} = \frac{i_2}{2H}.$$

Eben fo kann man für jeden Flächentheil f nachweifen, dafs fein Trägheitsmoment für eine Axe XX gleich ift dem Flächeninhalte des Dreieckes, welches von der Axe und den das betreffende Flächentheilchen begrenzenden Seilpolygonfeiten eingefchloffen ift, multiplicirt mit dem doppelten Polabftand. Es ift alfo

$$i_1 = 2H\varphi_1, \qquad i_2 = 2H\varphi_2, \qquad i_3 = 2H\varphi_3 \ldots$$

und

$$\mathcal{J} = \Sigma\,(i) = 2H\Sigma\,(\varphi) = 2HF_1,$$

wenn $F_1 = \Sigma\,(\varphi)$ ift.

Handelt es fich um das Trägheitsmoment für die Schwerpunktsaxe (Fig. 55), fo bleibt Alles giltig, und es wird

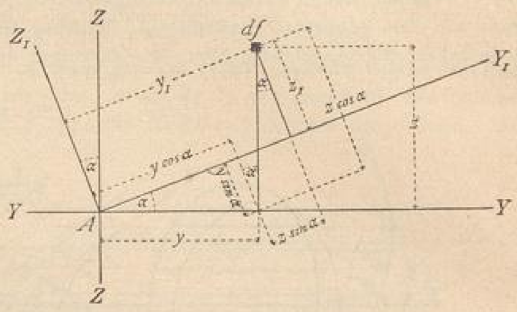
$$\mathcal{J}s = 2HF_2,$$

wenn F_2 den Flächeninhalt der Figur $I\,II\,III\,IV\,V\,a\,I$ bedeutet.

Handelt es fich um das Trägheitsmoment eines Querfchnittes für eine beliebige, nicht durch den Schwerpunkt gehende Axe, fo kann man daffelbe aus demjenigen für die parallele Schwerpunktsaxe nach Art. 50 (S. 34) ermitteln; diefes letztere ift aber im Vorftehenden nur für fehr einfache Querfchnittsformen und felbft bei diefen nur für einige wenige Lagen der Axen rechnerifch beftimmt. Für beliebig 61. Trägheitsmomente für verfchiedene Schwerpunktsaxen.

liegende Axen, alfo beifpielsweife beim Rechteckquerfchnitt für eine Axe, welche keiner Seite parallel ift, wird die Berechnung meift recht umftändlich. Dagegen ift die Ermittelung fehr bequem, wenn man das gefuchte Trägheitsmoment für eine beliebige Schwerpunktsaxe durch diejenigen für zwei andere Schwerpunktsaxen ausdrückt, welche einen beliebigen, zweckmäfsig einen rechten Winkel mit einander bilden.

Fig. 56.



Die Beziehungen zwifchen den Trägheitsmomenten zweier in einem beliebigen Punkte A der Querfchnittsebene fenkrecht zu einander ftehender Axen und demjenigen für eine andere durch diefen Punkt gehende Axe ergeben fich folgendermafsen.

Das Trägheitsmoment eines Querfchnittes für die beliebige Axe $A Y_1$ (Fig. 56), welche den Winkel α mit der Axe YY einfchliefst, ift nach Art. 49 (S. 33)

$$\mathfrak{J}_{Y_1} = \int z_1^2\, df.$$

Nach Fig. 56 ift

$$z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha,$$

folglich

$$\mathfrak{J}_{Y_1} = \int z^2 \cos^2 \alpha \,.\, df + \int y^2 \sin^2 \alpha \,.\, df - \int 2\, y\, z \sin \alpha \cos \alpha \,.\, df.$$

Die Integration ift über den ganzen Querfchnitt auszudehnen; bei derfelben ift α conftant; da nun

$$\int z^2\, df = \mathfrak{J}_Y, \quad \int y^2\, df = \mathfrak{J}_Z \quad \text{und} \quad \int y\, z \,.\, df = \mathfrak{J}_{YZ}$$

ift, fo folgt

$$\mathfrak{J}_{Y_1} = \mathfrak{J}_Y \cos^2 \alpha + \mathfrak{J}_Z \sin^2 \alpha - \mathfrak{J}_{YZ} \sin 2\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22.$$

Das Trägheitsmoment für die Axe $A Z_1$ wird erhalten, indem man an Stelle von α den Winkel einführt, welchen $A Z_1$ mit YY bildet, d. h. $90 + \alpha$. Dann ergiebt fich

$$\mathfrak{J}_{Z_1} = \mathfrak{J}_Z \cos^2 \alpha + \mathfrak{J}_Y \sin^2 \alpha + \mathfrak{J}_{YZ} \sin 2\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 23.$$

Die beiden Gleichungen 22 u. 23 geben die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Lage der Schweraxen an. Befonders wichtig ift die Lage der Axen, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum und ein Minimum wird. $\mathfrak{J}_{Y_1}$ wird ein Maximum für den Werth von α, für welchen

$$\frac{d\,\mathfrak{J}_{Y_1}}{d\,\alpha} = -\,2\,\mathfrak{J}_Y \cos \alpha \sin \alpha + 2\,\mathfrak{J}_Z \sin \alpha \cos \alpha - 2\,\mathfrak{J}_{YZ} \cos 2\,\alpha = 0,$$

d. h. für welchen $(\mathfrak{J}_Z - \mathfrak{J}_Y) \sin 2\,\alpha = 2\,\mathfrak{J}_{YZ} \cos 2\,\alpha$ wird. Es ift alfo

$$\operatorname{tg} 2\,\alpha_{max} = \frac{2\,\mathfrak{J}_{YZ}}{\mathfrak{J}_Z - \mathfrak{J}_Y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 24.$$

Diefer Gleichung genügen zwei Winkelgröfsen $2\,\alpha$, welche um 180 Grad verfchieden find, da $\operatorname{tg}(180 + 2\,\alpha) = \operatorname{tg} 2\,\alpha$ ift. Es giebt alfo zwei Axen, für welche ein Maximum, bezw. Minimum des Trägheitsmomentes ftattfindet, und diefe beiden Axen bilden mit der angenommenen Axe YY die Winkel α_{max}, bezw. $90 + \alpha_{max}$; diefe beiden Axen ftehen fonach fenkrecht zu einander. Ob Maximum oder Minimum für die eine oder andere Axe ſtattfindet, ergiebt die zweite Differentiation. Man findet leicht, daſs die zweiten Abgeleiteten nach α für zwei Winkel, welche um 90 Grad verſchieden ſind, entgegengeſetztes Vorzeichen haben; entſpricht demnach dem Winkel α das Maximum, ſo tritt für den Winkel $(90 + \alpha)$ das Minimum des Trägheitsmomentes ein.

Es folgt daraus der Satz: Für jeden Punkt in der Ebene des Querſchnittes iſt eine Axe vorhanden, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum, eine andere, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird. Beide Axen ſtehen zu einander ſenkrecht. 62. Hauptaxen.

Man nennt dieſe Axen die Hauptaxen. Diejenige, für welche das Trägheitsmoment ſeinen Gröſstwerth hat, nennt man die erſte Hauptaxe, diejenige, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird, heiſst die zweite Hauptaxe.

Die Veränderlichkeit des Centrifugalmomentes $\mathfrak{J}_{YZ}$ mit der Aenderung der Axen Y und Z kann in ganz ähnlicher Weiſe ermittelt werden, wie ſoeben für das Trägheitsmoment $\mathfrak{J}$ gezeigt iſt. Bezeichnet man das Centrifugalmoment für die beiden Axen Y_1 und Z_1 mit $\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1}$ und beachtet, daſs

$$z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha \quad \text{und} \quad y_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

iſt, ſo wird

$$\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = \int y_1 z_1 \, df = \int (y \cos \alpha + z \sin \alpha)(z \cos \alpha - y \sin \alpha) \, df,$$

$$\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int y z \, df + \frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\int z^2 \, df - \int y^2 \, df \right),$$

$$\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = \mathfrak{J}_{YZ} \cos 2\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} (\mathfrak{J}_Y - \mathfrak{J}_Z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 25.$$

$\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1}$ wird gleich Null für $(\mathfrak{J}_Y - \mathfrak{J}_Z) \sin 2\alpha = -2\,\mathfrak{J}_{YZ} \cos 2\alpha$, ſonach für

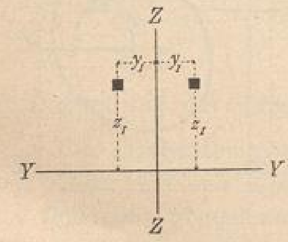
$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\,\mathfrak{J}_{YZ}}{\mathfrak{J}_Y - \mathfrak{J}_Z} = \frac{2\,\mathfrak{J}_{YZ}}{\mathfrak{J}_Z - \mathfrak{J}_Y}.$$

Dies iſt derſelbe Werth, für welchen nach Gleichung 24 Maximum, bezw. Minimum des Trägheitsmomentes ſtattfindet. Für die Hauptaxen iſt ſonach

$$\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = \int y_1 z_1 \, df = 0.$$

Für viele Querſchnitte iſt hierdurch ein bequemes Kennzeichen zur Beſtimmung der Hauptaxen gefunden. Man ſuche diejenigen Axen, für welche $\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = 0$ iſt; alsdann ſind die gefundenen Axen die Hauptaxen. Es genügt, eine Hauptaxe zu ſuchen, da nach Früherem die andere mit derſelben ſtets einen Winkel von 90 Grad einſchlieſst.

Fig. 57.



Bei ſämmtlichen zu einer oder mehreren Axen ſymmetriſch liegenden Querſchnitten ſind die Symmetrieaxen auch zugleich die Hauptaxen. Denn ſei etwa die Z-Axe eine Symmetrieaxe, ſo entſpricht jedem df mit den Coordinaten y_1, z_1 ein df mit den Coordinaten $-y_1$, z_1 (Fig. 57). Die Beiträge der beiden df zu $\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1}$ ſind alſo

$$df \cdot y_1 z_1 - df \cdot y_1 z_1 = 0.$$

Genau eben ſo iſt es mit ſämmtlichen übrigen Querſchnittstheilen; die Summe der Beiträge je zweier ſymmetriſch liegender Flächentheile iſt gleich Null, ſo daſs alſo auch die Geſammtſumme $\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = \int y_1 z_1 \, df = 0$ iſt.

Bei den in Fig. 58 bis 62 dargestellten Querschnitten sind die Hauptaxen angegeben. In den im vorhergehenden Halbbande dieses »Handbuches« mitgetheilten Tabellen über die »Deutschen Normal-Profile für Walzeisen« sind die Trägheitsmomente für solche Axen mit aufgenommen worden, welche beim Berechnen von Hochbau-Constructionen eine Rolle spielen.

Fig. 58.

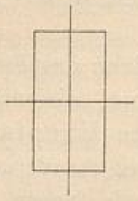


Fig. 59.

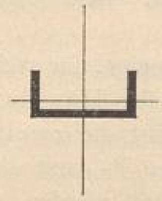


Fig. 60.

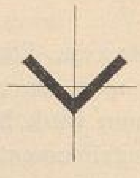


Fig. 61.

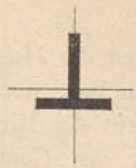
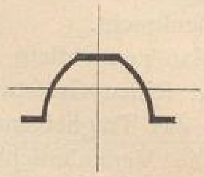


Fig. 62.



63.
Wahl der Hauptaxen als Axen der Y und Z.

Wählt man die Hauptaxen als Axen der Y und Z (Fig. 57), so ist für diese nach Obigem $\int y\,z\,df = \mathfrak{J}_{YZ} = 0$; mithin ist, wenn man das Trägheitsmoment in Bezug auf die eine Hauptaxe mit A, dasjenige in Bezug auf die andere mit B bezeichnet, in den Gleichungen 22, 23 u. 25 für $\mathfrak{J}_Y$ und $\mathfrak{J}_Z$ bezw. A und B, so wie für $\mathfrak{J}_{YZ} = 0$ einzusetzen. Man erhält für diese Lage der Hauptaxen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_{Y_1} &= A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha \\ \mathfrak{J}_{Z_1} &= A\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha \\ \mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} &= (A - B)\,\frac{\sin 2\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 26.$$

Sind A und B, d. h. die beiden Hauptträgheitsmomente einander gleich, so ist

$$\mathfrak{J}_{Y_1} = A\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = A,$$

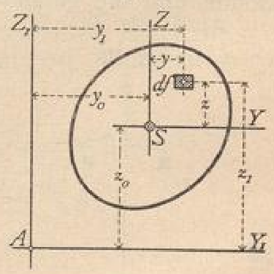
d. h. $\mathfrak{J}_{Y_1}$ ist alsdann von α unabhängig, also für jedes α gleich A.

Hieraus folgt: Sind die beiden Hauptträgheitsmomente gleich grofs, so sind alle Trägheitsmomente gleich grofs.

64.
Centrifugalmomente.

Bei vielen statischen Untersuchungen ist es wichtig, die Lage der Hauptaxen und die Gröfse der Werthe von A und B zu kennen. Für die Ermittelung dieser Werthe aber bedarf man nach vorstehenden Entwickelungen der Kenntnifs des Centrifugalmomentes $\mathfrak{J}_{YZ} = \int y\,z\,df$.

Fig. 63.



Legt man durch einen beliebigen Punkt A in der Ebene eines Querschnittes (Fig. 63) und durch den Schwerpunkt S desselben je zwei parallele Axen AY_1 und AZ_1, bezw. SY und SZ, bezeichnet man die Coordinaten des Schwerpunktes für die ersten beiden Axen mit z_0 und y_0, die Centrifugalmomente für die Axenpaare bezw. mit $\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1}$ und $\mathfrak{J}_{YZ}$, so ist

$$\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = \mathfrak{J}_{YZ} + F\,y_0\,z_0.$$

Denn es ist

$$\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = \int y_1\,z_1\,df, \quad y_1 = y + y_0 \quad \text{und} \quad z_1 = z + z_0\,; \quad \text{also}$$

$$\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = \int (y + y_0)\,(z + z_0)\,df = \int y\,z\,df + y_0\int z\,df + z_0\int y\,df + y_0\,z_0\int df.$$

Nun ift $\int y z \, df = \mathfrak{J}_{YZ}$, $\int df = F$, $\int z \, df = 0$ und $\int y \, df = 0$; die letzteren beiden Werthe ergeben fich, weil SY und SZ Schwerpunktsaxen find (vergl. Art. 33, S. 26, unter α). Es wird fomit

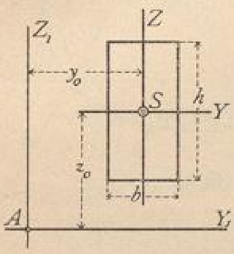
$$\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = \mathfrak{J}_{YZ} + F y_0 z_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 27.$$

Wenn die Schwerpunktsaxen Hauptaxen find, fo ift $\mathfrak{J}_{YZ} = 0$, demnach

$$\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = F y_0 z_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 28.$$

Diefe Formel ift fehr bequem. Soll beifpielsweife das Centrifugalmoment für die Axen $A Y_1$ und $A Z_1$ (Fig. 64) und den Rechtecksquerfchnitt ermittelt werden, deffen Seiten parallel zu den Axen find, fo lege man durch den Schwerpunkt zwei den erfteren bezw. parallele Axen SY und SZ; alsdann wird

Fig. 64.



$$\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = F y_0 z_0 .$$

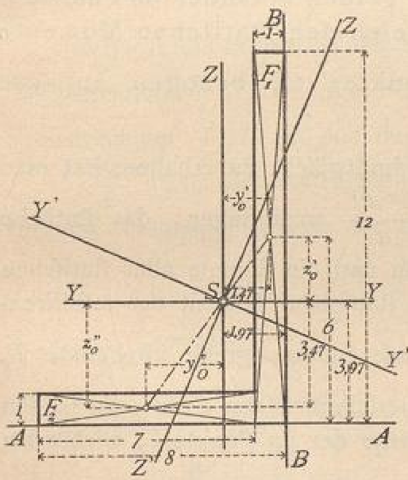
Fällt etwa A mit einer Ecke zufammen, fo wird

$$\mathfrak{J}_{Y_1 Z_1} = \frac{b^2 h^2}{4} .$$

Beifpiel. Es foll das Centrifugalmoment eines ungleichfchenkeligen Winkeleifens (Fig. 65) für zwei durch feinen Schwerpunkt gelegte Axen ermittelt werden, welche den Winkeleifenfchenkeln parallel find.

Zerlegt man den Querfchnitt in zwei Rechtecke, deren eines den ganzen lothrechten Schenkel enthält, deren anderes den wagrechten Schenkel nach Abzug des fchon beim erften mitberechneten Rechteckes in der Ecke bildet, und nennt man die Flächeninhalte F_1 und F_2, fo wie die Abftände der Einzelfchwerpunkte von den Axen bezw. y_0', z_0', y_0'', z_0'', fo ift

Fig. 65.



$$\mathfrak{J}_{YZ} = F_1 y_0' z_0' + F_2 y_0'' z_0''.$$

Die Länge des grofsen und kleinen Schenkels fei bezw. 12 und 8 cm, die Stärke beider Schenkel $1{,}0$ cm (Deutfches Normal-Profil Nr. 8/12) und der Abftand des Schwerpunktes von der äufseren Kante des langen, bezw. kurzen Schenkels $1{,}97$ cm, bezw. $3{,}97$ cm; alsdann ift

$$\mathfrak{J}_{YZ} = 12 \cdot 1 \cdot 1{,}47\,(6 - 3{,}97) + 7 \cdot 1 \cdot 3{,}47\,(4{,}5 - 1{,}97) = 97{,}26 \text{ cm}^4.$$

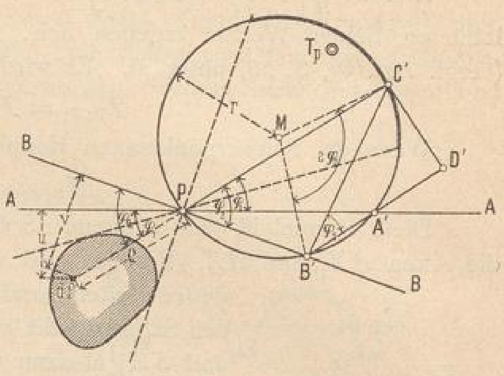
Die Einheit, in welcher die Centrifugalmomente erhalten werden, ift diefelbe, wie bei den Trägheitsmomenten, und es wird auf das hierüber in Art. 57 (S. 37) Gefagte verwiefen. Befondere Aufmerkfamkeit ift aber hier auf die Vorzeichen der Coordinaten y_0 und z_0 zu verwenden. In obigem Beifpiel find für das erfte Rechteck beide pofitiv, für das zweite Rechteck beide negativ einzuführen; das Product ift hier alfo für jedes der Theilrechtecke pofitiv.

d) Darftellung der Trägheits- und Centrifugalmomente mit Hilfe von Kreifen.

Ein Flächentheilchen df hat für die beiden einander im Punkte P fchneidenden Axen AA und BB das Centrifugalmoment $d\mathfrak{J}_{AB} = u v \,.\, df$, wenn u und v die fenkrecht gemeffenen Abftände des Theilchens df von den Axen bedeuten (Fig. 66). Bezeichnet man den Abftand deffelben von dem Punkte P mit ρ, fo wird $i_p = \rho^2 \, df$ das polare Trägheitsmoment von df für Punkt P genannt. Man lege durch P einen Kreis mit beliebigem Mittelpunkt M und beliebigem Halbmeffer r, welcher die beiden Axen AA und BB aufser in P noch in den Punkten A' 65. Grundlage.

und B' ſchneidet, verlängere die Linie $df . P$ bis zum zweiten Schnittpunkte C' mit dem Kreiſe, ziehe die Sehne $B'A'$ und fälle von C' die Senkrechte $C'D'$ auf die Sehne $B'A'$; alsdann ergiebt ſich aus den Beziehungen zwiſchen Peripherie-, Tangenten- und Centriwinkeln

Fig. 66.



$$u = \rho \sin \varphi_1, \quad v = \rho \sin \varphi_2,$$

$$\overline{B'C'} = 2r \sin \varphi_2, \quad \overline{C'D'} = \overline{B'C'} \sin \varphi_1,$$

$$\overline{C'D'} = 2r \sin \varphi_1 . \sin \varphi_2,$$

$$\sin \varphi_1 . \sin \varphi_2 = \frac{\overline{C'D'}}{2r}.$$

Demnach iſt

$$d\mathfrak{J}_{AB} = uv . df = df . \rho^2 \sin \varphi_1 . \sin \varphi_2 = \frac{\rho^2 \, df}{2r} \overline{C'D'},$$

und, wenn der Kreisdurchmeſſer mit d bezeichnet wird, ergiebt ſich

$$d\mathfrak{J}_{AB} = \frac{\rho^2 \, df}{d} \overline{C'D'}$$

oder

$$d\mathfrak{J}_{AB} = \frac{i_p}{d} \overline{C'D'}.$$

Das Centrifugalmoment von df für die beiden einander im Punkte P ſchneidenden Axen AA und BB iſt alſo gleich dem ſtatiſchen Momente des mit der Maſſe $\frac{i_p}{d}$ belaſteten Kreispunktes C', bezogen auf die Sehne $B'A'$ als Drehaxe.

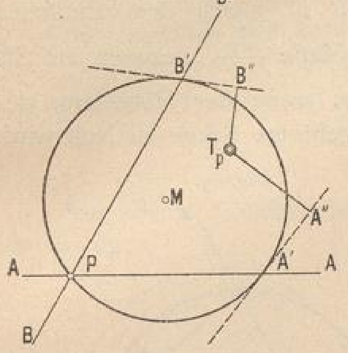
Um das Centrifugalmoment der ganzen Querſchnittsfläche zu erhalten, hat man in jedem Kreispunkte C' die betreffende Maſſe $\frac{\rho^2 \, df}{d}$ anzubringen, das ſtatiſche Moment derſelben für die Sehne $B'A'$ zu ermitteln und die Summe aller ſtatiſchen Momente zu ziehen. Dieſe Summe iſt gleich dem ſtatiſchen Moment der reſultirenden Maſſe, d. h. der Geſammtmaſſe $\int \frac{\rho^2 \, df}{d}$. Dieſe Summe greife im Punkte T_p an; alsdann folgt: Das Centrifugalmoment der Querſchnittsfläche F für die beiden Axen AA und BB iſt gleich dem ſtatiſchen Momente der im Punkte T_p wirkenden Maſſe $\int \frac{\rho^2 \, df}{d}$ für die Sehne $B'A'$.

$\int \rho^2 \, df = \mathfrak{J}_p$ iſt das polare Trägheitsmoment der ganzen Querſchnittsfläche für den Schnittpunkt P der Axen AA und BB. Man nennt den Punkt T_p den Trägheits-Hauptpunkt (auch wohl Trägheits-Schwerpunkt); den Punkt P heiſst man den Pol.

Fallen beide Axen zuſammen, ſo geht das Centrifugalmoment in das Trägheitsmoment für die gemeinſame Axe über; die Sehne $B'A'$ wird alsdann zur Tangente in demjenigen Punkte, in welchem die gemeinſame Axe den Kreis zum zweiten Male ſchneidet. Demnach iſt bewieſen:

Das Trägheitsmoment einer Fläche F für eine beliebige durch den Pol P gehende Axe BB ist gleich dem statischen Momente der im Trägheits-Hauptpunkte vereinigten Masse $\int \frac{\rho^2 df}{d}$, bezogen auf die Tangente im Punkte B' des Kreises.

Fig. 67.



Demnach ist (Fig. 67)

$$\text{für Axe } AA: \mathfrak{J}_A = \frac{\mathfrak{J}_p}{d} \overline{T_p A''};$$

$$\text{für Axe } BB: \mathfrak{J}_B = \frac{\mathfrak{J}_p}{d} \overline{T_p B''}.$$

Nach Annahme des Kreises und des Punktes P (falls es sich um Trägheitsmomente handelt) sind die Massen $\frac{\rho^2 df}{d}$ ganz bestimmte, an bestimmten Kreispunkten wirkende Werthe; alsdann ist auch der Punkt T_p seiner Lage nach genau bestimmt. Aendern die Axen gleichfalls ihre Lage, so bleibt doch der Punkt T_p unverändert an seiner Stelle. 66. Gröfse des Trägheitsmomentes; Hauptaxen, Hauptträgheitsmomente.

Man kann das Ziehen der Tangenten vermeiden. Für die Axe AA ist (Fig. 68)

$$\mathfrak{J}_A = \frac{\mathfrak{J}_p}{d} \overline{T_p E}.$$

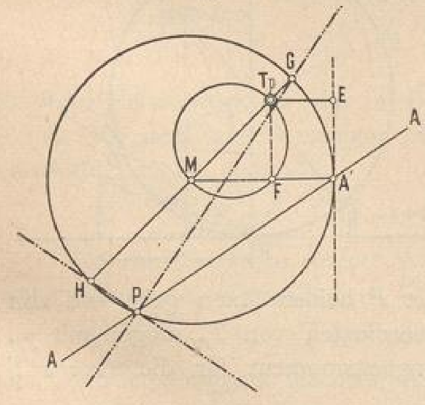
Man verbinde A' mit dem Mittelpunkte M des Kreises, fälle von T_p die Senkrechte auf MA'; alsdann erhält man F als Fufspunkt dieser Senkrechten, und es ist

$$\overline{FA'} = \overline{T_p E}.$$

FA' ist die Projection des Strahles $T_p A'$ auf den Radius MA'; mithin ist das Trägheitsmoment $\mathfrak{J}_A$ für die beliebige Axe AA gleich $\frac{\mathfrak{J}_p}{d}$, multiplicirt mit der Projection von $T_p A'$ auf den durch A' gezogenen Kreisdurchmesser.

$\frac{\mathfrak{J}_p}{d}$ ist für die verschiedenen Lagen der Axen unverändert; mithin verhalten sich die Trägheitsmomente für die verschiedenen durch P gelegten Axen wie die Werthe FA'. Das gröfste Trägheitsmoment wird sich also für diejenige Axe ergeben, für welche die Projection FA' den gröfstmöglichen Werth erreicht, das kleinste Trägheitsmoment für diejenige Axe, für welche die Projection FA' ihren kleinstmöglichen Werth hat. Verbindet man den Trägheits-Hauptpunkt T_p mit dem Mittelpunkt M des Kreises, so schneidet dieser Durchmesser die Peripherie in den beiden Punkten G und H. Man sieht leicht, dafs $T_p G$ der kleinste und $T_p H$ der gröfste mögliche Werth der Projection FA' ist; demnach wird

Fig. 68.



$$\mathfrak{J}_{max} = \frac{\mathfrak{J}_p}{d} \overline{T_p H} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_{min} = \frac{\mathfrak{J}_p}{d} \overline{T_p G}.$$

Die zugehörigen Axen sind PH, bezw. PG; diese Axen sind in Art. 62 (S. 41) als Hauptaxen, die betreffenden Trägheitsmomente als Hauptträgheitsmomente bezeichnet worden; daher sind PH und PG die Hauptaxen.

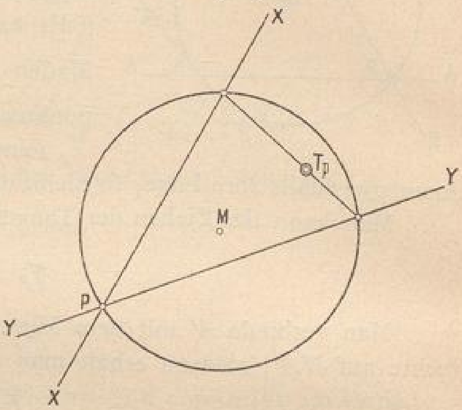
Um die Hauptaxen zu erhalten, verlängere man demnach die Linie MT_p bis zu den Schnittpunkten G, bezw. H mit der Kreisperipherie und ziehe die Geraden PG und PH.

$\overline{HG}$ ift ein Kreisdurchmeffer; daher ift der Winkel HPG ein rechter Winkel, d. h. die Hauptaxen ftehen auf einander fenkrecht (vergl. Art. 62, S. 41).

67.
Conjugirte Axen.

Das Centrifugalmoment für die Axen A und B ift gleich dem ftatifchen Moment der im Trägheits-Hauptpunkt T_p vereinigten Maffe $\frac{\mathfrak{J}_p}{d}$, bezogen auf die Sehne $A'B'$ (Fig. 66); daffelbe wird zu Null werden, wenn der Hebelsarm der in T_p wirkenden Gefammtmaffe für die zu den Axen gehörige Sehne zu Null wird. Dies findet für alle Sehnen, welche durch den Trägheits-Hauptpunkt gehen, ftatt. Daher ergeben fich für alle durch T_p gehenden Sehnen zwei Axen, deren Centrifugalmoment gleich Null ift. Man nennt folche Axen **conjugirte Axen.**

Fig. 69.



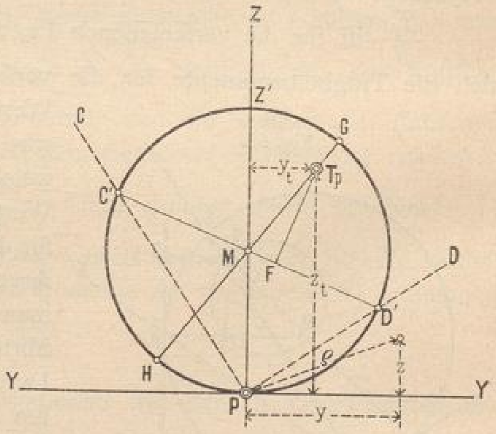
Conjugirte Axen find beifpielsweife PX und PY in Fig. 69; die zu den beiden Hauptaxen gehörige Sehne GH in Fig. 68 geht gleichfalls durch T_p, fo dafs folgt: **Die beiden Hauptaxen find conjugirte Axen.**

Für die Hauptaxen ift das Centrifugalmoment gleich Null.

68.
Lage des Trägheits-hauptpunktes.

Nach Vorftehendem ift vor Allem wichtig, die Lage des Trägheits-Hauptpunktes T_p zu kennen. Man nehme zwei fenkrecht zu einander ftehende, im Punkte P einander fchneidende Coordinatenaxen PY und PZ (Fig. 70) an und ermittele für diefe Axen die Trägheitsmomente $\mathfrak{J}_Y$, $\mathfrak{J}_Z$ und das Centrifugalmoment $\mathfrak{J}_{YZ}$ des Querfchnittes. Dadurch ift auch das polare Trägheitsmoment $\mathfrak{J}_p$ bekannt; denn für rechtwinkelige Coordinatenaxen ift

Fig. 70.



$$\mathfrak{J}_p = \int \rho^2 \, df = \int (y^2 + z^2) \, df = \int y^2 \, df + \int z^2 \, df = \mathfrak{J}_z + \mathfrak{J}_y ;$$

alfo

$$\mathfrak{J}_p = \mathfrak{J}_Z + \mathfrak{J}_Y .$$

Nunmehr follen die Coordinaten des Trägheits-Hauptpunktes T_p für einen Kreis gefucht werden, welcher durch den Schnittpunkt P beider Axen geht und von der Axe PY im Punkte P berührt wird; die Coordinaten von T_p mögen mit y_t, bezw. z_t bezeichnet werden. Dann ift das Trägheitsmoment für die Axe PY gleich dem ftatifchen Moment der in T_p vereinigten Maffe $\frac{\mathfrak{J}_p}{d}$ für diejenige Tangente, welche im Schnittpunkte der Axe PY mit dem Kreife gezogen ift; diefer Schnittpunkt fällt aber hier mit P zufammen, da PY Tangente an den Kreis sein soll; daher ist das statische Moment für PY selbst gleich dem Trägheitsmoment $\mathfrak{J}_Y$. Mithin wird

$$\mathfrak{J}_Y = \frac{\mathfrak{J}_p}{d} z_t.$$

Das Centrifugalmoment für die Axen PY und PZ ist gleich $\frac{\mathfrak{J}_p}{d}$, multiplicirt mit dem Abstande des Punktes T_p von der zu den genannten Axen gehörigen Sehne. Diese Sehne ist aber die Axe PZ selbst, weil die beiden in Betracht kommenden Schnittpunkte der Axen Y und Z mit dem Kreise bezw. P und Z' sind; daher ist

$$\mathfrak{J}_{ZY} = \frac{\mathfrak{J}_p}{d} y_t.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Coordinaten des Trägheits-Hauptpunktes zu

$$\left.\begin{aligned} y_t &= \mathfrak{J}_{YZ} \frac{d}{\mathfrak{J}_p} \\ z_t &= \mathfrak{J}_Y \frac{d}{\mathfrak{J}_p} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 29.$$

Da man d beliebig annehmen kann, so steht auf der rechten Seite beider Gleichungen nur Bekanntes. Wählt man d so, dafs $\frac{\mathfrak{J}_p}{d} = 1\,\text{cm}^3$ wird [14]), d. h. macht man $d^{\text{cm}} \cdot 1^{\text{cm}^3} = \mathfrak{J}_p{}^{\text{cm}^4}$, so vereinfachen sich obige Gleichungen für y_t und z_t, und man erhält

$$\left.\begin{aligned} y_t &= \mathfrak{J}_{ZY} \\ z_t &= \mathfrak{J}_Y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 30.$$

Die Regel für die Auffuchung des Trägheits-Hauptpunktes lautet demnach: Man lege durch den Pol (bezw. wenn man die Trägheitsmomente für die Schwerpunktsaxen haben will, durch den Schwerpunkt) zwei senkrecht zu einander stehende Axen PY und PZ (in Fig. 70 sind sie nach rechts, bezw. oben positiv, nach links, bezw. unten negativ angenommen), schlage mit $\mathfrak{J}_p$ als Durchmesser einen Kreis, welcher durch P geht und von PY berührt wird, dessen Mittelpunkt also auf der Axe PZ liegt; man mache weiters $y_t = \mathfrak{J}_{YZ}$ und $z_t = \mathfrak{J}_Y$. Alsdann erhält man T_p.

Die im Punkte T_p vereinigte Masse ist nunmehr

$$\frac{\mathfrak{J}_p}{d} = 1\,\text{cm}^3,$$

und die Hebelsarme für die in Betracht kommenden Tangenten geben nunmehr sofort, auf dem angenommenen Mafsstab abgegriffen, die Gröfsen der Trägheitsmomente. Es ist demnach

$$\mathfrak{J}_{max} = \overline{T_p H} \cdot 1^{\text{cm}^3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_{min} = \overline{T_p G} \cdot 1^{\text{cm}^3}.$$

Für zwei beliebige andere Axen $\overline{PC}$ und $\overline{PD}$, welche rechtwinkelig zu einander stehen, erhält man

$$\mathfrak{J}_C = \overline{FC'} \cdot 1^{\text{cm}^3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_D = \overline{FD'} \cdot 1^{\text{cm}^3};$$

das Centrifugalmoment für diese Axen ist

$$\mathfrak{J}_{CD} = \overline{T_p F} \cdot 1^{\text{cm}^3}.$$

---

[14]) Die Trägheitsmomente gehören der vierten Dimension, die Längen der ersten Dimension an; defshalb ist auf der rechten Seite als Benennung cm³ hinzuzufügen.

In der Regel find die Werthe $\mathfrak{J}_p$, $\mathfrak{J}_Y$ und $\mathfrak{J}_{YZ}$ zu grofs, als dafs man fie unmittelbar auftragen könnte; man macht defshalb zweckmäfsig $\frac{\mathfrak{J}_p}{d}$ nicht gleich 1 cm³, fondern giebt diefem Quotienten einen bequemen Werth, etwa 100^{cm^3}, 200^{cm^3} u. f. w. Wählt man

$$\frac{\mathfrak{J}_p}{d} = 100^{\mathrm{cm}^3},$$

fo wird

$$\left.\begin{array}{l} d = \dfrac{\mathfrak{J}_p}{100^{\mathrm{cm}^3}} \\ y_t = \dfrac{\mathfrak{J}_{YZ}}{100^{\mathrm{cm}^3}} \\ z_t = \dfrac{\mathfrak{J}_Y}{100^{\mathrm{cm}^3}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31.$$

Alsdann find die Werthe für $\overline{FC'}$, $\overline{FD'}$, $\overline{T_pH}$, $\overline{T_pG}$, $\overline{T_pF}$ ebenfalls mit 100^{cm^3} zu multipliciren, um die betreffenden Trägheits- und Centrifugalmomente zu erhalten.

Wenn $\mathfrak{J}_{YZ}$ gleich Null ift, z. B. wenn die Axe $\mathfrak{J}_Y$ oder $\mathfrak{J}_Z$ eine Symmetrieaxe ift, fo wird auch y_t gleich Null; alfo dann liegt T_p auf der Z-Axe; wenn $\mathfrak{J}_{YZ}$ negativ ift, fo wird auch y_t negativ, ift alfo dann nach links abzutragen.

69. Maximal- und Minimal-Trägheitsmomente für: Winkeleifen.

Für einige häufig vorkommende Querfchnittsformen follen im Nachftehenden die Maximal- und Minimal-Trägheitsmomente, fo wie die Trägheitskreife vorgeführt werden.

α) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein gleichfchenkeliges Winkeleifen (Fig. 71).

Fig. 71.

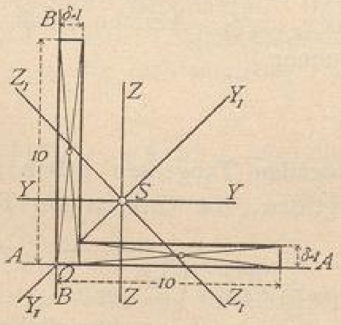
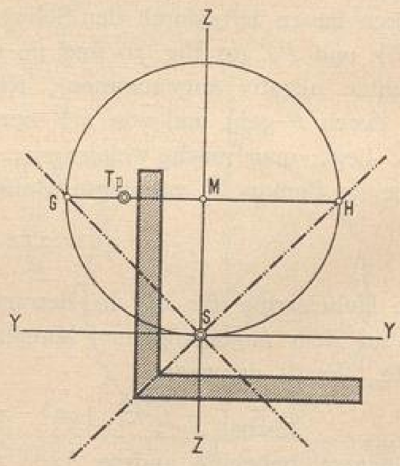


Fig. 72.



Hauptaxen find die Symmetrieaxe $Y_1 Y_1$, welche den Winkel halbirt, und die zu diefer im Schwerpunkte fenkrechte Axe $Z_1 Z_1$. Die erftere bildet mit der Axe YY den Winkel $\alpha = 45$ Grad. Somit ift nach Gleichung 22

$$\mathfrak{J}_{Y_1} = \mathfrak{J}_Y \cos^2 \alpha + \mathfrak{J}_Z \sin^2 \alpha - \mathfrak{J}_{YZ} \sin 2\alpha,$$

und, da $\alpha = 45$ Grad ift,

$$\mathfrak{J}_{Y_1} = \frac{\mathfrak{J}_Y + \mathfrak{J}_Z}{2} - \mathfrak{J}_{YZ}.$$

Die Werthe auf der rechten Seite vorftehender Gleichung find leicht zu finden.

Für ein Winkeleisen mit 10^{cm} Schenkellänge, 1^{cm} Schenkelstärke (Deutsches Normal-Profil Nr. 10) ist $y_0 = z_0 = 2{,}87^{cm}$; mithin

$$J_Y = J_A - F z_0^2 \quad \text{und} \quad J_Z = J_B - F y_0^2;$$

$$J_Y = \frac{1 \cdot 10^3}{3} + \frac{9 \cdot 1^3}{3} - (10 + 9)\, 1 \cdot 2{,}87^2 = 179{,}83^{cm^4}; \text{ eben so grofs ist } J_Z = 179{,}83^{cm^4};$$

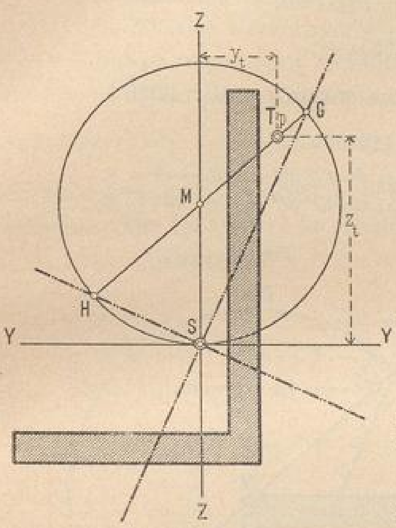
$$J_{YZ} = -10 \cdot 1 \cdot (5 - 2{,}87)\,(2{,}87 - 0{,}5) - 9 \cdot 1 \cdot (5{,}5 - 2{,}87)\,(2{,}87 - 0{,}5) = -106{,}58^{cm^4}.$$

(Die Werthe der y und z find nach rechts, bezw. oben als positiv eingeführt.) Es wird sonach

$$J_{Y_1} = 179{,}83 + 106{,}58 = 286{,}41^{cm^4}$$

und $J_{Z_1} = J_Y \sin^2\alpha + J_Z \cos^2\alpha + J_{YZ} \sin 2\alpha = \dfrac{J_Y + J_Z}{2} + J_{YZ} = 179{,}83 - 106{,}58 = 73{,}25^{cm^4}$.

Fig. 73.



Mithin ist

$$J_{Y_1} = A = 286{,}41^{cm^4} \text{ (Maximum)},$$
$$J_{Z_1} = B = 73{,}25^{cm^4} \text{ (Minimum)}.$$

Um den Trägheitskreis zu schlagen, ermittelt man

$$J_p = J_Z + J_Y = 2 \cdot 179{,}83 = 359{,}66^{cm^4} = \infty\, 360^{cm^4},$$

und mit $\dfrac{J_p}{d} = 100^{cm^3}$ wird

$$d = 3{,}6^{cm}, \qquad z_t = \frac{J_Y}{100^{cm^3}} = 1{,}798 = \infty\, 1{,}8^{cm},$$

$$y_t = \frac{J_{YZ}}{100^{cm^3}} = -1{,}066^{cm} = \infty - 1{,}07^{cm}.$$

Man erhält T_p in Fig. 72, ferner

$$J_{max} = \overline{T_p H} \cdot 100^{cm^3} = 2{,}86^{cm} \cdot 100^{cm^3}$$

und

$$J_{min} = \overline{T_p G} \cdot 100^{cm^3} = 0{,}73^{cm} \cdot 100^{cm^3}.$$

β) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein ungleichschenkeliges Winkeleisen (Fig. 65, S. 43).

Zunächst ist die Lage der Hauptaxen aufzusuchen. Da hier keine Symmetrie-Axe vorhanden ist, so ist dieselbe nach Formel 24

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{max} = \frac{2 J_{YZ}}{J_Z - J_Y}$$

zu berechnen.

Für das in Fig. 65 dargestellte Winkeleisen (Deutsches Normal-Profil Nr. 8/12) ist

$$J_Y = J_A - F z_0^2 = \frac{1}{3}\,[1{,}0 \cdot 12^3 + 7{,}0 \cdot 1{,}0^3] - (12 + 7)\; 1{,}0 \cdot 3{,}97^2 = 278{,}87^{cm^4},$$

$$J_Z = J_B - F y_0^2 = \frac{1}{3}\,[1{,}0 \cdot 8^3 + 11 \cdot 1{,}0^3] - (12 + 7)\; 1{,}0 \cdot 1{,}97^2 = 100{,}59^{cm^4},$$

$$J_{YZ} = 97{,}26^{cm^4} \text{ (siehe Art. 64, S. 42).}$$

Hiernach ist

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{max} = \frac{2 \cdot 97{,}26}{100{,}59 - 278{,}87} = -1{,}09109.$$

Nun ist, wenn man $2\alpha_{max} = 180 - 2\beta$ setzt, $\operatorname{tg} 2\alpha_{max} = -\operatorname{tg} 2\beta$; somit $\operatorname{tg} 2\beta = 1{,}09109$ und $2\beta = 47^\circ 29' 40''$, woraus $\beta = 23^\circ 44' 50''$; mithin

$$\alpha_{\substack{max\\min}} = 90 - \beta, \text{ bezw. } 180 - \beta.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\alpha_{max} = 156^\circ 15' 10'' \quad \text{und} \quad \alpha_{min} = 66^\circ 15' 10''.$$

Die Axen $Y'Y'$ und $Z'Z'$ sind demnach die Hauptaxen; man erhält nach Gleichung 22

$$J_{Y_1} = J_Y \cos^2 156^\circ 15' 10'' + J_Z \sin^2 156^\circ 15' 10'' - J_{YZ} \sin 312^\circ 30' 20'',$$
$$= J_Y \cos^2 23^\circ 44' 50'' + J_Z \sin^2 23^\circ 44' 50'' + J_{YZ} \sin 47^\circ 29' 40'' = 321{,}43^{cm^4} = A;$$
$$J_{Z_1} = J_Y \cos^2 66^\circ 45' 10'' + J_Z \sin^2 66^\circ 15' 10'' - J_{YZ} \sin 47^\circ 29' 40'' = 57{,}80^{cm^4} = B.$$

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Ermittelung mit Hilfe des Trägheitskreises (Fig. 73). Es ist $J_Y = 278{,}87^{cm^4}$, $J_Z = 100{,}59^{cm^4}$ und $J_{YZ} = 97{,}26^{cm^4}$; ferner $J_p = J_Y + J_Z = 278{,}87 + 100{,}59 = 379{,}46^{cm^4}$, und mit $\dfrac{J_p}{d} = 100^{cm^3}$

$$y_t = \frac{\mathfrak{J}_{XY}}{100} = 0{,}97 \text{ cm}, \quad z_t = \frac{\mathfrak{J}_Y}{100} = 2{,}79 \text{ cm} \quad \text{und} \quad d = \frac{\mathfrak{J}_p}{100} = 3{,}79 \text{ cm}.$$

Man trägt auf SZ die Länge $\overline{SM} = \frac{3{,}79 \text{ cm}}{2}$ auf, fchlägt von M aus mit $\frac{3{,}79}{2}$ als Halbmeffer den Kreis, verzeichnet T_p aus den Coordinaten $y_t = 0{,}97$ cm und $z_t = 2{,}79$ cm, zieht $T_p\,M$; alsdann geben SH und SG die Maximal-, bezw. Minimal-Trägheitsaxen. Es ift

$$\mathfrak{J}_{max} = T_p H \,.\, 100 \text{ cm}^3 = 3{,}2 \text{ cm} \,.\, 100 \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_{min} = T_p G \,.\, 100 \text{ cm}^3 = 0{,}58 \text{ cm} \,.\, 100 \text{ cm}^3.$$

70. Z-Eifen.

γ) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein **Z**-Eifen.

Die Ermittelung foll für das Deutfche Normal-Profil Nr. 12 (Fig. 74) vorgenommen werden. Es ift

$$\mathfrak{J}_Y = \frac{0{,}7 \,.\, 12^3}{12} + 2\,\frac{5{,}3\,(6^3 - 5{,}1^3)}{3} = 395{,}3 \text{ cm}^4,$$

$$\mathfrak{J}_Z = \frac{10{,}2 \,.\, 0{,}7^3}{12} + 2\,\frac{(5{,}65^3 + 0{,}35^3)}{3}\, 0{,}9 = 108{,}53 \text{ cm}^4,$$

$$\mathfrak{J}_{YZ} = 0 - 0{,}9 \,.\, 5{,}3 \,.\, 5{,}55 \,.\, 3{,}0 \,.\, 2 = -158{,}84 \text{ cm}^4,$$

$$\operatorname{tg} 2\,\alpha_{max} = -\frac{2 \,.\, 158{,}84}{108{,}53 - 395{,}3} = \frac{2 \,.\, 158{,}84}{286{,}77} = 1{,}1078, \text{ woraus } 2\,\alpha_{max} = 47^\circ 56';$$

fomit

$$\alpha_{max} = 23^\circ 58' \quad \text{und} \quad \alpha_{min} = 113^\circ 58'.$$

$$\mathfrak{J}_{Y_1} = 395{,}3 \cos^2 23^\circ 58' + 108{,}53 \sin^2 23^\circ 58' + 158{,}84 \sin 47^\circ 56' = 465{,}9 \text{ cm}^4 = A,$$

$$\mathfrak{J}_{Z_1} = 395{,}3 \sin^2 23^\circ 58' + 108{,}55 \cos^2 23^\circ 58' - 158{,}84 \sin 47^\circ 56' = 38{,}1 \text{ cm}^4 = B.$$

Fig. 75 zeigt die Conftruction des Trägheitskreifes. Es ift

$$\mathfrak{J}_p = 395{,}3 + 108{,}53 = 503{,}83 \text{ cm}^4;$$

mithin

Fig. 74.

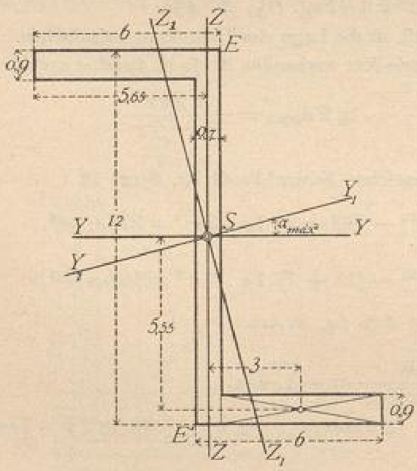
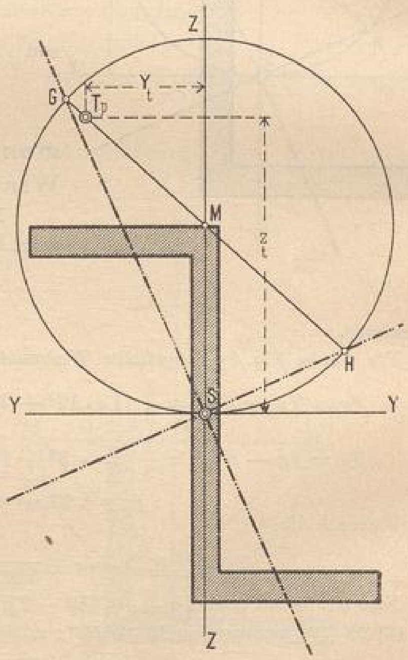


Fig. 75.



$$z_t = \frac{\mathfrak{J}_Y}{100} = 3{,}95 \text{ cm}, \quad y_t = \frac{\mathfrak{J}_{YZ}}{100} = -\frac{158{,}8}{100} = -1{,}59 \text{ cm}$$

und

$$d = \frac{\mathfrak{J}_p}{100} = 5{,}04 \text{ cm};$$

ferner

$$\mathfrak{J}_{max} = \overline{T_p H} \,.\, 100 \text{ cm}^3 = 4{,}6 \text{ cm} \,.\, 100 \text{ cm}^3$$

und

$$\mathfrak{J}_{min} = \overline{T_p G} \,.\, 100 \text{ cm}^3 = 0{,}38 \text{ cm} \,.\, 100 \text{ cm}^3.$$

Bedeutet $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment für eine beliebige Axe, fo kann man $\mathfrak{J} = FR^2$ fetzen, in welcher Gleichung F die Querfchnittsfläche bedeutet. Alsdann ift 71. Trägheits-radius.

$$R = \sqrt{\frac{\mathfrak{J}}{F}},$$

und es wird R **der Trägheitsradius für die betreffende Axe** genannt. Beifpielsweife würden fich die Trägheitsradien für die Hauptaxen aus den Gleichungen:

$$A = FR_1^2 \quad \text{und} \quad B = FR_2^2 \quad \text{zu} \quad R_1 = \sqrt{\frac{A}{F}} \quad \text{und} \quad R_2 = \sqrt{\frac{B}{F}}$$

ergeben.

Die den Gleichungen 22 u. 23 entfprechende Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes mit der Veränderung des Winkels α kann man graphifch auch veranfchaulichen, indem man vom Schnittpunkte der Axen aus auf jeder Axe eine Länge abträgt, welche dem Trägheitsmoment für diefe Axe entfpricht. Wählt man die Hauptaxen als Coordinatenaxen und trägt auf jeder Axe $\frac{K}{\sqrt{\mathfrak{J}}}$ ab, in welcher Gleichung K eine zunächft beliebige Conftante, $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment für die betreffende Axe bedeutet, fo erhält man als Endpunkt einer Linie etwa den Punkt P (Fig. 76). Alsdann ift 72. Ellipfe der Trägheits-momente.

$$r = \frac{K}{\sqrt{\mathfrak{J}_{Y_1}}}, \quad \cos\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y\sqrt{\mathfrak{J}_{Y_1}}}{K} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{z}{r} = \frac{z\sqrt{\mathfrak{J}_{Y_1}}}{K}.$$

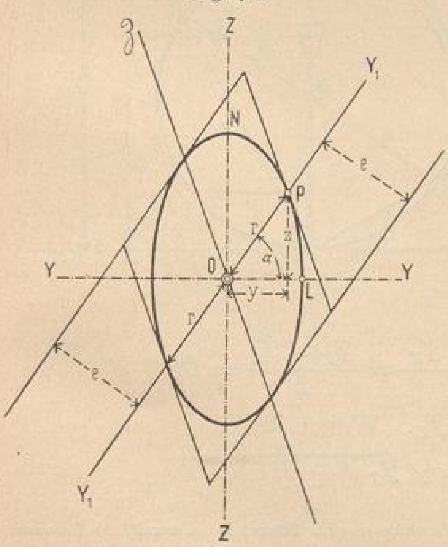
Nach Gleichung 26 ift

$$\mathfrak{J}_{Y_1} = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha = \frac{Ay^2\mathfrak{J}_{Y_1}}{K^2} + \frac{Bz^2\mathfrak{J}_{Y_1}}{K^2}.$$

$$K^2 = Ay^2 + Bz^2 \quad \text{und} \quad 1 = \frac{y^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{A}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{B}}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad 32.$$

Gleichung 32 ift die Gleichung der Curve für die Punkte P; die Endpunkte der Fahrftrahlen liegen alfo auf einer Ellipfe, deren beide Halbaxen $\frac{K}{\sqrt{A}}$ und $\frac{K}{\sqrt{B}}$ find; $\frac{K}{\sqrt{A}}$ ift die Länge auf der Hauptaxe OY, $\frac{K}{\sqrt{B}}$ diejenige auf der Hauptaxe OZ.

Fig. 76.



Man nennt diefe Ellipfe **die Ellipfe der Trägheitsmomente**. Diefelbe kann für jeden beliebigen Punkt der Ebene als Mittelpunkt conftruirt werden; gehen fämmtliche Axen, wie hier, durch den Schwerpunkt des Querfchnittes, fo nennt man diefelbe die **Centralellipfe**.

Der Werth K kann beliebig angenommen werden. Wählt man $K = \sqrt{\frac{AB}{F}}$, fo wird die Länge des Fahrftrahles auf der Hauptaxe OY

$$\overline{OL} = \frac{K}{\sqrt{A}} = \sqrt{\frac{AB}{FA}} = \sqrt{\frac{B}{F}} = \sqrt{\frac{Fb^2}{F}} = b;$$

die Länge des Fahrftrahles auf der Hauptaxe OZ wird

$$\overline{ON} = \frac{K}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{AB}{FB}} = \sqrt{\frac{A}{F}} = \sqrt{\frac{Fa^2}{F}} = a.$$

a und b find die Trägheitsradien, welche zu den Hauptträgheitsmomenten A und B gehören. Man erhält alfo die Ellipfe der Trägheitsmomente, indem man auf der erften Hauptaxe den Trägheitsradius b, auf der zweiten Hauptaxe den Trägheitsradius a aufträgt und für diefe als Halbaxen der Ellipfe die Curve conftruirt.

Für eine beliebige Axe $Y_1 Y_1$ ziehe man an die Ellipfe die vier Tangenten, welche dem Durchmeffer $Y_1 Y_1$ und dem zugehörigen conjugirten Durchmeffer $\mathfrak{Z}\, O$ entfprechen; die von diefem eingefchloffene Fläche ift $4re$, aber bekanntlich auch gleich $4ab$. Es ift alfo auch $re = ab$, fomit

$$e = \frac{ab}{r}.$$

Nun ift

$$a = \sqrt{\frac{A}{F}}, \quad b = \sqrt{\frac{B}{F}}, \quad r = \frac{K}{\sqrt{\mathfrak{J}_{Y_1}}} = \sqrt{\frac{AB}{F\mathfrak{J}_{Y_1}}};$$

mithin

$$e = \frac{ab}{r} = \sqrt{\frac{ABF\mathfrak{J}_{Y_1}}{F^2 AB}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{J}_{Y_1}}{F}},$$

d. h.

$$\mathfrak{J}_{Y_1} = Fe^2.$$

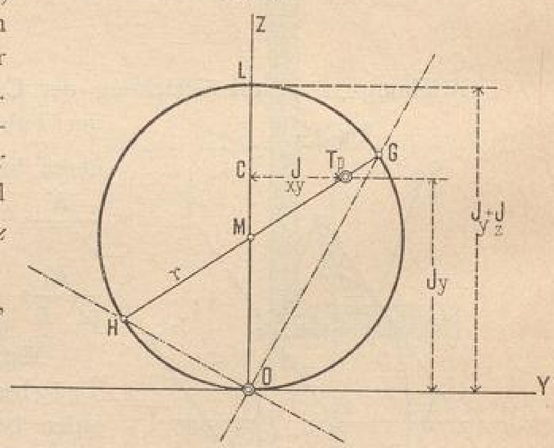
Demnach ift e der Trägheitsradius für die Axe $Y_1 Y_1$.

Wird alfo $K = \sqrt{\frac{AB}{F}}$ gewählt, fo ift für jede Axe der Trägheitsradius ohne Weiteres durch Ziehen der parallelen Tangente und Abmeffen des fenkrechten Abftandes der Tangente von der Axe zu ermitteln.

73.
Weitere einfache Ausdrücke für die Hauptträgheitsmomente.

Mit Hilfe des in Art. 65 (S. 43) vorgeführten Trägheitskreifes ergeben fich folgende einfache Ausdrücke für die Hauptträgheitsmomente A und B[15]). In Fig. 77 feien OY und OZ zwei fenkrecht zu einander gerichtete Axen, für welche die Trägheitsmomente $\mathfrak{J}_Y$ und $\mathfrak{J}_Z$, fo wie das Centrifugalmoment $\mathfrak{J}_{YZ}$ bekannt find.

Fig. 77.



Dann ift $\overline{OL} = d = \mathfrak{J}_Y + \mathfrak{J}_Z$, und der Halbmeffer des Kreifes

$$r = \overline{MH} = \overline{MG} = \overline{MO} = \frac{\mathfrak{J}_Y + \mathfrak{J}_Z}{2}.$$

Ferner ift

$$\overline{MC} = \overline{OC} - \overline{OM} = \mathfrak{J}_Y - \frac{\mathfrak{J}_Y + \mathfrak{J}_Z}{2} = \frac{\mathfrak{J}_Y - \mathfrak{J}_Z}{2} = D,$$

d. h. D ift der halbe Unterfchied von $\mathfrak{J}_Y$ und $\mathfrak{J}_Z$. Weiter ift

$$\overline{MT_p} = \sqrt{\overline{CT_p}^2 + \overline{MC}^2} = \sqrt{\mathfrak{J}_{YZ}^2 + D^2}.$$

[15]) Angegeben von LAND (Die Beftimmung der Haupt-Trägheitsmomente einer Fläche) in: Centralbl. d. Bauverw. 1898, S. 22.

Nun ift aber

$$A = \overline{T_p H} = \overline{MH} + \overline{MT_p} = \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} + \sqrt{\mathcal{J}_{YZ}^2 + D^2},$$

$$B = \overline{T_p G} = \overline{MG} - \overline{MT_p} = \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} - \sqrt{\mathcal{J}_{YZ}^2 + D^2};$$

daher

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} + \sqrt{\mathcal{J}_{YZ}^2 + \left(\frac{\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z}{2}\right)^2} \\ B &= \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} - \sqrt{\mathcal{J}_{YZ}^2 + \left(\frac{\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z}{2}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \cdots \quad 33.$$

Die Benutzung diefer Formeln fetzt nur die Kenntnifs von $\mathcal{J}_Y$, $\mathcal{J}_Z$ und $\mathcal{J}_{YZ}$ voraus; es ift nicht erforderlich, wie bei Verwendung der Formeln 22 und 23, mit Winkelfunctionen zu rechnen, um die Hauptträgheitsmomente zu ermitteln[16]).

Beifpiel. Bei dem **Z**-Eifen in Art. 70 (S. 50) war

$$\mathcal{J}_Y = 395{,}3 \text{ cm}^4, \quad \mathcal{J}_Z = 108{,}53 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad \mathcal{J}_{YZ} = -158{,}84 \text{ cm}^4;$$

daher ift

$$\frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} = 251{,}9 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z}{2} = D = 143{,}4 \text{ cm}^4;$$

fomit

$$A = 251{,}9 + \sqrt{158{,}8^2 + 143{,}4^2} = 251{,}9 + 214 = 465{,}9 \text{ cm}^4,$$

$$B = 251{,}9 - \sqrt{158{,}8^2 + 143{,}4^2} = 251{,}9 - 214 = 37{,}9 \text{ cm}^4.$$

---

16) Ueber die Darftellung der Trägheitsmomente mit Hilfe von Kreifen vergl.:
MOHR. Ueber die Beftimmung und die graphifche Darftellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen. Civiling. 1887, S. 43.
LAND, R. Einfache Darftellung der Trägheits- und Centrifugalmomente von Flächen etc. Zeitfchr. f. Bauw. 1892, S. 549. — Auch als Sonderabdruck erfchienen: Berlin 1892. — Auszug daraus: Centralbl. d. Bauverw. 1893, S. 11.
Beigabe zum Deutfchen Baukalender 1894 u. ff. Berlin 1893 u. ff.
Des Ingenieurs Tafchenbuch. Herausg. v. akad. Verein »Hütte«. 16. Aufl. Abth. I. Berlin 1896. S. 177.

I. Theil, 2. Abtheilung:

DIE STATIK DER HOCHBAU-CONSTRUCTIONEN.

---

2. Abfchnitt.

Elemente der Elafticitäts- und Feftigkeitslehre.

1. Kapitel.

Grundbegriffe.

74. Molecüle.

Jeder in der Natur vorkommende Körper befteht aus einzelnen, mit einander verbundenen, aufserordentlich kleinen Theilen, den fog. Molecülen. Diefe einzelnen Theile find nicht unabänderlich feft zu einem ftarren Ganzen mit einander verbunden; vielmehr verändert fich die gegenfeitige Lage derfelben, alfo auch die Form des Körpers, wenn Kräfte auf den Körper wirken. Gröfse und Form der Aenderung find vom Material des Körpers, von feiner Form, von der Gröfse und Wirkungsdauer der wirkenden Kräfte, von der Temperatur und von verfchiedenen anderen Umftänden abhängig.

Wenn die Kräfte, welche die Formveränderung hervorgebracht haben, zu wirken aufhören, fo nimmt unter gewiffen Bedingungen der Körper feine frühere Form wieder an.

75. Elafticität.

Jeder Körper hat die Eigenfchaft, unter der Einwirkung von Kräften feine Form zu verändern und nach dem Aufhören der Kräftewirkung feine urfprüngliche Form mehr oder weniger vollftändig wieder anzunehmen. Man nennt diefe Eigenfchaft Elafticität.

Vollkommen elaftifch würde ein Körper fein, der nach dem Aufhören der Kräfteeinwirkung feine frühere Geftalt genau wieder annähme; vollkommen unelaftifch derjenige Körper, welcher die in Folge der Kräfteeinwirkung geänderte Geftalt genau beibehalten würde, auch wenn die Kräfte zu wirken aufhörten.

Es giebt in der Natur weder vollkommen elaftifche, noch vollkommen unelaftifche Körper. Daraus folgt, dafs kein Körper nach dem Aufhören der Kräfteeinwirkung vollftändig feine frühere Form wieder annimmt; je näher er dem vollkommen elaftifchen Körper fteht, defto mehr verfchwindet die Formänderung; niemals aber verfchwindet fie ganz.

76. Elaftifche und bleibende Formänderung.

Man unterfcheidet die elaftifche Formänderung, d. h. diejenige, welche mit dem Aufhören der Kräfteeinwirkung wieder verfchwindet, und die bleibende Formänderung, d. h. diejenige, welche nicht wieder verfchwindet, auch wenn die Kraft zu wirken aufhört.

Die gefammte Formänderung ift die Summe der bleibenden und der elaftifchen Formänderung; fie ift eine Folge der durch die äufseren Kräfte im Körper hervorgerufenen inneren Kräfte, welche, auf die Flächeneinheit bezogen, als Spannungen bezeichnet werden. Legt man der Betrachtung einen auf Zug oder Druck beanfpruchten, geraden, prismatifchen Stab von der urfprünglichen Länge l zu Grunde, fo bezeichnet man das Verhältnifs der abfoluten Verlängerung Δl zur urfprünglichen Länge, d. h. $\frac{\Delta l}{l}$ als Dehnung oder Verlängerungsverhältnifs. Für einige wenige, aber gerade die wichtigften Bauftoffe, nämlich für Schweifseifen, Flufseifen und Stahl ift die Gröfse der Dehnung direct proportional der im Stabe herrfchenden Spannung, fo lange diefe Spannung eine gewiffe Grenze nicht überfchreitet. Man bezeichnet die Grenzfpannung, bis zu welcher die Proportionalität zwifchen Dehnung (bezw. Längenänderung) des Stabes und der Spannung im Stabe ftattfindet, als Proportionalitätsgrenze. Innerhalb diefer Grenze ift für die genannten Bauftoffe auch die bleibende Dehnung fo gering, dafs fie für die Praxis als nicht vorhanden angenommen werden kann; man braucht demnach innerhalb diefer Grenze nur die elaftifche Formänderung zu berückfichtigen.

Die Grenzfpannung, bis zu welcher die bleibende Formänderung fo gering ift, dafs fie vernachläffigt werden kann, bezeichnet man als Elafticitätsgrenze. Für die oben angeführten Bauftoffe fallen demnach Elafticitätsgrenze und Proportionalitätsgrenze zufammen, fo dafs im Nachfolgenden für diefe Bauftoffe die Proportionalitätsgrenze als Elafticitätsgrenze bezeichnet werden foll.

Für Gufseifen, Beton, Cementmörtel, Steine findet nach neueren Verfuchen [17]) keine directe Proportionalität zwifchen Dehnung und Spannung ftatt; man kann demnach bei diefen Bauftoffen auch nicht von einer Proportionalitätsgrenze reden.

Die Elafticitätsgrenze ift für die verfchiedenen Bauftoffe, aber auch für die verfchiedenen Arten der Beanfpruchung verfchieden. Im Allgemeinen wird fie für Beanfpruchung durch Zug bei demfelben Bauftoff eine andere fein, als für Beanfpruchung durch Druck.

Nach den Verfuchen *Baufchinger*'s [18]) ift für Schweifseifen, Flufseifen und Stahl, felbft für diefelbe Art der Beanfpruchung, die Elafticitätsgrenze aufserordentlich veränderlich. Man kann diefelbe durch gewiffe Arbeiten allmählich immer mehr bis zu einer oberen Grenze heben, die bei manchen Stoffen nahe der Bruchgrenze liegt. Andererfeits kann man die Elafticitätsgrenze fehr ftark hinabwerfen und wieder heben, dann aber nur bis zu einer weit unter der urfprünglichen Grenze liegenden Höhe. Diefe letztere bezeichnet *Baufchinger* als die natürliche Elafticitätsgrenze.

Wird bei den Stoffen mit ausgefprochener Elafticitätsgrenze die wirkende Spannung über die Elafticitätsgrenze gefteigert, fo wächst die Formänderung wefentlich rafcher, als die Spannung; insbefondere tritt eine fehr merkbare bleibende Formänderung ein; eine weitere Vergröfserung der Spannung bewirkt fchliefslich das Zerreifsen, Zerdrücken oder Zerbrechen des Körpers. 77. Feftigkeits-Coefficient.

Diejenige Spannung, welche ein Stab vom Querfchnitte gleich der Flächeneinheit höchftens ertragen kann, ehe er zerftört wird, nennt man den Feftigkeits-Coefficienten des Materials.

---

17) Bach, C. Elafticität und Feftigkeit. 3. Aufl. Berlin 1898.

18) Siehe: Vortrag *Baufchinger*'s auf der Wanderverfammlung des Verbandes deutfcher Architekten- und Ingenieur-Vereine zu Frankfurt a. M. 1866. Verbandsmittheilungen, Bd. 1, S. 230 u. ff.
Bauschinger, J. Mittheilungen aus dem mechanifch-technifchen Laboratorium der K. technifchen Hochfchule in München. Heft XIII. München 1886.

Auch die Festigkeits-Coefficienten sind nach dem verschiedenen Baustoff und nach den verschiedenen Beanspruchungsweisen verschieden.

78. Aufgabe der Construction.

Man muss an jede Bauconstruction zunächst die Forderung stellen, dass sie durch die wirkenden Kräfte nicht zerstört wird. Mit dieser Anforderung allein darf man sich aber nicht begnügen. Das Verhalten der Baustoffe, sobald sie über die Elasticitätsgrenze hinaus beansprucht werden, ist wenig zuverlässig, und man stellt deshalb bei denjenigen Baustoffen, für welche die Elasticitätsgrenze genügend sicher bestimmt werden kann, die Bedingung, dass die Construction *niemals über die Elasticitätsgrenze* hinaus in Anspruch genommen werde.

79. Stabförmige Körper.

In den folgenden Untersuchungen werden wir uns hauptsächlich mit den sog. *stabförmigen Körpern* beschäftigen. Stabförmige Körper sind solche, bei denen die Längenabmessung die Breiten- und Höhenabmessungen wesentlich übertrifft.

Schneidet man den Körper an irgend einer Stelle durch eine senkrecht zur Längenrichtung an dieser Stelle gerichtete Ebene, so erhält man einen *Querschnitt* des Körpers. Die Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Querschnitte des Körpers heisst die Axe des Körpers.

Ist die Axe eine Gerade, so hat man einen *geraden stabförmigen Körper*; alsdann sind alle Querschnitte des Körpers parallel. Ist die Axe eine krumme Linie, so ist der Körper ein *krummer stabförmiger Körper*.

80. Arten der Beanspruchung und Festigkeit.

Je nach der Wirkungsweise der Kräfte werden die Körper verschiedenartig beansprucht. Man unterscheidet

1) *Beanspruchung auf Zug und Druck*;
2) *Beanspruchung auf Schub*;
3) *Beanspruchung auf Biegung*;
4) *Beanspruchung auf Drehung*.

Zu 1). *Beanspruchung auf Zug und Druck* tritt auf, wenn die auf den Körper wirkenden Kräfte die Querschnitte so gegen einander zu verschieben streben, dass sich ihre Entfernung in der Richtung der Axe gegen einander verändert, vergrössert oder verringert.

Unter *Zug*-, bezw. *Druckfestigkeit* wird diejenige Kraft verstanden, welche in der Richtung der Axe auf die Flächeneinheit des Querschnittes höchstens wirken darf, ohne dass durch blossen Zug, bezw. Druck eine Zerstörung des Körpers stattfindet; die geringste Vergrösserung dieser Kraft würde demnach den Zusammenhang des Körpers zerstören.

Zu 2). *Beanspruchung auf Schub oder Abscheren* findet statt, wenn die äusseren Kräfte das Bestreben haben, zwei benachbarte Querschnitte längs einander zu verschieben, ohne dass ihre Entfernung in der Richtung der Axe sich ändert.

Unter *Schub- oder Abscherungsfestigkeit* wird diejenige Kraft verstanden, welche auf die Flächeneinheit des Querschnittes höchstens wirken darf, ohne dass eine Zerstörung des Körpers an dieser Stelle durch Verschiebung der Nachbarquerschnitte gegen einander erfolgt.

Zu 3). Die *Beanspruchung auf Biegung* tritt auf, wenn die äusseren Kräfte das Bestreben zeigen, zwei Nachbarquerschnitte um eine Axe derart zu drehen, dass die Entfernung zweier Querschnitte an den verschiedenen Querschnittspunkten sich ändert.

Biegungsfestigkeit ist die Beanspruchung, welche die am meisten gespannten Fasern des Körpers für die Flächeneinheit des Querschnittes höchstens ertragen können, ehe eine Zerftörung des Körpers durch Biegen, d. h. hier, bevor ein Zerbrechen eintritt.

Zu 4). Die Drehungsbeanfpruchung tritt auf, wenn die wirkenden Kräfte zwei Nachbarquerfchnitte gegen einander fo zu verdrehen ftreben, dafs ihre Entfernung gleich bleibt. Die Drehungsbeanfpruchung ift für die Hochbau-Conftructionen von untergeordneter Bedeutung.

Literatur.

Bücher über »Lehre von der Elafticität und Feftigkeit«.

Indem auf die Werke über »Mechanik«, die ftets einen Abrifs über »Elafticität und Feftigkeit« enthalten, nur ganz allgemein verwiefen werden mag, feien im Nachftehenden blofs die einfchlägigen Sonderfchriften namhaft gemacht:

Barlow, P. *Treatife on the ftrength of materials.* London 1833. — Neue Ausg. von W. Humber. 1867.
Lamé, G. *Leçons fur la théorie mathématique de l'élafticité des corps folides.* Paris 1852. — 2. Aufl. 1866.
Moll, C. L. & F. Reuleaux. Die Feftigkeit der Materialien etc. Braunfchweig 1853.
Morin, A. *Réfiftance des matériaux.* Paris 1853. — 3. Aufl. 1862.
Roffiaen, E. *Traité fur la réfiftance des matériaux dans les conftructions.* Lüttich 1858.
Bourdais, J. *Traité pratique de la réfiftance des matériaux appliquée à la conftruction etc.* Paris 1859.
Jeep, W. Die Feftigkeit der Materialien etc. Weimar 1861.
Shields, F. W. *The ftrains on ftructures of ironwork.* London 1861.
Clebsch, A. Theorie der Elafticität fefter Körper. Leipzig 1862.
Grashof, F. Theorie der Elafticität und Feftigkeit etc. Berlin 1866. — 2. Aufl. 1878.
Winkler, E. Die Lehre von der Elafticität und Feftigkeit etc. Theil 1. Prag 1867.
Anderson, C. E. *The ftrength of materials and ftructures.* London 1872.
Müller-Breslau, H. Elementares Handbuch der Feftigkeitslehre etc. Berlin 1875.
Kurz, A. Tafchenbuch der Feftigkeitslehre etc. Berlin 1877.
Hatfield, R. G. *Theory of transverfe ftrains and its application to the conftruction of buildings.* New-York 1877.
Sergent, E. *Traité pratique de la réfiftance des matériaux.* Paris 1878. — 5. Aufl. 1884.
Kent, W. *The ftrength of materials.* New-York 1879.
Lambert, P. Tabellarifche Zufammenftellung der Refultate aus der angewandten Feftigkeitslehre, mit befonderer Berückfichtigung von Conftructionen in Eifen und Holz. Zürich 1880.
Linglin, Th. *Traité élémentaire de la réfiftance des matériaux.* Paris 1880.
Madamet, A. *Réfiftance des matériaux.* Paris 1881.
Simerka, V. Elemente der technifchen Mechanik etc. Theil 1: Elemente der Feftigkeitslehre. Pilfen 1882.
Box, Th. *A practical treatife on the ftrength of materials etc.* London 1883.
Vigreux, L. *Traité théorétique et pratique de la réfiftance des matériaux.* Paris 1885.
Stoney, B. B. *The theory of ftreffes in girders and fimilar ftructures etc.* London 1885.
Uhlich, P. Die Feftigkeitslehre und ihre Anwendung. Mittweida 1885. — 2. Aufl.: Dresden 1887.
Planat, P. *Pratique de la mécanique appliquée à la réfiftance des matériaux.* Paris 1887.
Moos, N. A. *Elementary treatife on the ftrength of materials and ftrains in ftructures.* London 1887.
Aerts, L. *Eléments pratiques de la réfiftance des matériaux.* Paris 1888.
Brune, E. *Cours de conftruction profeffé à l'école des beaux-arts. 1e partie: Réfiftance des matériaux publiée avec le concours de* A. Flamant. Paris 1888.
Johnen, P. J. Elemente der Feftigkeitslehre etc. Weimar 1889.
Lauenstein, R. Die Feftigkeitslehre etc. Stuttgart 1889. — 4. Aufl. 1898.
Bach, C. Elafticität und Feftigkeit. Berlin 1889. — 3. Aufl. Berlin 1898.
Glinzer. Grundrifs der Feftigkeitslehre. Dresden 1890.
Müller-Breslau, F. B. Die neueren Methoden der Feftigkeitslehre und der Statik der Bauconftructionen. Leipzig 1893—96.
Keck, W. Vorträge über Elafticitäts-Lehre als Grundlage für die Feftigkeits-Berechnung der Bauwerke. Hannover 1893.
Duquesnay, M. *Réfiftance des matériaux.* Paris 1893. — 2. Aufl. 1897.

TETMAJER. Die Gefetze der Knickfeftigkeit. Zürich 1896.
KECK, W. Vorträge über Mechanik. Theil 2. Hannover 1897.
FOEPPL, A. Vorlefungen über Technifche Mechanik. Band 3: Feftigkeitslehre. Leipzig 1897.
DUPLAIX, M. *Réfiftance des matériaux etc.* Paris 1897.

---

2. Kapitel.

Zug und Druck, bezw. Zug- und Druckfeftigkeit.

81. Elafticitäts-gefetz.

Die reine Zug- und Druckelafticität kommt nur bei geraden Stäben vor.

Die Gefetze für alle Arten der Beanfpruchung ergeben fich aus denjenigen, welche für die Zug- und Druckbeanfpruchung gelten; demnach mufs die letztere die Grundlage für die ganze Behandlung bilden.

Die gefammte Elafticitätslehre beruht auf folgendem Gefetze:

1) Die Verlängerung, bezw. Verkürzung eines in feiner Axenrichtung, d. h. auf Zug- oder Druckelafticität beanfpruchten Stabes ift, fo lange die Beanfpruchung innerhalb der Elafticitätsgrenze bleibt, der urfprünglichen Länge des Stabes direct proportional. Das Verhältnifs der Verlängerung (pofitiv oder negativ genommen) zu der urfprünglichen Länge wird die Dehnung oder das Verlängerungsverhältnifs genannt.

2) Die Verlängerung eines, wie angegeben, beanfpruchten Stabes ift, fo lange die Spannung deffelben innerhalb der Elafticitätsgrenze liegt, direct proportional der im Stabe herrfchenden Spannung. Ift alfo die Spannung im Stabe σ, fo ift die Verlängerung, alfo auch das Verlängerungsverhältnifs σ-mal fo grofs, als bei der Spannung 1.

Dasjenige Verlängerungsverhältnifs, welches bei der Spannung eintritt, die gleich der Krafteinheit ift, bezeichnet man mit $\frac{1}{E}$. Nennt man die urfprüngliche Länge des Stabes l und die bei der Spannung σ eintretende Verlängerung Δl, fo findet nach dem unter 2 gegebenen Gefetze ftatt:

$$\frac{\Delta l}{l} = \sigma \frac{1}{E} = \frac{\sigma}{E} \qquad \text{34.}$$

Die Gleichung 34 kann man als die Grundgleichung der Elafticitätslehre auffaffen (*Hooke*'fches Gefetz).

Der Werth E ift vom Bauftoff abhängig; man nennt E Elafticitäts-Modulus, Elafticitäts-Coefficient oder Elafticitätsziffer, auch wohl Elafticitätsmafs. E ift der umgekehrte (reciproke) Werth des Verlängerungsverhältniffes, welches durch die Kraft 1 an einem Stabe vom Querfchnitt gleich der Flächeneinheit hervorgebracht wird. *Bach* bezeichnet $\frac{1}{E}$ mit α, und nennt diefen Werth den Dehnungscoefficienten; dies ift alfo das Verlängerungsverhältnifs, welches bei der Belaftung eines Stabes vom Querfchnitt gleich der Flächeneinheit (1 qcm) mit der Lafteinheit (1 kg) eintritt.

Das in Gleichung 34 ausgefprochene »*Hooke*'fche Gefetz« hat von den wichtigeren Bauftoffen nur für Schweifseifen, Flufseifen und Stahl Giltigkeit. Allgemein fcheint der Ausdruck nach den neueften Unterfuchungen von *Bach* und *Schüle* zu lauten:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma^m}{E} \qquad \text{35.}$$

Für die vorgenannten Bauſtoffe iſt dann $m = 1$, woraus ſich die Gleichung 34 ergiebt. Für Guſseiſen und Körper aus Cementmörtel und Beton fand *Bach*[19]) bei

Bauſtoff	Beanſpruchung auf Zug		Beanſpruchung auf Druck	
	E	m	E	m
1) Guſseiſen:				
Körper vorher nicht belaſtet	1338000	1,083	1320000 1043000	1,0685 1,035
Körper vorher ſtark belaſtet	1150000	1,1	1217000 1124000	1,052 1,048
2) Körper aus Cementmörtel:				
1 Theil Cement, 1½ Theile Donauſand	—	—	356000	1,11
1 Theil Cement, 3 Theile Donauſand	—	—	315000	1,15
1 Theil Cement, 4½ Theile Donauſand	—	—	230000	1,17
3) Körper aus Beton:				
1 Theil Cement, 2½ Theile Donauſand, 5 Theile Donaukies	—	—	298000	1,145
1 Theil Cement, 5 Theile Donauſand, 6 Theile Donaukies	—	—	280000	1,137
1 Theil Cement, 5 Theile Donauſand, 10 Theile Donaukies	—	—	217000	1,157
1 Theil Cement, 2½ Theile Eggingerſand, 5 Theile Kalkſteinſchotter	—	—	457000	1,157
1 Theil Cement, 3 Theile Donauſand, 6 Theile Kalkſteinſchotter	—	—	380000	1,164
1 Theil Cement, 5 Theile Eggingerſand, 10 Theile Kalkſteinſchotter	—	—	367000	1,207
	Kilogr. für 1 qcm		Kilogr. für 1 qcm	

Wirkt auf einen Stab, deſſen Querſchnitt F Flächeneinheiten enthält, deſſen Querſchnitt alſo gleich F iſt, eine Kraft P und kann man annehmen, daſs dieſe Kraft ſich gleichmäſsig über den ganzen Querſchnitt vertheilt, ſo iſt die Spannung für die Flächeneinheit derſelben $\sigma = \frac{P}{F}$, und wenn man dieſen Werth für σ in die Gleichung für $\frac{\Delta l}{l}$ einſetzt, erhält man

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{FE} \quad \text{oder} \quad \Delta l = \frac{Pl}{FE} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 36.$$

Die hier vorgeführten Ergebniſſe gelten ſowohl, wenn die Verlängerung eine poſitive, d. h. eine wirkliche Verlängerung, als auch wenn ſie eine negative, d. h. eine Verkürzung iſt. Sie gelten alſo ſowohl für Zug- als auch für Druckbeanſpruchungen; nur hat für erſtere im Allgemeinen E einen anderen Werth, als für letztere.

Es iſt üblich, die Zugbeanſpruchungen als poſitive und die Druckbeanſpruchungen als negative Gröſsen einzuführen. Im Folgenden ſoll, wo nichts Gegentheiliges bemerkt iſt, dieſe Bezeichnungsweiſe durchgeführt werden.

Die Gleichung $\sigma = \frac{P}{F}$ kann benutzt werden, um die Gröſse der Kraft zu beſtimmen, mit welcher ein Stab von gegebenem Querſchnitt höchſtens auf Zug bezw. Druck beanſprucht werden darf. 82. Zuläſſige Beanſpruchung.

Nach dieſer Gleichung iſt $P = \sigma F$. Wird für σ der gröſste Werth $\mathfrak{S}$ eingeſetzt, welchen das Material auf die Flächeneinheit des Querſchnittes höchſtens erleiden kann, ohne zerſtört zu werden, d. i. der Feſtigkeits-Coefficient, ſo ergiebt ſich $\mathfrak{P}_{max} = \mathfrak{S} F$. In dieſer Gleichung iſt $\mathfrak{P}_{max}$ diejenige Belaſtung, deren geringſte

19) Siehe: Bach, a. a. O., S. 33, 34, 57, 58.

Vergröfserung das Zerreifsen, bezw. Zerdrücken des Stabes zur Folge haben würde; $\mathfrak{S}$ ift nach Früherem die Zug-, bezw. Druckfeftigkeit.

Die Stäbe werden nicht bis zu diefer Grenze beanfprucht; vielmehr werden Sicherheits-Coefficienten eingeführt, welche für verfchiedene Bauftoffe verfchiedene Werthe haben. Man trägt durch diefelben den etwa möglichen Ueberlaftungen, den Fehlern im Bauftoff, den im Laufe der Zeit möglichen Veränderungen durch Roft, Faulen etc., den Stöfsen und anderen ungünftigen Einflüffen Rechnung.

Bezeichnet n den Sicherheits-Coefficienten, fo ift als wirkliche Gröfstbelaftung P des Stabes nur $\frac{1}{n}$ von $\mathfrak{P}_{max}$ einzuführen, d. h. es darf nur fein:

$$P = \frac{\mathfrak{S} F}{n}.$$

Man nennt nun $\frac{\mathfrak{S}}{n}$ die zuläffige Beanfpruchung, die im Folgenden mit K bezeichnet werden foll. Es ift demnach

$$K = \frac{\mathfrak{S}}{n} \quad \text{und} \quad P = KF.$$

Aus den vorftehenden Gleichungen folgt als Bedingungsgleichung für die Querfchnittsgröfse:

$$F = \frac{P_{max}}{K} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 37.$$

In diefer Gleichung bedeutet P_{max} die im ganzen Stabe höchftens auftretende Kraft.

Für die meiften Bauftoffe mufs man fich damit begnügen, die zuläffige Beanfpruchung K aus den Feftigkeits-Coefficienten $\mathfrak{S}$ unter Annahme eines nach der Erfahrung ausreichenden Sicherheits-Coefficienten n abzuleiten. Die üblichen Werthe für K und die wichtigften Bauftoffe find in den Tabellen auf S. 64 angegeben.

83. Querfchnittsbeftimmung für Schweifseifen- und Flufseifenftäbe.

Für folche Bauftoffe, für welche die Elafticitätsgrenze mit genügender Sicherheit angegeben werden kann (Schweifseifen, Flufseifen, Stahl) erhält man Formeln für die Querfchnittsbeftimmung durch nachftehende Ueberlegung.

Da die Bauftoffe, fobald die Beanfpruchungen die Elafticitätsgrenze überfchreiten, merkbare bleibende Veränderungen erleiden, fo mufs die Ueberfchreitung der Elafticitätsgrenze bei der Belaftung vermieden werden. Die Lage der Elafticitätsgrenze ift aber nach Früherem nicht mit vollftändiger Gewifsheit bekannt; auch haben kleine Arbeitsfehler fehr grofsen, fchädlichen Einflufs. Defshalb mufs man mit der zuläffigen Beanfpruchung wefentlich unter der Elafticitätsgrenze bleiben, fo dafs auch eine unbeabfichtigte Vergröfserung der Spannung, in Folge etwaiger Fehler, felbft die tiefer als erwartet liegende Elafticitätsgrenze nicht erreicht. Beim Schweifseifen und Flufseifen, den wichtigften einer genauen Berechnung zu unterwerfenden Bauftoffen, kann man diefe zuläffige Beanfpruchung auf die Hälfte bis zwei Drittel der Spannung an der Elafticitätsgrenze feft ftellen. Wenn die Belaftung ruhend, ohne Stöfse, ftattfindet, fo ift die höhere Grenze zuläffig; wirkt die Laft dagegen in Verbindung mit Stöfsen, fo ift die untere Grenze einzuführen.

84. Nur gezogene oder nur gedrückte Schweifseifen- und Flufseifenftäbe.

Für fchweifs- und flufseiferne Stäbe, welche nur gezogen, bezw. nur gedrückt werden, kann man einen genaueren Anhalt über die zu wählenden Beanfpruchungen folgendermafsen finden. Wenn der Stab abwechfelnd eine höhere und niedrigere Beanfpruchung zu erleiden hat, etwa dadurch, dafs die betreffende Conftruction zeitweilig aufser dem Eigengewicht noch eine Nutzlaft trägt, fo mögen die obere und untere Grenze der ganzen Stabkraft P_{max} und P_{min} fein; die entfprechenden Grenzen der auf die Flächeneinheit entfallenden Spannungen feien

$$\sigma_{max} = \frac{P_{max}}{F} \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = \frac{P_{min}}{F}.$$

Bei diefer Art der Beanfpruchung kann von der Rückfichtnahme auf das Vorzeichen abgefehen werden; man braucht hier nur die abfoluten Werthe der Stabkräfte in das Auge zu faffen.

Die Verkehrslaft tritt ftets mit gröfseren oder geringeren Stöfsen verbunden auf, welchem Umftande man dadurch Rechnung trägt, dafs man diefelbe mit einem Werthe $(1 + \mu)$ multiplicirt in die Rechnung einführt; dabei ift μ der fog. Stofscoefficient. Durch das Eigengewicht allein wird P_{min}, bezw. σ_{min} erzeugt; durch Eigengewicht und Verkehrslaft werden P_{max}, bezw. σ_{max} hervorgerufen; demnach wird die Verkehrslaft allein

$$(P_{max} - P_{min}), \text{ bezw. } (\sigma_{max} - \sigma_{min})$$

erzeugen. Wird nun die Verkehrslaft mit $(1 + \mu)$ multiplicirt eingeführt, fo wird durch diefelbe die Spannung $(1 + \mu)(\sigma_{max} - \sigma_{min})$ auf die Flächeneinheit des Querfchnittes hervorgerufen; die gefammte Beanfpruchung auf die Flächeneinheit ift alsdann

$$\sigma_{min} + (1 + \mu)(\sigma_{max} - \sigma_{min}).$$

Wäre man vor unbeabfichtigten Spannungen in der Conftruction ganz ficher, fo könnte man diefe foeben entwickelte Spannung gleich derjenigen an der Elafticitätsgrenze fetzen; da aber unbeabfichtigte Spannungen fehr wohl auftreten können, da eine Querfchnittsverminderung durch Roften nicht ausgefchloffen ift, auch wohl einmal höhere Verkehrslaften, als angenommen find, vorkommen können, fo wird es fich empfehlen, die oben vorgeführte Spannung nur auf $^2/_3$ der Spannung an der Elafticitätsgrenze feft zu ftellen. Nimmt man die Spannung an der Elafticitätsgrenze

für Schweifseifen zu 1600^{kg} für 1^{qcm},
für Flufseifen zu 2000^{kg} für 1^{qcm}

an und rundet man ab, fo ergiebt fich als Bedingungsgleichung

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für Schweifseifen:} & \sigma_{min} + (1 + \mu)(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 1050 \\ \text{für Flufseifen:} & \sigma_{min} + (1 + \mu)(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 1350 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 38.$$

Die Auflöfung nach σ_{max} ergiebt für Schweifseifen:

$$\sigma_{max} = \frac{1050}{1 + \mu - \mu \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 39.$$

σ_{max} ift die zuläffige Beanfpruchung, und die erforderliche Querfchnittsfläche des Stabes wird

$$F = \frac{P_{max}}{\sigma_{max}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 40.$$

Nun ift offenbar $\sigma_{min} = \frac{P_{min}}{F}$ und $\sigma_{max} = \frac{P_{max}}{F}$, demnach

$$\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{P_{min}}{P_{max}} \quad \text{und} \quad \sigma_{max} = \frac{1050}{1 + \mu - \mu \frac{P_{min}}{P_{max}}}.$$

Man kann $\mu = 0{,}5$ fetzen; P_{min} und P_{max} find bekannt, mithin auch σ_{max}. Es wird

$$\sigma_{max} = \frac{1050}{1{,}5 - 0{,}5 \frac{P_{min}}{P_{max}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 41.$$

Wird der Werth für σ_{max} aus Gleichung 41 in die Gleichung 40 eingeführt, fo ergiebt fich

$$F = \frac{P_{max}\left(1{,}5 - \dfrac{0{,}5\, P_{min}}{P_{max}}\right)}{1050} = \frac{1{,}5\, P_{max} - 0{,}5\, P_{min}}{1050}.$$

Werden die durch das Eigengewicht, bezw. die Verkehrslaft allein im ganzen Stabe erzeugten Stabkräfte mit P_0, bezw. P_1 bezeichnet, fo ift

$$P_{max} = P_0 + P_1 \quad \text{und} \quad P_{min} = P_0,$$

alfo

$$F = \frac{1{,}5\, P_0 + 1{,}5\, P_1 - 0{,}5\, P_0}{1050} = \frac{P_0 + 1{,}5\, P_1}{1050} = \frac{P_0}{1050} + \frac{P_1}{700} \quad . \quad . \quad 42.$$

Gleichung 42 gilt für Schweifseifenftäbe, welche nur auf Zug oder nur auf Druck beanfprucht werden.

Für Flufseifen ergiebt fich in gleicher Weife aus obiger Gleichung:

$$\sigma_{max} = \frac{1350}{1{,}5 - 0{,}5\, \dfrac{P_{min}}{P_{max}}} \quad . \quad . \quad . \quad 43.$$

$$F = \frac{P_0 + 1{,}5\, P_1}{1350}$$

oder

$$F = \frac{P_0}{1350} + \frac{P_1}{900} \quad . \quad . \quad . \quad 44.$$

Die Werthe für P_0 und P_1 find in abfoluten Zahlen, und zwar in Kilogr., einzufetzen, und man erhält F in Quadr.-Centim.

85. Schweifseifen- und Flufseifenftäbe, die abwechfelnd gezogen und gedrückt werden.

Weniger einfach werden die Formeln für F, wenn die Beanfpruchungen zwifchen Zug und Druck wechfeln; die Entwickelung nachftehender Formeln für Schweifseifen ift in des Verfaffers unten genannter Abhandlung zu finden [20].

Es bedeuten: P_0 die Stabfpannung, welche durch das Eigengewicht allein hervorgerufen wird; P_1 die durch ungünftigfte Verkehrslaft allein hervorgerufene Stabfpannung, welche mit P_0 gleichen Sinn hat (Zug oder Druck, je nachdem P_0 Zug oder Druck bedeutet); P_2 die durch ungünftigfte Verkehrslaft allein hervorgerufene Stabfpannung, welche entgegengefetzten Sinn hat, wie P_0 (Druck oder Zug, je nachdem P_0 Zug oder Druck bedeutet).

Falls (alle Werthe abfolut genommen) $P_2 < \frac{2}{3} P_0$ ift, fo find die obigen Formeln 42, bezw. 44 anzuwenden; alsdann ift die Berechnung genau fo, als ob P_2 gar nicht vorhanden wäre.

Wenn dagegen $P_2 > \frac{2}{3} P_0$ ift, fo ermittele man F nach folgenden Formeln:

1) Schweifseifen:

für $P_2 - P_1 < \frac{4}{3} P_0$

$$F = \frac{P_0}{1575} + \frac{P_1}{700} + \frac{P_2}{2100}$$

oder

$$F = \frac{3\, P_1 + P_2 + \frac{4}{3} P_0}{2100} \quad . \quad 45.$$

für $P_2 - P_1 > \frac{4}{3} P_0$

$$F = -\frac{P_0}{1575} + \frac{P_1}{2100} + \frac{P_2}{700}$$

$$F = \frac{3\, P_2 + P_1 - \frac{4}{3} P_0}{2100} \quad . \quad 46.$$

[20]) Ueber die Beftimmung der Querfchnitte von Eifenconftructionen. Zeitfchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1888, S. 575.

2) Flufseifen:

für $P_2 - P_1 < \frac{4}{3} P_0$

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{P_0}{2000} + \frac{P_1}{900} + \frac{P_2}{2700} \\ \text{oder } F &= \frac{3 P_1 + P_2 + \frac{4}{3} P_0}{2700} \end{aligned} \right\} \quad . \quad 47.$$

für $P_2 - P_1 > \frac{4}{3} P_0$

$$\left. \begin{aligned} F &= -\frac{P_0}{2000} + \frac{P_1}{2100} + \frac{P_2}{900} \\ F &= \frac{3 P_2 + P_1 - \frac{4}{3} P_0}{2700} \end{aligned} \right\} \quad . \quad 48.$$

Die Werthe für P_0, P_1, P_2 find in vorftehende Formeln in Kilogr. und in abfoluten Zahlen einzufetzen; man erhält alsdann F in Quadr.-Centim.

Beifpiele. 1) Es fei $P_0 = 36000^{\text{kg}}$, $P_1 = 48000^{\text{kg}}$ und $P_2 = -18000^{\text{kg}}$. Alsdann ift, abfolut genommen, $P_2 < \frac{2}{3} P_0$; denn es ift $18000 < \frac{2}{3} \cdot 36000$. Sonach kommen die Formeln 42, bezw. 44 zur Anwendung. Man erhält

$$\text{für Schweifseifen: } F = \frac{36000 + 1{,}5 \cdot 48000}{1050} = 103^{\text{qcm}},$$

$$\text{für Flufseifen: } F = \frac{36000 + 1{,}5 \cdot 48000}{1350} = 80^{\text{qcm}}.$$

Diefelben Ergebniffe wären zu verzeichnen für

$$P_0 = -36000^{\text{kg}}, \ P_1 = -48000^{\text{kg}} \text{ und } P_2 = 18000^{\text{kg}};$$

Alles bleibt genau wie vorftehend.

2) Es fei $P_0 = 7600^{\text{kg}}$, $P_1 = 29000^{\text{kg}}$ und $P_2 = -23200^{\text{kg}}$. Alsdann ift, abfolut genommen, $P_2 > \frac{2}{3} P_0$; denn es ift $23200 > \frac{2}{3} \cdot 7600$. Daher mufs eine der Gleichungen 45, 46, 47 oder 48 angewendet werden. Ferner ift, wieder abfolut genommen, $P_2 - P_1 = 23200 - 29000 = -5800^{\text{kg}}$ und $\frac{4}{3} P_0 = \frac{4}{3} \cdot 7600 = 10130^{\text{kg}}$; fomit ift $P_2 - P_1 < \frac{4}{3} P_0$. Daher kommen Formel 45, bezw. 47 zur Verwendung. Man erhält

$$\text{für Schweifseifen: } F = \frac{3 \cdot 29000 + 23200 + \frac{4}{3} \cdot 7600}{2100} = 90^{\text{qcm}},$$

$$\text{für Flufseifen: } F = \frac{3 \cdot 29000 + 23200 + \frac{4}{3} \cdot 7600}{2700} = 70^{\text{qcm}}.$$

Diefelben Werthe hätten fich auch ergeben, für

$$P_0 = -7600^{\text{kg}}, \quad P_1 = -29000^{\text{kg}} \text{ und } P_2 = 23200^{\text{kg}},$$

da für die Kriterien und die Formeln nur die abfoluten Werthe in Frage kommen.

3) Es fei $P_0 = -12000^{\text{kg}}$, $P_1 = -4000^{\text{kg}}$ und $P_2 = +24000^{\text{kg}}$. Alsdann ift abfolut genommen, $P_2 > \frac{2}{3} P_0$, da $24000 > \frac{2}{3} \cdot 12000$ ift; weiter ift auch $P_2 - P_1 > \frac{4}{3} P_0$, da $24000 - 4000 > \frac{4}{3} \cdot 12000$ ift. Mithin find die Formeln 46 oder 48 zu verwenden. Man erhält

$$\text{für Schweifseifen: } F = \frac{3 \cdot 24000 + 4000 - \frac{4}{3} \cdot 12000}{2100} = \backsim 29^{\text{qcm}},$$

$$\text{für Flufseifen: } F = \frac{3 \cdot 24000 + 4000 - \frac{4}{3} \cdot 12000}{2700} = \backsim 23^{\text{qcm}}.$$

Diefelben Werthe hätten fich auch ergeben für

$$P_0 = 12000^{\text{kg}}, \quad P_1 = 4000^{\text{kg}} \text{ und } P_2 = -24000^{\text{kg}}.$$

In der Spalte 5 der umftehenden Tabelle find für die hauptfächlichften Conftructions-Materialien die üblichen Werthe der zuläffigen Beanfpruchung K zufammengeftellt; ferner find in der Tabelle die Elafticitäts-Coefficienten, die Feftigkeits-Coefficienten, fo wie diejenigen Beanfpruchungen angegeben, bei welchen die Elafticitätsgrenze erreicht wird. Naturgemäfs können die in der Tabelle angegebenen Werthe nur Mittelwerthe fein, die fich mit der Güte des Materials, der Art der Beanfpruchung und anderen Umftänden ändern. 86. Tabellen.

1. Bezeichnung der Materialien	2. Elasticitäts-Coefficient E	3. Festigkeits-Coefficient bei Beanspruchung auf		4. Beanspruchung an der Elasticitätsgrenze auf		5. Zulässige Beanspruchung K für endgiltige Bauwerke: Belastung mit starken Stößen		endgiltige Bauwerke: Belastung mit mäßigen Erschütterungen		zeitweilige Bauten, Belastung mit mäßigen Erschütterungen	
		Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck
Schweißeisen	2000	3500 bis 4000	3200 bis 3600	$1_{,6}$	$1_{,6}$	700	700	1000	1000	—	—
Flußeisen	2200	4000 bis 4200	4000 bis 4200	$2_{,0}$ bis $2_{,4}$	$2_{,0}$ bis $2_{,4}$	900	900	1200	1200	—	—
Gußeisen	—	1250 bis 1450	7500 bis 8000	—	—	—	—	250	500	—	—
Stahl	2000 bis 2400	7000 bis 8000		3000 bis 4000		1500	1500	2000	2000	—	—
Holz in der Faserrichtung:											
Eichenholz	120	965	487	$0_{,26}$	$0_{,21}$	—	—	90	65	180	130
Kiefernholz	120	820	410	$0_{,29}$	$0_{,22}$	—	—	80	60	160	110
Holz radial, d. h. in der Richtung der Jahresringe:											
Eichenholz	$18_{,9}$	120	270	—	—	—	—	—	—	—	—
Kiefernholz	$9_{,6}$	120	270	—	—	—	—	—	—	—	—
	Tonnen für 1 qcm	Kilogr. für 1 qcm		Tonnen für 1 qcm		Kilogr. für 1 qcm					

Das Berliner Polizei-Präsidium legt bei seinen Berechnungen die nachstehend angegebenen Zahlenwerthe als zulässige Beanspruchung zu Grunde (Bekanntmachung vom 21. Februar 1887):

Material	Zulässige Beanspruchung auf Zug	Druck
Schweißeisen	750	750
Gußeisen	250	500
Bombirtes Eisenblech	500	500
Eisendraht	1200	—
Eichen- und Buchenholz	100	80
Kiefernholz	100	60
Granit	—	45
Sandstein, je nach der Härte	—	15 bis 30
Rüdersdorfer Kalkstein in Quadern	—	25
Kalksteinmauerwerk in Kalkmörtel	—	5
Gewöhnliches Ziegelmauerwerk	—	7
Ziegelmauerwerk in Cementmörtel	—	11
Bestes Klinkermauerwerk in Cementmörtel	—	12 bis 14
Mauerwerk aus porösen Steinen	—	3 bis 6
Guter Baugrund	—	$2_{,5}$
	Kilogr. für 1 qcm	

Neuerdings gestattet das Berliner Polizei-Präsidium[21]) für Schweißeisen eine Beanspruchung bis 1000 kg auf 1 qcm für Zug und Druck, wenn die Belastung vorwiegend ruhend ist oder wenn die Nutzlast so groß in die Rechnung eingeführt ist, daß unvorhergesehene Vergrößerung ausgeschlossen ist und Erschütterungen nicht zu befürchten sind. Diese Vergünstigung wird nur für Theile zugestanden, welche nur Zug oder nur Druck zu ertragen haben und keine Nietverschwächung aufweisen. Für bestes Klinkermauerwerk in reinem Cementmörtel wird von derselben Behörde ein größter Druck bis zu 20 kg für 1 qcm und ein größter Zug bis 1 kg für 1 qcm zugelassen.

87. Beispiele.

Beispiele. 1) Eine schweißeiserne Stange werde höchstens mit einer Zugkraft $P = 18750$ kg beansprucht. Es ist die Querschnittsgröße unter der Annahme zu bestimmen, daß die Stange einer endgiltigen Construction angehört und die Belastung nur mit mäßigen Erschütterungen auftritt.

Nach vorstehender Tabelle ist für den vorliegenden Fall $K = 1000$ kg, sonach

$$F = \frac{P}{K} = \frac{18750}{1000} = 18_{,75} \text{ qcm}.$$

[21]) Siehe: FRÖLICH, H. Elementare Anleitung zur Anfertigung statischer Berechnungen etc. 2. Aufl. Berlin 1897. S. 4.

Wenn die Stange aus Rundeifen conftruirt werden foll, fo mufs fein:

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 18{,}75}{3{,}14}} = 4{,}9 \text{ cm}.$$

Wird entfprechend den Annahmen des Berliner Polizei-Präfidiums $K = 750$ kg gefetzt, fo mufs

$$F = \frac{P}{K} = \frac{18750}{750} = 25 \text{ qcm}$$

fein und

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 5{,}64 \text{ cm}.$$

2) Bei einer gufseifernen gedrückten Stange fei die gröfste Druckkraft $P = 5850$ kg. Der Querfchnitt derfelben ift demnach, wenn die Conftruction wiederum als endgiltig und die Belaftung als mit mäfsigen Erfchütterungen wirkend angenommen wird,

$$F = \frac{P}{K} = \frac{5850}{500} = 11{,}7 \text{ qcm}.$$

Bei Wahl eines kreisförmigen Querfchnittes ergiebt fich der Durchmeffer d aus der Gleichung:

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 11{,}7}{3{,}14}} = 3{,}8 \text{ cm}.$$

3) Auf einen Holzftab mit rechteckigem Querfchnitt wirke ein Gröfstdruck $P = 16000$ kg. Der Stab foll einer zeitweiligen Conftruction, welche mäfsigen Erfchütterungen ausgefetzt ift, angehören; verwendet wird Kiefernholz. Nach Gleichung 37 ergiebt fich

$$F = \frac{16000}{110} = 145{,}4 \text{ qcm}.$$

Ein quadratifcher Querfchnitt von $12{,}1$ cm Seitenlänge würde demnach genügen.

4) Wäre im erften Beifpiele die Stabkraft durch das Eigengewicht $P_0 = 6750$ kg, diejenige durch Verkehrslaft $P_1 = 12000$ kg, fo ergäbe fich aus Gleichung 42

$$F = \frac{6750}{1050} + \frac{12000}{700} = 6{,}43 + 17{,}14 = 23{,}57 \text{ qcm},$$

und es müffte fein:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 23{,}57}{3{,}14}} = \infty 5{,}5 \text{ cm}.$$

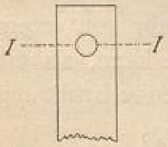
Von der bei den gedrückten Stäben wegen Beanfpruchung auf Zerknicken vorzunehmenden Vergröfserung des Querfchnittes wird im nächften Abfchnitt (Kap. 2) die Rede fein.

88. Beanfpruchung bei Querfchnitts-veränderungen.

Die Gleichung $\sigma = \frac{P}{F}$ ergab fich unter der Annahme einer gleichförmigen Vertheilung der Kraft P über die ganze Querfchnittsfläche F. Diefe Annahme ift aber nur richtig, wenn 1) der Querfchnitt des Körpers conftant ift und 2) die äufsere Kraft P fich über die Endflächen gleichmäfsig vertheilt. Die Gefetze der Kraftvertheilung für den Fall, dafs diefe beiden Bedingungen nicht erfüllt find, können auf rein theoretifchem Wege nicht oder nur in einzelnen Fällen genau ermittelt werden. Gewöhnlich wird jedoch bei den Berechnungen auf die Nichtbekanntfchaft mit diefen Gefetzen keine Rückficht genommen und die Gleichung $\sigma = \frac{P}{F}$ auch für diefe Fälle einfach als richtig angenommen.

Wenn ein Stab an einigen Stellen kleinere Querfchnittsflächen, als an anderen hat, fo ift der Berechnung des Stabes die kleinfte Querfchnittsfläche zu Grunde zu legen und diefe fo zu bemeffen, dafs die in ihr wirkende Spannung an keiner Stelle die zuläffige Beanfpruchung überfteigt. Findet in dem betreffenden Querfchnitte die Kraft P ftatt, fo berechnet man die Querfchnittsfläche F an diefer Stelle nach der Gleichung 37

Fig. 78.



$$F = \frac{P}{K},$$

Fig. 79.

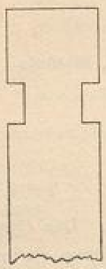
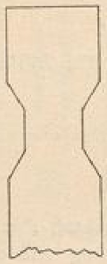


Fig. 80.



worin K die zulässige Beanspruchung bedeutet, bezw. nach den Gleichungen 42 bis 48. Der umstehende Stab (Fig. 78) hat seine kleinste Querschnittsfläche im Querschnitte II, welcher der Nietmitte entspricht, und diese Querschnittsfläche muss demnach der obigen Gleichung genügen. Aehnlich ist bei den Stäben in Fig. 79 u. 80 die durch die Verengung bestimmte Stelle als schwächste der Berechnung zu Grunde zu legen. Dabei ist jedoch zu beachten, dass bei Anwendung obiger Gleichung für K ein anderer Werth als derjenige einzuführen ist, welcher für Berechnung einer ungeschwächten Stange zu Grunde gelegt wird; man kann nämlich nicht annehmen, dass die Kraft P sich gleichmässig über den verschwächten Querschnitt vertheilt; die grösste Beanspruchung findet in Fig. 78 neben dem Nietloche statt. Es empfiehlt sich demnach, für K einen kleineren Werth einzuführen, als zur Berechnung des unverschwächten Stabes.

89. Längenänderung der Stäbe.

Die Grösse der Längenänderung gezogener oder gedrückter Stäbe ergiebt die Gleichung 36:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{FE} \quad \text{oder} \quad \Delta l = \frac{Pl}{FE}.$$

Beispiel. Ist bei der in Beispiel 1 auf S. 64 angenommenen Stange $l = 5^{\text{m}}$, so wird

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{18750}{18{,}75\,E}.$$

Nach der Tabelle in Art. 86 (S. 64) ist für Schweisseisen $E = 2000000^{\text{kg}}$ für 1^{qcm}; daher

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{18750}{18{,}75 \cdot 2000000} = 0{,}0005 \quad \text{und} \quad \Delta l = 0{,}0005 \cdot 5 = 0{,}0025^{\text{m}} = 0{,}25^{\text{m}}.$$

Die Verlängerung beträgt also $2{,}5^{\text{mm}}$.

Betrachtet man die Gleichung 34:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$$

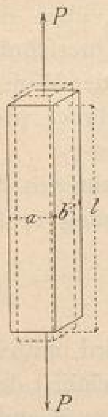
und untersucht, wie gross die Spannung σ für die Flächeneinheit des Querschnittes sein müsste, damit die Verlängerung Δl genau so gross würde, wie die ursprüngliche Stablänge — vorausgesetzt, dass diese Formel für das Verlängerungsverhältniss noch bis zu der in diesem Falle nöthigen Spannungsgrösse gelten würde, so erhält man

$$\frac{l}{l} = \frac{\sigma}{E} = 1 \quad \text{oder} \quad \sigma = E,$$

d. h. diejenige Spannung für die Flächeneinheit, welche den Stab auf die doppelte Länge verlängern würde, wenn das Verlängerungsgesetz innerhalb dieser Grenzen giltig wäre, ist gleich E. Daher findet man häufig den Elasticitäts-Modulus folgendermassen erklärt: Der Elasticitäts-Modulus ist diejenige Spannung, welche für die Flächeneinheit des Stabquerschnittes wirken müsste, um den Stab auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge zu vergrössern, falls innerhalb der dadurch bedingten Spannungsgrenzen das Elasticitätsgesetz giltig bliebe.

Bei Beanspruchung auf Druck würde die Verkürzung in diesem Falle gleich l sein, d. h. der Stab würde zur Länge Null zusammengedrückt werden. Da die Elasticitätsgesetze nicht bis zu den erwähnten Grenzen gelten, vielmehr von einem annähernd constanten Elasticitäts-Modul E nur so lange die Rede sein kann, als die Spannungen innerhalb der Elasticitätsgrenze bleiben, so ist die vorstehende Erklärung des Elasticitäts-Moduls nicht zweckmässig.

Fig. 81.



Die auf einen Körper wirkenden Kräfte P erzeugen auſser der Längenänderung in der Kraftrichtung auch ſolche in allen anderen Richtungen. Wir legen durch einen beliebigen Punkt der Stabaxe (Fig. 81) drei Coordinatenaxen, deren eine mit der Stabaxe zuſammenfällt, deren andere beiden ſenkrecht zur erſteren ſtehen. Man nennt ſodann die Längenänderung in der Richtung der Stabaxe die longitudinale, diejenigen in den Richtungen der beiden anderen Axen die transverſalen Längenänderungen.

90. Aenderungen der Querſchnittsmaſse.

Die transverſalen Längenänderungen ſind der longitudinalen Längenänderung umgekehrt proportional. Bezeichnet μ einen für verſchiedene Materialien beſonders zu ermittelnden Zahlenwerth, ſo iſt

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{1}{\mu}\frac{\Delta l}{l} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{\mu_1}\frac{\Delta l}{l}.$$

Nun iſt nach Gleichung 34: $\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$, daher

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{1}{\mu}\frac{\sigma}{E} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{\mu_1}\frac{\sigma}{E}.$$

Bei Körpern, welche nach allen Richtungen gleiche Elaſticität beſitzen, d. h. bei ſog. iſotropen Körpern, iſt $\mu = \mu_1$, daher

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{\mu}\frac{\sigma}{E}.$$

Für iſotrope Körper liegt μ zwiſchen 3 und 4.

---

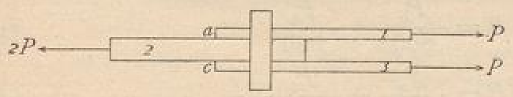
3. Kapitel.

Schub und Schubfeſtigkeit.

91. Schubſpannungen.

Der Fall der reinen Schubbeanſpruchung tritt, wie bereits in Art. 80 (S. 56) geſagt wurde, ein, wenn die wirkenden Kräfte das Beſtreben haben, zwei Nachbarquerſchnitte ſo gegen einander zu verſchieben, daſs die Entfernung der Querſchnittsebenen dieſelbe bleibt. Dies iſt nur möglich, wenn die Kräfte unmittelbar neben der Ebene wirken, längs deren das Beſtreben einer Verſchiebung ſtattfindet, und wenn dieſelben ſich zu zwei Kräften vereinen laſſen, welche einander nach Gröſse und Richtung genau gleich, dem Sinne nach entgegengeſetzt ſind. Man nennt dieſe Kräfte die abſcherenden Kräfte.

Fig. 82.



In der Technik kommt dieſer Fall ziemlich rein bei den Niet- und Bolzenverbindungen vor. Die beiden Kräfte P (Fig. 82) haben das Beſtreben, die Bleche *1* und *3* nach rechts zu verſchieben; dieſe Verſchiebung wird durch den Niet verhindert, welcher die Bleche *1* und *3* mit *2* verbindet. Längs jeder der beiden Trennungsflächen wirkt je eine Kraft P nach rechts im Bleche *1*, bezw. *3*, je eine Kraft P nach links im Bleche *2*.

In den meiſten Fällen tritt zu der durch die abſcherenden Kräfte erzeugten Schubſpannung noch eine durch gleichzeitig wirkende Momente erzeugte Biegungsſpannung; bezüglich dieſer zuſammengeſetzten Beanſpruchung wird auf das folgende Kapitel verwieſen. Auch in dem durch Fig. 82 veranſchaulichten Falle findet, genau genommen, eine ſolche zuſammengeſetzte Beanſpruchung ſtatt.

Die genaue Unterſuchung der Spannungen, welche in den auf Abſcherung beanſpruchten Querſchnitten auftreten, ergiebt, daſs die Schubſpannungen in den einzelnen Querſchnittspunkten verſchieden groſs ſind; das Geſetz der Vertheilung hängt von der Form des Querſchnittes ab. Für die meiſten Fälle der Praxis, insbefondere für die wichtigen Nietverbindungen, kann man aber mit hinreichender Genauigkeit annehmen, dafs die abfcherenden Kräfte fich gleichförmig über die ganzen auf Abfcherung beanfpruchten Querfchnitte vertheilen, mithin im Querfchnitt eine gleichförmig vertheilte Schubfpannung erzeugen. Daraus folgt, dafs der Widerftand gegen Abfcheren der Gröfse des abzufcherenden Querfchnittes direct proportional angenommen werden kann.

92. Querfchnitts-beftimmung. Ift alfo der Flächeninhalt des auf Abfcheren beanfpruchten Querfchnittes F, die abfcherende Kraft P und die im Querfchnitt entftehende Schubfpannung τ, fo ift $P = F\tau$, woraus

$$\tau = \frac{P}{F} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 49.$$

Die Querfchnittsgröfse der auf Schub beanfpruchten Querfchnitte wird mittels Gleichung 49 ermittelt. Verfteht man unter T die gröfste für die Flächeneinheit des Querfchnittes zuläffige Schubbeanfpruchung, unter P die auf Abfcheren wirkende Kraft, fo ergiebt fich aus der angegebenen Gleichung die nöthige Querfchnittsgröfse

$$F = \frac{P}{T} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 50.$$

Was nun die für T einzuführenden Werthe anlangt, fo haben die angeftellten Verfuche in Uebereinftimmung mit den theoretifchen Unterfuchungen ergeben, dafs der Widerftand der Bauftoffe gegen Beanfpruchung auf Schub geringer ift, als gegen Beanfpruchung auf Zug oder Druck. Man darf alfo die Bauftoffe auf Schub nicht fo ftark beanfpruchen, wie auf Zug oder Druck.

Nachftehende Tabelle giebt für eine Reihe wichtiger Bauftoffe die Feftigkeits-Coefficienten für Schub und die zuläffigen Schubbeanfpruchungen für das Quadr.-Centim. als Flächeneinheit an. Bemerkt wird, dafs man für Schweifseifen und Flufseifen die in Art. 84 u. 85 (S. 61 u. 62) berechneten Formeln verwenden kann, wenn man die mafsgebenden Coefficienten 1050 für Schweifseifen, bezw. 1350 für Flufseifen mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt einführt. Demnach kann man den erforderlichen Querfchnitt berechnen aus den Formeln:

$$\text{für Schweifseifen: } F = \frac{P_0}{800} + \frac{P_1}{560} \quad \ldots \ldots \quad 51.$$

$$\text{für Flufseifen: } F = \frac{P_0}{1080} + \frac{P_1}{720} \quad \ldots \ldots \quad 52.$$

Bei Berechnung der Nietquerfchnitte ift wegen des hier verwendeten vorzüglichen Materials die erlaubte Schubfpannung gleich derjenigen Zug-, bezw. Druckbeanfpruchung einzuführen, welche im Blech und im Façoneifen als zuläffig gilt. Für die Berechnung der Nietquerfchnitte können alfo die Formeln 42 bis 48 verwendet werden.

Bezeichnung der Bauftoffe	Feftigkeits-Coefficient für Schub	Zuläffige Schubbeanfpruchung T
Schweifseifen	3200 bis 4000	600 bis 800
Flufseifen	3200 bis 4000	700 bis 1000
Gufseifen	1000 bis 1100	220
Gufsftahl	4000	800
Nadelholz: parallel der Faferrichtung	46	9 bis 10
fenkrecht zur Faferrichtung	125	16 bis 19
Eichenholz: parallel der Faferrichtung	86	22 bis 27
fenkrecht zur Faferrichtung	125	22 bis 27
	Kilogr. für 1 qcm der Querfchnittsfläche.	

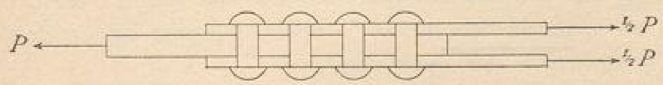
Beifpiele. 1) Eine Stange, in welcher ein Zug $P = 5600$ kg herrfcht, foll mit einem Bolzen aus Schweifseifen an einem Knotenbleche befeftigt werden. Der Durchmeffer d des Bolzens ift zu beftimmen. 93. Beifpiele.

Der Querfchnitt F des Bolzens ergiebt fich aus der Gleichung 50. Die zuläffige Schubbeanfpruchung T fei hier 700 kg, fonach

$$F = \frac{5600}{700} = 8 \text{ qcm} \quad \text{und} \quad d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 3{,}2 \text{ cm}.$$

2) Es ift die Anzahl Nietquerfchnitte zu beftimmen, welche nöthig find, um einen fchweifseifernen Conftructionstheil, in welchem ein Zug $P = 30000$ kg herrfcht, mit einem Knotenbleche zu verbinden. Der Durchmeffer der Niete fei 2 cm; der betreffende Conftructionstheil (Fig. 83) foll aus zwei Flacheifen hergeftellt fein, welche das Knotenblech zwifchen fich nehmen.

Fig. 83.



Jedes Flacheifen hat einen Zug von $\frac{P}{2} = 15000$ kg zu ertragen; den gleichen Zug haben die Nietquerfchnitte zwifchen diefem Flacheifen und dem Knotenbleche aus dem einen in das andere zu überführen, d. h. die auf Abfcheren diefer Querfchnitte wirkende Kraft beträgt 15000 kg. Der Gefammtquerfchnitt aller zur Befeftigung des einen Flacheifens dienenden Nietquerfchnitte ergiebt fich demnach zu

$$F = \frac{15000}{T}.$$

Die für Niete erlaubte Schubbeanfpruchung T kann man unbedenklich gleich der im gewöhnlichen Stabeifen und Blech erlaubten Zugbeanfpruchung annehmen. Wir nehmen defshalb $T = 750$ kg, und es wird

$$F = \frac{15000}{750} = 20 \text{ qcm}.$$

Ift die Anzahl der Nietquerfchnitte n, fo mufs $\frac{n d^2 \pi}{4} = F = 20$ qcm fein, oder, wenn $d = 2$ cm,

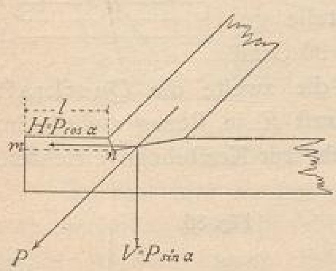
$$n = \frac{20 \cdot 4}{d^2 \pi} = 6{,}37, \text{ ftatt deffen } 7.$$

Es müffen alfo 7 Nietquerfchnitte zur Verbindung des einen Flacheifens mit dem Knotenbleche angeordnet werden; genau eben fo grofs mufs die Zahl der Nietquerfchnitte fein, welche zur Verbindung des anderen Flacheifens mit dem Knotenbleche dienen.

Ein Abfcheren ift bei der Conftruction in Fig. 83 nur möglich, wenn jeder Niet in zwei Querfchnitten abgefchert wird; jeder Niet bietet alfo zwei Querfchnitte, fo dafs im Ganzen 7 Niete, d. h. 14 Nietquerfchnitte anzuordnen find [22]).

3) Eine Strebe (Fig. 84), welche einen Druck $P = 20000$ kg zu ertragen hat, fei mit einem Balken durch Verfatzung verbunden; der Winkel beider Axen fei 45 Grad. Die Länge l ift fo zu beftimmen, dafs ein Abfcheren längs der Fläche mn nicht ftattfindet. Die Kraft P zerlegt fich in eine lothrechte Seitenkraft $V = P \sin \alpha$ und eine wagrechte Seitenkraft $H = P \cos \alpha$.

Fig. 84.



Es ift $H = 20000 \cos 45° = 14140$ kg und
$V = 20000 \sin 45° = 14140$ kg.

Die abfcherende Kraft A ift die Kraft H abzüglich des Reibungswiderftandes fV, wenn f den Reibungs-Coefficienten bedeutet. Ift $f = 0{,}3$, fo ift die abfcherende Kraft

$$A = H - fV = 14140\,(1 - 0{,}3) = 9898 \text{ kg}$$
$$\text{oder } A = \backsim 10000 \text{ kg}.$$

Dabei ift auf die durch den Bolzen möglicher Weife erzeugte Reibung keine Rückficht genommen, weil ein Lockern des Bolzens denkbar ift.

Die Breite des Balkens und der Strebe fei b; alsdann wird eine Fläche von der Länge l und der Breite b auf Abfcheren in Anfpruch genommen (d. h. die Fläche mn). Ift die für 1 qcm der abzufcherenden Fläche zuläffige Schubfpannung T, fo darf in diefer Fläche im Ganzen eine Schubfpannung $S = b\,l\,T$ ftattfinden.

[22]) Man unterfcheidet einfchnittige und zweifchnittige Niete. Bei den einfchnittigen Nieten wird von jedem Niet nur ein Querfchnitt, bei den zweifchnittigen Nieten werden von jedem Niet zwei Querfchnitte auf Abfcheren beanfprucht. Näheres hierüber in Theil III, Bd. 1 (Abth. I, Abfchn. 3: Conftructions-Elemente in Eifen) diefes »Handbuches«.

So grofs darf alfo A höchftens fein. Die Bedingungsgleichung für die Ermittelung von l ift fonach:

$$b\,l\,T = A \quad \text{oder} \quad l = \frac{A}{b\,T}.$$

In unferem Falle fei $b = 25^{cm}$; T ift nach der Tabelle auf S. 68 für Nadelholz gleich 10^{kg} für 1^{qcm}; es mufs alfo fein:

$$l = \frac{10\,000}{25 \cdot 10} = 40^{cm}.$$

Auf weitere Fälle der Schubbeanfpruchung werden wir im nächften Kapitel zurückkommen.

4. Kapitel.

Biegung und Biegungsfeftigkeit.

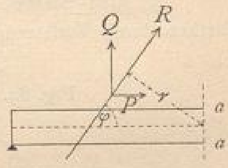
94. Biegungsmoment und Querkraft.

Beanfpruchung eines Balkens auf Biegung findet ftatt, wenn die äufseren Kräfte die beiden an den verfchiedenen Seiten eines Querfchnittes (etwa $a\,a$ in Fig. 86) liegenden Balkentheile um eine fenkrecht oder geneigt zur Kraftebene ftehende Axe zu drehen ftreben. Drehung fetzt ein Moment voraus; fonach mufs ein Moment der äufseren Kräfte für den Querfchnitt vorhanden fein. Gewöhnlich wirkt aufser diefem Momente noch eine abfcherende Kraft, welche weitere Beanfpruchungen hervorruft; letztere fetzen fich dann mit den reinen Biegungsbeanfpruchungen zufammen.

Es fei hier die Annahme gemacht, dafs die Balkenaxe in der Kraftebene liege; wenn fomit die Bildebene die Kraftebene vorftellt, fo liegen in derfelben fowohl die äufseren Kräfte, wie auch die Balkenaxe.

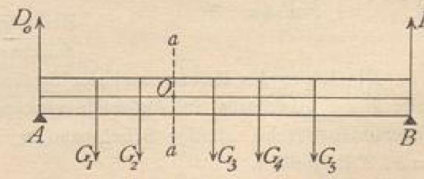
Die äufseren Kräfte, als welche die Stützendrücke und die Belaftungen einzuführen find, können beliebige Richtung und Gröfse haben.

Fig. 85.



Der allgemeine Fall ift durch Fig. 85 veranfchaulicht. Die Mittelkraft R aller an der einen Seite irgend eines Querfchnittes $a\,a$ wirkenden äufseren Kräfte fchneide die Axe des Körpers unter dem Winkel φ. Zerlegt man R in zwei Seitenkräfte, deren eine, P, parallel zur Axe des Körpers an der betreffenden Stelle gerichtet ift, deren andere, Q, die Axe des Körpers unter 90 Grad fchneidet, fo nennt man die erftere die Axialkraft, die zweite die Querkraft oder Transverfalkraft. Das ftatifche Moment der Kraft R in Bezug auf die im Schwerpunkt des zu betrachtenden Querfchnittes fenkrecht zur Kraftebene errichtete Axe erftrebt die Drehung des linken Balkentheiles um diefe Axe und wird das Biegungsmoment des Querfchnittes genannt.

Fig. 86.



Der ganze Träger AB (Fig. 86) mufs unter der Einwirkung aller äufseren Kräfte im Gleichgewichte fein; demnach mufs die algebraifche Summe der ftatifchen Momente aller Kräfte in Bezug auf jeden beliebigen Punkt der Ebene gleich Null fein. Bezeichnet man nun das ftatifche Moment der an dem links von $a\,a$ liegenden Trägertheile angreifenden äufseren Kräfte für den Drehpunkt O

mit M_{links}, dasjenige der äufseren Kräfte an dem rechts liegenden Trägertheile ebenfalls für O als Drehpunkt mit M_{rechts}, fo mufs fein

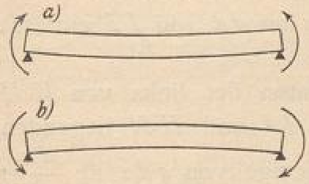
$$0 = M_{links} + M_{rechts},$$

d. h.

$$M_{rechts} = - M_{links}.$$

Die auf die rechte Balkenfeite des Querfchnittes wirkenden äufseren Kräfte haben alfo ein refultirendes Biegungsmoment, welches dem Zahlenwerthe nach genau fo grofs ift, wie das auf die linke Balkenfeite des Querfchnittes wirkende; die Vorzeichen find entgegengefetzt. Wenn das Moment an der einen Seite nach rechts (im Sinne des Uhrzeigers) dreht, fo ift die Drehrichtung des Momentes an der anderen Seite nach links (entgegengefetzt der Uhrzeigerdrehrichtung). Beide Momente beanfpruchen den Balken gleichzeitig entweder fo, dafs er feine hohle Seite nach oben (Fig. 87a) oder nach unten (Fig. 87b) kehrt. Die erftere Drehrichtung der Momente foll in der Folge, wenn nichts anderes angegeben ift, als pofitiv, die letztere als negativ eingeführt werden. Die Momente find daher pofitiv, wenn fie den Theil links vom Querfchnitt nach rechts und den Theil rechts vom Querfchnitt nach links drehen.

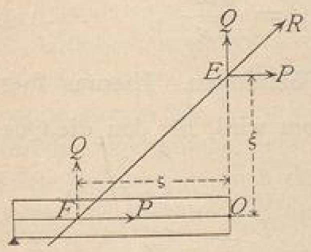
Fig. 87.



Für die Anwendung ift zu bemerken, dafs es nach Vorftehendem ganz gleichgiltig ift, ob man das Moment der an der einen oder der an der anderen Seite des Querfchnittes wirkenden Kräfte ermittelt; man wird zweckmäfsig ftets diejenige Seite wählen, welche für die Rechnung und Anfchauung die bequemere ift.

Die Zerlegung der Mittelkraft R in Axial- und Querkraft kann an beliebiger Stelle der Kraft R vorgenommen werden. Gefchieht diefelbe im Punkte E, dem Schnittpunkte von R mit dem Querfchnitte (oder feiner Verlängerung), fo hat Q kein Moment für O als Drehpunkt, und das Biegungsmoment, d. h. das ftatifche Moment von R ift dann gleich dem ftatifchen Momente der im Punkte E wirkenden Kraft P, alfo $M = P\xi$ (Fig. 88). Zerlegt man dagegen R in F, dem Schnittpunkte von R mit der Axe, fo hat P kein Moment für O als Drehpunkt, und das Biegungsmoment wird gleich dem ftatifchen Momente von der in F wirkenden Kraft Q, alfo $M = Q\zeta$ (Fig. 88). Wenn bei einem Balken mit wagrechter Axe nur lothrechte äufsere Kräfte wirken, fo ift R gleichfalls lothrecht, alfo die Seitenkraft P gleich Null; dann ift $R = Q$.

Fig. 88.

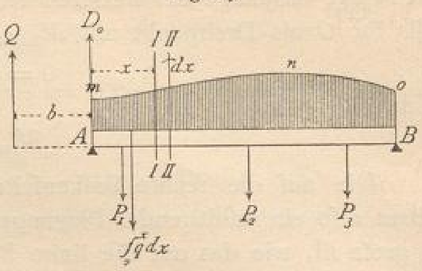


Bei den hier zu betrachtenden Balken ift diefer Fall der faft ausfchliefslich vorkommende; defshalb follen in Folgendem vorwiegend lothrechte Kräfte zu Grunde gelegt werden. Dann befteht nachftehende einfache Beziehung zwifchen dem Biegungsmomente und der Querkraft: Die Querkraft Q ift gleich dem erften Differentialquotienten des Biegungsmomentes nach x, wenn x die Abfciffe eines Querfchnittes bedeutet.

Der Balken AB (Fig. 89) trage eine beliebige, an den einzelnen Stellen verfchiedene Belaftung q für die Längeneinheit und eine Reihe von Einzellaften P_1, P_2, P_3. Die Gröfse von q werde an jeder Stelle durch die Ordinate der Curve mno dargeftellt. Die Abfciffe irgend eines Querfchnittes II fei x; links von diefem

Querſchnitt wirken D_0, P_1 und $\int\limits_0^x q\,dx$. Die Mittelkraft dieſer drei Kräfte iſt die Querkraft Q für den Querſchnitt $I\,I$, d. h. es iſt

Fig. 89.



$$Q = D_0 - P_1 - \int\limits_0^x q\,dx.$$

Q möge im Abſtande b links von A angreifen. Das Biegungsmoment für den Querſchnitt $I\,I$ iſt gleich dem ſtatiſchen Moment von Q für dieſen Querſchnitt, d. h. es iſt

$$M = Q\,(b + x).$$

Betrachtet man einen zweiten Querſchnitt $II\,II$, der um dx von $I\,I$ entfernt iſt, ſo iſt für dieſen das Moment $M + dM$.

Dieſes Moment ſetzt ſich zuſammen aus den Momenten der links von $II\,II$ wirkenden Kräfte, d. h. der Kraft Q, und der zwiſchen $I\,I$ und $II\,II$ liegenden Kraft $q\,dx$. Der Hebelsarm von Q iſt $b + x + dx$, derjenige von $q\,dx$ iſt $\frac{dx}{2}$; mithin iſt

$$M + dM = Q\,(b + x + dx) - q\,dx\,\frac{dx}{2} = Q\,(b + x) + Q\,dx - q\,\frac{dx^2}{2}.$$

Zieht man von dieſer Gleichung die oben für M gefundene ab, ſo bleibt:

$$dM = Q\,dx - \frac{q\,dx^2}{2}.$$

$\frac{q\,dx^2}{2}$ iſt eine unendlich kleine Gröſse zweiter Ordnung und verſchwindet gegen die übrigen Gröſsen der Gleichung, welche unendlich kleine Gröſsen erſter Ordnung ſind. Es iſt demnach

$$dM = Q\,dx \quad \text{und, wie oben behauptet,} \quad Q = \frac{dM}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 53.$$

Wird $Q = 0$, ſo iſt auch $\frac{dM}{dx} = 0$, alſo M ein Maximum. Hieraus folgt, daſs das Moment für denjenigen Querſchnitt zum Maximum wird, für den die Querkraft gleich Null iſt.

Fig. 90.

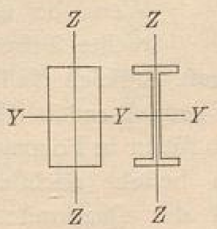
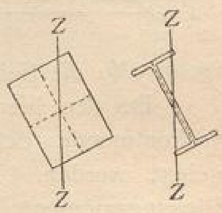


Fig. 91.



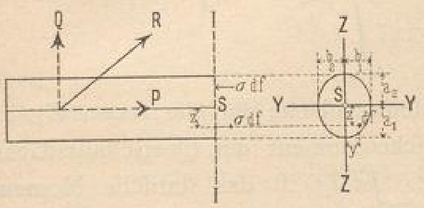
Für die Berechnung auf Biegung beanſpruchter Balken iſt es von grundlegender Bedeutung, wie die einzelnen Balkenquerſchnitte von der Kraftebene geſchnitten werden. Wenn, wie meiſtens der Fall, die Kraftebene alle Balkenquerſchnitte in Hauptaxen ſchneidet (ſiehe Art. 62, S. 41), ſo ergeben ſich für die Spannung ſehr einfache Formeln. Nach Früherem iſt jede Symmetrie-Axe eine Hauptaxe; wenn alſo z. B. die Querſchnitte die in Fig. 90 dargeſtellten Formen haben und die Kraftebene durch ZZ, ſenkrecht zur Bildebene geht, ſo iſt die obige Vorausſetzung erfüllt. Weſentlich verwickelter iſt die Berechnung, wenn die Kraftebene die Querſchnitte nicht in Hauptaxen ſchneidet; dieſer Fall wird durch Fig. 91 veranſchaulicht, in welcher die Querſchnitte lothrecht belaſteter Dachpfetten vorgeführt ſind.

a) Axiale Biegungsſpannungen, wenn die Kraftebene die Balkenquerſchnitte in Hauptaxen ſchneidet.

Unter der Einwirkung des Biegungsmomentes entſtehen in den einzelnen Querſchnitten des Balkens an den verſchiedenen Stellen Spannungen; dieſelben dürfen die zuläſſigen Grenzen nicht überſchreiten. 95. Axiale Biegungsſpannung.

Für die Ermittelung der Beziehungen zwiſchen den äuſseren Kräften und den durch ſie hervorgerufenen Spannungen werde der Unterſuchung Fig. 92 zu Grunde gelegt. Der links vom Querſchnitt II gelegene Theil des Balkens kann als dem Balken in Fig. 88 angehörig betrachtet werden; derſelbe muſs unter der Einwirkung der auf ihn wirkenden äuſseren Kräfte, deren Mittelkraft R ſei, und der auf ihn im Querſchnitt II von dem rechts liegenden (nicht gezeichneten) Balkentheil übertragenen Kräfte, eben der Spannungen, im Gleichgewicht ſein.

Fig. 92.



Man macht die Annahme, daſs die ſenkrecht zum Querſchnitte wirkenden Seitenkräfte der Spannungen, die ſog. axialen Biegungsſpannungen, von der erſten Potenz der Coordinaten der Querſchnittspunkte abhängen. Für irgend einen Querſchnittspunkt mit den Coordinaten y und z ſetzt man demnach

$$\sigma = \alpha + \beta y + \gamma z.$$

Als Anfangspunkt der rechtwinkeligen Coordinatenaxen Y und Z iſt der Schwerpunkt S des Querſchnittes gewählt; die Kraftebene ſchneidet den Querſchnitt in der Linie ZZ, welche nach der Annahme eine Hauptaxe iſt; alsdann iſt die Abſciſſenaxe YY die andere Hauptaxe. Der Ausdruck für σ enthält drei Unbekannte, nämlich die Conſtanten α, β, γ. Für die Beſtimmung derſelben ſtehen drei Gleichungen zu Gebote. Da das Bruchſtück des Balkens links vom Querſchnitt II im Gleichgewicht ſein ſoll, ſo müſſen ſich die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf daſſelbe anwenden laſſen. Von den ſechs verfügbaren Gleichgewichtsbedingungen werden hier die drei Gleichungen aufgeſtellt, welche beſagen, daſs die algebraiſche Summe der in die Axenrichtung des Balkens fallenden Kräfte gleich Null ſei, ferner daſs die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente aller Kräfte für die Axe YY gleich Null ſei, endlich daſs die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente aller Kräfte für die Axe ZZ gleich Null ſei. Die drei Gleichungen lauten:

$$\text{I)}\ 0 = P - \int \sigma\, df,$$

$$\text{II)}\ 0 = M - \int \sigma z\, df,$$

$$\text{III)}\ 0 = \int \sigma y\, df.$$

Erläuternd wird zu den vorſtehenden Gleichungen bemerkt: In einem unendlich kleinen Flächentheil df wirkt die axiale Spannung $\sigma\, df$; die geſammten axialen Spannungen im Querſchnitt geben die Summe $\int \sigma\, df$. Die Integration erſtreckt ſich über den ganzen Querſchnitt. In Gleichung I iſt P als nach rechts und $\int \sigma\, df$ als nach links wirkend eingeführt.

In Gleichung II bedeutet M das reſultirende Moment aller links vom Querſchnitt II gelegenen äuſseren Kräfte für die Axe YY, welche ſich in Fig. 92 (links) als Punkt S darſtellt; jede Spannung $\sigma\, df$ hat für dieſe Axe das Moment $\sigma \,.\, z\, df$; die Summe aller dieſer Einzelmomente iſt, abgeſehen vom Vorzeichen, $\int \sigma z\, df$. Auch hier, wie bei Gleichung I und III, iſt über die ganze Querſchnittsfläche zu integriren.

In Gleichung III haben die äuſseren Kräfte für die Axe ZZ das Moment Null, weil ihre Mittelkraft jedenfalls die Axe ZZ ſchneidet; jede Spannung $\sigma \,.\, df$ hat das Einzelmoment $\sigma \,.\, y\, df$.

Setzt man in obige drei Gleichungen den oben für σ angegebenen Werth ein und beachtet, daſs bei den Integrationen die Werthe α, β, γ unverändert bleiben, ſo erhält man aus Gleichung I

$$P = \alpha \int df + \beta \int_{-b_2}^{+b_1} y\, df + \gamma \int_{-a_2}^{+a_1} z\, df.$$

$\int y\, df$ iſt das ſtatiſche Moment der Querſchnittsfläche für die Axe ZZ; da dieſe eine Schwerpunktsaxe iſt, ſo iſt das ſtatiſche Moment der Querſchnittsfläche für dieſe Axe nach Art. 33 (S. 26) gleich Null. $\int z\, df$ iſt das ſtatiſche Moment der Querſchnittsfläche für die Axe YY und, da dieſe Axe ebenfalls eine Schwerpunktsaxe iſt, gleichfalls Null. Demnach iſt

$$\int_{-b_2}^{+b_1} y\, df = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-a_2}^{+a_1} z\, df = 0,$$

ferner, wenn F den Inhalt der ganzen Querſchnittsfläche bedeutet,

$$F = \int df; \quad \text{mithin} \quad P = \alpha F,$$

und

$$\alpha = \frac{P}{F}.$$

Gleichung II lautet mit dem Werthe für σ:

$$M = \alpha \int_{-a_2}^{+a_1} z\, df + \beta \int_{-a_2}^{+a_1} y z\, df + \gamma \int_{-a_2}^{+a_1} z^2\, df.$$

Nun iſt $\int z\, df = 0$.

$\int y z\, df$ iſt das Centrifugalmoment für die beiden Axen YY und ZZ; da dieſe nach der Annahme Hauptaxen ſind, ſo folgt

$$\int_{-a_2}^{+a_1} y z\, df = 0.$$

$\int_{-a_2}^{+a_1} z^2\, df$ iſt nach Früherem das Trägheitsmoment des Querſchnittes für die Axe YY, d. h. es iſt

$$\int_{-a_2}^{+a_1} z^2\, df = \mathfrak{J}_Y;$$

die Gleichung II heiſst demnach:

$$M = \gamma\, \mathfrak{J}_Y, \quad \text{alſo} \quad \gamma = \frac{M}{\mathfrak{J}_Y}.$$

Gleichung III lautet mit dem Werthe für σ:

$$0 = \alpha \int_{-b_2}^{+b_1} y\,df + \beta \int_{-b_2}^{+b_1} y^2\,df + \gamma \int_{-a_2}^{+a_1} yz\,df.$$

Da $\int_{-b_2}^{+b_1} y\,df = 0$ und $\int_{-a_2}^{+a_1} yz\,df = 0$ ift (fiehe oben), fo bleibt $0 = \beta \int_{-b}^{+b_1} y^2\,df$,

woraus folgt, da $\int_{-b_2}^{+b_1} y^2\,df$ nicht gleich Null ift,

$$\beta = 0.$$

Demnach find die Werthe für die drei Conftanten:

$$\alpha = \frac{P}{F}, \quad \beta = 0 \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{M}{\mathcal{J}_Y},$$

und es ift fchliefslich

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathcal{J}_Y} z \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 54.$$

Wenn, wie meiftens, die Axialkraft P gleich Null ift, fo ergiebt fich für die axiale Biegungsfpannung der Ausdruck

$$\sigma = \frac{Mz}{\mathcal{J}_Y}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 55.$$

und wenn man vereinfachend $\mathcal{J}$ ftatt $\mathcal{J}_Y$ fetzt,

$$\sigma = \frac{Mz}{\mathcal{J}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 56.$$

Gleichung 55, bezw. 56 giebt die axialen Biegungsfpannungen für einen Balken mit gerader Axe an, auf welchen die äufseren Kräfte nur fenkrecht zur Axe wirken und bei dem die Kraftebene alle Querfchnitte in Hauptaxen fchneidet. Diefe Gleichung foll zunächft befprochen werden.

1) Die Axialkraft hat die Gröfse Null.

96. Balken, bei denen die Axialkraft die Gröfse Null hat.

Gleichung 56 enthält aufser der Ordinate z eines Querfchnittspunktes auf der rechten Seite nur die Gröfsen M und $\mathcal{J}$. Bei einer beftimmten, gegebenen Belaftung haben für alle Punkte deffelben Querfchnittes, alfo für alle möglichen Werthe von z, fowohl M (das Biegungsmoment oder das Moment der an der einen Seite des Querfchnittes wirkenden äufseren Kräfte, bezogen auf die wagrechte Schweraxe deffelben als Drehaxe), wie auch das Trägheitsmoment $\mathcal{J}$, welches nur von der Form und Gröfse der Querfchnittsfläche abhängt, denfelben Werth. Demnach ift nach Gleichung 56 die axiale Spannung σ an den verfchiedenen Stellen eines Querfchnittes nur mit dem Abftande z derfelben von der wagrechten Schwerpunktsaxe veränderlich. Alle Punkte eines Querfchnittes, welche in gleicher Höhe z über der wagrechten Schwerpunktsaxe liegen, werden alfo gleich ftark beanfprucht. Trägt man die in den verfchiedenen Höhen z für die Flächeneinheit wirkenden Axialfpannungen derart graphifch auf, dafs man die z als Abfciffen, die zugehörigen σ als Ordinaten zeichnet, und verbindet man die Endpunkte der Ordinaten, fo erhält man die Linie der Gleichung $\sigma = \frac{M}{\mathfrak{J}} z$. Diefe Linie wird eine Gerade, weil die Veränderlichen σ und z nur in der erften Potenz vorkommen.

Für $z = 0$ wird $\sigma = 0$, d. h. in allen in der wagrechten Schwerpunktsaxe liegenden Punkten ift die Axialfpannung gleich Null.

An diefen Stellen ift alfo auch die Verlängerung oder Verkürzung gleich Null; denn diefelbe ift $\Delta dx = \frac{\sigma}{E} dx$, alfo für $\sigma = 0$ ebenfalls gleich Null.

Man nennt die Linie, welche alle Querfchnittspunkte enthält, in denen die Axialfpannung Null ift, die **Null-Linie** oder **neutrale Linie**. Diefe Linie fällt nach Vorftehendem hier mit der wagrechten Schwerpunktsaxe YY zufammen; defshalb findet ftatt: Bei einem geraden wagrechten Balken, deffen Querfchnitte durch die Kraftebene in Hauptaxen gefchnitten werden und auf den nur lothrechte Kräfte wirken, fällt in jedem Querfchnitt die Null-Linie mit der wagrechten Schwerpunktsaxe zufammen.

97. Gröfste Beanfpruchung.

Aus Gleichung 56 folgt ferner, dafs σ defto gröfser ift, je gröfser z ift, d. h. je weiter der betreffende Punkt von der wagrechten Schwerpunktsaxe entfernt ift. Die gröfsten Werthe von σ finden alfo in den am weiteften entfernten Punkten ftatt. Es feien die Abftände der am weiteften nach oben und unten von der Null-Linie entfernten Punkte (Fig. 92) bezw. $+ a_1$ und $- a_2$; alsdann ift

$$\sigma_{max} = + \frac{M}{\mathfrak{J}} a_1 \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = - \frac{M}{\mathfrak{J}} a_2 \quad \ldots \ldots \quad 57.$$

Die Gleichungen 57 werden benutzt, um die Gröfse und Form des Querfchnittes an den verfchiedenen Stellen des Balkens zu beftimmen. Bedeutet M das gröfste für einen Querfchnitt mögliche Moment, fo ift die gröfste in diefem Querfchnitt vorhandene Zug-, bezw. Druckfpannung aus den Gleichungen 57 zu ermitteln. Ift für den betreffenden Stoff und den vorliegenden Fall die zuläffige Beanfpruchung für die Flächeneinheit des Querfchnittes K', bezw. $- K''$ (für Zug, bezw. Druck), fo darf höchftens ftattfinden:

$$\sigma_{max} = K' \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = - K'',$$

d. h. die Bedingungsgleichungen für den Querfchnitt werden:

$$K' = \frac{M}{\mathfrak{J}} a_1, \quad - K'' = - \frac{M}{\mathfrak{J}} a_2 \quad \text{oder} \quad K'' = \frac{M}{\mathfrak{J}} a_2.$$

Die beiden Gleichungen für K' und K'' können auch gefchrieben werden:

$$\frac{\mathfrak{J}}{a_1} = \frac{M}{K'} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{J}}{a_2} = \frac{M}{K''} \quad \ldots \ldots \quad 58.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 58 find bekannt; es wird weiterhin gezeigt werden, wie man für die verfchiedenen Fälle die Werthe von M ermittelt; diejenigen der zuläffigen Beanfpruchungen, d. h. die Werthe für K' und K'' find ebenfalls (aus den Tabellen auf S. 64) bekannt. Sollen alfo an den meift beanfpruchten Stellen der Querfchnitte die zuläffigen Beanfpruchungen K' und K'' nicht überfchritten werden, fo find $\frac{\mathfrak{J}}{a_1}$ und $\frac{\mathfrak{J}}{a_2}$ fo zu beftimmen, dafs die Gleichungen 58 erfüllt find. $\mathfrak{J}$, a_1 und a_2 hängen aber nur von der Form und Gröfse der Querfchnittsfläche ab; man kann daher durch paffende Anordnung des Querfchnittes diefe Bedingung erfüllen. Wenn beide Gleichungen 58 erfüllt find, fo treten gleichzeitig in den am meiften gezogenen und gedrückten Punkten des

Querſchnittes die zuläſſigen gröſsten Beanſpruchungen auf Zug und Druck ein; dieſe Anordnung iſt für die Materialausnutzung die günſtigſte.

Für Bauſtoffe, bei denen die zuläſſigen Zug-, bezw. Druckbeanſpruchungen (abſolut genommen) nahezu gleich groſs ſind, iſt in den Gleichungen 58 die Gröſse $K' = K'' = K$ zu ſetzen. Für dieſe Stoffe (Schweiſseiſen, Fluſseiſen, Stahl, Holz) ergiebt ſich

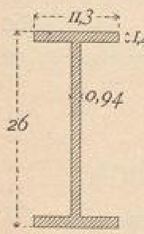
$$\frac{M}{\mathcal{J}} a_1 = \frac{M}{\mathcal{J}} a_2 \quad \text{oder} \quad a_1 = a_2,$$

d. h. die Querſchnittsform für derartige auf Biegung beanſpruchte Balken iſt ſo zu wählen, daſs die am meiſten gezogenen, bezw. gedrückten Punkte gleich weit vom Schwerpunkte des Querſchnittes entfernt ſind, daſs alſo der Schwerpunkt der Querſchnittsfläche in halber Höhe liegt.

Bezeichnet man die halbe Höhe des Querſchnittes alsdann mit a, ſo iſt die nunmehr geltende Gleichung:

$$\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M}{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 59.$$

Fig. 93.



Beiſpiel. Das Maximalmoment in einem ſchweiſseiſernen Walzbalken mit I-förmigem Querſchnitt betrage $M = 280\,000$ kgcm.

Nach der Tabelle auf S. 64 iſt für Schweiſseiſen $K' = K'' = K = 700$ kg für 1 qcm, alſo

$$\frac{\mathcal{J}}{a_1} = \frac{\mathcal{J}}{a_2} = \frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M}{K} = \frac{280\,000}{700} = 400.$$

Das neben ſtehende Profil Nr. 26 der »Deutſchen Normal Profile für I-Eiſen« (Fig. 93) hat ein Trägheitsmoment $\mathcal{J} = 5798$; ferner iſt $a = \frac{26}{2} = 13$ cm, demnach $\frac{\mathcal{J}}{a} = 446$, ſo daſs dieſer Querſchnitt im vorliegenden Falle genügt.

Den Quotienten $\frac{\mathcal{J}}{a}$ nennt man wohl auch das Widerſtandsmoment und bezeichnet ihn mit W.

Man kann die Querſchnitte der Balken mit genau beſtimmbarer Elaſticitätsgrenze auf ganz ähnliche Weiſe ermitteln, wie dies in Art. 84 u. 85 (S. 60 u. 62) für Stäbe gezeigt iſt, die in ihrer Axenrichtung beanſprucht werden.

98. Neuere Querſchnittsbeſtimmung für Schweiſs- und Fluſseiſenbalken.

Derjenige Querſchnittspunkt möge der Unterſuchung zu Grunde gelegt werden, welcher die gröſste Zugbeanſpruchung erleidet; was von dieſem Punkte gilt, hat auch für denjenigen Punkt Giltigkeit, welcher den gröſsten Druck erleidet. Entſprechend den Bezeichnungen in Art. 84 (S. 60) bezeichne nunmehr σ_{max} die in dem betrachteten Punkte höchſtens auftretende Zugſpannung; dieſelbe iſt

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}\, a_1}{\mathcal{J}};$$

desgleichen bezeichne σ_{min} die in demſelben Punkte mögliche kleinſte Zugſpannung, d. h. es iſt

$$\sigma_{min} = \frac{M_{min}\, a_1}{\mathcal{J}}.$$

Wie dort, ergiebt ſich wieder

$$\text{für Schweiſseiſen:} \quad \sigma_{max} = \frac{1050}{1{,}5 - 0{,}5\,\frac{M_{min}}{M_{max}}},$$

$$\text{für Flufseifen:} \quad \sigma_{max} = \frac{1350}{1{,}5 - 0{,}5 \frac{M_{min}}{M_{max}}},$$

wobei zu beachten ift, dafs $\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{M_{min}}{M_{max}}$ ift.

Bedeutet M_0 das Moment, welches im Querfchnitt durch Eigengewicht allein und M_1 das gröfste Moment, welches im Querfchnitt durch zufällige oder Verkehrslaft allein hervorgerufen wird, fo ift

$$M_{max} = M_0 + M_1 \quad \text{und} \quad M_{min} = M_0,$$

und man erhält für Schweifseifen:

$$\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{M_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{M_{max}}{1050}\left(1{,}5 - 0{,}5 \frac{M_{min}}{M_{max}}\right) = \frac{1{,}5\, M_{max} - 0{,}5\, M_{min}}{1050},$$

$$\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{1{,}5\, M_0 + 1{,}5\, M_1 - 0{,}5\, M_0}{1050} = \frac{M_0 + 1{,}5\, M_1}{1050},$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{J}}{a} &= \frac{M_0 + 1{,}5\, M_1}{1050}, \\ \frac{\mathfrak{J}}{a} &= \frac{M_0}{1050} + \frac{M_1}{700}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 60.$$

Für Flufseifen ergiebt fich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{J}}{a} &= \frac{M_0 + 1{,}5\, M_1}{1350}, \\ \frac{\mathfrak{J}}{a} &= \frac{M_0}{1350} + \frac{M_1}{900}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 61.$$

Beifpiel: Die Gröfstmomente in einem Balken, der als flufseiferner Walzbalken angeordnet werden foll, betragen $M_0 = 180000$ kgcm und $M_1 = 230000$ kgcm. Alsdann mufs

$$\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{180000}{1350} + \frac{230000}{900} = 133 + 255 = 388 \text{ cm}^3$$

fein. Das deutfche Normal-Profil Nr. 24 hat $\frac{\mathfrak{J}}{a} = 357 \text{ cm}^3$ und das Profil Nr. 26 $\frac{\mathfrak{J}}{a} = 446 \text{ cm}^3$; letzteres ift zu wählen.

99. Stäbe aus Gufseifen.

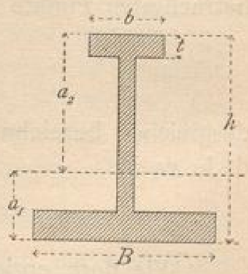
Für Gufseifen ift die zuläffige Beanfpruchung auf Druck doppelt fo grofs, als diejenige auf Zug (vergl. die Tabelle auf S. 64), alfo $K'' = 2\, K'$, und demnach

$$\frac{M}{\mathfrak{J}} a_2 = 2 \frac{M}{\mathfrak{J}} a_1 \quad \text{und} \quad a_2 = 2\, a_1.$$

Nun ift die ganze Höhe des Querfchnittes

$$h = a_1 + a_2 = 3\, a_1, \quad \text{woraus} \quad a_1 = \frac{h}{3}.$$

Fig. 94.



Daraus folgt die Regel: Die Querfchnitte der gufseifernen Balken (Fig. 94) find fo anzuordnen, dafs der Schwerpunkt um $\frac{1}{3}$ der Gefammthöhe des Querfchnittes von der am meiften gezogenen Fafer entfernt liegt. Befinden fich alfo die gezogenen Fafern, wie meiftens, unten, die gedrückten Fafern oben, fo foll der Schwerpunkt im Abftande $\frac{h}{3}$ über der Grundlinie des Querfchnittes liegen.

Für Guſseiſen hat nach neueren Verſuchen das Proportionalitätsgeſetz keine Giltigkeit; die vorſtehenden Entwickelungen ſind demnach auch nicht als unbedingt richtig anzuſehen. Für Balken verwendet man zweckmäſsig kein Guſseiſen.

Die auf Biegung beanſpruchten Stäbe aus Holz werden, der Natur des Materials entſprechend, mit rechteckigem Querſchnitt hergeſtellt; der Schwerpunkt des Querſchnittes liegt alſo in halber Höhe h, und es iſt $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$. Demnach wird $K' = K''$, und aus der Tabelle auf S. 64 iſt der kleinere der beiden Werthe, welche als zuläſſige Zug-, bezw. Druckbeanſpruchung angegeben ſind, einzuführen. Wenn dieſer Werth K genannt wird, ſo iſt 100. Stäbe aus Holz.

$$\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{M}{K}.$$

Beiſpiel. Es ſei etwa $M = 180000$ kgcm; alsdann muſs für kieferne Balken ſtattfinden:

$$\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{180000}{60} = 3000.$$

Nach Gleichung 19 iſt

$$\mathfrak{J} = \frac{b h^3}{12} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{b h^3}{12 \frac{h}{2}} = \frac{b h^2}{6}.$$

Im vorliegenden Falle muſs alſo ſein

$$\frac{b h^2}{6} = 3000 \quad \text{oder} \quad b h^2 = 18000.$$

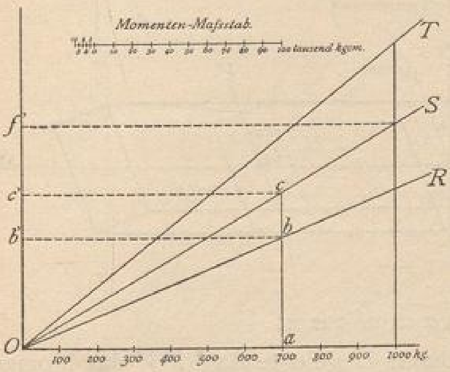
Iſt $b = \frac{3}{4} h$, ſo wird $\frac{3}{4} h^3 = 18000$ und $h = \sqrt[3]{24000} = \infty\, 29$ cm, ſonach $b = 22$ cm.

Bei den ſchweiſs- und fluſseiſernen Walzbalken I- und C-förmigen Querſchnittes, welche im Handel in ganz beſtimmten Kalibern erhältlich ſind, kann man das für jeden Fall nothwendige Kaliber mittels einer einfachen Figur ſehr leicht ermitteln. Die Bedingung für die Querſchnittsbildung iſt 101. Querſchnitts-beſtimmung mittels graphiſcher Tafel.

$$M = K \frac{\mathfrak{J}}{a}.$$

Je nachdem man bei einem Balken mit gegebenem Querſchnitt, alſo bekanntem Widerſtandsmoment $\frac{\mathfrak{J}}{a}$, eine gröſsere oder geringere Beanſpruchung K als zuläſſig einführt, kann man ihn für ein gröſseres oder geringeres Moment M verwenden. Trägt man nun die Werthe von K als Abſciſſen, die zugehörigen Werthe $\frac{K \mathfrak{J}}{a} = M$ als Ordinaten auf, ſo ergiebt ſich für jedes Kaliber eine Gerade, etwa OR (Fig. 95), die durch den Coordinatenanfang O geht und die Gröſse der Momente angiebt, welche dieſes Kaliber bei den verſchiedenen Beanſpruchungen K ertragen kann. In Fig. 95 ſind drei ſolche Linien OR, OS, OT angegeben. Bei einer als zuläſſig erachteten Beanſpruchung $K = 700$ kg würde der zu OR gehörige Balken genügen, ſo lange das gröſste Moment nicht gröſser als $\overline{ab} = Ob'$ iſt; der zu OS gehörige Balken genügt hierbei noch für ein Moment $\overline{ac} = Oc'$. Wird eine gröſsere Bean-

Fig. 95.



ſpruchung K, etwa $K = 1000^{\text{kg}}$, zugelaſſen, ſo genügt der Balken OS bis zu einer Momentengröſse $\overline{Of'}$. Auf der neben ſtehenden Tafel ſind für die »Deutſchen Normal-Profile« mit I- und ⊏-Form die Linien gezogen; auf der Abſciſſenaxe ſind die Spannungen K, auf der Ordinatenaxe die Momente abgetragen.

Wenn z. B. ein Moment von 125000^{kgcm} aufzunehmen iſt, ſo würde das I-Eiſen Nr. 20 dieſes mit einer gröſsten Beanſpruchung $K = 580^{\text{kg}}$ ertragen können, Nr. 18 mit einer Beanſpruchung von 765^{kg}, Nr. 16 mit einer Spannung von 1060^{kg}. Wäre vorgeſchrieben, daſs K nicht gröſser ſein ſolle, als 700^{kg}, ſo würde das Kaliber zu wählen ſein, welches zunächſt über dem Punkte P liegt, in welchem die zu $K = 700^{\text{kg}}$ gehörige Ordinate den Werth $M = 125000^{\text{kgcm}}$ hat. Die Verwendung dieſer graphiſchen Tafel iſt ſonach ſehr bequem.

2) Die Axialkraft iſt nicht gleich Null.

Dieſer Fall wird aus Zweckmäſsigkeitsrückſichten im folgenden Abſchnitt, und zwar im Kapitel über »Stützen« behandelt, da er für dieſe beſondere Wichtigkeit hat.

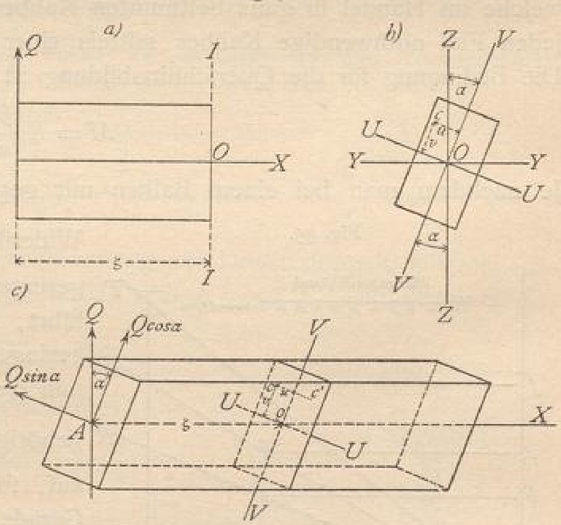
b) Axiale Biegungsſpannungen, wenn die Kraftebene die Balkenquerſchnitte nicht in Hauptaxen ſchneidet.

102. Axiale Biegungs-ſpannungen.

Auf den Querſchnitt II in Fig. 96a wirke das Biegungsmoment $M = Q\zeta$; Fig. 96b giebt die Vorderanſicht des Querſchnittes; die Kraftebene fällt mit der Bildebene der Fig. 96a zuſammen, geht durch die Balkenaxe und iſt die XZ-Ebene.

Bezeichnen UU und VV die beiden Hauptaxen des Querſchnittes, ſo kann nach bekannten Geſetzen der Statik das in der XZ-Ebene wirkende Moment M in zwei Seitenmomente zerlegt werden, welche in der XU- und XV-Ebene wirken; das erſtere iſt alsdann $M_u = M \sin\alpha$, das letztere $M_v = M \cos\alpha$. Dieſe Zerlegung, ſo wie die Drehrichtung der Seitenmomente wird durch die iſometriſche Anſicht in Fig. 96c verdeutlicht, bei welcher, der einfacheren Zeichnung halber, ein Rechteckquerſchnitt angenommen iſt. Q zerlegt ſich im Punkte A in $Q\cos\alpha$ und $Q\sin\alpha$, welche Kräfte bezw. in den Ebenen XV und XU wirken. Die erſtere Kraft hat in Bezug auf die durch O, den Schwerpunkt des betrachteten Querſchnittes, gelegte Hauptaxe UU das Moment:

Fig. 96.

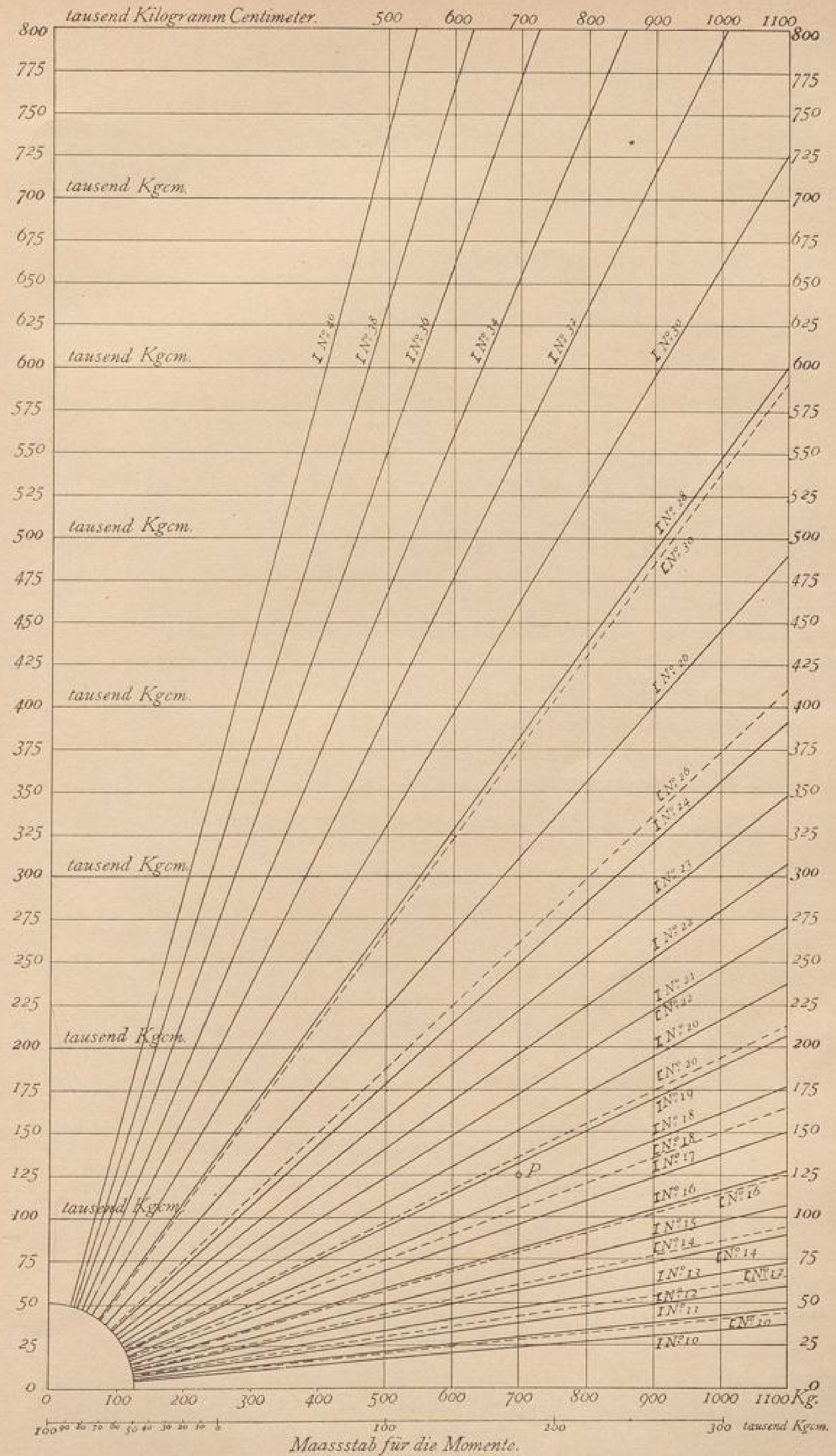


$$Q\cos\alpha \,.\, \zeta = Q\zeta\cos\alpha = M\cos\alpha;$$

die letztere hat in Bezug auf die gleichfalls durch O gelegte Axe VV das Moment

$$Q\sin\alpha \,.\, \zeta = Q\zeta\sin\alpha = M\sin\alpha.$$

Jedes dieſer beiden Theilmomente wirkt nun aber in einer Ebene, welche die ſämmtlichen Querſchnitte in Hauptaxen ſchneidet; die Ebene des erſteren ſchneidet die Querſchnitte in VV, die des letzteren in den Axen UU; jedes dieſer Momente



Graphische Tafel

für die Querschnittsermittelung von I- und [-förmigen Walzbalken.
(Deutsche Normal-Profile.)

erzeugt ſonach für ſich allein Biegungsſpannungen, welche nach Gleichung 56 zu berechnen ſind. Das Trägheitsmoment des Querſchnittes bezogen auf die Hauptaxe UU ſoll mit A, dasjenige bezogen auf die Hauptaxe VV mit B bezeichnet werden; dann erhält man die Spannungen in einem Punkte C mit den Coordinaten u und v mit Rückſicht auf Gleichung 56 wie folgt.

Wirkte nur $M \cos \alpha$, ſo wäre die Spannung $\sigma_1 = \frac{M \cos \alpha \,.\, v}{A}$;

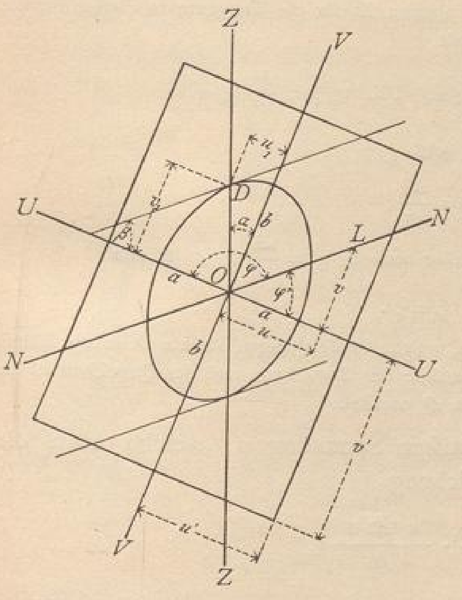
wirkte nur $M \sin \alpha$, ſo wäre die Spannung $\sigma_2 = \frac{M \sin \alpha \,.\, u}{B}$.

Die wirkliche Spannung ſetzt ſich aus beiden Einzelwerthen zuſammen, d. h. es wird ſein

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = M\left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B}\right).$$

Bei der angenommenen Kraft- und Drehrichtung der Momente, ſo wie bei der Lage des Punktes C werden, falls man die Coordinaten v und u nach oben, bezw. links als poſitiv einführt, ſowohl σ_1 wie σ_2 poſitive, im vorliegenden Falle Druckbeanſpruchungen bedeuten; wenn der Punkt an der anderen Seite von VV liegt, etwa in C', ſo würde u negativ, demnach $\sigma_2 = -\frac{M \sin \alpha \,.\, u}{B}$ werden. Man ſieht leicht, daſs alle Punkte, die in denjenigen von beiden Hauptaxen gebildeten Vierteln des Querſchnittes liegen, welche von Q geſchnitten werden, durch beide Momente Druck, bezw. Zug erhalten, daſs dagegen in den beiden anderen Vierteln die Spannungen σ_1 und σ_2 verſchiedene Vorzeichen haben.

Fig. 97.



103.
Null-Linie.

Nach Vorſtehendem iſt allgemein

$$\sigma = M\left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B}\right) \quad . \quad 62.$$

σ kann nur für diejenigen Querſchnittspunkte Null werden, für welche der Klammerfactor Null wird (der Fall $M = 0$ iſt belanglos); alle Punkte des Querſchnittes, in welchen die Spannung den Werth Null hat, genügen alſo der Gleichung

$$\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B} = 0.$$

Dies iſt hier demnach die Gleichung der Null-Linie (ſiehe Art. 96, S. 75).

Löſt man dieſe Gleichung nach v auf, ſo erhält man

$$v = -\frac{A}{B}\, u \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad 63.$$

Die beiden Veränderlichen u und v kommen nur in der erſten Potenz vor; mithin iſt die Linie eine Gerade.

Für $u = 0$ wird auch $v = 0$, woraus folgt, daſs die Null-Linie bei den gemachten Annahmen durch den Punkt O, den Schwerpunkt des Querſchnittes, geht.

In Fig. 97 ſei NN die Null-Linie. Die Werthe u, bezw. v ſind nach links, bezw. oben als poſitiv, nach rechts, bezw. unten als negativ eingeführt. Der

Winkel φ, welchen die Linie NN mit der positiven U-Axe einschliefst, hat nach Gleichung 63 die Tangente

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha .$$

Nach Fig. 97 ist aber auch $\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{tg} \varphi'$; demnach ist

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 64.$$

Die Lage der Null-Linie ist also nur von der Querschnittsbildung (darauf weist der Quotient $\frac{A}{B}$ hin) und der Lage der Kraftebene zu den Hauptaxen (d. h. von α) abhängig, nicht aber von der Gröfse des Momentes.

Gleichung 64 giebt ein bequemes Mittel, die Lage der Null-Linie zu construiren. Zeichnet man (Fig. 97) für den betreffenden Querschnitt die Ellipse der Trägheitsmomente (siehe Art. 72, S. 51), so sind die beiden Halbaxen a und b derselben bezw.

$$a = \frac{K}{\sqrt{A}} \quad \text{und} \quad b = \frac{K}{\sqrt{B}} .$$

Die Gleichung der Ellipse ist bekanntlich $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, und die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die geometrische Tangente an die Ellipse in einem Punkte, dessen Coordinaten u und v sind, mit der U-Axe einschliefst, ist

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u b^2}{v a^2} .$$

Die Coordinaten des Punktes D seien u_1 und v_1; alsdann ist für die Tangente in diesem Punkte der Winkel mit der positiven U-Axe gleich $180 - \beta$, somit

$$\frac{dv}{du} = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{b^2 u_1}{a^2 v_1} = -\frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \alpha , \quad \text{d. h.} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \alpha .$$

Aus den oben stehenden Gleichungen für a und b folgt

$$A = \frac{K^2}{a^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{K^2}{b^2} ;$$

Demnach ist $\operatorname{tg} \beta = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha$. Nach Gleichung 64 ist aber auch $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha$; sonach

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \varphi' \quad \text{und} \quad \beta = \varphi' .$$

Die Null-Linie ist sonach parallel zu der Tangente, welche in demjenigen Punkte D an die Ellipse der Trägheitsmomente gelegt wird, in welchem die Schnittlinie der Kraftebene und des Querschnittes die Ellipse schneidet. Die Null-Linie ist also zur Tangente in D parallel.

Alle Querschnittspunkte mit gleich grofser Spannung σ, welche etwa die Gröfse $\sigma = C$ haben möge, genügen der Gleichung

$$C = M \left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B} \right) ,$$

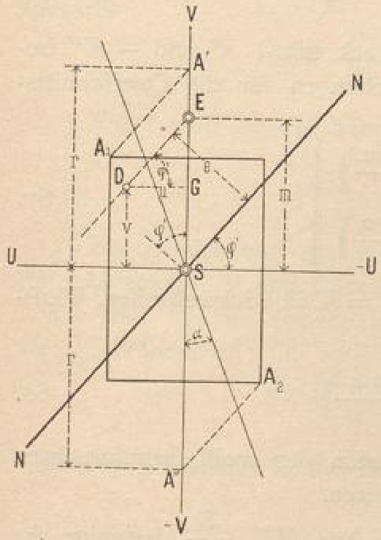
aus welcher folgt

$$v = \frac{A}{M} \frac{C}{\cos \alpha} - u \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 65.$$

Dies ist ebenfalls die Gleichung einer Geraden, und zwar einer solchen, welche den gleichen Winkel mit der UU-Axe einschliefst, wie die Null-Linie, auf deren sämmtlichen Punkten ja auch die Spannung gleich grofs (d. h. gleich Null) ist. Demnach folgt: Alle Querschnittspunkte, in welchen gleiche axiale Spannung herrscht, liegen auf einer zur Null-Linie parallelen Geraden; die Spannung σ ift alfo direct proportional dem fenkrechten Abftande der Geraden von der Null-Linie.

Für die Spannung σ in einem beliebigen Punkte D des Querfchnittes mit den Coordinaten u und v ergiebt fich durch Umformung der Gleichung 62 ein fehr einfacher Ausdruck. Nach Gleichung 62 ift

Fig. 98.



$$\sigma = M\left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B}\right),$$

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A}\left(v + \frac{u A}{B} \operatorname{tg} \alpha\right) = \frac{M}{A} \cos \alpha \,(v + u \operatorname{tg} \varphi').$$

Legt man parallel zur Null-Linie NN durch D eine Linie, welche die Hauptaxe VV im Punkte E fchneidet, fo ift $\overline{SE} = \overline{SG} + \overline{GE}$, $\overline{SG} = v$ und $\overline{GE} = u \operatorname{tg} \varphi'$, alfo $\overline{SE} = v + u \operatorname{tg} \varphi'$. Wird $\overline{SE} = m$ gefetzt, fo erhält man

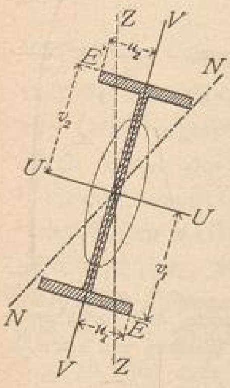
$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A} m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 66.$$

Fällt man von S die Senkrechte auf die durch D gezogene Parallele zur Null-Linie, fo ift ihre Länge $e = m \cos \varphi'$ und

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A \cos \varphi'} e.$$

Der Fall, dafs die Kraftebene die Balkenquerfchnitte nicht in Hauptaxen fchneidet, kommt im Hochbau fehr häufig vor, fo z. B. bei den Dachpfetten, welche nach Fig. 99 mit einer Querfchnittsfeite in die Dachfchräge gelegt find, ferner bei **I**- oder **[**-förmigen Walzbalken, welche Gewölbe tragen, falls der wagrechte Gewölbefchub nicht vollftändig (durch Anker etc.) aufgehoben ift; aufserdem bei einer Anzahl von Querfchnittsformen, deren lothrechte Schwerpunktsaxe keine Hauptaxe ift, wie bei gleichfchenkeligen und ungleichfchenkeligen Winkeleifen, **Z**-Eifen etc., falls die Belaftung lothrecht ift; auch die Gratfparren der Dächer gehören hierher. In allen diefen Fällen darf man nicht nach der einfachen Formel 56 rechnen, mufs vielmehr die gröfste Beanfpruchung aus Gleichung 62 entnehmen und dann den Querfchnitt fo beftimmen, dafs die gröfste Beanfpruchung die zuläffige Grenze nicht überfchreite. 104. Gröfste axiale Spannung; Querfchnittsermittelung.

Fig. 99.



Die Hauptaxen theilen den Querfchnitt in vier Quadranten; die gröfste Beanfpruchung wird in der Regel in denjenigen Querfchnittspunkten ftattfinden, welche in den von der Kraftebene gefchnittenen Quadranten des Querfchnittes liegen. Allgemein kann man mittels der Verzeichnung der Null-Linie leicht diejenigen Punkte finden, welche die gröfste Beanfpruchung erleiden; denn da die Beanfpruchung der fenkrechten Entfernung von der Null-Linie proportional ift, fo ift fie am gröfsten in denjenigen Querfchnittspunkten, welche, fenkrecht zur Null-Linie gemeffen, am weiteften von derfelben entfernt liegen. So werden in Fig. 99 die Punkte E und E' am meiften beanfprucht werden, erfterer bei der gewöhnlichen Drehrichtung der Momente auf

Zug, letzterer auf Druck. Werden die Coordinaten der meift beanfpruchten Punkte mit $+u_1$, $+v_1$ und $-u_2$, $-v_2$ bezeichnet, wobei diefelben nach denjenigen Seiten als pofitiv gerechnet find, an welchen die Einzelmomente $M \cos\alpha$, bezw. $M \sin\alpha$ Zug erzeugen, fo ergiebt fich mit Rückficht auf Gleichung 62

$$\sigma_{max} = M\left(\frac{v_1 \cos\alpha}{A} + \frac{u_1 \sin\alpha}{B}\right) \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = -M\left(\frac{v_2 \cos\alpha}{A} + \frac{u_2 \sin\alpha}{B}\right).$$

Falls die zuläffigen Beanfpruchungen auf Zug und Druck mit $+K'$ und $-K''$ bezeichnet werden, fo erhält man als Bedingungsgleichungen für die Querfchnittsbildung:

$$\left.\begin{array}{l} K' = M\left(\dfrac{v_1 \cos\alpha}{A} + \dfrac{u_1 \sin\alpha}{B}\right) \\ K'' = M\left(\dfrac{v_2 \cos\alpha}{A} + \dfrac{u_2 \sin\alpha}{B}\right) \end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad 67.$$

Bei denjenigen Bauftoffen, für welche nahezu $K' = K'' = K$ ift (Schweifseifen, Flufseifen, Holz), vereinfachen fich die Gleichungen 67 in

$$K = M\left(\frac{v' \cos\alpha}{A} + \frac{u' \sin\alpha}{B}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 68.$$

Im letzten Ausdruck bedeuten v' und u' die Coordinaten des meift beanfpruchten Punktes, bezogen auf die Hauptaxen als Coordinatenaxen.

$\frac{A}{v'}$ nennt man das Widerftandsmoment für die Axe UU, $\frac{B}{u'}$ dasjenige für die Axe VV; man fetzt abkürzungsweife

$$\frac{A}{v'} = W_u \quad \text{und} \quad \frac{B}{u'} = W_v,$$

fo dafs Gleichung 68 nunmehr lautet:

$$K = \frac{M \cos\alpha}{W_u} + \frac{M \sin\alpha}{W_v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 69.$$

Für den rechteckigen Querfchnitt ergiebt fich fehr einfach, wenn die Breite mit b und die Höhe mit h bezeichnet wird,

$$A = \frac{b h^3}{12}, \quad v' = \frac{h}{2}, \quad \frac{A}{v'} = W_u = \frac{b h^2}{6},$$

$$B = \frac{h b^3}{12}, \quad u' = \frac{b}{2}, \quad \frac{B}{u'} = W_v = \frac{h b^2}{6};$$

mithin aus Gleichung 69

$$K = \frac{6M}{bh}\left(\frac{\cos\alpha}{h} + \frac{\sin\alpha}{b}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 70.$$

Für einen beftimmten Fall find K, M, α gegeben; b und h find fo zu beftimmen, dafs vorftehende Gleichung erfüllt ift. Meiftens wird ein mehrmaliges Verfuchen mit verfchiedenen Werthen von b und h erforderlich fein. Man kann der Gleichung 70 auch die Form geben:

$$K = \frac{6M}{b h^2}\left[\cos\alpha + \frac{h}{b} \sin\alpha\right];$$

im Mittel ift $\frac{h}{b} = 1{,}5$ und dann

$$K = \frac{6M}{b h^2}\left[\cos\alpha + 1{,}5 \sin\alpha\right].$$

Die Gleichung für die Querfchnittsbeftimmung lautet alsdann:

$$b h^2 = \frac{6M(\cos\alpha + 1{,}5 \sin\alpha)}{K} \quad \text{oder} \quad h^3 = \frac{6M(\cos\alpha + 1{,}5 \sin\alpha)}{K}.$$

In diefem Ausdruck ift auf der rechten Seite nur Bekanntes; man findet daraus leicht h und danach

$$b = \frac{2}{3} h .$$

Bezeichnet man die beiden in die Hauptaxenebenen fallenden Momente kurz mit M_1 und M_2, alfo

$$M_1 = M \cos \alpha \quad \text{und} \quad M_2 = M \sin \alpha ,$$

fo wird

$$K = \frac{M_1}{W_u} + \frac{M_2}{W_v} = \frac{1}{W_u} \left(M_1 + M_2 \frac{W_u}{W_v} \right).$$

Führt man die abkürzende Bezeichnung $c = \frac{W_u}{W_v}$ ein, fo wird [23])

$$K = \frac{1}{W_u} (M_1 + c M_2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 71.$$

Zur Ermittelung des erforderlichen Querfchnittes kann diefe Formel bequem für rechteckige, I- und Ɛ-förmige Querfchnittsformen verwendet werden. Die Werthe von c find für die verfchiedenen Kaliber der Deutfchen Normal-Profile (I und Ɛ) wenig veränderlich; für vorläufige Berechnungen kann man

für I-Eifen $c = 7$ für Ɛ-Eifen $c = 5$

einführen. Alsdann ift die Bedingungsgleichung für den Querfchnitt

$$W_u = \frac{M_1 + c M_2}{K} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 72.$$

Man beftimmt nach Gleichung 72 das erforderliche W_u und wählt danach aus den Tabellen das Profil; hat diefes einen anderen Werth, als derjenige, welcher angenommen war, fo nimmt man eine zweite, genauere Rechnung vor [24]).

Bezüglich der einfachen Behandlung unfymmetrifcher Querfchnittsformen (Z-Eifen, Γ-Eifen u. dergl.) wird auf Art. 114 verwiefen.

Für die Berechnung bequem ift auch Gleichung 66:

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A} m ,$$

weil fie nur das Seitenmoment in der Ebene der einen Hauptaxe enthält. Für alle Querfchnittspunkte, welche in der Hauptaxe VV liegen, ift die Spannung durch das in der Ebene der UU wirkende Seitenmoment gleich Null; für alle diefe Querfchnittspunkte kommt alfo nur das Seitenmoment ($M \cos \alpha$) in Frage. Mit den Spannungen diefer Punkte kennt man aber auch die Spannungen derjenigen Querfchnittspunkte, welche in bezw. gleichen, fenkrecht gemeffenen Abftänden von der Null-Linie liegen, wie diefe. Gröfste Beanfpruchung findet in den Punkten ftatt, welche den weiteften Abftand (fenkrecht gemeffen) von der Null-Linie haben. In Fig. 98 find dies die Punkte A_1 und A_2. Um ihre Spannungen zu ermitteln, lege man durch diefelben Parallele zur Null-Linie, welche die VV-Axe bezw. in A' und A'' fchneiden. Alsdann ift in A_1, bezw. A_2, fo wie in A' und A''

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{M \cos \alpha}{A} r .$$

23) Siehe: Land, R. Profilbeftimmung von I- und Ɛ-Trägern bei fchiefer Belaftung. Zeitfchr. d. Ver. deutfch. Ing. 1895, S. 293.

24) In Theil III, Band 2, Heft 4 (Abth. III, Abfchn. 2, E, Kap. 34, unter a) diefes »Handbuches« werden die Tabellen für c vorgeführt und einige Beifpiele durchgerechnet werden.

c) Allgemeine Unterſuchung der Biegungsſpannungen mit Zuhilfenahme der Trägheitskreiſe.

105.
Spannungen an beliebiger Stelle des Querſchnittes.

Für den allgemeinen Fall, der durch Fig. 100 dargeſtellt iſt, ſchneide die an der einen Seite des Querſchnittes wirkende Mittelkraft R den Querſchnitt im Punkte E (bezw. E'); S ſei der Schwerpunkt des Querſchnittes; die Kraftebene ſchneide den Querſchnitt nicht in einer Hauptaxe. Wie in Art. 95 (S. 73) wird die Annahme gemacht, daſs die axialen Spannungen σ der einzelnen Querſchnittspunkte in linearer Abhängigkeit von ihrer Lage ſtehen. Trägt man alſo in jedem Querſchnittspunkte die axiale Spannung ſenkrecht zum Querſchnitt als Ordinate auf, ſo liegen die Endpunkte aller Ordinaten auf einer Ebene, der Spannungsebene. Die Gleichung dieſer Ebene iſt auch die Gleichung für σ. Spannungsebene und Querſchnittsebene ſchneiden einander in einer Geraden; in allen Punkten dieſer Geraden hat die Spannung, d. h. die Ordinate der Spannungsebene, den Werth Null. Dieſe Linie iſt die ſog. Null-Linie (neutrale Linie). Fig. 101 zeigt die Spannungsebene, den Querſchnitt (welcher der Einfachheit halber rechtwinkelig eingetragen iſt) und die Null-Linie NN. Eine ſenkrecht zur Querſchnittsebene parallel zur Linie NN hindurch gelegte Ebene ſchneidet den Querſchnitt und die Spannungsebene in zwei Parallelen $1\,1$ und $2\,2$. Daraus folgt: **Alle Punkte des Querſchnittes, welche auf einer Geraden liegen, die parallel zur Null-Linie iſt, haben gleiche Spannung** σ (vergl. auch Art. 103, S. 81). Die Spannung in den einzelnen Punkten der Linie $1\,1$ iſt alſo unabhängig von der beſonderen Lage des Punktes in der Linie; ſie hängt nur von dem Abſtande der Linie $1\,1$ und der Null-Linie ab. Bezeichnet man dieſen Abſtand, rechtwinkelig gemeſſen, mit η, ſo iſt $\sigma = C\eta$. In dieſem Ausdruck iſt C eine noch zu beſtimmende Conſtante.

Fig. 100.

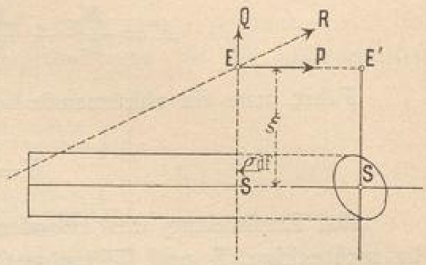
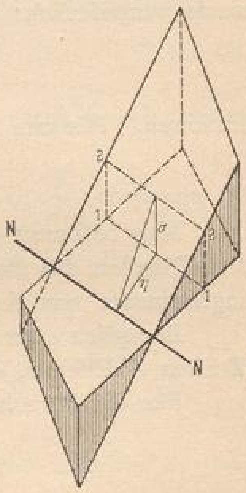
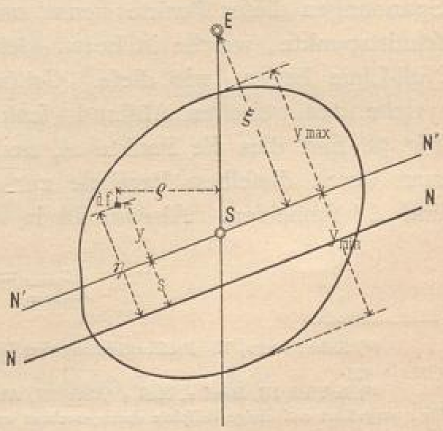


Fig. 101.



Durch den Schwerpunkt S des Querſchnittes (Fig. 102) werde eine Axe $N'N'$ parallel zur Null-Linie NN gelegt; der Abſtand beider Axen ſei s. Alsdann ſei $\eta = y + s$, d. h. der ſenkrechte Abſtand eines beliebigen Querſchnittspunktes von der Null-Linie ſei gleich η und von der Linie $N'N' = y$. Die an der einen Seite des Querſchnittes auf den Balken wirkende Mittelkraft R (Fig. 100) ſchneide den Querſchnitt im Punkte E. Die Linie ES, in welcher die Kraftebene den Querſchnitt ſchneidet, wird die **Kraftlinie** genannt. Die Beziehungen, welche zwiſchen der Lage der Kraftlinie und Null-Linie beſtehen, ſo wie die Gröſse von σ

Fig. 102.



ergeben fich aus den Gleichgewichtsbedingungen. Die Mittelkraft R (Fig. 100) wird in die Axialkraft P und in die Querkraft Q zerlegt; fie mufs mit den im Querfchnitt anzubringenden Spannungen im Gleichgewicht fein, d. h. es mufs ftattfinden:

I) $0 = P - \int \sigma\, df$ (algebraifche Summe der Kräfte, welche in der Richtung der Axe wirken, gleich Null).

II) $0 = P\xi - \int \sigma y\, df$ (algebraifche Summe der Momente für die Axe $N'N'$ gleich Null).

III) $0 = \int \sigma \rho\, df$ (algebraifche Summe der Momente für die Kraftlinie, d. h. für die Axe ES, gleich Null).

Unter ρ ift der normal gemeffene Abftand eines Querfchnittspunktes von der Kraftlinie ES verftanden. Beachtet man, dafs $\sigma = C\eta = C(y+s)$ ift, fo erhält man aus Gleichung I

$$P = C\int (y+s)\, df = C\int y\, df + C\int s\, df.$$

Da $N'N'$ eine Schwerpunktsaxe ift, fo ift

$$\int y\, df = 0, \quad \text{alfo} \quad P = Cs\int df = CsF, \quad \text{d. h.}$$

IV) $$C = \frac{P}{sF}.$$

Aus Gleichung II ergiebt fich

$$P\xi = C\int y^2\, df + Cs\int y\, df \quad \text{und mit} \quad \int y\, df = 0$$

$$P\xi = C \,.\int y^2\, df.$$

$\int y^2\, df$ ift das Trägheitsmoment der Querfchnittsfläche für die zur Null-Linie parallele Schwerpunktsaxe; daffelbe foll kurz mit $\mathcal{J}$ bezeichnet, eben fo $P\xi = M$ gefetzt werden. Dann wird $M = C\mathcal{J}$ und

V) $$C = \frac{M}{\mathcal{J}}.$$

Die Gleichfetzung von IV und V ergiebt

$$s = \frac{P}{F}\,\frac{\mathcal{J}}{M} = \frac{P\mathcal{J}}{F\,.\,P\xi} = \frac{\mathcal{J}}{F\xi},$$

VI) $$s = \frac{\mathcal{J}}{F\xi}.$$

Nach Art. 71 (S. 51) ift $\mathcal{J} = Fi^2$, worin i den Trägheitsradius bezeichnet, d. h.

VI a) $$s = \frac{i^2}{\xi}.$$

Gleichung VI a befagt: i ift die mittlere geometrifche Proportionale zwifchen s und ξ. Wenn ξ und i bekannt find, fo kann man daraus leicht den Abftand s der Null-Linie vom Schwerpunkt finden.

Aus Gleichung III folgt endlich:

$$\int \sigma \rho\, df = C\int (y+s)\rho\, df = 0,$$

$$\int y\rho\, df + s\int \rho\, df = 0.$$

$\int \rho \, df$ ift das ftatifche Moment der Querfchnittsfläche für die Schwerpunktsaxe ES, d. h. es ift $\int \rho \, df = 0$, mithin auch

$$\text{VII)} \qquad \int \eta \, \rho \, df = 0 .$$

Gleichung VII befagt, dafs das Centrifugalmoment für die beiden Axen: Kraftlinie $\overline{ES}$ und die zur Null-Linie parallele Schwerpunktsaxe, gleich Null ift, d. h. beide Axen find conjugirt (fiehe Art. 67, S. 46). Demnach ift bewiefen: Die Kraftlinie und die durch den Schwerpunkt des Querfchnittes parallel zur Null-Linie gezogene Axe $N'N'$ find conjugirte Axen. Daraus ergiebt fich eine fehr einfache, unten folgende Conftruction.

Aus der Gleichung $s = \frac{P}{M} \frac{\mathfrak{J}}{F}$ folgt noch, dafs falls die Axialkraft P gleich Null ift, ohne dafs auch M gleich Null ift, dann der Abftand s der Null-Linie vom Schwerpunkt ebenfalls Null ift. Alfo: Wenn die Axialkraft gleich Null ift, fo geht die Null-Linie durch den Schwerpunkt des Querfchnittes (fiehe auch Art. 96, S. 75).

Es war $\sigma = C \eta = C (y + s)$, und mit Rückficht auf Gleichung V u. VI wird

$$\sigma = \frac{M}{\mathfrak{J}} y + \frac{M}{\mathfrak{J}} \frac{\mathfrak{J}}{F \xi} = \frac{M}{\mathfrak{J}} y + \frac{P \xi \mathfrak{J}}{\mathfrak{J} F \xi} = \frac{M}{\mathfrak{J}} y + \frac{P}{F} .$$

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathfrak{J}} y \qquad \qquad 73.$$

Dies ift genau derfelbe Ausdruck, welcher in Art. 95 (S. 73) für den Fall gefunden ift, dafs die Kraftebene alle Querfchnitte in Hauptaxen fchneidet; nur beziehen fich in der hier entwickelten Gleichung M und $\mathfrak{J}$ auf diejenige Schwerpunktsaxe, welche der Kraftlinie conjugirt (d. h. parallel zur Null-Linie) ift. In der früheren Gleichung bezogen fich M und $\mathfrak{J}$ auf die eine Hauptaxe, wenn die Kraftlinie die andere Hauptaxe war. Man fieht, dafs die frühere Gleichung ein Sonderfall der foeben entwickelten allgemein giltigen Gleichung ift.

Aus Gleichung 73 folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathfrak{J}} y_{max} \\ \sigma_{min} &= \frac{P}{F} - \frac{M}{\mathfrak{J}} y_{min} \end{aligned} \right\} \qquad \qquad 74.$$

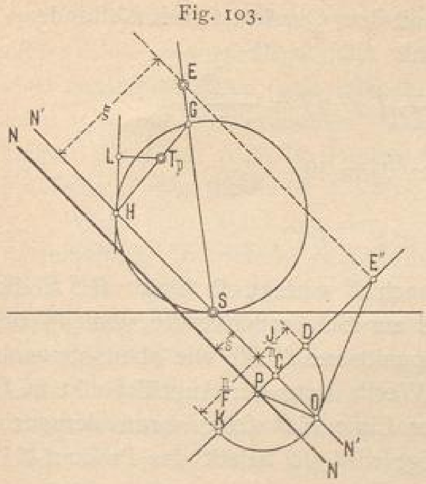
Maximum und Minimum der Spannungen ergeben fich in denjenigen Querfchnittspunkten, durch welche die weiteft gezogenen Parallelen zur Null-Linie möglich find.

106. Lage der Null-Linie; graphifche Ermittelung mittels des Trägheitskreifes.

Da die Kraftlinie ES und die zur Null-Linie parallele Schwerpunktsaxe $N'N'$ conjugirt find, fo ergiebt fich die folgende Conftruction (Fig. 103).

Man conftruire den Trägheitskreis des Querfchnittes mit dem Durchmeffer $\mathfrak{J}_p$ (fiehe Art. 68, S. 46), fuche T_p, den Trägheitshauptpunkt, ziehe die Kraftlinie $\overline{SE}$ und verbinde den Schnittpunkt G der Kraftlinie und des Trägheitskreifes mit T_p. Die Linie $\overline{GT_p}$ fchneide den Kreis zum zweiten Male in H; alsdann ift $\overline{SH}$ die zu $\overline{SE}$ conjugirte Axe, weil das Centrifugalmoment des Querfchnittes für beide Axen SE und SH Null ift (fiehe Art. 67, S. 46). Die Linie $\overline{SH}$ ift alfo zur Null-Linie NN parallel; der fenkrechte Abftand beider ift s, und es ift $s = \frac{\mathfrak{J}}{F \xi}$. In Fig. 103 wird $\mathfrak{J}$, bezogen auf die Axe $N'N'$, dargeftellt durch die Länge $\overline{LT_p}$. Ift der Mafsftab für den Trägheitskreis derart, dafs 1 cm n cm³

Fig. 103.



bedeutet, ſo iſt $\mathfrak{J} = \overline{L T_p} . n$ und $\overline{L T_p} = \frac{\mathfrak{J}}{n}$. Man kann den Ausdruck für s, ohne etwas zu ändern, im Zähler und Nenner durch n dividiren und erhält

$$s \xi = \frac{\mathfrak{J}}{n} \frac{n}{F} .$$

Daraus folgt: Auf einer ſenkrecht zur Linie $N' N'$ gezogenen Linie mache man $\overline{CD} = \frac{\mathfrak{J}}{n} = \overline{L T_p}$, $\overline{CK} = \frac{n}{F}$ und ſchlage über $\overline{DK}$ einen Halbkreis; alsdann iſt

$$\overline{CO}^2 = \overline{CD} . \overline{CK} = \frac{\mathfrak{J}}{n} \frac{n}{F} .$$

Nunmehr mache man $\overline{CE''} = \xi$, ziehe $\overline{E''O}$ und in O die Senkrechte $\overline{OP}$ zu $\overline{OE''}$. Dann iſt auch $\overline{CP} . \overline{CE''} = \overline{CO}^2$, d. h.

$$\overline{CP} . \xi = \frac{\mathfrak{J}}{n} \frac{n}{F} \quad \text{oder} \quad \overline{CP} = \frac{\mathfrak{J}}{n} \frac{n}{F \xi} = s .$$

Die parallel zu $N' N'$ durch P gezogene Linie iſt alſo die geſuchte Null-Linie NN.

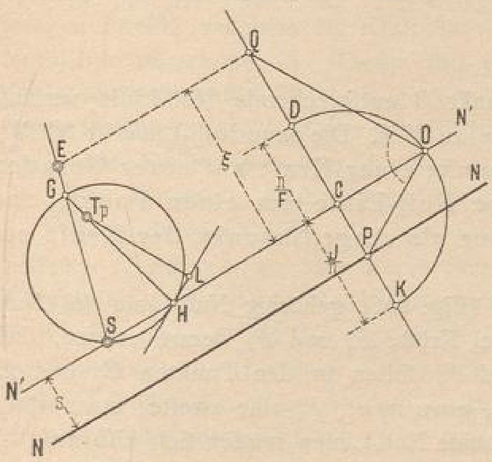
Es ſei z. B. $n = 100 \text{ cm}^3$ und $F = 22 \text{ qcm}$. Alsdann iſt $\frac{n}{F} = \frac{100}{22} = 4{,}54 \text{ cm}$.

Man kann zur Auffindung von s auch die Gleichung $s \xi = i^2$ benutzen, indem man $\overline{L T_p}$ abgreift, ausrechnet und den erhaltenen Werth für $\mathfrak{J}$ durch F dividirt. Macht man nun $\overline{CO} = i$, $\overline{CE''} = \xi$, zieht $\overline{OE''}$ und durch O ſenkrecht zu $\overline{OE''}$ die Linie $\overline{OP}$, ſo iſt $\overline{CP} = s$.

Die umgekehrte Aufgabe, aus der Lage der Null-Linie den zugehörigen Angriffspunkt E zu ermitteln, wird in gleicher Weiſe gelöſt.

Trägheitskreis und Trägheitshauptpunkt T_p werden verzeichnet; es ſei NN (Fig. 104) als Null-Linie vorgeſchrieben. Man ziehe durch den Schwerpunkt S eine Linie $N' N'$ parallel zur Null-Linie NN; alsdann iſt die Kraftlinie conjugirt zu $N' N'$. Der zweite Durchſchnittspunkt von $N' N'$ mit dem Kreiſe ſei H; man verbinde H mit T_p; $\overline{H T_p}$ ſchneide den Kreis zum zweiten Male in Punkt G; $\overline{SG}$ iſt die geſuchte zu $N' N'$ conjugirte Axe, alſo die Kraftlinie, d. h. auf $\overline{SG}$ liegt der geſuchte Angriffspunkt E. Nunmehr iſt noch der ſenkrechte Abſtand ξ des Punktes E von der Axe $N' N'$ zu ermitteln. Es iſt $\xi = \frac{1}{s} \frac{\mathfrak{J}}{n} \frac{n}{F}$. Man ziehe eine Linie ſenkrecht zur Null-Linie, mache auf derſelben $\overline{CK} = \frac{\mathfrak{J}}{n} = \overline{T_p L}$, $\overline{CD} = \frac{n}{F}$ und ſchlage über $\overline{DK}$ einen Halbkreis; alsdann iſt

Fig. 104.



$$\overline{CO}^2 = \frac{\mathfrak{J}}{n} \frac{n}{F} .$$

Zieht man ferner $\overline{OP}$ und durch O ſenkrecht zu $\overline{OP}$ die Linie $\overline{OQ}$, ſo iſt $\overline{CO}^2 = \overline{CP} . \overline{CQ} = s . \overline{CQ}$, d. h. $\overline{CQ} = \frac{\overline{CO}^2}{s} = \frac{\mathfrak{J}}{n} \frac{n}{F} \frac{1}{s} = \xi$. Die durch Q parallel zu $N' N'$ gezogene Linie ſchneidet die Kraftlinie $\overline{SG}$ im geſuchten Punkte E, welcher beiden Bedingungen genügt: er liegt auf der Kraftlinie und im ſenkrecht gemeſſenen Abſtande ξ von der Axe $N' N'$.

Der Winkel der Kraftlinie $\overline{SE}$ mit der Senkrechten zur Null-Linie ſei δ (Fig. 105); dann iſt $\overline{SB} = s' = \frac{s}{\cos \delta}$ und $\overline{ES} = \xi' = \frac{\xi}{\cos \delta}$, mithin 107. Weitere Beziehungen zwiſchen der Null-Linie und dem Angriffspunkt der Kraft.

$$s \xi = \frac{\mathfrak{J}}{F} = s' \xi' . \cos^2 \delta \quad \text{oder} \quad s' \xi' = \frac{\mathfrak{J}}{\cos^2 \delta} \frac{1}{F} .$$

Multiplicirt man jedes Flächentheilchen df mit dem Quadrat ſeines Abſtandes y' von $N'N'$, gemeſſen in der Richtung der Kraftlinie ES, ſo iſt

$$\int df \,.\, y'^2 = \int df \frac{y^2}{\cos^2 \delta} = \frac{1}{\cos^2 \delta} \int y^2 \, df = \frac{\mathfrak{J}}{\cos^2 \delta}.$$

Es werde $\mathfrak{J}' = \dfrac{\mathfrak{J}}{\cos^2 \delta}$ und $F i_1^{\,2} = \mathfrak{J}'$ geſetzt; dann iſt

$$s' \xi' = \frac{\mathfrak{J}'}{F} = i_1^{\,2} \quad \text{und} \quad s' \xi' = i_1^{\,2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 75.$$

Wird der Angriffspunkt der Kraft von E nach B verlegt, ſo bleibt BSE die Kraftlinie wie zuvor; die Null-Linie läuft parallel zur Schwerpunktsaxe, welche zur Kraftlinie conjugirt iſt, d. h. zu derſelben Schwerpunktsaxe $N'N'$, wie oben. Sonach haben ſowohl $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$, wie auch $i_1^{\,2}$ denſelben Werth, mag der Angriffspunkt in E oder B oder in irgend einem anderen Punkt der Linie EB ſein; wenn demnach der Angriffspunkt der Kraft von E nach B verlegt wird, ſo behält das Product $s' \xi'$

Fig. 105.

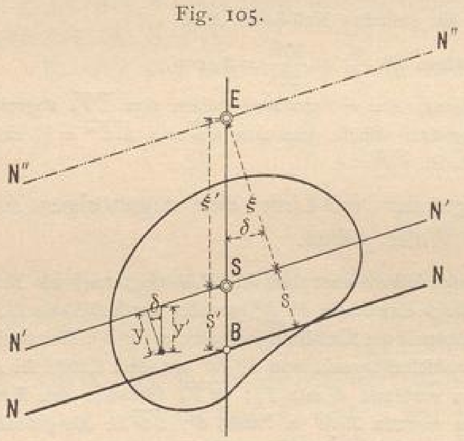
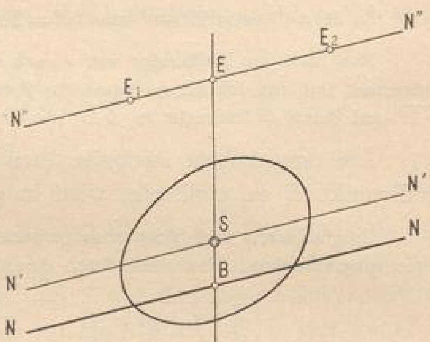


Fig. 106.



denſelben Werth $i_1^{\,2}$. Die dem Angriffspunkt B entſprechende Null-Linie verläuft alſo durch E und iſt parallel zu $N'N'$, d. h. zu NN. Die neue Null-Linie iſt $N''N''$.

Satz: Bewegt ſich der Angriffspunkt einer Kraft auf einer Geraden ($N''N''$), ſo dreht ſich die zugehörige Null-Linie um einen Punkt, und zwar um denjenigen Punkt B, welcher als Angriffspunkt der Kraft zur Null-Linie $N''N''$ gehören würde.

Beweis: Die zum Angriffspunkt E (Fig. 106) gehörige Null-Linie ſei NN. Die in E wirkende Kraft werde durch zwei Kräfte P_1 und P_2 derart erſetzt, daſs ihre Mittelkraft P durch E geht; P_1 und P_2 ſollen in den Punkten E_1 und E_2 wirken. P_1 erzeugt irgend eine Null-Linie, etwa $n_1 n_1$, P_2 eine zweite, etwa $n_2 n_2$; die reſultirende Null-Linie muſs NN ſein; beide Null-Linien müſſen ſich alſo auf NN ſchneiden. Nun liege P_1 feſt, alſo auch $n_1 n_1$; dagegen gleite P_2 auf $N''N''$ und ändere ſeine Gröſse dabei ſo, daſs die Mittelkraft von P_1 und P_2 immer durch E geht. Dann bleibt auch die reſultirende Null-Linie beſtändig NN; auch der Schnittpunkt von $n_1 n_1$ und $n_2 n_2$ muſs immer auf NN bleiben, und da $n_1 n_1$ ruht, ſo darf auch der Schnittpunkt nicht gleiten. Bewegt ſich alſo der Angriffspunkt einer Kraft, hier derjenige von P_2, auf einer Geraden $N''N''$, ſo dreht ſich die zugehörige Null-Linie, hier $n_2 n_2$, um einen feſten Punkt. Die Lage dieſes feſten Punktes ergiebt ſich folgendermaſsen. Rückt die Kraft P_2, alſo auch der Punkt E_2, unendlich weit, fo wird die Linie $S \cdot \infty$, welche mit $N' N'$ zufammenfällt, die Kraftlinie, und diefer Linie conjugirt mufs die Null-Linie $n_2 n_2$ fein. Nun find aber $\overline{N' N'}$ und $\overline{S E}$ zwei conjugirte Axen; alfo fällt für diefe Lage des Punktes E_2 die zugehörige Null-Linie $n_2 n_2$ mit $\overline{S E}$ zufammen. Die Null-Linie $n_2 n_2$ fchneidet demnach für eine ihrer Lagen die Linie NN im Punkte B, und da der Schnittpunkt von NN und $n_2 n_2$ ein fefter Punkt ift, fo ift B diefer fefte Drehpunkt. Damit ift obiger Satz bewiefen.

Wenn die Null-Linie den Querfchnitt fchneidet, fo findet auf beiden Seiten derfelben im Querfchnitt verfchiedenartige Beanfpruchung ftatt. Da nun jeder Null-Linie eine ganz beftimmte Lage des Angriffspunktes E entfpricht, fo liegt die Frage nahe: In welchen Grenzen mufs E liegen, damit ftets im ganzen Querfchnitt nur eine Art der Beanfpruchung ftattfindet, nur Zug oder nur Druck? Die Null-Linie darf offenbar höchftens den Querfchnitt berühren, wenn die Bedingung gleichartiger Beanfpruchungsweife im Querfchnitt erfüllt fein foll. Läfft man die Null-Linie alle möglichen Lagen der Berührenden des Querfchnittes einnehmen und ermittelt die zugehörigen Angriffspunkte E der Kraft, fo ergiebt die Verbindungslinie diefer Punkte eine Figur, welche man den Kern des Querfchnittes nennt. So lange der Angriffspunkt E der Kraft innerhalb des Kernes oder der Kernfläche liegt, fällt die Null-Linie aufserhalb des Querfchnittes, und im Querfchnitt herrfcht nur Zug oder nur Druck. 108. Kern des Querfchnittes.

Demnach ergiebt fich der Kern des Querfchnittes durch die folgende Conftruction. Man laffe die Null-Linie alle Lagen einnehmen, in denen fie den Querfchnitt berührt, ermittele für jede derfelben den zugehörigen Angriffspunkt E der Kraft und verbinde die Punkte E miteinander.

Für die Conftruction ift noch das Nachftehende zu beachten. In Art. 107 (S. 89) ift der Satz gefunden: Bewegt fich der Angriffspunkt E auf einer Geraden, fo dreht fich die zugehörige Null-Linie um einen feften Punkt B, und zwar denjenigen Punkt, welchem als Kraft-Angriffspunkt die Weggerade des Punktes E als Null-Linie zugeordnet ift. Diefer Satz gilt auch umgekehrt, da zu jeder Null-Linie ein ganz beftimmter Punkt E gehört, d. h. dreht fich die Null-Linie um einen feften Punkt B, fo gleitet der Angriffspunkt E auf einer Geraden, welche als Null-Linie dem Punkte B zugeordnet ift.

Die Benutzung diefes Satzes foll an einigen Querfchnitten gezeigt werden.

Beim Rechteck (Fig. 107) lege man die Null-Linie nach einander in die vier Seiten *1 1*, *2 2*, *3 3*, *4 4* des Rechteckes und ermittele die Lage der zugehörigen Kernpunkte. Die durch den Schwerpunkt S zur Null-Linie *1 1* gezogene Parallele ift die Hauptaxe XX; der zugehörige Angriffspunkt I der Kraft liegt auf der conjugirten Axe; zur Hauptaxe XX ift die andere Hauptaxe YY conjugirt; alfo liegt Punkt I auf diefer. Der Abftand ξ des Kernpunktes I von der Axe XX ift nach Früherem aus der Gleichung 109. Kern des Rechteckes.

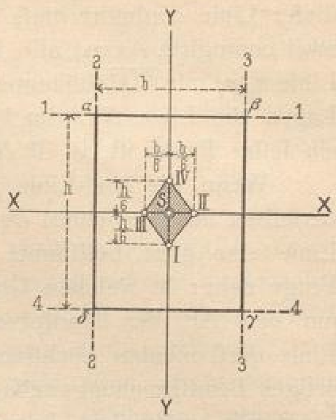
$$s \xi = \frac{\mathcal{J}}{F} = \frac{A}{F} = \frac{b h^3}{12 b h} = \frac{h^2}{12}$$

zu finden. Hier ift $s = \frac{h}{2}$, alfo das gefuchte

$$\xi = \frac{h^2 . 2}{12 h} = \frac{h}{6} .$$

Zu beachten ift, dafs Kernpunkt und Null-Linie nach der Entwickelung obiger Formel auf verfchiedenen Seiten der Schwerpunktsaxe XX liegen müffen. Eben fo

Fig. 107.



findet man für die Null-Linie *44* den Punkt *IV*, welcher um $\frac{h}{6}$ über XX liegt. Für die Null-Linien *22* und *33* müssen die Kernpunkte auf der Hauptaxe XX liegen; die Abstände ξ' sind, weil hier $s' = \frac{b}{2}$ ist,

$$\xi' \frac{b}{2} = \frac{B}{F} = \frac{h b^3}{12 b h} = \frac{b^2}{12} \quad \text{oder} \quad \xi' = \frac{b}{6}.$$

Damit sind die Punkte *II* und *III* gefunden.

Außer den vier betrachteten Lagen der Null-Linie sind noch andere Grenzlagen möglich, indem sich die Null-Linie aus der Lage *11* in die Lage *22* bewegt und dabei um den Punkt α dreht. Bei dieser Drehung gleitet der Kernpunkt auf einer Geraden, für welche bereits zwei Punkte *I* und *II* gefunden sind, nämlich für die Lagen *11* und *22* dieser Linie. Die Verbindungslinie *I II* ist demnach diese Gerade. Eben so gleitet der Kernpunkt auf *I III*, während die Null-Linie sich aus Lage *11* in *33* um den Punkt β dreht und so weiter. Man erhält in dieser Weise die in Fig. 107 schraffirte Kernfläche.

110. Kern des Kreises.

Beim Kreis sind alle Axen Hauptaxen. Die Null-Linien sind Tangenten an den Kreis; demnach sind in der Gleichung $s\,\xi = \frac{\mathcal{J}}{F}$ die Größen $s = \frac{d}{2}$, $\mathcal{J} = \frac{d^4 \pi}{64}$, $F = \frac{d^2 \pi}{4}$ und der Abstand des Kernpunktes vom Mittelpunkt des Kreises für alle Tangenten $\xi = \frac{d^2}{16} \frac{2}{d} = \frac{d}{8}$. Die Kernfläche ist also ein Kreis mit dem Halbmesser $\frac{d}{8}$, bezw. dem Durchmesser $\frac{d}{4}$.

111. Kern des Kreisringes.

Beim Kreisring mit dem äußeren Durchmesser D und dem inneren Durchmesser d ist $s = \frac{D}{2}$, $\mathcal{J} = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{64}$, $F = (D^2 - d^2)\frac{\pi}{4}$,

$$\xi = \frac{\mathcal{J}}{F s} = \frac{(D^4 - d^4)\,2}{(D^2 - d^2)\,16\,D} = \frac{(D^2 + d^2)}{8\,D} = \frac{D}{8}\left[1 + \frac{d^2}{D^2}\right].$$

Der Halbmesser der kreisförmigen Kernfläche ist also

$$k = \frac{D}{8}\left[1 + \frac{d^2}{D^2}\right].$$

112. Kern des I-Eisens.

Beim I-Eisen liegen auf der YY-Axe die Kernpunkte von der XX-Axe um

$$k_1 = \pm \frac{2A}{Fh}$$

entfernt; auf der XX-Axe liegen die Kernpunkte von der YY-Axe, bezw. um

$$k_2 = \pm \frac{2B}{Fb}$$

entfernt. Die Eckpunkte sind wie beim Rechteck durch Gerade zu verbinden.

113. Graphische Ermittelung des Kernes.

Bei unregelmäßigen Querschnitten bestimmt man zweckmäßig die Kernfläche mit Hilfe des Trägheitskreises. Dabei handelt es sich hauptsächlich um die wiederholte Lösung der in Art. 106 (S. 89) behandelten Aufgabe, aus der vorgeschriebenen Lage der Null-Linie den zugehörigen Angriffspunkt E der Kraft zu ermitteln. Man läßt die Null-Linie den Querschnitt umhüllen; bei der Drehung der Null-Linie um

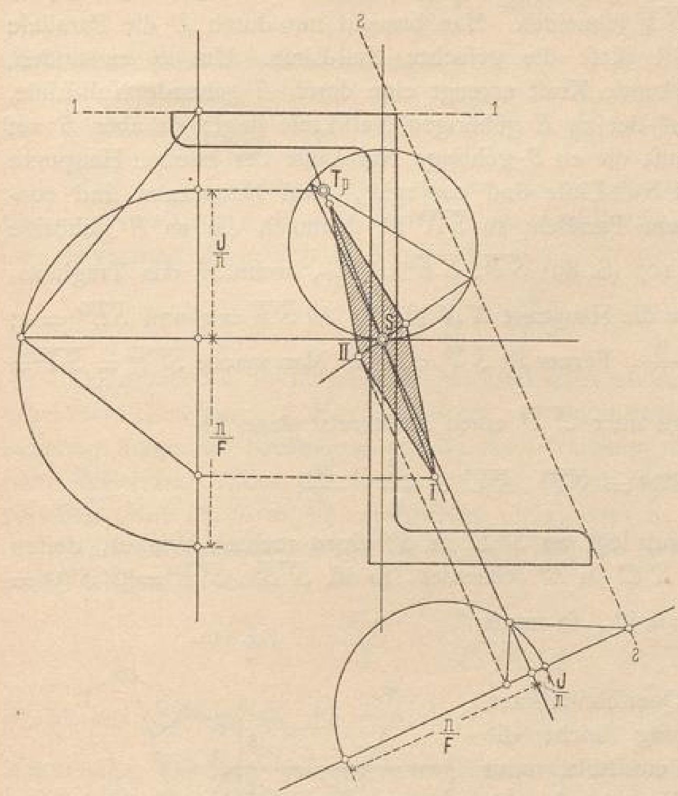


Fig. 108.

einen Punkt aus der einen Lage in eine benachbarte Lage befchreibt der zugehörige Kernpunkt die Verbindungslinie der beiden Kernpunkte, welche zu den entfprechenden Nachbarlagen der Null-Linie gehören. Fig. 108 zeigt die Conftruction des Kernes für ein **Z**-Eifen.

Man kann auch die Eckpunkte des Querfchnittes nach dem Satz in Art. 108 (S. 91) als Angriffspunkte der Kraft annehmen und für diefe die zugehörigen Null-Linien conftruiren; denn während die Null-Linie fich um den Eckpunkt dreht, befchreibt der Kernpunkt eine Gerade, welche als Null-Linie dem Eckpunkt als Angriffspunkt der Kraft zugeordnet ift. Diefe Conftruction zeigt Fig. 109.

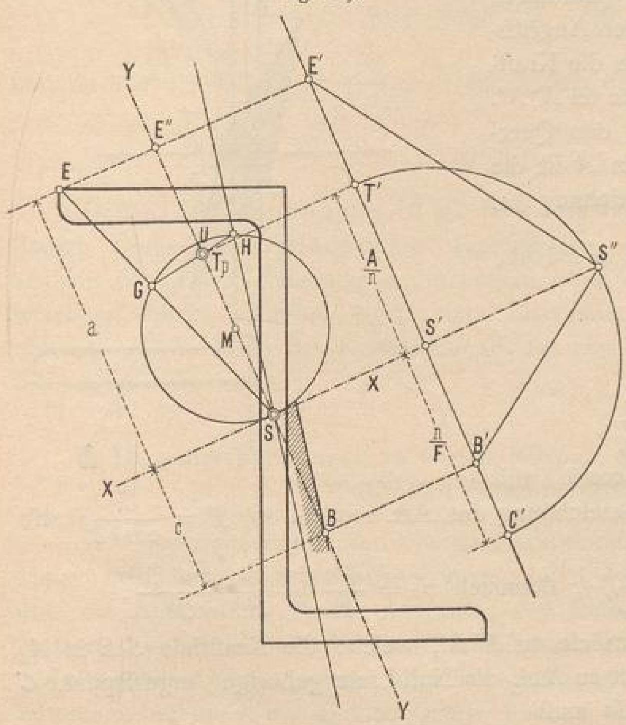


Fig. 109.

Es empfiehlt fich, zuvor die Hauptaxen des Querfchnittes zu ermitteln, was ja nach Verzeichnung eines Trägheitskreifes leicht ift. Nunmehr verzeichne man einen neuen Trägheitskreis fo, dafs T_p auf feinem Durchmeffer liegt; dann find SX und SY die Hauptaxen; ferner ift

$$\overline{ST_p} = \frac{A}{n} \quad \text{und} \quad \overline{T_pU} = \frac{B}{n}.$$

Ift E einer der Angriffspunkte der Kraft, für welchen die zugehörige Null-Linie gefucht wird, fo ziehe man $\overline{SE}$; der Schnittpunkt diefer Linie mit dem Trägheitskreife fei G; man ziehe $\overline{GT_pH}$; H ift der zweite Schnittpunkt der Linie $\overline{GT_p}$ mit dem Trägheitskreife. Dann ift $\overline{SH}$ die Richtung der Null-Linie; letztere ift bekannt, fobald man noch einen Punkt kennt, durch welchen ſie gehen muſs, z. B. den Punkt B, in welchem ſie die Hauptaxe $\overline{SY}$ ſchneidet. Man braucht nur durch B die Parallele zu $\overline{SH}$ zu ziehen; dann iſt dieſe die geſuchte Null-Linie. Um B zu finden, beachte man: Eine in B wirkende Kraft erzeugt eine durch E gehende Null-Linie, da B nach der Annahme auf der zu E gehörigen Null-Linie liegt; da aber B auf der einen Hauptaxe liegt, muſs die zu B gehörige Null-Linie der zweiten Hauptaxe parallel ſein (Kraftlinie und Null-Linie ſind conjugirt, zwei Hauptaxen ſind conjugirt). Die durch E gezogene Parallele zu $\overline{SX}$ iſt demnach die zu B gehörige Null-Linie, mithin nach Art. 107 (S. 89) $\overline{SB} \cdot \overline{SE''} = \frac{A}{F}$, wenn A das Trägheitsmoment des Querſchnittes für die Hauptaxe XX iſt. Es ſei $\overline{SB} = c$ und $\overline{SE''} = a$; dann iſt $ac = \frac{A}{F} = \frac{A}{n} \cdot \frac{n}{F}$. Ferner iſt $\overline{ST_p} = \frac{A}{n}$. Man mache $\overline{S'T'} = \overline{ST} = \frac{A}{n}$, $\overline{S'C'} = \frac{n}{F}$ und ſchlage über $\overline{C'T'}$ einen Halbkreis; dann iſt

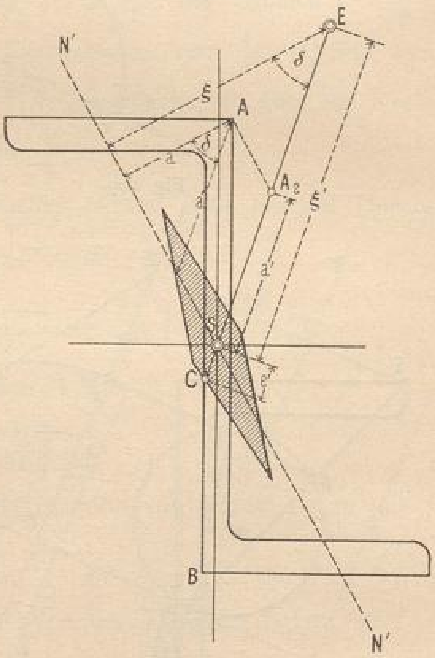
$$(S'S'')^2 = \overline{S'T'} \cdot \overline{S'C'} = \frac{A}{n} \cdot \frac{n}{F}.$$

Verbindet man S'' mit E' und legt an $S''E'$ in S'' einen rechten Winkel, deſſen zweiter Schenkel die Linie $E'C'$ in B' ſchneidet, ſo iſt $\overline{S'B'} \cdot \overline{S'E'} = (S'S'')^2 = \frac{A}{n} \cdot \frac{n}{F}$, und da $S'E' = a$ iſt, ſo muſs $S'B' = c$ ſein.

114. Spannung in einem Umfangspunkte des Querſchnittes, ausgedrückt mit Hilfe des Kernes.

Für einen beliebigen Querſchnitt kann man bei beliebiger Belaſtung leicht die gröſste auftretende Spannung ermitteln, wenn man den Kern kennt. In Fig. 110 ſei der Kern des Querſchnittes gefunden (ſchraffirt); S ſei der Schwerpunkt und E der Angriffspunkt der Kraft; $\overline{SE}$ iſt demnach die Kraftlinie; die zugehörige conjugirte Axe ſei $N'N'$. Gröſste Beanſpruchung findet in den Querſchnittspunkten A oder B ſtatt. In A iſt die Beanſpruchung nach Art. 105 (Gleichung 74)

Fig. 110.



$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{Ma}{\mathfrak{J}}, \text{ und da } M = P\xi \text{ iſt,}$$

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P\xi a}{\mathfrak{J}};$$

dafür

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P}{F}\,\frac{F\xi a}{\mathfrak{J}}.$$

Nun iſt $a = a' \cos\delta$ und $\xi = \xi' \cos\delta$, alſo $a\xi = a'\xi' \cdot \cos^2\delta$ und mit der Bezeichnung aus Art. 107 (S. 89) $\mathfrak{J}' = \frac{\mathfrak{J}}{\cos^2\delta}$; alſo

$$\frac{a\xi}{\mathfrak{J}} = \frac{a'\xi'\cos^2\delta}{\mathfrak{J}'\cos^2 d} = \frac{a'\xi'}{\mathfrak{J}'}, \text{ demnach } \sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P}{F}\,\frac{Fa'\xi'}{\mathfrak{J}'}.$$

Zieht man durch A die Parallele zu $N'N'$, welche die Kraftlinie SE in A_2 ſchneidet, ſo iſt $\overline{SA_2} = a'$, und der zu AA_2 als Null-Linie gehörige Angriffspunkt C iſt der Kernpunkt. Iſt $SC = e'$, ſo muſs

$$e' a' = \frac{\mathfrak{J}'}{F}, \quad \text{alfo} \quad e' = \frac{\mathfrak{J}'}{F a'}$$

fein. Mit diefem Werth erhält man

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P \xi'}{F e'} = \frac{P}{F e'} (e' + \xi') .$$

$P (e' + \xi')$ bezeichnet man als das Kernmoment; daffelbe ift das Product aus der Axialkraft P in den Abftand des Angriffspunktes vom Kernpunkt. Setzt man abkürzend $M_K = P (e' + \xi')$, fo ift

$$\sigma_A = \frac{M_K}{F e'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 76.$$

Der Ausdruck 76 ift fehr bequem und ganz nach der einfachen Form des Ausdruckes in Gleichung 55 (S. 75) gebildet. e' nennt man die Kernweite. Für eine beliebige Lage der Kraftebene ergiebt die Gleichung 76 die gröfste Beanfpruchung ohne Weiteres. Wenn die Kernweite auf beiden Seiten des Schwerpunktes verfchieden grofs ift, fo ift zu unterfuchen, ob σ_A oder σ_B gröfser ift.

Falls die Axialkraft P gleich Null ift, alfo nur Kräfte parallel zur Querfchnittsebene wirken, fo wird

$$\sigma_A = \frac{M a}{\mathfrak{J}} = \frac{M a' \cos \delta}{\mathfrak{J}' . \cos^2 \delta} = \frac{M}{\cos \delta} \frac{a'}{\mathfrak{J}'} .$$

M ift das Moment für die Axe $N' N'$; $\frac{M}{\cos \delta}$ ift das refultirende Moment in der Kraftebene, bezogen auf den Schwerpunkt als Drehpunkt; fetzt man $\frac{M}{\cos \delta} = M_r$, fo wird

$$\sigma_A = \frac{M_r a'}{\mathfrak{J}'} = \frac{M_r a' F}{\mathfrak{J}' F},$$

und da $e' a' = \frac{\mathfrak{J}'}{F}$, fo ift $\frac{\mathfrak{J}'}{F a'} = e'$, alfo gleich der Kernweite; mithin

$$\sigma_A = \frac{M_r}{F e'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 77.$$

Die gröfste Spannung ift gleich dem refultirenden Moment, dividirt durch Querfchnittsfläche mal Kernweite. Daffelbe Moment wird demnach alsdann die gröfste Spannung σ_A erzeugen, wenn es in derjenigen Ebene wirkt, für welche e' feinen kleinften Werth hat. Man kann demnach fofort aus der Figur ablefen, welche Lage des Kraftmomentes für eine gegebene Lage des Querfchnittes die ungünftigfte ift.

d) Biegungsfpannungen in einem Körper, der aus zwei verfchiedenen Bauftoffen zufammengefetzt ift.

Die nachftehenden Unterfuchungen find durch die neuerdings in ausgedehntem Mafse ausgeführten Beton-Eifen-Conftructionen veranlafft. Man kann annehmen, dafs die Ausdehnung beider Bauftoffe, des Betons und des in den Beton eingebetteten Eifens, bei der Formänderung gleich grofs ift; die Längenänderung der entfprechenden Punkte zweier unendlich naher Querfchnitte fei λ; alsdann wird bei unferer Annahme λ die gleiche Gröfse haben, ob an diefer Stelle der eine oder 115. Spannungen in Beton-Eifen-Conftructionen.

der andere Bauftoff liegt. Um aber die $(\pm)$ Ausdehnung λ zu erzeugen, ift bei Eifen eine andere Beanfpruchung erforderlich, als bei Beton. Es bezeichne σ die Spannung für die Flächeneinheit im Beton, σ_1 die Spannung für die Flächeneinheit im Eifen, l den Abftand zweier nahe liegender Querfchnitte vor der Formänderung, λ die $(\pm)$ Vergröfserung diefes Abftandes bei der Formänderung, E die Elafticitätsziffer für Beton und E_1 die Elafticitätsziffer für Eifen; alsdann ift

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\lambda}{l} \text{ für Beton}, \quad \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\lambda}{l} \text{ für Eifen};$$

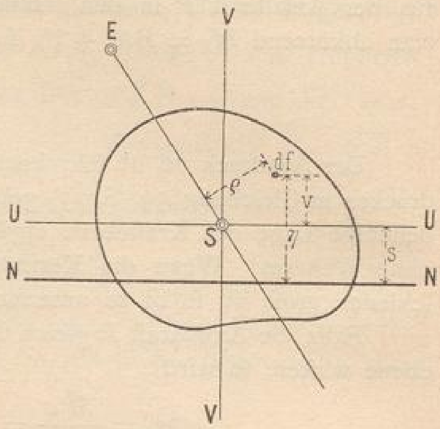
demnach ift

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad \text{und} \quad \sigma_1 = \frac{E_1}{E}\sigma.$$

Setzt man $\frac{E_1}{E} = m$, fo ift

$$\sigma_1 = m\,\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 78.$$

Fig. 111.



Ein aus Eifen und Beton zufammengefetzter Balken werde auf Biegung beanfprucht; auf den betrachteten Querfchnitt wirken das Moment M und die Axialkraft P; $\overline{SE}$ (Fig. 111) fei die Kraftlinie und NN die Null-Linie. Durch den Schwerpunkt S des Querfchnittes werde parallel zur Null-Linie die Axe UU, fenkrecht zu diefer durch S die Axe VV gelegt. Alsdann ergeben die Gleichgewichtsbedingungen die erforderlichen Gleichungen in derfelben Weife, wie in Art. 105 (S. 86) gezeigt ift. Die mit dem Zeiger 1 verfehenen Werthe beziehen fich auf den Eifentheil und die Werthe ohne Zeiger auf den Betontheil des Querfchnittes. Nun laffen fich folgende drei Gleichungen aufftellen:

I) $P = \int \sigma\, df + \int \sigma_1\, df_1$ (algebraifche Summe der in die Richtung der Balkenaxe fallenden Kräfte mufs gleich Null fein).

II) $M_u = \int \sigma\, v\, df + \int \sigma_1\, v_1\, df_1$ (algebraifche Summe der Momente für die Axe UU mufs gleich Null fein).

III) $0 = \int \sigma\, \rho\, df + \int \sigma_1\, \rho_1\, df_1$ (algebraifche Summe der Momente für die Axe $\overline{SE}$ mufs gleich Null fein).

Für einen beliebigen Punkt des Querfchnittes ift $\sigma = a\,\eta$, wenn a ein noch zu beftimmender Feftwerth, η der Abftand des Punktes, fenkrecht gemeffen, von der Null-Linie NN ift. Es ift $\eta = v + s$, mithin

$$\sigma = a(v + s), \quad \sigma_1 = m\,\sigma \quad \text{und} \quad \sigma_1 = a\,m\,(v_1 + s).$$

Gleichung I wird mit diefen Werthen:

$$P = a\left(\int v\, df + \int s\, df + m\int v_1\, df_1 + m\int s\, df_1\right),$$

$$P = a\left(\int v\, df + m\int v_1\, df_1\right) + a\,s\,(F + m\,F_1).$$

Beftimmt man den Schwerpunkt S unter der Annahme, dafs die aus Eifen beftehenden Querfchnittstheile in m-facher Gröfse eingeführt werden, fo ift für jede durch diefen Schwerpunkt gehende Axe das entfprechende ftatifche Moment des Querfchnittes gleich Null, d. h. es findet ftatt:

$$\int v\,df + m\int v_1\,df_1 = 0, \text{ und es ift alsdann}$$

$$P = a\,s\,(F + m\,F_1) \quad \ldots \quad 79.$$

Aus Gleichung II ergiebt fich in ähnlicher Weife

$$M_u = a\int (v+s)\,v\,df + a\,m\int (v_1+s)\,v_1\,df_1,$$

$$M_u = a\int v^2\,df + a\,s\int v\,df + m\,a\int v_1^2\,df_1 + a\,m\,s\int v_1\,df_1,$$

$$M_u = a\int v^2\,df + m\,a\int v_1^2\,df_1 + a\,s\left[\int v\,df + m\int v_1\,df_1\right].$$

Da $\int v\,df + m\int v_1\,df_1 = 0$ ift, fo wird

$$M_u = a\,(\mathfrak{J} + m\,\mathfrak{J}_1) \quad \ldots \quad 80.$$

$\mathfrak{J}$ ift das Trägheitsmoment des Betontheiles und $\mathfrak{J}_1$ das Trägheitsmoment des Eifentheiles des Querfchnittes bezogen auf die Axe *UU*.

Aus Gleichung III folgt, da $\sigma = a\,\eta$ ift,

$$0 = \int a\,\eta\,\rho\,df + \int a\,m\,\eta_1\,\rho_1\,df_1 = a\left(\int \eta\,\rho\,df + m\int \eta_1\,\rho_1\,df_1\right),$$

$$0 = Z + m\,Z_1 \quad \ldots \quad 81.$$

Z, bezw. Z_1 bedeuten die Centrifugalmomente der Querfchnittstheile für die Axen *NN* und *SE*. Conftruirt man alfo unter Zugrundelegung *m*-facher Querfchnittsgröfse der Eifentheile das Centrifugalmoment für die Kraftlinie und die Null-Linie, fo ift daffelbe gleich Null. Kraftlinie und Null-Linie find conjugirte Axen.

Aus Gleichung 80 folgt

$$a = \frac{M_u}{\mathfrak{J} + m\,\mathfrak{J}_1};$$

aus Gleichung 79 folgt

$$s = \frac{P}{a\,(F + m\,F_1)} = \frac{P\,(\mathfrak{J} + m\,\mathfrak{J}_1)}{(F + m\,F_1)\,M_u},$$

und

$$\sigma = a\,(v + s) = \frac{P}{F + m\,F_1} + \frac{M_u}{\mathfrak{J} + m\,\mathfrak{J}_1}\,v \quad \ldots \quad 82.$$

$$\sigma_1 = m\,\sigma = \frac{m\,P}{F + m\,F_1} + \frac{m\,M_u\,v}{\mathfrak{J} + m\,\mathfrak{J}_1} \quad \ldots \quad 83.$$

Falls die Axialkraft P gleich Null ift, wird

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_u\,v}{\mathfrak{J} + m\,\mathfrak{J}_1} \\ \sigma_1 &= m\,\frac{M_u\,v}{\mathfrak{J} + m\,\mathfrak{J}_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 84.$$

Die Ausdrücke 82 bis 84 ergeben folgendes für die Berechnung wichtige Gefetz: Die Beanfpruchung kann bei einem Eifen-Betonbalken eben fo wie bei einem einheitlich aus Beton hergeftellten Balken berechnet werden, wenn man fowohl für die Ermittelung des Schwerpunktes, wie für diejenige der Querfchnittsfläche und des Trägheitsmomentes die Eifenquerfchnitte in $m\left(=\frac{E_1}{E}\right)$-facher Gröfse einführt.

Man müfste bei der Berechnung nun vom Gefammtquerfchnitt denjenigen der Eifentheile abziehen und den Reft als Betonquerfchnitt einführen; bei der grofsen Unbeftimmtheit jedoch, welche bezüglich der Gröfse von m herrfcht, kann man unbedenklich den Gefammtquerfchnitt als Betonquerfchnitt einführen.

116. Querfchnitts-ermittelung für Beton-Balken.

Bei Beton-Eifenbalken ift der Gefammtquerfchnitt ein Rechteck, deffen Breite mit b und deffen Höhe mit h bezeichnet werden mag; die Eifeneinlage beftehe aus einer Anzahl Rundeifen, nahe der unteren Begrenzung des Rechteckes. Nach *Melan* [25]) kann man als zuläffige Beanfpruchung des Betons einführen:

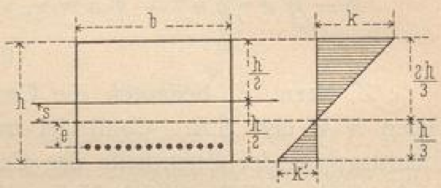
gröfste Druckbeanfpruchung des Betons . . 25 bis 30 kg für 1 qcm,
gröfste Zugbeanfpruchung des Betons . . . . . 10 kg für 1 qcm.

Wir führen ferner

$$m = \frac{E_1}{E} = \frac{E_{Eifen}}{E_{Beton}} = 30$$

ein. Stellt man die Bedingung, dafs gleichzeitig die gröfste Druckbeanfpruchung gleich 20 kg und die gröfste Zugbeanfpruchung gleich 10 kg fei, bezw. dafs allgemein die Beanfpruchung auf Druck, abfolut gerechnet, doppelt fo grofs fei, als diejenige auf Zug, fo ergiebt fich, dafs unter Einführung des m-fachen Eifenquerfchnittes in die Rechnung die Null-Linie in $\frac{1}{3}$ der Balkenhöhe liegen mufs (Fig. 112). Der Abftand s der Null-Linie von der Trägermitte ift alfo

Fig. 112.



$$s = \frac{h}{6}.$$

Weiter mufs auch $0 = b\,h\,s - m\,F_1\,e$ fein, d. h.

$$s = \frac{m\,F_1\,e}{b\,h}.$$

Beide Werthe für s einander gleich gefetzt, giebt

$$\frac{m\,F_1\,e}{b\,h} = \frac{h}{6}, \quad \text{d. h.} \quad F_1\,e = \frac{b\,h^2}{6\,m}.$$

Ferner ift das Trägheitsmoment des Betonquerfchnittes für die Null-Linie

$$\mathcal{J} = \frac{b\,h^3}{12} + \frac{b\,h\,.\,h^2}{36} = \frac{b\,h^3}{9} \quad \text{und} \quad m\,\mathcal{J}_1 = m\,F_1\,e^2,$$

alfo die gröfste Druckbeanfpruchung im Querfchnitt, falls die Axialkraft $P = 0$ ift, nach Gleichung 84

$$\sigma_{max} = \frac{M\,\frac{2}{3}\,h}{\frac{b\,h^3}{9} + m\,F_1\,e^2} = \frac{2\,M\,h}{\frac{b\,h^3}{3} + 3\,m\,F_1\,e^2}.$$

Wird für $F_1\,e$ der oben gefundene Werth eingeführt, fo erhält man

$$\sigma_{max} = \frac{2\,M}{\frac{b\,h^2}{6}\left(2 + \frac{3\,e}{h}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 85.$$

[25]) In: Oeft. Monatfchr. f. d. öff. Baudienft 1896, S. 465. — Auch als Sonderabdruck erfchienen: Wien 1896.

Dieſe Gleichung gilt allgemein und giebt die gröſste Druckbeanſpruchung im Beton doppelt ſo groſs, abſolut genommen, als die Zugbeanſpruchung. Indem man

$$\sigma_{max} = K$$

ſetzt, erhält man als Bedingungsgleichung für den Querſchnitt:

$$\frac{b\,h^2}{6} = \frac{M}{K\left(1 + \frac{3\,e}{2\,h}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 86.$$

Beiſpiel: Es ſei $M = 12\,500^{\,\mathrm{kgcm}}$ und $K = 15^{\,\mathrm{kg}}$ für $1^{\,\mathrm{qcm}}$; alsdann wird

$$\frac{b\,h^2}{6} = \frac{12\,500}{15\left(1 + \frac{3\,e}{2\,h}\right)} \quad \text{und} \quad b\,h^2 = \frac{5000}{1 + \frac{3\,e}{2\,h}}.$$

Damit die Eiſen ganz im Beton eingebettet werden können, muſs man e entſprechend kleiner als $\frac{h}{3}$ wählen; nimmt man $e = \frac{h}{4}$ an, ſo ergiebt ſich

$$b\,h^2 = \frac{5000}{1 + \frac{3}{8}} = \frac{8 \cdot 5000}{11}.$$

Das der Unterſuchung zu Grunde gelegte Stück des Balkens habe $1^{\,\mathrm{m}}$ Breite; dann iſt $b = 100^{\,\mathrm{cm}}$, alſo

$$h^2 = \frac{8 \cdot 5000}{11 \cdot 100} = 36{,}36 \quad \text{und} \quad h = 6^{\,\mathrm{cm}} \text{ (abgerundet)};$$

es wird alſo $e = \frac{h}{4} = 1{,}5^{\,\mathrm{cm}}$ und $f_1\,e = \frac{b\,h^2}{6\,m}$, und mit $m = 30$

$$f_1\,e = \frac{100 \cdot 36}{6 \cdot 30} = 20 \quad \text{oder} \quad f_1 = \frac{20}{1{,}5} = 13{,}33^{\,\mathrm{qcm}}.$$

Ordnet man auf $1^{\,\mathrm{m}}$ Breite 20 Einlagen aus Rundeiſen an, ſo muſs jede derſelben $0{,}67^{\,\mathrm{qcm}}$ Querſchnitt erhalten, alſo einen Durchmeſſer $d = 0{,}92^{\,\mathrm{cm}}$.

Hätte man $\sigma_{max} = K = 20^{\,\mathrm{kg}}$ für $1^{\,\mathrm{qcm}}$ eingeführt, ſo hätte man erhalten:

$$\frac{b\,h^2}{6} = \frac{12500}{20\left(1 + \frac{3\,e}{2\,h}\right)} = \frac{12500}{20\left(1 + \frac{3}{8}\right)} = \frac{625 \cdot 8}{11},$$

$$h^2 = \frac{6 \cdot 8 \cdot 625}{11 \cdot 100} = 27, \quad h = 5{,}2^{\,\mathrm{cm}}, \quad f_1\,e = \frac{b\,h^2}{6\,m} = \frac{100 \cdot 27}{6 \cdot 30} = 15 \quad \text{und} \quad f_1 = \frac{15{,}0 \cdot 4}{5{,}2} = 11{,}5^{\,\mathrm{qcm}}.$$

Bei 20 Einlagen bekommt jede einen Durchmeſſer

$$d = \sqrt{\frac{11{,}5 \cdot 4}{20 \cdot 3{,}14}} = 0{,}85^{\,\mathrm{cm}}.$$

Die gröſste Beanſpruchung in Eiſen iſt alsdann:

$$\sigma_{e\,max} = \frac{12500 \cdot 1{,}725 \cdot 30}{\frac{100 \cdot 5{,}2^3}{9} + 30 \cdot 11{,}5 \cdot 1{,}3^2} = \frac{646875}{2149} = 301^{\,\mathrm{kg}} \text{ für } 1^{\,\mathrm{qcm}}.$$

Für die Berechnung der Betongewölbe mit Eiſeneinlagen kann man die Formeln 82 und 83 verwenden[26]).

---

[26]) Bezüglich der Berechnung von Beton-Eiſen-Conſtructionen ſei auf nachſtehende Aufſätze verwieſen:

Koenen, M. Berechnung der Stärke der *Monier*'ſchen Cementplatten mit Eiſeneinlagen. Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 462.

Neumann, P. Ueber die Berechnung der *Monier*-Conſtructionen. Wochſchr. d. öſt. Ing.- u. Arch.-Ver. 1890, S. 209.

Melan, J. Gewölbe aus Beton mit Verbindung mit eiſernen Bogen. Zeitſchr. d. öſt. Ing.- u. Arch.-Ver. 1893, S. 166.

Spitzer, J. A. Berechnung der *Monier*-Gewölbe. Zeitſchr. d. öſt. Ing.- u. Arch.-Ver. 1896, S. 305.

Thullie, M. R. v. Ueber die Berechnung der Biegungsſpannungen in den Beton- und *Monier*-Conſtructionen. Zeitſchr. d. öſt. Ing.- u. Arch.-Ver. 1896, S. 365.

Melan, J. Ueber die Berechnung der Beton-Eiſenconſtructionen. Oeſt. Monatſchr. f. d. öff. Baudienſt 1896, S. 465. — Auch als Sonderabdruck erſchienen: Wien 1896.

Thullie, M. R. v. Ueber die Berechnung der *Monier*-Platten. Zeitſchr. d. öſt. Ing.- u. Arch.-Ver. 1897, S. 103.

Grüning, M. & H. Reissner. Eine neue Fahrbahnanordnung für eiſerne Straſsenbrücken. Centralbl. d. Bauverw. 1897, S. 190.

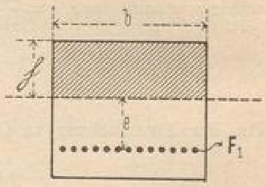
Falls man den Zugwiderſtand des Betons gar nicht berückſichtigt (was nur für angenäherte Rechnung zuläſſig iſt), ſo ſind in den Ausdrücken für F und $\mathfrak{J}$, welche ſich auf den Beton beziehen, nur die Querſchnittstheile auf der Druckſeite als vorhanden einzuführen. Dann iſt für den hauptſächlich hier in Betracht kommenden rechteckigen Querſchnitt, welchen die Kraftebene in einer Hauptaxe ſchneidet, einzuführen:

$$F = b\,\mathfrak{h}, \quad \mathfrak{J} = \frac{b\,\mathfrak{h}^3}{3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_1 = F_1\,e^2.$$

In dieſen Formeln bedeutet $\mathfrak{h}$ den Abſtand der Null-Linie von der oberen Rechteckſeite und b die Breite des Rechteckes. Das ſtatiſche Moment des Querſchnittes für die Null-Linie ſoll gleich Null ſein, wenn die Eiſentheile in m-facher Gröſse eingeführt werden, d. h. es ſoll

$$0 = \frac{b\,\mathfrak{h}^2}{2} - m\,F_1\,e \quad \text{oder} \quad \mathfrak{h}^2 = \frac{2\,m\,e\,F_1}{b}$$

Fig. 113.



ſein. Die gröſste Druckſpannung im Beton iſt dann

$$\sigma_{max} = \frac{M\,\mathfrak{h}}{\dfrac{b\,\mathfrak{h}^3}{3} + m\,F_1\,e^2}$$

und die gröſste Zugſpannung im Eiſen

$$\frac{\sigma_{1max}}{\sigma_{max}} = m\,\frac{e}{\mathfrak{h}}; \quad \text{ſonach} \quad \sigma_{1max} = \frac{m\,e\,M}{\dfrac{b\,\mathfrak{h}^3}{3} + m\,F_1\,e^2},$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_{1max} = \dfrac{M}{\dfrac{b\,\mathfrak{h}^3}{3\,e\,m} + F_1\,e} & \text{für das Eiſen} \\[2ex] \sigma_{max} = \dfrac{M}{\dfrac{b\,\mathfrak{h}^2}{3} + \dfrac{m\,F_1\,e^2}{\mathfrak{h}}} & \text{für den Beton} \end{array}\right| \quad \ldots\ldots \quad 87.$$

e) Schubſpannungen.

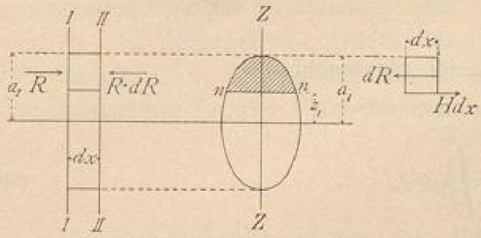
117. Wagrechte Schubſpannungen. Auſser den oben ermittelten Biegungsſpannungen treten bei den verſchiedenen Belaſtungen der Balken auch noch Schubſpannungen auf, von denen hier zunächſt die wagrechten Schubſpannungen betrachtet werden ſollen.

Denkt man ſich eine Anzahl Lagen dünner Bretter über einander gelegt, an den Enden unterſtützt und in der Mitte belaſtet, ſo werden ſich dieſelben gegen einander etwa in der Weiſe verſchieben, welche in Fig. 114 angedeutet iſt. Dieſe Verſchiebung iſt eine Folge der in den Fugen aa, bb auftretenden Schubkräfte; werden dieſelben nicht durch künſtliche Mittel (Zähne, Dübel u. dergl.) oder den Abſcherungswiderſtand des Bauſtoffes aufgehoben, ſo verurſachen ſie eine Verſchiebung.

Fig. 114.

Für die rechnungsmäſsige Ermittelung dieſer Schubſpannungen möge, wie oben, angenommen werden, daſs nur ſenkrecht zur Balkenaxe gerichtete Kräfte wirken; es sollen die wagrechten Schubspannungen aufgesucht werden, welche in der Schicht nn (Fig. 115) zwischen zwei unendlich nahe an einander gelegenen Querschnitten II und $II\,II$ wirken, wenn die Schicht nn um z_1 über der Balkenaxe liegt. Dabei sollen die vereinfachenden Annahmen gemacht werden, dafs die Querschnitte II und $II\,II$ einander gleich seien, dafs die wagrechte Schubspannung für die Flächeneinheit in der ganzen Breite der Schicht nn gleich grofs sei und dafs die Kraftebene sämmtliche Querschnitte in Symmetrieaxen schneide.

Fig. 115.



Auf den Theil des Balkenstückes zwischen II und $II\,II$, welcher oberhalb der Faserschicht nn liegt, wirkt senkrecht zur Ebene II die Summe R der axialen Biegungsspannungen und senkrecht zur Ebene $II\,II$ die Kraft $R + dR$. Nun ist

$$R = \int_{z_1}^{a_1} \sigma\, df,$$

und da nach Gleichung 56 (S. 75): $\sigma = \frac{M}{J} z$ ist,

$$R = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M}{J} z\, df \quad \text{und} \quad R + dR = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M + dM}{J} z\, df.$$

Die Mittelkraft von R und $R + dR$ ist, da beide gleiche Richtung, aber entgegengesetzten Sinn haben und in dieselbe Linie fallen, gleich dR, d. h. auf das betrachtete Balkenstück wirkt als Mittelkraft aller axialen Biegungsspannungen

$$dR = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M + dM}{J} z\, df - \int_{z_1}^{a_1} \frac{M}{J} z\, df.$$

Für die Integration zwischen z_1 und a_1 sind M, dM und J constant; diese Werthe können also vor das Integralzeichen gesetzt werden, d. h. es ist

$$dR = \frac{M + dM}{J} \int_{z_1}^{a_1} z\, df - \frac{M}{J} \int_{z_1}^{a_1} z\, df = \frac{dM}{J} \int_{z_1}^{a_1} z\, df.$$

Damit das Balkenstück im Gleichgewicht sei, mufs die algebraische Summe der auf dasselbe wirkenden wagrechten Kräfte gleich Null sein; also mufs noch eine wagrechte Kraft auf das Balkenstück wirken, welche der Gröfse nach genau gleich der obigen Kraft dR, der Richtung nach derselben entgegengesetzt ist. Diese Kraft kann nur in der wagrechten Schicht wirken, mittels deren dieses Stück mit dem anderen Balkentheile zusammenhängt, d. h. in der um z_1 über der Null-Linie liegenden Schicht. Längs derselben entsteht demnach eine Schubspannung. Wird die Gröfse derselben für die Längeneinheit des Balkens mit H bezeichnet, so beträgt ſie für $d\,x$ Längeneinheiten $H\,d\,x$, und für die Ermittelung von H ergiebt ſich die Bedingungsgleichung

$$H\,d\,x = d\,R = \frac{d\,M}{\mathfrak{J}} \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f \quad \text{und} \quad H = \frac{d\,M}{d\,x} \frac{1}{\mathfrak{J}} \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f.$$

Nach Gleichung 53 (S. 72) iſt $\frac{d\,M}{d\,x} = Q$; demnach

$$H = \frac{Q}{\mathfrak{J}} \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f \quad \text{. . . . . 88.}$$

$\int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f$ iſt das ſtatiſche Moment des Flächentheiles zwiſchen den Ordinaten z_1 und a_1 bezogen auf die Schweraxe. Setzt man nun

$$\int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f = S_{z_1}^{a_1},$$

ſo wird

$$H = \frac{Q\,S_{z_1}^{a_1}}{\mathfrak{J}} \quad \text{. . . . . 89.}$$

Die wagrechte Schubſpannung für die Längeneinheit des Balkens und irgend eine Schicht $(n\,n)$ wird demnach erhalten, indem man die Querkraft für den betreffenden Querſchnitt mit dem auf die Null-Linie bezogenen ſtatiſchen Moment des Querſchnittstheiles oberhalb der betreffenden Schicht multiplicirt und dieſes Product durch das Trägheitsmoment des für die Null-Linie genommenen ganzen Querſchnittes dividirt.

Hieraus folgt:

1) Da Q und $\mathfrak{J}$ für denſelben Querſchnitt bei beſtimmter Belaſtung ganz beſtimmte Zahlenwerthe ſind, ſo iſt die wagrechte Schubſpannung für die Längeneinheit des Balkens an den verſchiedenen Stellen eines Querſchnittes mit S veränderlich. H wird für diejenigen Schichten am gröſsten, für welche S ſeinen gröſsten Werth hat. S iſt aber für die wagrechte Schweraxe am gröſsten; dort iſt es gleich $S_o^{a_1}$. S iſt für die äuſserſten Schichten am kleinſten; daſelbſt iſt $S = 0$.

Demnach nimmt H in demſelben Querſchnitt bei derſelben Belaſtung von der Null-Linie — der wagrechten Schweraxe — nach den beiden am weiteſten entfernten Faſern bis auf Null ab.

2) In denſelben Schichten verſchiedener Querſchnitte iſt nach obiger Gleichung H mit Q veränderlich, iſt demnach in demjenigen Querſchnitte am gröſsten, in welchem die Querkraft ihren gröſsten Werth hat. Sind verſchiedene Belaſtungszuſtände möglich, ſo ruft derjenige das gröſste H hervor, welcher die gröſste Querkraft Q erzeugt.

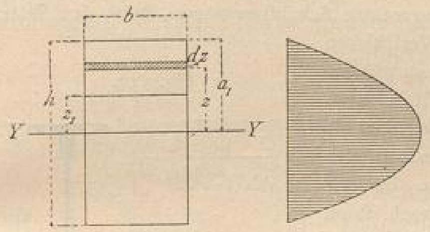
3) Werden, wie üblich und zweckmäfsig, fowohl S, wie $\mathcal{J}$ auf Centimeter bezogen, alfo S in cm³, $\mathcal{J}$ in cm⁴ ausgedrückt, fo erhält man H an irgend einer Balkenftelle als die wagrechte Schubfpannung für das laufende Centimeter.

4) Der in Gleichung 89 gefundene Ausdruck giebt die Schubfpannung für die Längeneinheit des Balkens an; diefe Schubfpannung kann für die Fälle der Praxis genügend genau als gleichmäfsig über die Breite der Schicht vertheilt angenommen werden. Ift demnach die Breite des Querfchnittes in der Höhe der betrachteten Schicht gleich w, fo vertheilt fich H über $w \,.\, 1$ Flächeneinheiten, fo dafs fich als Schubfpannung für die Flächeneinheit ergiebt

$$\mathfrak{H} = \frac{Q\, S_{z_1}^{a_1}}{w\, \mathcal{J}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 90.$$

Im Nachftehenden follen für einige im Hochbauwefen häufig vorkommende Querfchnittsformen die wagrechten Schubfpannungen beftimmt werden. 118. Rechteckiger Querfchnitt.

Fig. 116.



1) Für den rechteckigen Querfchnitt (Fig. 116) liegt die wagrechte Schwerpunktsaxe in halber Höhe. Die wagrechte Schubfpannung in der Höhe z_1 über der Null-Linie ift nach Gleichung 89 zu beftimmen.

Für den vorliegenden Querfchnitt ift

$$S_{z_1}^{a_1} = S_{z_1}^{\frac{h}{2}} = \int_{z_1}^{\frac{h}{2}} z\, df \quad \text{und, da} \quad df = b\, dz,$$

$$S_{z_1}^{a_1} = \int_{z_1}^{\frac{h}{2}} b\, dz \,.\, z = \left(\frac{b z^2}{2}\right)_{z_1}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z_1^2\right).$$

Da ferner $\mathcal{J} = \frac{b h^3}{12}$, wird nach Gleichung 89

$$H = \frac{Q \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z_1^2\right)}{\frac{b h^3}{12}} = \frac{6\, Q}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z_1^2\right) = \frac{6\, Q}{h}\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z_1}{h}\right)^2\right] \quad . \; . \; . \; . \quad 91.$$

In diefem Ausdruck ift auf der rechten Seite nur eine Veränderliche, nämlich z_1; alle anderen Gröfsen haben für fämmtliche Schichten gleiche Werthe. Das Gefetz der Veränderlichkeit wird befonders anfchaulich, wenn man in den verfchiedenen Abftänden z_1 über und unter YY die in den betreffenden Schichten herrfchenden Werthe von H nach Gleichung 91 wagrecht nach einem beliebigen Mafsftabe aufträgt und die Endpunkte verbindet; man erhält die in Fig. 116 fchraffirte Fläche; die begrenzende Verbindungslinie der Endpunkte ift offenbar die Linie der Gleichung 91. Die Form der Gleichung zeigt, dafs diefe Linie eine Parabel ift.

Für $z_1 = 0$ ift $H_0 = H_{max} = \frac{6\, Q}{4\, h} = \frac{3\, Q}{2\, h}$, und für $z_1 = \frac{h}{2}$ ift $H_{\frac{h}{2}} = \frac{6\, Q}{h}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0.$

Die wagrechte Spannung für die Flächeneinheit längs der einzelnen Schichten ift $\mathfrak{H} = \frac{H}{b}$, d. h.

$$\mathfrak{H} = \frac{6\, Q}{b h}\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z_1}{h}\right)^2\right], \quad \text{ferner} \quad \mathfrak{H}_0 = \frac{3\, Q}{2\, b h} \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_{\frac{h}{2}} = 0.$$

Die in Fig. 116 gezeichnete Linie giebt alfo auch die graphifche Darftellung der für die Flächeneinheit ftattfindenden wagrechten Schubfpannungen, natürlich in anderem Mafsftabe, als die wagrechten Schubfpannungen für die Längeneinheit.

2) Für den fymmetrifchen I-förmigen Querfchnitt liegt die wagrechte Schwerpunktsaxe gleichfalls in halber Höhe. Q und $\mathcal{J}$ find wieder für alle Schichten deffelben Querfchnittes gleich grofs, 119. I-förmiger Querfchnitt.

mithin H mit S veränderlich (natürlich nur in demſelben Trägerquerſchnitt und bei beſtimmter Belaſtung). Die gröſste wagrechte Schubſpannung findet wieder in der Null-Linie ſtatt, und nach Gleichung 89 iſt

$$H = \frac{Q\,S}{\mathfrak{J}},$$

worin S und $\mathfrak{J}$ auf die Null-Linie bezogen ſind.

Bezeichnet man mit f die Querſchnittsfläche des oberen, bezw. unteren Flanſches des Trägers, mit $\mathfrak{h}$ den Abſtand der Schwerpunkte der Flanſche, mit d die Stegſtärke, ſo iſt bei kleinem d nahezu

$$S = \frac{f\,\mathfrak{h}}{2} \text{ und nach Gleichung 20 (S. 36): } \mathfrak{J} = \left(f + \frac{d\,\mathfrak{h}}{6}\right)\frac{\mathfrak{h}^2}{2};$$

mithin

$$H = \frac{Q\,f}{\left(f + \frac{d\,\mathfrak{h}}{6}\right)\mathfrak{h}}.$$

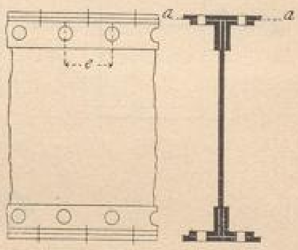
Iſt $\frac{d\,\mathfrak{h}}{6}$ gegen f klein, ſo iſt nahezu

$$H = \frac{Q}{\mathfrak{h}}. \qquad 92.$$

120. Blechträger-Querſchnitt.

3) Querſchnitt der Blechträger. Bei den aus einem einzigen Stücke beſtehenden Querſchnitten werden die in den einzelnen Faſern wirkenden wagrechten Schubſpannungen durch den Widerſtand aufgehoben, den der Zuſammenhang der Faſern dem Verſchieben entgegen ſtellt; die Querſchnittsabmeſſungen ſind demnach ſo zu wählen, daſs die erlaubte Beanſpruchung auf Schub nicht überſchritten wird. Iſt dagegen der Querſchnitt aus mehreren Theilen zuſammengeſetzt, ſo müſſen die in den Fugen zwiſchen den einzelnen Theilen entſtehenden Schubſpannungen durch künſtliche Mittel aufgehoben werden. Bei den Blechträgern dienen dazu die Niete. Die Niete ſind demnach ſo zu beſtimmen, daſs ihr Schubwiderſtand die auftretenden Schubſpannungen aufhebt, ohne daſs die zuläſſige Grenze überſchritten wird. Um den Abſtand der Niete zu ermitteln, welche zur Verbindung der Lamellen mit den Winkeleiſen dienen, ſuche man demnach die für die Längeneinheit in der Fuge $a\,a$ (Fig. 117) ſtattfindende Schubſpannung auf die oben gezeigte Weiſe.

Fig. 117.



Wieder iſt $H = \frac{Q\,S}{\mathfrak{J}}$, worin S das ſtatiſche Moment der Lamellenfläche bezogen auf die Null-Linie bezeichnet. Nennt man den Abſtand der Nietbolzen e, ſo iſt die Geſammtſchubſpannung auf die Länge e gleich

$$D = \frac{Q\,S}{\mathfrak{J}}\,e.$$

Allerdings iſt die Querkraft Q auf die Länge e allgemein nicht conſtant; es genügt aber ſtets, für Q irgend einen der auf der Strecke e ſich ergebenden Werthe einzuführen; zweckmäſsig wird man den gröſsten wählen.

Dieſe Schubſpannung erſtrebt eine wagrechte Verſchiebung der Lamelle in der Richtung der Trägeraxe; dieſelbe ſoll durch die Niete verhindert werden. Werden zwei einſchnittige Niete vom Durchmeſſer d verwendet, ſo darf ihr Widerſtand gegen Abſcheren nach Art. 92 (S. 68)

$$W = \frac{2\,d^2\,\pi}{4}\;T$$

ſein, wenn T die zuläſſige Schubbeanſpruchung für die Flächeneinheit der abzuſcherenden Fläche iſt. Durch Gleichſetzung beider Werthe, derjenigen für D und für W, erhält man folgende Gleichung für e:

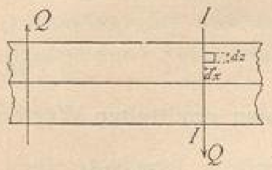
$$\frac{Q\,S\,e}{\mathfrak{J}} = \frac{2\,d^2\,\pi}{4}\,T, \text{ woraus } e = \frac{d^2\,\pi\,T\,\mathfrak{J}}{2\,Q\,S}.$$

Je gröſser Q iſt, deſto kleiner wird e, deſto näher ſind alſo die Niete zu ſetzen.

Die angegebene Berechnung kann auch für die Ermittelung der in den lothrechten Fugen auftretenden wagrechten Schubkraft, alſo zur Beſtimmung derjenigen Niete dienen, welche die lothrechten Schenkel der Winkeleiſen mit der Blechwand verbinden. Alsdann iſt unter S das ſtatiſche Moment desjenigen Theiles der Querſchnittsfläche zu verſtehen, welcher durch dieſe Niete mit der Blechwand vereinigt wird, d. h. die Querſchnittsfläche der Winkeleiſen und Lamellen.

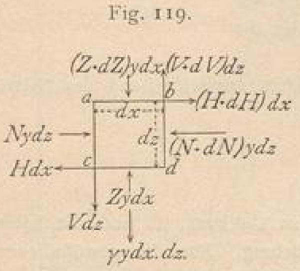
Auſser den betrachteten wagrechten wirken auch lothrechte Schubſpannungen. Für die Ermittelung derſelben ſoll die gleiche Annahme, wie oben, gemacht werden, daſs nur ſenkrecht zur Balkenaxe gerichtete äuſsere Kräfte vorhanden ſeien, die Balkenaxe aber wagrecht ſei (Fig. 118). Die Mittelkraft aller links vom beliebigen Querſchnitte II wirkenden Kräfte ſei gleich Q; alsdann verlangt das Gleichgewicht des Balkenſtückes, daſs an demſelben noch eine lothrechte Kraft Q wirke, welche der erſten an Gröſse genau gleich, der Richtung nach entgegengeſetzt iſt. Eine ſolche Kraft kann aber nur längs des Querſchnittes II wirken, da nur in dieſem das linksſeitige Balkenſtück mit dem anderen Balken zuſammenhängt. Dieſe Kraft iſt der lothrechte Abſcherungswiderſtand, welcher dem Verſchieben des Balkenſtückes längs des Querſchnittes II entgegenwirkt. 121. Lothrechte Schub-ſpannungen.

Fig. 118.



Hieraus folgt: In jedem lothrechten Querſchnitte wirken lothrechte Schubſpannungen, deren Summe genau gleich der Querkraft iſt, welche ſich für dieſen Querſchnitt ergiebt.

Fig. 119.



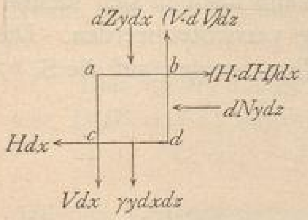
Die Vertheilung dieſer Schubſpannungen über den Querſchnitt findet nach folgendem Geſetze ſtatt: Die an irgend einer Stelle für die Längeneinheit wirkende lothrechte Schubſpannung iſt gleich der an derſelben Stelle für die Längeneinheit wirkenden wagrechten Schubſpannung.

Um dieſes Geſetz nachzuweiſen, betrachten wir ein im Abſtande z (Fig. 119) über der Null-Linie liegendes Balkenſtück von der Länge dx, der Höhe dz und der Dicke y (ſenkrecht zur Bildfläche gemeſſen). Auf dieſes Balkenſtück wirken im Allgemeinen folgende Kräfte:

ſenkrecht zur Fläche ac wirkt $Nydz$;	längs der Fläche ac wirkt Vdz;
» » » bd » $(N + dN)\,ydz$;	» » » bd » $(V + dV)\,dz$;
» » » cd » $Zydx$;	» » » cd » Hdx;
» » » ab » $(Z + dZ)\,ydx$;	» » » ab » $(H + dH)\,dx$.

Hierin bedeuten Z und $Z + dZ$ die auf die wagrechten Flächen ab und cd wirkenden lothrechten Spannungen, V, bezw. $V + dV$ die lothrechten Schubſpannungen für die Längeneinheit in den Flächen ac, bezw. bd. Endlich wirkt noch das Eigengewicht des Stückes, nämlich $\gamma y \,.\, dz \,.\, dx$.

Fig. 120.



Läſst man diejenigen Kräfte, welche einander gegenſeitig aufheben, fort, ſo bleiben die in Fig. 120 angegebenen übrig. Dieſelben halten das Balkenſtück im Gleichgewicht; demnach müſſen die Summen der ſtatiſchen Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Bildebene, gleich Null ſein.

Dieſer Punkt ſei b; alsdann iſt

$$0 = V dz dx - H dx dz + \gamma y \frac{dx \,.\, dz \,.\, dx}{2} + dZ y dx \frac{dx}{2} - dN y dz \frac{dz}{2}.$$

Die unendlich kleinen Gröſsen dritter Ordnung fallen gegen die unendlich kleinen Gröſsen zweiter Ordnung fort; ſonach bleibt

$$0 = V\,d\,z\,d\,x - H\,d\,x\,d\,z,$$

woraus

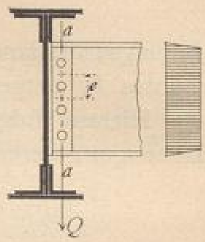
$$V = H \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad 93.$$

Dies gilt für jede Stelle des Balkens, womit der obige Satz bewiefen ift. Es ift mithin nach Gleichung 89

$$V = \frac{Q\,S_{z_1}^{a_1}}{\mathfrak{J}} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad 94.$$

Die in Art. 118 bis 120 für verfchiedene Querfchnittsformen ermittelten Werthe und graphifchen Darftellungen für H gelten alfo auch für V.

Fig. 121.



Das Gefetz, nach welchem fich die lothrechten Schubfpannungen im Querfchnitt vertheilen, wird angewendet, wenn es fich darum handelt, die auf die einzelnen Niete in neben ftehender Verbindung (Fig. 121) entfallenden Beanfpruchungen zu ermitteln. Der I-förmige Walzträger wird durch Winkeleifen mit dem Blechträger vereinigt. Die im Querfchnitt $a\,a$ des I-Trägers entftehende Querkraft Q ift durch die Niete auf den Blechträger zu übertragen. Die einzelnen Niete find nun fo zu vertheilen, dafs ihre Entfernung der Gröfse der durch den betreffenden Niet zu übertragenden Schubfpannung entfpricht. Ift an einer Stelle die Entfernung der Nietmitten e und die lothrechte Schubfpannung für die Längeneinheit im Mittel in diefer Höhe gleich V, fo kommt auf einen Niet die Schubkraft $V\,e$.

Der Niet wird in zwei Querfchnitten abgefchert; mithin ift der Abfcherungswiderftand des Nietes $\frac{2\,d^2\,\pi}{4}\,T$; es ergiebt fich alfo für e die Gleichung:

$$V\,e = \frac{2\,d^2\,\pi}{4}\,T, \quad \text{woraus} \quad e = \frac{\pi\,d^2\,T}{2\,V}.$$

Da V von der Null-Linie nach der oberen und unteren Gurtung zu abnimmt, fo find die Niete in der Nähe der Neutralen näher zu fetzen, als in der Nähe der Gurtung. Für die gewöhnlichen I-förmigen Walzbalken kann man die oben ftehende Fig. 121 als graphifche Darftellung der Veränderlichkeit der lothrechten Schubfpannung annehmen, d. h. mit genügender Annäherung V als gleich grofs über die ganze Trägerfteghöhe annehmen, worin nach Gleichung 92: $V = \frac{Q}{\mathfrak{h}}$.

122. Spannungen für ein beliebiges Flächen-element.

In den bisherigen Betrachtungen find nur die Normalfpannungen, welche in den lothrechten Balkenquerfchnitten, und die Schubfpannungen, welche in den wagrechten und lothrechten Balkenquerfchnitten entftehen, ermittelt worden. Um die Frage der im Inneren der Balken auftretenden Beanfpruchungen eingehend zu löfen, wären noch die Normal- und Schubfpannungen in einem Querfchnitte aufzufuchen, welcher einen beliebigen Winkel mit der Wagrechten macht. Auf diefe Unterfuchungen einzugehen, mangelt hier der Raum, und es kann auch in den meiften Fällen des Hochbaues auf eine dahin gehende Berechnung verzichtet werden. Die Lefer, welche fich über diefen Gegenftand unterrichten wollen, werden auf die S. 57 genannten Werke verwiefen.

f) Elaftifche Linie.

123. Axiale Biegungs-fpannung.

Wenn ein Balken dem Einfluffe biegender Kräfte unterworfen ift, fo wird eine Formänderung deffelben eintreten. Die Axe des urfprünglich geraden Balkens wird eine krumme Linie (Fig. 122), welche man die elaftifche Linie nennt.

Die Gleichung der elaftifchen Linie wird für eine grofse Zahl von Aufgaben gebraucht; bei vielen derfelben wirken nicht nur Kräfte fenkrecht zur urfprünglichen Balkenaxe, fondern auch folche, welche in die Axe fallen, fog. Axialkräfte. Defshalb soll dieser allgemeinere Fall für die Entwickelung der Gleichung zu Grunde gelegt, im Uebrigen aber angenommen werden, dafs die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneide.

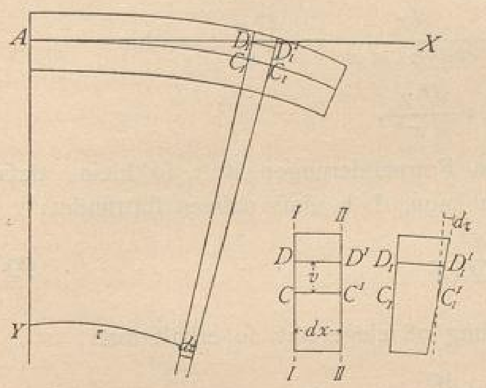
Auf irgend einen Querschnitt wirke das Biegungsmoment M und die Axialkraft P; in einem Punkte des Querschnittes, welcher von der wagrechten Schwerpunktsaxe (der zweiten Hauptaxe des Querschnittes) den Abstand v hat, ist unter Bezugnahme auf Gleichung 54 (S. 75) die axiale Biegungsspannung

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M v}{\mathcal{J}}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 95.$$

hierin bedeutet F die Querschnittsfläche und $\mathcal{J}$ das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche für die genannte Schwerpunktsaxe.

Man lege durch einen Punkt A der Balkenaxe drei Coordinatenaxen, von denen die X-Axe mit der ursprünglichen Balkenaxe zusammenfalle, die Y-Axe senkrecht zu derselben in der Kraftebene, die Z-Axe senkrecht zur Kraftebene steht, und betrachte ein Balkenstück zwischen den Ebenen II und $IIII$, dessen Länge vor der Formänderung dx war. Die Ebenen II und $IIII$ waren vor der Formänderung parallel und senkrecht zur Balkenaxe und hatten die Abscissen x und $x + dx$; die Länge einer Faser DD' in der Höhe v über der Axe war dx. 124. Gleichung der elastischen Linie.

Fig. 122.



Wir bestimmen nunmehr die Formänderung dieser Faser DD'. Durch die beiden Punkte der gebogenen Axe C_1 und C_1' legen wir Ebenen senkrecht zur gebogenen Axe; der Winkel beider sei $d\tau$, der Winkel der durch C_1 gelegten Ebene mit der Y-Axe sei τ. Man nimmt an (übereinstimmend mit der Voraussetzung in Art. 95, S. 73), dafs der Abstand zweier Punkte in der Höhe v über der Axe alsdann eben so grofs sei, wie der Abstand der Normalebenen in der Höhe v über der Axe, d. h. dafs stattfindet

$$D_1 D_1' = C_1 C_1' + v\, d\tau.$$

Nennt man die Verlängerung des Stückes CC' bei der Formänderung $d\xi$, so ist

$$C_1 C_1' = dx + d\xi \quad \text{und} \quad D_1 D_1' = dx + d\xi + v\, d\tau.$$

Dies ist die Länge der gebogenen Faser. Die ursprüngliche Länge derselben war $DD' = dx$; folglich ist die Verlängerung

$$D_1 D_1' - DD' = dx + d\xi + v\, d\tau - dx = d\xi + v\, d\tau$$

und das Verlängerungsverhältnifs $\dfrac{d\xi + v\, d\tau}{dx}$.

Nun ist σ die axiale Faserspannung in dieser Faser, mithin

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{d\xi + v\, d\tau}{dx} = \frac{d\xi}{dx} + \frac{v\, d\tau}{dx},$$

$$\sigma = E \frac{d\xi}{dx} + \frac{E\, d\tau}{dx} v \quad \ldots \ldots \ldots \quad 96.$$

Nach Gleichung 95 ift aber auch

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathfrak{J}} v.$$

Die Gleichfetzung beider für σ gefundener Werthe ergiebt

$$\frac{P}{F} + \frac{M}{\mathfrak{J}} v = E \frac{d\,\xi}{d\,x} + \frac{E\,d\,\tau}{d\,x} v,$$

woraus die beiden Gleichungen folgen:

$$\left.\begin{aligned} E \frac{d\,\xi}{d\,x} &= \frac{P}{F} \\ E \frac{d\,\tau}{d\,x} &= \frac{M}{\mathfrak{J}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 97.$$

Demnach wird

$$\frac{d\,\tau}{d\,x} = \frac{M}{E\,\mathfrak{J}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 98.$$

Nun ift $\operatorname{tg} \tau = \frac{d\,y}{d\,x}$, fonach $\frac{d \operatorname{tg} \tau}{d\,x} = \frac{d\,\tau}{\cos^2 \tau \,.\, d\,x} = \frac{d^2 y}{d\,x^2}$; mithin

$$\frac{d\,\tau}{d\,x} = \cos^2 \tau \frac{d^2 y}{d\,x^2}.$$

Bei den hier in Betracht kommenden Formänderungen ift τ fo klein, dafs $\cos^2 \tau$ unbedenklich gleich 1 gefetzt werden kann, d. h. dafs nahezu ftattfindet:

$$\frac{d\,\tau}{d\,x} = \frac{d^2 y}{d\,x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 99.$$

Wird diefer Werth für $\frac{d\,\tau}{d\,x}$ in Gleichung 98 eingefetzt, fo erhält man

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} = \frac{M}{E\,\mathfrak{J}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 100.$$

Gleichung 100 ift die Differentialgleichung der elaftifchen Linie. In derfelben bedeutet M das Moment an einer Stelle mit der Abfciffe x, im Allgemeinen alfo etwas Veränderliches; $\mathfrak{J}$ ift das Trägheitsmoment für die wagrechte Schwerpunktsaxe des Querfchnittes an derfelben Stelle.

Die Gleichung der elaftifchen Linie wird durch zweimalige Integration der Gleichung 100 erhalten; bei der Integration ift E conftant. Es wird

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{E} \int \frac{M}{\mathfrak{J}} d\,x + C_1$$

und

$$y = \frac{1}{E} \iint \frac{M}{\mathfrak{J}} (d\,x)^2 + C_1\,x + C_2.$$

Bekanntlich ift der Krümmungshalbmeffer für eine ebene Curve

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 y}{d\,x^2}}$$

oder, wenn $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$ nur klein ift, angenähert

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2 y}{d x^2}}$$

Danach wird die Gleichung der elaftifchen Linie auch gefchrieben werden können:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \mathcal{J}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 101.$$

Für $M = 0$ wird $\rho = \infty$, d. h. die elaftifche Linie eine Gerade. Das Moment M ift Null an demjenigen Punkte des Balkens, bei welchem es aus dem pofitiven in den negativen Werth übergeht, alfo das Vorzeichen wechfelt; an diefen Punkten hat fonach die elaftifche Linie fog. Wendepunkte.

3. Abfchnitt.
Stützen und Träger.

Man bezeichnet mit dem Namen Stützen folche Bau-Conftructionen, bei denen die Längsaxe ganz oder nahezu mit der Richtung der Belaftungen zufammenfällt. Die Belaftungen wirken in den meiften Fällen lothrecht, in der Richtung der Schwere, und daraus ergiebt fich, dafs die Stützen meiftens lothrechte oder nahezu lothrechte Längsaxen haben. Wir rechnen dahin die Pfeiler und die Säulen, die fich wohl auch unter dem gemeinfchaftlichen Namen Freiftützen zufammenfaffen laffen.

Träger find Bau-Conftructionen, bei denen die Belaftungen ausfchliefslich oder vorwiegend fenkrecht zur Richtung der Längsaxe wirken. Da die Belaftungen meift lothrecht gerichtet find, haben die Träger meift wagrechte oder nur wenig davon abweichende Längsaxen.

1. Kapitel.
Stützen.

125. Vorbemerkungen.

Im vorliegenden Kapitel follen ganz allgemein folche Conftructionen, bezw. Conftructionstheile behandelt werden, welche auf Druck in Anfpruch genommen werden, alfo nicht allein die Freiftützen (Pfeiler und Säulen), fondern auch fonftige gedrückte Stäbe, wie fie bei Trägern für Decken und Dächer vorkommen. Je nach dem für den gedrückten Theil verwendeten Material ift der Widerftand deffelben ein wefentlich verfchiedener: Stützen aus Eifen und Holz find im Stande, fowohl Druck- wie Zugwiderftand zu leiften; Stützen aus Mauerwerk dagegen können keinen mit Sicherheit in Rechnung zu ziehenden, bemerkenswerthen Zugwiderftand leiften.

Wenn die auf einen Querfchnitt wirkende Mittelkraft aufserhalb der Längsaxe des Pfeilers wirkt, ift fie mit einem Momente verbunden, welches in den einzelnen Querfchnittstheilen Zugbeanfpruchungen erzeugt. Diefelben werden allerdings zum Theile durch Druckbeanfpruchungen wieder aufgehoben; fobald jedoch die Excentricität gewiffe Grenzen erreicht, fo find Zugbeanfpruchungen vorhanden, falls das Material diefelben übertragen kann; anderenfalls treten vollftändig veränderte Spannungsverhältniffe auf. Diefer letztere Fall kommt bei den gemauerten Pfeilern fehr häufig vor und ift defshalb befonders zu unterfuchen.

Bei den aus Holz und Eiſen beſtehenden Druckſtäben, bezw. Freiſtützen tritt die erwähnte Schwierigkeit nicht auf; ſtatt derſelben iſt bei dieſen die Gefahr eines ſeitlichen Ausbiegens und weiter diejenige des Zerknickens in das Auge zu faſſen.

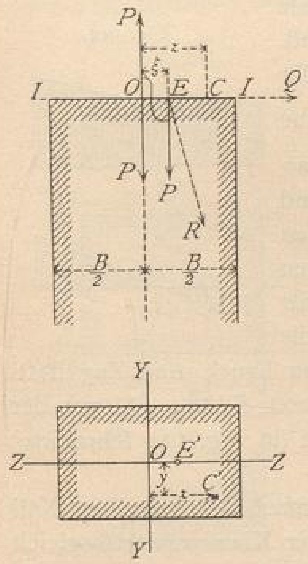
a) Stützen mit auſserhalb der Längsaxe wirkenden Kräften, ohne Rückſicht auf Zerknicken.

1) Druckvertheilung in Querſchnitten, welche Druck und Zug aufnehmen können, falls die Kraftebene alle Querſchnitte in Hauptaxen ſchneidet.

Die nachfolgende Unterſuchung hat allgemeine Giltigkeit, mag die Axe der betreffenden Conſtruction lothrecht, wagrecht oder geneigt ſein; ſie findet vorwiegend auf gemauerte Pfeiler und Stützen Anwendung und wird deſshalb an dieſer Stelle vorgenommen. Alle Ergebniſſe bleiben aber auch beſtehen, wenn man Fig. 123 um 90 Grad dreht, alſo einen Balken mit wagrechter Axe unterſucht, weſshalb in Art. 101 (S. 80) auf die hier vorzunehmenden Beſprechungen hingewieſen werden konnte. Mit groſser Annäherung gelten ſie auch für den gekrümmten Balken, z. B. für das Gewölbe, wenn der Halbmeſſer deſſelben nicht zu klein iſt; die ganze Unterſuchung iſt ein Sonderfall der allgemeinen in Art. 102 bis 114 (S. 80 bis 94) durchgeführten. 126. Allgemeine Unterſuchung.

Die Mittelkraft aller oberhalb irgend eines Querſchnittes II auf die Freiſtütze wirkenden Kräfte ſei R; ſie ſchneide den Querſchnitt in einem Punkte E (Fig. 123), deſſen Abſtand von der Pfeileraxe mit ξ bezeichnet werden ſoll. Die Kraftebene ſchneide den Querſchnitt II und alle Querſchnitte des Pfeilers in Hauptaxen (dieſelben ſind gewöhnlich Symmetrie-Axen). R wird in eine Seitenkraft P, welche ſenkrecht zum Querſchnitt II wirkt, und eine Seitenkraft Q zerlegt, welche in den Querſchnitt fällt; letztere ſoll unbeachtet gelaſſen werden, da ſie das Endergebniſs der Unterſuchung nur wenig beeinfluſſt. Es wird nichts geändert, wenn man im Schwerpunkte O des Querſchnittes zwei Kräfte anbringt, welche je einander gleich und zu P parallel ſind, aber entgegengeſetzten Sinn haben, alſo einander aufheben. Dadurch ergiebt ſich als Wirkung der excentriſchen Kraft P: eine im Schwerpunkte O angreifende Kraft P und zwei (in Fig. 123 durch einen Bogen verbundene) Kräfte P, welche zuſammen ein Kräftepaar mit dem Momente $M = P\xi$ bilden;

Fig. 123.



Aufriſs.

Grundriſs.

das Moment dreht im vorliegenden Falle nach rechts (im Sinne des Uhrzeigers). Durch die Kraft und das Kräftepaar werden im Querſchnitte Beanſpruchungen hervorgerufen, welche ſich nach Art. 95, S. 75, Gleichung 54 zu

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{J_Y} z$$

ergeben, und mit Rückſicht darauf, daſs $M = P\xi$ iſt, zu

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P \xi z}{\mathfrak{J}}$$

oder

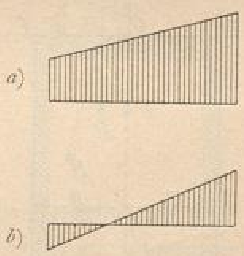
$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F \xi z}{\mathfrak{J}}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 102.$$

Abkürzend ift $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_Y$ gefetzt; ferner follen Druckfpannungen im Folgenden als pofitiv, Zugfpannungen als negativ eingeführt werden, da es fich bei den zu betrachtenden Conftructionen hauptfächlich um Beanfpruchungen auf Druck handelt.

Für eine gegebene Kraft P mit gegebenem Angriffspunkt E kann die Spannung fämmtlicher Querfchnittspunkte durch Gleichung 102 ermittelt werden. Von der Spannungsvertheilung erhält man ein klares Bild, wenn man in jedem Punkte des Querfchnittes die Spannung als Ordinate aufträgt und die Endpunkte diefer Ordinaten verbindet. Da bei den gemachten Annahmen die Entfernung y des beliebig gewählten Punktes C von der Kraftebene gar nicht in der Gleichung vorkommt, fo folgt, dafs die Spannung σ von y unabhängig ift; alle in gleichem Abftande z von der YY-Axe liegenden Punkte erleiden alfo gleiche Spannung. Demnach genügt es, die Spannungen aller Punkte aufzufuchen, welche auf einer zur Kraftebene parallelen Linie des Querfchnittes liegen und diefe nach beliebig gewähltem Mafsftabe aufzutragen. Die z-Werthe find die Abfciffen, und die Spannungen σ find die Ordinaten; die Vertheilung findet nach dem durch Gleichung 102 beftimmten Gefetze ftatt.

In diefer Gleichung find σ und z die einzigen Veränderlichen; beide kommen nur in der erften Potenz vor; alfo ift die Verbindungslinie der Endpunkte der Ordinaten σ eine Gerade, die Gerade obiger Gleichung. Diefe Linie ift bekannt, wenn zwei Punkte derfelben bekannt find. Demnach kann man fie leicht auffinden, indem man z. B. für die beiden Endwerthe $z = -\frac{B}{2}$ und $z = +\frac{B}{2}$ die Werthe von σ ausrechnet und aufträgt. Man erhält etwa die Darftellungen in Fig. 124. Die pofitiven Werthe von σ find nach oben, die negativen nach unten abgetragen; die erfteren bedeuten Druck, die letzteren Zug. Wenn alle Ordinaten auf einer Seite der Abfciffe liegen, fo findet nur Druck ftatt (Fig. 124 *a*); fonft hat man im Querfchnitt theils Druck, theils Zug (Fig. 124 *b*). Die Grenze, an welcher der Wechfel von Druck zum Zug ftattfindet, ift die Null-Linie (fiehe auch Art. 96, S. 75 und Art. 102, S. 80). Die von der Abfciffe und der Geraden der Gleichung 102 eingefchloffene (in Fig. 124 fchraffirte) Fläche wird als Druckfigur bezeichnet.

Fig. 124.



127. Null-Linie.

Die Ermittelung der Null-Linie ift hier eine fehr einfache. σ wird zu Null für alle diejenigen Punkte, für welche in Gleichung 102 der Klammerwerth gleich Null wird. Nennt man den befonderen Werth von z, für den dies eintritt, z_0, fo wird $\sigma = 0$, wenn $1 + \frac{F \xi z_0}{\mathfrak{J}} = 0$ wird, d. h. für

$$z_0 = -\frac{\mathfrak{J}}{F \xi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 103.$$

Gleichung 103 ift alfo die Gleichung der Null-Linie unter der Vorausfetzung, dafs die Kraftebene den Querfchnitt in einer Hauptaxe fchneidet.

Aus der Gleichung 103 für die Null-Linie ergeben fich die Folgerungen:

α) Da $\mathcal{J}$ und F ftets pofitive Gröfsen find, fo hat z_0 ftets anderes Vorzeichen als ξ. Die fämmtlichen Punkte, in denen die Spannung Null ftattfindet, liegen alfo an derjenigen Stelle der Axe YY, an welcher der Schnittpunkt mit der Mittelkraft R nicht liegt.

β) Für eine beftimmte Lage der Kraft R find alle Gröfsen auf der rechten Seite der Gleichung conftant, ift alfo auch z_0 conftant; demnach liegen alle Punkte, in denen σ gleich Null ift, in gleichem Abftande von der Y-Axe, d. h. alle diefe Punkte liegen in einer Geraden, die parallel ift zu derjenigen Schwerpunktsaxe, welche zur Schnittlinie des Querfchnittes mit der Kraftebene fenkrecht fteht.

γ) Der Werth für z_0 ift von der Kraftgröfse ganz unabhängig; er ift nur von den Werthen $\mathcal{J}$ und F, alfo von der Querfchnittsform und -Gröfse, und von ξ, d. h. von der Lage des Schnittpunktes E abhängig.

δ) z_0 wird Null, d. h. die Null-Linie fällt mit der zur Kraftebene fenkrechten Schwerpunktsaxe zufammen, wenn $\xi = \infty$ wird, d. h. wenn die Kraft R den Querfchnitt erft in unendlich weiter Ferne fchneidet, wenn alfo R zum Querfchnitte parallel gerichtet ift, d. h. wenn keine Axialkraft vorhanden ift.

Die Gleichung 103 giebt ein bequemes Verfahren, die Lage der Null-Linie graphifch zu ermitteln. Befonders einfach geftaltet fich die Aufgabe beim rechteckigen Querfchnitt.

Hier ift nach Art. 51 (S. 34)

$$\mathcal{J} = \frac{b\,h^3}{12} \quad \text{und} \quad F = b\,h.$$

Aus Gleichung 103 folgt, wenn man zunächft nur die abfolute Gröfse von z_0 beftimmt,

$$z_0 = \frac{b\,h^3}{12\,b\,h\,\xi} = \frac{h^2}{12\,\xi} \quad \text{und} \quad z_0\,\xi = \frac{h^2}{12} = \frac{h}{6} \cdot \frac{h}{2}.$$

Daraus ergiebt fich die folgende Conftruction (Fig. 125).

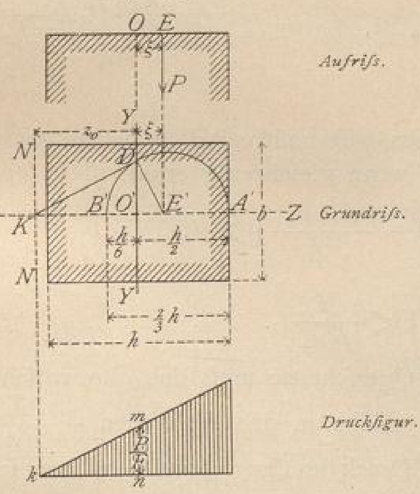
Man trägt von O' aus $\overline{O'B'} = \frac{h}{6}$ nach einer Seite ab, fchlägt über $B'A' = \frac{2}{3}\,h$ als Durchmeffer einen Halbkreis, welcher die in O' zur ZZ-Axe gezogene Lothrechte in D fchneidet; dann ift $\overline{O'D}^2 = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{6} = \frac{h^2}{12}$. Verbindet man nun D mit E' und zieht durch D die Linie DK fenkrecht zu $E'D$, fo ift $\overline{O'D}^2 = \overline{E'O'} \,.\, \overline{O'K} = \xi \,.\, \overline{O'K}$, d. h.

$$\overline{O'K} = \frac{\overline{O'D}^2}{\xi} = \frac{h^2}{12\,\xi};$$

mithin

$$\overline{O'K} = z_0.$$

Fig. 125.



K ift alfo ein Punkt der Null-Linie, und die durch K parallel zur Y-Axe gelegte Linie NN ift die Null-Linie felbft.

Eine etwas geänderte Conftruction ift bei weniger einfachen Querfchnitten anwendbar. Nach Art. 71 (S. 51) ift der Trägheitsradius

$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{F}} \quad \text{und} \quad \mathcal{J} = F\,R^2.$$

Demnach ift nach Gleichung 103

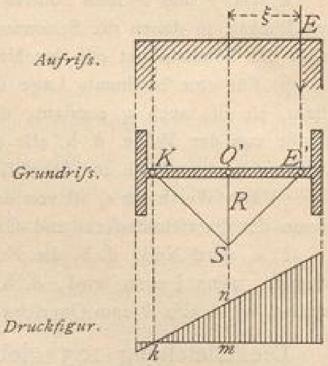
$$z_0 = -\frac{\mathcal{J}}{F\,\xi} = -\frac{F\,R^2}{F\,\xi} = -\frac{R^2}{\xi},$$

woraus fich die folgende Conftruction (Fig. 126) ergiebt.

In O' errichte man zur ZZ-Axe die Lothrechte $\overline{O'S} = R$, verbinde S mit E' und ziehe durch S die Senkrechte $\overline{SK}$ zu $E'S$; dann ift $\overline{O'S}^2 = R^2 = \overline{E'O'} \,.\, \overline{O'K} = \xi \,.\, \overline{O'K}$; mithin

$$\overline{O'K} = \frac{R^2}{\xi} \text{ (abfolute Gröfse)} = z_0.$$

Fig. 126.

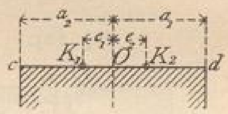


Der Punkt K in Fig. 125 u. 126 ift ein Punkt der Geraden, welche die Veränderung von σ darftellt; wenn noch ein Punkt diefer Geraden bekannt ift, fo kann fie gezeichnet werden. Für $z = 0$ ift nach Gleichung 102: $\sigma_0 = \frac{P}{F}$, d. h. in den Querfchnittspunkten, welche in der zur Kraftebene fenkrechten Schwerpunktsaxe liegen, ift die Spannung genau fo grofs, als wenn nur die Kraft P in der Axe wirkte. Man kann $\frac{P}{F}$ leicht ermitteln und nach beliebigem Mafsftabe im entfprechenden Punkte m (Fig. 126) auftragen. Ift $\overline{mn} = \frac{P}{F}$, fo ergiebt die Verbindung von m mit k die Gerade für σ.

128. Kernpunkte. Die Beanfpruchung der Querfchnittstheile ift an den beiden Seiten der Null-Linie verfchiedenartig, an der einen Seite Druck, an der anderen Zug. Es ift nunmehr zu unterfuchen, wie die Kraft P liegen mufs, damit nur Druckfpannungen im Querfchnitte auftreten [27]).

Offenbar find im ganzen Querfchnitte nur Druckfpannungen, wenn die den äufserften Querfchnittspunkten c und d (Fig. 127) entfprechenden Spannungen Druck bedeuten; denn dann fällt die Null-Linie aufserhalb des Querfchnittes (fiehe Fig. 124a). Nun ift die Spannung im Punkte d, weil für denfelben $z = a_1$ ift, nach Gleichung 102

Fig. 127.



$$\sigma_{max} = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F\,\xi\,a_1}{\mathfrak{J}}\right),$$

diejenige im Punkte c, weil für diefen $z = -a_2$ ift,

$$\sigma_{min} = \frac{P}{F}\left(1 - \frac{F\,\xi\,a_2}{\mathfrak{J}}\right).$$

Wenn fowohl σ_{max}, wie σ_{min} Druck bedeuten, alfo pofitiv find, findet im ganzen Querfchnitte nur Druck ftatt; dies ift der Fall, wenn gleichzeitig erfüllt ift

$$\left(1 + \frac{F\,\xi\,a_1}{\mathfrak{J}}\right) > 0 \quad \text{und} \quad \left(1 - \frac{F\,\xi\,a_2}{\mathfrak{J}}\right) > 0,$$

d. h. wenn

$$\xi > -\frac{\mathfrak{J}}{F\,a_1} \quad \text{und} \quad \xi < \frac{\mathfrak{J}}{F\,a_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 104.$$

ift. Der Schnittpunkt E der Kraft P mit dem Querfchnitte mufs fich alfo zwifchen zwei Punkten K_1 und K_2 (Fig. 127) befinden, welche in den Abftänden $-\frac{\mathfrak{J}}{F\,a_1}$, bezw. $\frac{\mathfrak{J}}{F\,a_2}$ von der Axe O liegen, wenn nur Druck im Querfchnitt herrfchen foll. Wir bezeichnen abkürzungsweife

$$\frac{\mathfrak{J}}{F\,a_1} = e_1 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{J}}{F\,a_2} = e_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 105.$$

Die Punkte K_1 und K_2 find die Kernpunkte.

[27]) Bei obiger Unterfuchung hätten die Darlegungen in Art. 108 (S. 91), betreffend den Kern, zu Grunde gelegt werden können; die obige Art der Ableitung ift gewählt, um die Entwickelung der Formeln 104 vom vorherigen Studium der Art. 105 bis 114 (S. 86 bis 94) unabhängig zu erhalten.

Da auf die fämmtlichen für e_1 und e_2 mafsgebenden Gröfsen $\mathfrak{J}$, F, a_1 und a_2 ausfchliefslich die Querfchnittsgeftaltung Einflufs hat, fo ift die Lage der Kernpunkte nur von der Form und Gröfse des Querfchnittes abhängig.

Für das Rechteck ift $\mathfrak{J} = \frac{b h^3}{12}$, $F = b h$ und $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$; mithin $e_1 = e_2 = \frac{h}{6}$. Soll alfo nur Druck im Querfchnitt ftattfinden, fo darf die Kraft den Querfchnitt in keinem gröfseren Abftande von der Axe fchneiden, als $\frac{h}{6}$; mit anderen Worten: fie mufs den Querfchnitt im inneren Drittel fchneiden (vergl. auch Art. 109, S. 91).

Für den Kreisquerfchnitt ift $e_1 = e_2 = \frac{d}{8}$, d. h. die Kraft darf das innere Viertel nicht verlaffen, wenn nur Druck auftreten foll. (Vergl. Art. 110, S. 92.)

Für den Kreisringquerfchnitt bei geringer Ringftärke ift $e_1 = e_2 = \frac{d}{4}$; die Kraft mufs alfo in der inneren Hälfte verbleiben.

2) Druckvertheilung in Querfchnitten, welche nur Druck aufzunehmen vermögen, falls die Kraftebene alle Querfchnitte in Hauptaxen fchneidet.

Die für die Druckvertheilung unter 1 entwickelten Gefetze gelten auch für Conftructionen, welche nur Druck aufnehmen können, fo lange die Kraft eine derartige Lage hat, dafs im ganzen Querfchnitt wirklich nur Druckfpannungen auftreten, fo lange alfo die Kraft innerhalb der Kernpunkte liegt. 129. Druckvertheilung.

Wenn daher z. B. beim rechteckigen Querfchnitte die Kraft im inneren Drittel liegt, fo kann die Lage der Null-Linie, fo wie die Druckvertheilung genau fo ermittelt werden, wie in Fig. 125 gezeigt ift. Diefe Conftruction findet häufige Anwendung nicht nur bei Freiftützen mit rechteckigem Querfchnitt, fondern auch bei Stützmauern, in Gewölben etc.

Als Mafs fenkrecht zur Bildfläche wählt man zweckmäfsig die Einheit (gewöhnlich 1 m), fo dafs die gedrückte Fläche — der Querfchnitt — ein Rechteck von der Breite (fenkrecht zur Bildfläche) gleich der Einheit ift. Die zweite Abmeffung des Rechteckes ift bei den Gewölben (Fig. 128) die Gewölbftärke d an der betreffenden Stelle, bei den Stützmauern die Mauerftärke d (Fig. 129).

Fig. 128.

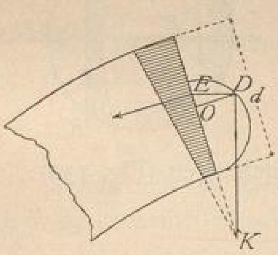
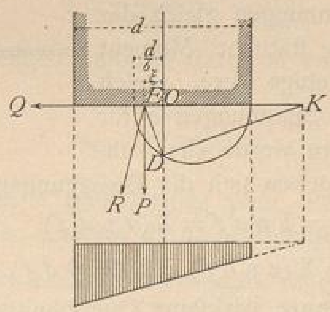


Fig. 129.



In den beiden neben ftehenden Figuren fchneidet die Mittelkraft die betreffende Fuge innerhalb der Kernpunkte, fo dafs alfo nur Druck im Querfchnitt entfteht und der ganze Querfchnitt wirkfam ift. Die angewandte Conftruction ift ohne weitere Erläuterung verftändlich.

Es möge noch bemerkt werden, dafs diefelbe bei den Gewölben nur annäherungsweife richtig ift, weil die Vorausfetzung der geraden Axe nicht zutrifft. Der Fehler ift aber bei einigermafsen grofsem Halbmeffer des Gewölbes unerheblich.

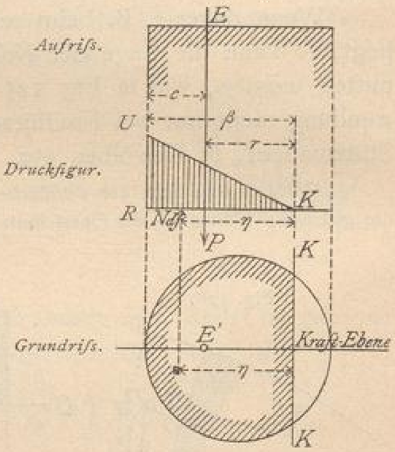
Wenn aber die Kraft den Querfchnitt aufserhalb der Kernpunkte fchneidet, fo fällt die Null-Linie in den Querfchnitt, und an der einen Seite derfelben würden Zugfpannungen entftehen, falls der Bauftoff diefelben aufnehmen könnte. Da dies nach obiger Annahme hier nicht möglich ift, fo wird auf diefem ganzen Querfchnittstheile kein Uebertragen von Spannungen ftattfinden können; die ganze Spannungsübertragung findet auf der Druckfeite der Null-Linie ftatt. Man nennt diefen Theil des Querfchnittes den wirkfamen Querfchnitt. Gröfse und Form des wirkfamen Querfchnittes und die gröfste in demfelben ftattfindende Spannung find zu ermitteln.

Der für die Spannung σ gefundene Ausdruck (Gleichung 102) ift hier nicht ohne Weiteres anwendbar, weil bei Aufftellung deffelben Spannungsvertheilung über die ganze Querfchnittsfläche angenommen war. Hier jedoch ift nur ein Theil des Querfchnittes als vorhanden anzufehen, indem der andere Theil an der Kraftübertragung nach der Annahme nicht theilnimmt. Mit kleiner Aenderung kann aber die Gleichung 102 auch hier der Berechnung zu Grunde gelegt werden: man mufs nur unter F die Fläche des wirkfamen Querfchnittstheiles, unter M das Moment von P, bezogen auf die im Schwerpunkt des wirkfamen Querfchnittstheiles fenkrecht zur Kraftebene liegende Axe YY, und unter $\mathcal{J}$ das Trägheitsmoment des wirkfamen Querfchnittes für diefe Axe verftehen. Dann ift, wenn zum Unterfchiede die Bezeichnungen F', M', $\mathcal{J}'$ eingeführt werden,

$$\sigma = \frac{P}{F'} + \frac{M' z'}{\mathcal{J}'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 106.$$

Die Spannung σ in den verfchiedenen Querfchnittspunkten ändert fich wiederum nach dem Gefetze einer Geraden, weil die einzigen Veränderlichen der Gleichung 106, σ und z', nur in der erften Potenz vorkommen. Diefe Gerade (Fig. 130), deren Ordinaten in den verfchiedenen Punkten die Druckgröfsen für die Flächeneinheit angeben, fchneide die Abfciffenaxe in K; alsdann ift für irgend einen Punkt C im fenkrecht gemeffenen Abftand η vom Nullpunkte K die Spannung $\sigma = a\,\eta$, worin a eine noch zu beftimmende Conftante ift. Das Gleichgewicht zwifchen der äufseren Kraft P und den inneren Spannungen σ verlangt, dafs die Summe der im Querfchnitt wirkenden Druckfpannungen gleich der Kraft P fei, fo wie dafs das ftatifche Moment von P, bezogen auf eine beliebige Axe, gleich der Summe der Momente der Spannungen σ für diefelbe Axe fei. Als Drehaxe werde die Null-Linie KK gewählt; alsdann ergeben fich die Bedingungsgleichungen (Fig. 130):

Fig. 130.



$$P = \Sigma\,\sigma\,df = \Sigma\,(a\,\eta\,df)$$

und

$$P\,r = \Sigma\,(\sigma\,\eta\,df) = \Sigma\,(a\,\eta^2\,df).$$

Die Summirung ift über die ganze wirkfame Querfchnittsfläche auszudehnen. Bei derfelben ift a conftant; mithin erhält man

$$P = a\,\Sigma\,(\eta\,df) = a\,S_K$$

und

$$P\,r = a\,\Sigma\,(\eta^2\,df) = a\,\mathcal{J}_K \quad \ldots \ldots \ldots \quad 107.$$

S_K und $\mathcal{J}_K$ bedeuten das ftatifche und Trägheitsmoment des wirkfamen Querfchnittstheiles, bezogen auf die Null-Linie KK. Dividirt man die zweite diefer Gleichungen durch die erfte, fo ergiebt fich

$$r = \frac{\mathcal{J}_K}{S_K} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 108.$$

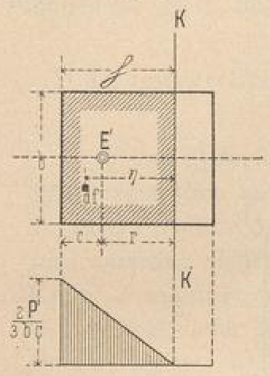
Der Abſtand des Schnittpunktes E von der nächſten Kante, d. h. von c, iſt bekannt; die ganze Breite β des wirkſamen Querſchnittstheiles iſt demnach

$$\beta = c + r = c + \frac{\mathfrak{J}_K}{S_K} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 109.$$

Die Ermittelung von r nach Gleichung 108 auf dem Wege der Rechnung führt bei einigermaſsen unregelmäſsigen Querſchnittsformen zu ſehr umſtändlichen Arbeiten; bei der am häufigſten vorkommenden Querſchnittsform, dem Rechtecke, ergiebt ſich aber r ſehr einfach.

Die zunächſt noch unbekannte Abmeſſung des wirkſamen Rechteckes, welche in die Kraftebene fällt, ſei $\mathfrak{h}$, d. h. es werde mit $\mathfrak{h}$ bezeichnet, was oben β genannt war; die Breite des Rechteckes ſei b; alsdann iſt (ſiehe Art. 51, S. 34)

Fig. 131.



$$\mathfrak{J}_K = \frac{b\,\mathfrak{h}^3}{3} \quad \text{und} \quad S_K = \frac{b\,\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{h}}{2} = \frac{b\,\mathfrak{h}^2}{2};$$

demnach

$$r = \frac{\mathfrak{J}_K}{S_K} = \frac{2\,b\,\mathfrak{h}^3}{3\,b\,\mathfrak{h}^2} = \frac{2}{3}\,\mathfrak{h}.$$

Ferner iſt $\mathfrak{h} = \beta = c + r = c + \frac{2}{3}\,\mathfrak{h}$; mithin

$$c = \frac{\mathfrak{h}}{3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{h} = 3\,c \quad \ldots \ldots \quad 110.$$

Die Druckvertheilung findet alſo auf eine Fläche ſtatt, welche dreimal ſo breit iſt, als der Abſtand des Schnittpunktes E von der nächſten Kante.

Die Druckbeanſpruchung an irgend einer Querſchnittsſtelle iſt nun $\sigma = a\,\eta$, in welchem Ausdrucke a aus der Bedingungsgleichung $P = a\,S_K$ zu ermitteln iſt, d. h. $a = \frac{P}{S_K}$; daher

$$\sigma = \frac{P\,\eta}{S_K} = \frac{2\,P\,\eta}{b\,\mathfrak{h}^2}.$$

σ_{max} findet in denjenigen Punkten ſtatt, in denen η ſeinen gröſsten Werth $\mathfrak{h}$ hat, d. h. es iſt

$$\sigma_{max} = \frac{2\,P}{b\,\mathfrak{h}} = \frac{2\,P}{3\,b\,c} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 111.$$

Wenn ſich der Druck P gleichmäſsig über die ganze gedrückte Fläche $F_1 = b\,\mathfrak{h} = 3\,b\,c$ vertheilen würde, ſo wäre die Druckſpannung für die Flächeneinheit gleich $\frac{P}{3\,b\,c}$; der wirklich ſtattfindende Maximaldruck iſt gleich $\frac{2\,P}{3\,b\,c}$, d. h. doppelt ſo groſs, als wenn P ſich gleichmäſsig vertheilte. Die Druckfigur in dieſem Falle wird alſo erhalten, indem man zunächſt c dreimal von der nächſt liegenden Kante aus abträgt, wodurch man den Nullpunkt K findet; alsdann trägt man in dieſer Kante nach beliebigem Maſsſtabe $\sigma_{max} = \frac{2\,P}{3\,b\,c}$ auf und verbindet den Endpunkt dieſer Ordinate mit dem Nullpunkt. Die lothrecht ſchraffirte Fläche giebt die Druckfigur.

Soll die Druckvertheilung in unregelmäſsigen Querſchnitten ermittelt werden, ſo iſt das rechneriſche Verfahren überaus umſtändlich. Man kann daſſelbe dadurch vermeiden, daſs man ein graphiſches Verfahren anwendet. In dem durch 130. Druckvertheilung in unregelmäſsigen Querſchnitten.

Fig. 132.

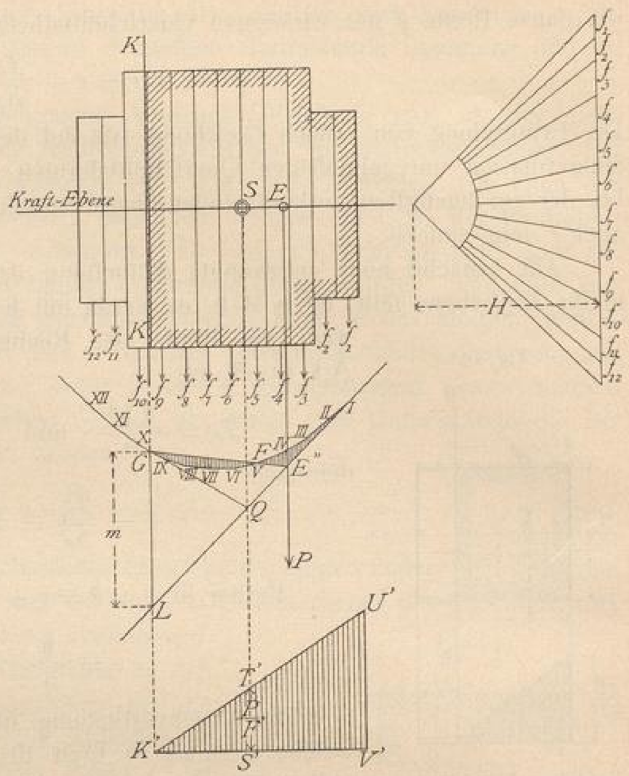


Fig. 132 dargeſtellten Querſchnitt ſei KK die Null-Linie und der Querſchnittstheil rechts von dieſer Linie der wirkſame Querſchnitt (derſelbe iſt an den Rändern ſchraffirt). Man zerlege dieſen Querſchnitt in eine Anzahl ſchmaler Streifen, deren Flächeninhalte $f_1, f_2, f_3 \ldots$ ſeien, trage dieſelben nach beliebigem Flächenmaſsſtabe auf, conſtruire für den beliebig angenommenen Polabſtand H das Seilpolygon $I, II \ldots VI, VII \ldots XII$ und verlängere die erſte Seite des Seilpolygons bis zum Schnittpunkte L mit der Linie KK; alsdann iſt (nach Art. 47, S. 31) das ſtatiſche Moment der wirkſamen Querſchnittsfläche, bezogen auf die Axe KK,

$$S_K = H\,m.$$

Ferner iſt, wenn der Inhalt der Fläche $I\,II \ldots X\,L\,I$ mit φ bezeichnet wird, das Trägheitsmoment der wirkſamen Querſchnittsfläche, bezogen auf die Axe KK (nach Art. 60, S. 39)

$$\mathcal{J}_K = 2\,H\,\varphi,$$

und da nach Gleichung 108: $r = \dfrac{\mathcal{J}_K}{S_K}$ iſt, ſo wird $r = \dfrac{2\,\varphi}{m}$; mithin

$$\varphi = \frac{m\,r}{2} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad 112.$$

Die Null-Linie KK liegt alſo derart, daſs φ inhaltsgleich iſt einem Dreieck, deſſen Höhe gleich r, deſſen Grundlinie gleich dem Stücke m iſt, welches auf der Null-Linie zwiſchen die verlängerte erſte Seilpolygonſeite und das Seilpolygon fällt. Verbindet man den Schnittpunkt E'' der Kraftrichtung P und der verlängerten erſten Seilpolygonſeite mit X, ſo erhält man ein Dreieck $X\,L\,E''$, deſſen Flächeninhalt gleich $\dfrac{m\,r}{2}$ iſt, welches alſo, wenn KK richtig angenommen iſt, inhaltsgleich mit φ iſt. Dies findet ſtatt, wenn die in Fig. 132 lothrecht ſchraffirten Flächen $I\,II\,III\,F\,E''\,I$ und $F\,VI\,VII\,VIII\,IX\,G\,F$ gleichen Inhalt haben. Sind beide an Inhalt nicht gleich, ſo iſt die Linie $E''\,G$ um E'' zu drehen und damit auch KK nach rechts oder links ſo lange zu verſchieben, bis dieſe Bedingung erfüllt iſt; die dann erhaltene Null-Linie iſt die richtige. Demnach iſt das Verfahren das folgende.

Man conſtruire für den ganzen Querſchnitt das Seilpolygon $I\,II \ldots XII$, verlängere die erſte Seilpolygonſeite, ermittele deren Schnittpunkt E'' mit der Kraftlinie und ſuche nun diejenige durch E'' gehende Linie, welche die beiden lothrecht ſchraffirten Flächen einander gleich macht; der Punkt X, in welchem dieſe Linie das Seilpolygon ſchneidet, beſtimmt die Lage der Null-Linie KK.

Es macht jetzt keine Schwierigkeit, die Druckvertheilung und den gröfsten Druck zu ermitteln. Im Schwerpunkte der wirkfamen Querfchnittsfläche ift $z' = 0$, alfo nach Gleichung 106

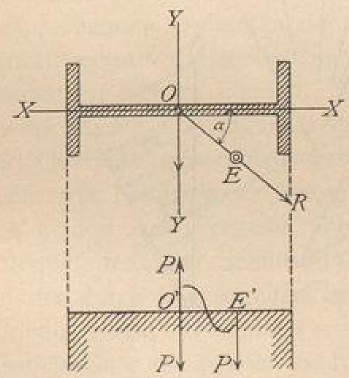
$$\sigma = \frac{P}{F'}.$$

F' ift bekannt; es kann unmittelbar aus Fig. 132 entnommen werden, alfo auch $\frac{P}{F'}$. Die Lage des Schwerpunktes S folgt mit Leichtigkeit aus dem Seilpolygon. Trägt man an der dem Schwerpunkte entfprechenden Stelle des Aufriffes der Fuge den Werth $\frac{P}{F'}$ in beliebigem Mafsftabe als Ordinate auf $(= S' T')$, verbindet T' mit K', fo giebt die Linie $K' T'$ die Druckvertheilung an; der gröfste Druck für die Flächeneinheit ift $V' U'$ in dem gleichen Mafsftabe, in dem $\frac{P}{F'}$ aufgetragen war.

3) Druckvertheilung, falls die Kraftebene die Querfchnitte nicht in Hauptaxen fchneidet.

α) Die Querfchnitte können Druck und Zug aufnehmen[28]). Die Wirkung einer excentrifch auf den Querfchnitt (Fig. 133) im Punkte E angreifenden Kraft P ift eine dreifache. Falls XX und YY die Hauptaxen des Querfchnittes find, fo wird zunächft nichts geändert, wenn man im Schwerpunkte zwei einander gleiche Kräfte P anbringt, welche der gegebenen Kraft P parallel, alfo lothrecht gerichtet find. Zwei diefer Kräfte P bilden in der durch OE gelegten lothrechten Ebene ein Kräftepaar; die dritte Kraft P greift im Punkte O an. Das Moment M des Kräftepaares kann man durch zwei wagrechte Kräfte R erfetzen, deren eine im Querfchnitt, deren andere in folcher Höhe h über dem Querfchnitt wirkt, dafs $Rh = M$ ift. Zerlegt man die Kräfte R in zwei Seitenkräfte $R \cos \alpha$ und $R \sin \alpha$, welche in die lothrecht durch XX, bezw. YY gelegten Ebenen fallen, fo erhält man zwei Momente: in der lothrechten durch XX gelegten Ebene $M \cos \alpha = M_y$ und in der lothrechten durch YY gelegten Ebene $M \sin \alpha = M_x$. Demnach ift die lothrechte Spannung, welche in einem Punkte C des Querfchnittes mit den Coordinaten x und y erzeugt wird, 131. Querfchnitt nimmt Zug und Druck auf.

Fig. 133.



$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_x y}{\mathcal{J}_X} + \frac{M_y x}{\mathcal{J}_Y} \quad \dots \dots \dots \quad 113.$$

In diefer Gleichung bedeutet F den Flächeninhalt des Querfchnittes; $\mathcal{J}_X$ und $\mathcal{J}_Y$ find die Trägheitsmomente der Querfchnittsfläche, bezogen auf die XX- und YY-Axe.

Bei gegebenem Querfchnitt und gegebener Kraft enthält die Gleichung 113 nur drei Veränderliche: σ, x und y; alle drei kommen nur in der erften Potenz vor. Ermittelt man demnach für alle Werthe von x und y, d. h. für alle Querfchnittspunkte, die zugehörigen Werthe von σ und trägt diefelben als Ordinaten

[28]) Vergl. auch Art. 102 bis 104 (S. 80 bis 83).

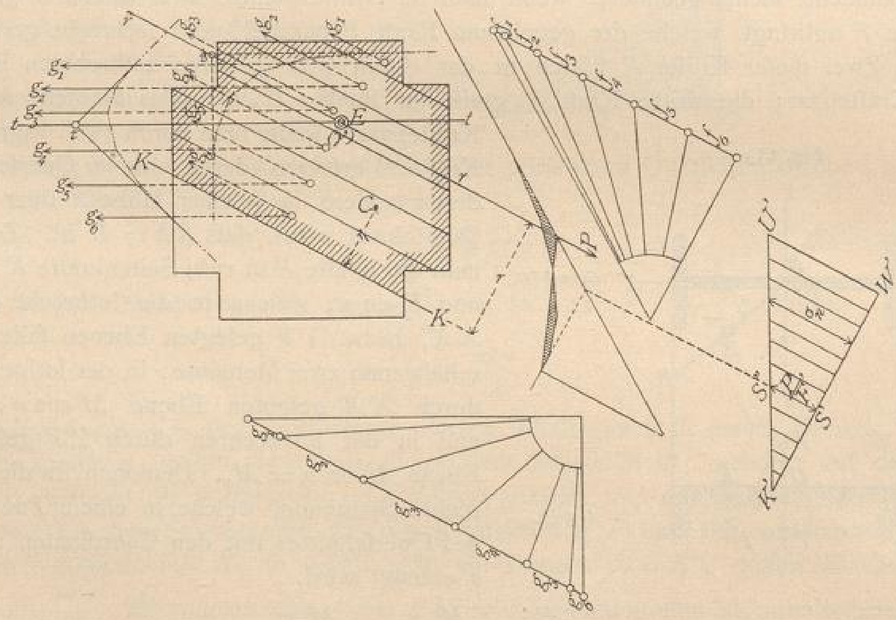
auf, fo liegen alle Endpunkte diefer Ordinaten auf einer Ebene, auf der Ebene der Gleichung 113. Man findet leicht die Null-Linie, indem man $\sigma = 0$ fetzt und in der erhaltenen Gleichung für zwei Werthe von x die zugehörigen Werthe von y auffucht. (Vergl. auch Art. 105, S. 86.)

132. Querfchnitt nimmt nur Druck auf.

β) Die Querfchnitte können nur Druck aufnehmen. Wenn die Querfchnitte nur Druck übertragen können, wie dies beim Mauerwerk nahezu der Fall ift, behält, fo lange die Null-Linie nicht den Querfchnitt fchneidet, die Gleichung 113 ihre Giltigkeit, weil alsdann nur Druckfpannungen ftattfinden. Sobald aber die Null-Linie in den Querfchnitt fällt, wird die Aufgabe eine fehr fchwierige. Denn es ift nicht nur die Gröfse der gedrückten Fläche, fondern auch die Richtung der Null-Linie unbekannt. Die Gleichung 113 bleibt auch für diefen Fall giltig, wenn unter F die wirkfame Querfchnittsfläche, unter XX, bezw. YY die durch den Schwerpunkt derfelben gelegten Hauptaxen diefes Theiles der Querfchnittsfläche verftanden werden und die Coordinaten x und y, fo wie $\mathfrak{J}_X$ und $\mathfrak{J}_Y$ auf diefe Hauptaxen bezogen werden.

Die Endpunkte der in den einzelnen Querfchnittspunkten aufgetragenen Werthe für σ liegen wiederum auf einer Ebene, der Spannungsebene, welche den Querfchnitt in der Null-Linie fchneidet. Alle lothrechten Ebenen, welche parallel zur

Fig. 134.



Null-Linie durch den wirkfamen Querfchnittstheil gelegt werden, fchneiden diefen und die Spannungsebene in zwei parallelen Linien, deren Abftand die Spannung der gefchnittenen Querfchnittspunkte angiebt. Daraus folgt, dafs in allen Punkten, welche auf einer Parallelen zur Null-Linie KK liegen (Fig. 134), die Spannungen gleich grofs find. In einem Punkte C, deffen fenkrechter Abftand von KK gleich η ift, wird die Spannung $\sigma = a\,\eta$ fein, in welcher Gleichung a eine noch unbekannte Conftante ift. Die graphifche Darftellung der Spannung in den einzelnen Punkten des Querfchnittes bietet die Linie $U'K'$.

Wird zunächſt die Richtung der Null-Linie KK als bekannt und gegeben angenommen, ſo iſt die ganze Ableitung in Art. 130 (S. 117) auch hier giltig. Auch hier iſt

$$\sigma = a\,\eta, \quad P = \int a\,\eta\,df = a\,S_K \quad \text{und} \quad P\,r = \int \sigma\,\eta\,df = a\int \eta^2\,df = a\,\mathfrak{J}_K;$$

ſonach

$$r = \frac{\mathfrak{J}_K}{S_K}.$$

$\mathfrak{J}_K$ und S_K bedeuten das Trägheits- und das ſtatiſche Moment der wirkſamen Querſchnittsfläche, bezogen auf die Axe KK. Man zerlege die Querſchnittsfläche nunmehr in Streifen, welche parallel zu KK ſind und ermittele die Lage von KK, wie oben (in Art. 130, S. 117) gezeigt iſt (Fig. 134[29]).

Es iſt nun zu unterſuchen, ob die angenommene Richtung der Null-Linie richtig iſt. Die im Querſchnitt wirkenden Druckſpannungen müſſen mit der Kraft P, welche den Querſchnitt im Punkte E ſchneidet, im Gleichgewicht ſein; demnach muſs ihre Mittelkraft ebenfalls durch den Punkt E gehen, wenn die Richtung der Null-Linie richtig gewählt iſt. Alsdann iſt auch die gefundene wirkſame Fläche (in Fig. 134 ſchraffirt) richtig; anderenfalls iſt eine Verbeſſerung vorzunehmen. Alle Punkte des Querſchnittes, welche auf Parallelen zur Null-Linie liegen, haben nach Obigem gleiche Spannung; man kann alſo die Querſchnittsfläche in (genügend ſchmale) der Null-Linie parallele Streifen zerlegen, in welchen je gleiche Spannung ſtattfindet. Der geſammte Druck in einem Streifen von der Breite b_n, der Länge h_n und der Spannung σ_n für die Flächeneinheit iſt offenbar

$$g_n = b_n\,h_n\,\sigma_n\,.$$

Man ermittele für alle Streifen die Werthe g, wobei die Werthe von σ_n durch die entſprechenden Ordinaten der Linie $U'K'$ dargeſtellt ſind, und ſuche die Entfernung der Mittelkraft dieſer Werthe $g_1, g_2, g_3 \ldots$ von zwei Axen, welche beliebig angenommen werden können. Zweckmäſsig wird als eine Axe die Null-Linie, als die andere Axe eine Längsſeite des Querſchnittes gewählt; es können auch die Längs- und Querſeite genommen werden. Das Aufſuchen der Mittelkraftslage erfolgt bequem mit Hilfe zweier Seilpolygone (Fig. 134). Der Abſtand der Mittelkraft von den beiden Axen ergiebt ſich aus den Schnittpunkten ρ und τ der äuſserſten Seilpolygonſeiten; der Schnittpunkt der Mittelkraft mit dem Querſchnitt liegt ſowohl auf der durch ρ gezogenen Linie rr, wie auf der durch τ gezogenen Linie tt, iſt alſo der Punkt V. Linie rr iſt parallel zur Kraftrichtung im erſten, tt parallel zur Kraftrichtung im zweiten Seilpolygon.

Wenn V mit E zuſammenfällt, wie in Fig. 134, ſo iſt die Null-Linie und die ganze Conſtruction richtig; die wirklichen Druckſpannungen können dann, wie in Art. 130 (S. 117) gezeigt, ermittelt werden, indem man im Schwerpunkte der wirkſamen Querſchnittsfläche $\frac{P}{F_1}$ $(= S'S'')$ aufträgt und den Endpunkt S'' mit K' verbindet. $K'U'W'$ iſt die Druckfigur.

Fällt aber V mit E nicht zuſammen, ſo iſt die Unterſuchung für eine andere Lage der Null-Linie zu wiederholen. Man kann ohne Schwierigkeit ſchätzen, nach welcher Richtung KK gedreht werden muſs, und erreicht meiſt bereits bei der

[29]) In Fig. 134 ſind die Kräfte $f_1, f_2, f_3 \ldots$ nicht ausgezeichnet, um die Abbildung nicht undeutlich zu machen.

erften Wiederholung der Conftruction ein genügend genaues Zufammenfallen der Punkte E und V.

Vorftehende Unterfuchung ift für die Ermittelung der Standficherheit von Gewölbepfeilern, durchbrochenen Mauern, Schornfteinen etc. von grofser Wichtigkeit.

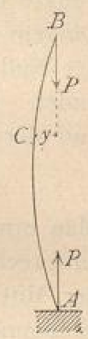
b) Gedrückte Stäbe unter Berückfichtigung der Zerknickungsgefahr.

1) Theorie des Widerftandes gegen Zerknicken.

133. Voraus-fetzungen.

Wenn auf einen Stab mit gerader Axe zwei Zugkräfte P wirken, deren Richtungslinien genau mit der Stabaxe zufammenfallen, fo findet in den einzelnen Punkten des Stabes nur eine Zugbeanfpruchung ftatt. Wirken auf einen eben folchen Stab zwei Druckkräfte P ebenfalls genau in der Richtung der Axe und einander entgegengefetzt, fo müfften nach Früherem an den einzelnen Stellen gleichfalls nur Druckbeanfpruchungen ftattfinden, welche bei überall gleichem Stabquerfchnitt in allen Punkten für die Flächeneinheit gleich wären. In Wirklichkeit kann man darauf nicht immer rechnen. Wenn die Länge des Stabes im Vergleich zu feiner Querfchnittsfläche grofs ift, fo wird unter dem Einfluffe der drückenden Kräfte ein Ausbiegen ftattfinden, und auf jeden Querfchnitt C (Fig. 135) wirkt alsdann aufser der Axialkraft P noch ein Moment Py. In diefem Falle findet Beanfpruchung des Stabes auf Zerknicken ftatt, und derfelbe ift mit Rückficht auf diefe Beanfpruchungsweife zu berechnen.

Fig. 135.



Es kann auffallen, dafs hier fcheinbar ein Widerfpruch zwifchen der Theorie und Praxis obwaltet; in Wirklichkeit ift derfelbe aber nicht vorhanden. So lange die Druckkräfte ganz genau in der Stabaxe und in deren Richtung wirken, findet ein Ausbiegen nicht ftatt; fobald aber in Folge von unvermeidlichen Fehlern die Kräfte aufserhalb der Axe angreifen, bezw. von der Richtung der Axe abweichen, entfteht für jeden Querfchnitt des Stabes ein Biegungsmoment, welches unter Umftänden ein Ausbiegen zur Folge hat. Man kann daher in diefem Falle von einem labilen Gleichgewichtszuftande fprechen.

Ein Ausbiegen der Stabaxe kann nicht nur in der in Fig. 135 gezeichneten Richtung ftattfinden, fondern ift nach allen möglichen Richtungen denkbar; es ift demnach zu unterfuchen, nach welcher Richtung ein folches Ausbiegen am leichteften ftattfindet, und der Querfchnitt des Stabes danach anzuordnen. Für die folgenden Unterfuchungen foll angenommen werden, dafs 1) als äufsere Kräfte nur die Axialkräfte P wirken, 2) die Axialkräfte in den Schwerpunkten der Endflächen angreifen und 3) der Stab überall gleichen Querfchnitt habe.

Fig. 136.

134. Elaftifche Linie.

Unter Einwirkung der Kraft P möge der Stab (Fig. 136), deffen Axe urfprünglich mit AX zufammenfiel, in die Lage AB gekommen fein; die Bildebene XAY, in welcher AB liegt, fchneide alle Querfchnitte in Hauptaxen; der Axenpunkt B habe nach der Formänderung die Ordinate y_0. Für irgend einen Punkt C mit der Abfciffe x fei die Ordinate y; das Moment für diefen Punkt ift $M = P(y_0 - y)$ und die elaftifche Linie demnach aus der Gleichung 100 zu ermitteln. Danach wird

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P(y_0 - y)}{E \mathfrak{J}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 114.$$

Hierin ift $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment des Querfchnittes bei C, bezogen auf diejenige Schwerpunktsaxe deffelben, welche fenkrecht zur Kraftebene, alfo zur XY-

Ebene, fteht. Der Querfchnitt ift nach obiger Vorausfetzung conftant, alfo auch $\mathfrak{J}$ für die Integration conftant; da P und E gleichfalls conftant find, fo hat bei der Integration $\frac{P}{E\mathfrak{J}}$ einen conftanten Werth. Abkürzungsweife werde

$$\frac{P}{E\mathfrak{J}} = a^2 \quad \ldots\ldots \quad 115.$$

gefetzt, fo dafs die Differentialgleichung der elaftifchen Linie lautet:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a^2 (y_0 - y) \quad \ldots\ldots \quad 116.$$

Die zweimalige Integration ergiebt als Gleichung der elaftifchen Linie:

$$y = y_0 + A \sin a x + B \cos a x \quad \ldots\ldots \quad 117.$$

Die beiden Conftanten A und B find für die verfchiedenen Arten der Stabunterftützung verfchieden.

Bekanntlich ift

$$\sin \alpha = \sin (2\pi + \alpha) = \sin (2 n \pi + \alpha) \text{ und } \cos \alpha = \cos (2\pi + \alpha) = \cos (2 n \pi + \alpha),$$

worin n eine beliebige ganze Zahl oder Null bedeutet, alfo gleich $0, 1, 2, 3 \ldots$ gefetzt werden kann. Es ift alfo auch

$$\sin a x = \sin (a x + 2\pi) = \sin \left[a \left(x + \frac{2\pi}{a} \right) \right]$$

und

$$\cos a x = \cos (a x + 2\pi) = \cos \left[a \left(x + \frac{2\pi}{a} \right) \right].$$

Die Gleichung 117 kann daher auch gefchrieben werden:

$$y = y_0 + A \sin \left[a \left(x + \frac{2\pi}{a} \right) \right] + B \cos \left[a \left(x + \frac{2\pi}{a} \right) \right] \quad \ldots \quad 118.$$

Man erhält fonach gleich grofse Werthe für y, wenn man x und wenn man $x + \frac{2\pi}{a}$ einfetzt, d. h. die Ordinaten je zweier Punkte, deren Abfciffen um $\frac{2\pi}{a}$ von einander verfchieden find, haben gleiche Werthe. Die elaftifche Linie ift demnach eine Wellenlinie; die Wellenlänge ift

$$\lambda = \frac{2\pi}{a}, \quad \ldots\ldots \quad 119.$$

und, da nach Gleichung 115: $a = \sqrt{\frac{P}{E\mathfrak{J}}}$ ift,

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{E\mathfrak{J}}{P}} \quad \ldots\ldots \quad 120.$$

Aus diefer Gleichung kann man, falls E, $\mathfrak{J}$ und P gegeben find, die Wellenlänge berechnen. Ift dagegen λ gegeben, fo kann man aus Gleichung 120 diejenige Kraft P berechnen, welche die Durchbiegungen y erzeugen kann. Die Gröfse von P folgt aus Gleichung 120 zu:

$$P = \frac{4\pi^2 E\mathfrak{J}}{\lambda^2} \quad \ldots\ldots \quad 121.$$

Noch auf eine wichtige Eigenthümlichkeit der allgemeinen Gleichung 116 ift hinzuweifen. Diefelbe bleibt giltig, wenn man beiderfeits mit der beliebigen Zahl m multiplicirt; fie heifst alsdann:

$$m \frac{d^2 y}{d x^2} = m a^2 (y_0 - y) = a^2 (m y_0 - m y).$$

Es fei $m y_0 = \eta_0$ und $m y = \eta$; alsdann ift auch $m \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d^2 \eta}{d x^2}$, alfo

$$\frac{d^2 \eta}{d x^2} = a^2 (\eta_0 - \eta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 122.$$

Die Gleichung 116 gilt daher für beliebig grofse Werthe von y. Sind alfo unter der Einwirkung einer Kraft P die Durchbiegungen y möglich, fo find auch m-mal fo grofse, d. h. beliebig grofse Durchbiegungen möglich, alfo auch fo grofse, dafs der Stab zerknickt wird.

Der Werth von P in Gleichung 121, welcher die Durchbiegungen y erzeugen kann, kann alfo auch den Stab zerknicken.

Bei der vorftehenden Ableitung ift angenommen worden, dafs die Ausbiegung in der XY-Ebene erfolge; diefelbe kann aber auch in der fenkrecht zu erfterer ftehenden XZ-Ebene ftattfinden, welche die zweiten Hauptaxen der Querfchnitte enthält. Die Entwickelung für diefen Fall bleibt genau diefelbe, wie die obige, und man erhält für P denfelben Ausdruck, wie dort; nur ift alsdann unter $\mathcal{J}$ das Trägheitsmoment des Querfchnittes, bezogen auf die zur XZ-Ebene fenkrechte Schwerpunktsaxe, zu verftehen, welche Axe parallel zur Y-Axe ift. Nennen wir daffelbe $\mathcal{J}_1$, die entfprechenden Werthe von P und λ aber P_1 und λ_1, fo ift

$$P_1 = \frac{4 \pi^2 E \mathcal{J}_1}{\lambda_1^{\,2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 123.$$

Ein Ausbiegen des Stabes kann nun fowohl in der XY-Ebene, wie in der XZ-Ebene ftattfinden; die wirkliche dem Stabe zuzumuthende Belaftung darf den Grenzwerth nicht erreichen. Die Gleichungen 121 u. 123 geben zwei Grenzwerthe, und naturgemäfs ift der kleinere von beiden als mafsgebend einzuführen. Nimmt man in beiden Richtungen gleiche λ an, fo unterfcheiden fich beide Grenzwerthe nur durch die Werthe der Trägheitsmomente. In den Ausdruck für P ift demnach von den beiden Hauptträgheitsmomenten das kleinere einzufetzen.

Wenn die Ausbiegung nach allen Richtungen möglich ift, fo nimmt man an, dafs diefelbe fenkrecht zu derjenigen Hauptaxe erfolgt, welcher das kleinere Hauptträgheitsmoment entfpricht; denn diefes ift nach Art. 62 (S. 41) das kleinfte der für alle Schweraxen möglichen Trägheitsmomente.

Für die weiteren Betrachtungen find die verfchiedenen möglichen Fälle in das Auge zu faffen.

135. Einfeitig eingefpannter Stab.

α) Einfeitig eingefpannter, an einem Ende in der Richtung der Axe belafteter Stab (Fig. 137). Aus der allgemeinen Gleichung 117 für die elaftifche Linie:

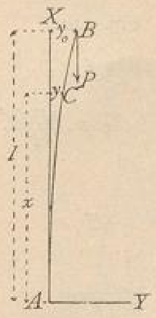
$$y = y_0 + A \sin a x + B \cos a x$$

folgt

$$\frac{d y}{d x} = A a \cos a x - B a \sin a x \quad \ldots \ldots \ldots \quad 124.$$

Die Conftanten A und B werden aus den befonderen Bedingungen für diefen Fall beftimmt.

Fig. 137.



Für $x = 0$ iſt $\frac{dy}{dx} = 0$, weil der Stab an dieſer Stelle wegen der Einſpannung ſtets die Richtung der X-Axe hat; demnach iſt in Gleichung 124

$$A\,a = 0,$$

oder, da a nicht gleich Null iſt, $A = 0$. Eben ſo iſt für $x = 0$ auch $y = 0$, daher in Gleichung 117: $0 = y_0 + B$ oder $B = -y_0$. Sonach lautet die Gleichung der elaſtiſchen Linie für dieſen Fall:

$$y = y_0 - y_0 \cos a\,x = y_0\,(1 - \cos a\,x) \quad . \quad . \quad . \quad 125.$$

Für $x = l$ wird $y = y_0$; demnach $y_0 = y_0\,(1 - \cos a\,l)$. Dieſe Gleichung kann nur beſtehen, wenn

$$\cos a\,l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 126.$$

iſt. Soll alſo der Stab unter Einwirkung der Kraft P ſich ſo durchbiegen, wie Fig. 137 zeigt, alſo im Punkte C die Ordinate y, im Endpunkte die Ordinate y_0 haben können, ſo muſs $\cos a\,l = 0$ ſein; es muſs alſo

$$a\,l = 90^0, \text{ bezw. } 270^0, \text{ bezw. } 450^0 \text{ u. ſ. w.},$$

oder allgemein

$$a\,l = \frac{\pi}{2}\,(2\,n + 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 127.$$

ſein, worin n die Werthe 0, 1, 2, 3 ... annehmen kann. Daraus folgt auch der Werth von P, welcher den Stab in der angegebenen Weiſe biegen, alſo nach den Erklärungen in Art. 134 (S. 122) auch zerknicken kann. Für dieſen Fall iſt nach Gleichung 127: $a = \frac{\pi}{2\,l}\,(2\,n + 1)$, und,

Fig. 138.

da $a = \sqrt{\frac{P}{E\mathfrak{J}}}$ iſt, $\sqrt{\frac{P}{E\mathfrak{J}}} = \frac{\pi}{2\,l}\,(2\,n + 1)$; alſo

$$P = \frac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{4\,l^2}\,(2\,n + 1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 128.$$

Die zugehörige Wellenlänge λ folgt aus Gleichung 119. Es iſt

$$\lambda = \frac{2\,\pi}{a} = \frac{l}{2\,n + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 129.$$

Die beiden Gleichungen geben Aufſchluſs über die Gröſse der Grenzwerthe P, welche bei den verſchiedenen Anordnungen des eingeſpannten Stabes einzuführen ſind.

Bei dem in Fig. 137 u. 138 vorgeführten Falle iſt die ganze Wellenlänge λ viermal ſo groſs, als die freie Länge l, d. h. es iſt $\lambda = 4\,l$; demnach folgt für dieſen Fall aus der Gleichung 129: $n = 0$, und damit aus Gleichung 128

$$P = \frac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{4\,l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 130.$$

Wird ein Punkt E im Abſtande $\frac{l}{3}$ vom Einſpannungspunkte feſt gelegt, ſo muſs die Formänderung ſo erfolgen, daſs $l = \frac{3}{4}\,\lambda$ (Fig. 140) wird; dafür folgt aus

Gleichung 129: $\lambda = \frac{3\lambda}{2n+1}$ die Gröfse $n = 1$, ferner aus Gleichung 128 als zerknickende Kraft

$$P = \frac{9 E \mathfrak{J} \pi^2}{4 l^2} \quad . \quad . \quad . \quad 131.$$

Werden endlich zwei Punkte E und F in den Abftänden $\frac{l}{5}$ und $\frac{3}{5} l$ vom Einfpannungspunkte feft gehalten (Fig. 139), fo wird $\lambda = \frac{4}{5} l$ und aus Gleichung 129: $n = 2$; alsdann ift die zerknickende Kraft

Fig. 139.

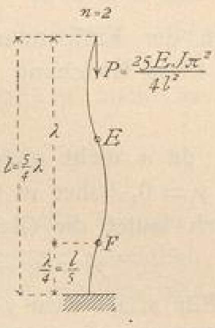
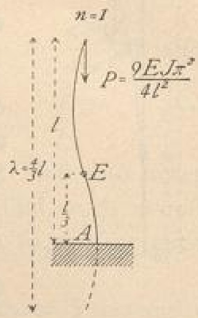


Fig. 140.



$$P = \frac{25}{4} \frac{E \mathfrak{J} \pi^2}{l^2}.$$

Man fieht, wie wefentlich der Grenzwerth durch angemeffene Conftruction erhöht werden kann.

136. Stab mit freien Enden.

β) Stab mit beiderfeits frei drehbaren Enden (Fig. 141). Die fymmetrifche Belaftung des Stabes wird zur Folge haben, dafs beide Stabhälften, oberhalb und unterhalb der Stabmitte, fich genau gleich verhalten; man kann demnach diefen Fall auf den vorhergehenden dadurch zurückführen, dafs man den Anfangspunkt des Coordinatenfyftems in die Stabmitte legt. Jede Hälfte verhält fich dann genau eben fo, wie der Stab im vorigen Artikel; die zerknickende Kraft P, d. h. der Grenzwerth von P, ift demnach aus der Gleichung 128 zu entnehmen, jedoch mit der Aenderung, dafs ftatt des dortigen l hier $\frac{l}{2}$ einzufetzen ift, weil die dort mit l bezeichnete Länge hier nur $\frac{l}{2}$ beträgt.

Fig. 141.

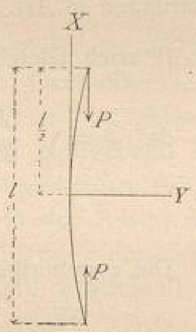
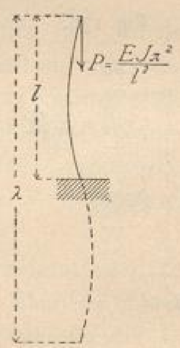


Fig. 142.



Für den vorliegenden Fall ift alfo

$$P = \frac{E \mathfrak{J} \pi^2 (2n+1)^2}{4 \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{E \mathfrak{J} \pi^2}{l^2} (2n+1)^2$$

und

$$\lambda = \frac{4 \frac{l}{2}}{2n+1} = \frac{2l}{2n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 132.$$

Bei dem in Fig. 142 dargeftellten Falle ift $\lambda = 2l$, d. h. $n = 0$, mithin

$$P = \frac{E \mathfrak{J} \pi^2}{l^2}.$$

Wird ein Punkt E in der Mitte des Stabes feft gehalten, fo findet die Durch-

Fig. 143.

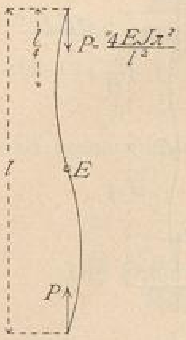
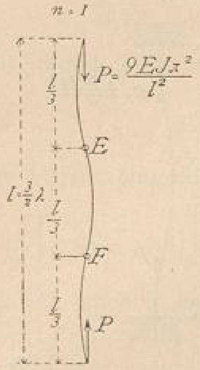


Fig. 144.



biegung nach Fig. 143 fo ftatt, dafs $l = \lambda$, alfo $n = \frac{1}{2}$ wird; alsdann hat P den Werth:

$$P = \frac{4\, E\, \mathfrak{J}\, \pi^2}{l^2}.$$

Sind endlich zwei Punkte E und F in den Abftänden $\frac{l}{3}$ von den Endpunkten feft gehalten, fo dafs die Formänderung nach Fig. 144 eintreten mufs, fo wird $l = \frac{3}{2}\lambda$, alfo $n = 1$ und

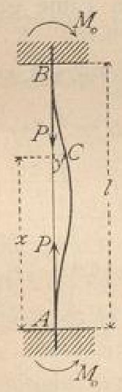
$$P = \frac{9\, E\, \mathfrak{J}\, \pi^2}{l^2}.$$

Die Formänderung kann auch unter Beibehaltung der Punkte E, F und der Endpunkte fo eintreten, dafs die Bogenlinien auf diejenige Seite der urfprünglichen Axe fallen, welche der gezeichneten entgegengefetzt ift.

γ) Stab mit eingefpannten Enden (Fig. 145). Beide Endpunkte des Stabes verbleiben in Folge der Einfpannung in der Lothrechten der Axe XX; die Tangente an die Axe in diefen Punkten, d. h. die Axenrichtung, kann fich nicht verändern. An jedem Einfpannungspunkte mufs demnach ein Kräftepaar wirken, deffen Moment ftets genügend grofs ift, um den Stab in der urfprünglichen Richtung zu erhalten; diefes Moment möge M_0 genannt werden. Für einen beliebigen Punkt C mit der Abfciffe x ift das Biegungsmoment 137. Stab mit eingefpannten Enden.

$$M = M_0 - P y = \left(\frac{M_0}{P} - y\right) P.$$

Fig. 145.



Demnach lautet die Differentialgleichung der elaftifchen Linie hier:

$$E\, \mathfrak{J}\, \frac{d^2 y}{d x^2} = P\left(\frac{M_0}{P} - y\right) \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P}{E\, \mathfrak{J}}\left(\frac{M_0}{P} - y\right).$$

Abkürzungsweife werde wieder $\frac{P}{E\, \mathfrak{J}} = a^2$ gefetzt; alsdann ift

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a^2\left(\frac{M_0}{P} - y\right).$$

Als Gleichung der elaftifchen Linie ergiebt fich

$$y = \frac{M_0}{P} + A \sin a x + B \cos a x; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 133.$$

ferner

$$\frac{d y}{d x} = A a \cos a x - B a \sin a x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 134.$$

Die Conftanten A und B ergeben fich in folgender Weife. Für $x = 0$ ift $y = 0$, demnach in Gleichung 133: $0 = \frac{M_0}{P} + B$ und $B = -\frac{M_0}{P}$. Für $x = 0$ wird $\frac{d y}{d x} = 0$, folglich in Gleichung 134: $0 = A a$ und, da a nicht gleich Null ift, $A = 0$. Die Gleichung der elaftifchen Linie lautet fonach im vorliegenden Falle:

$$y = \frac{M_0}{P} - \frac{M_0}{P} \cos a x = \frac{M_0}{P}(1 - \cos a x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 135.$$

Für $x = l$ ift $y = 0$, demnach

$$0 = \frac{M_0}{P}(1 - \cos a\, l) \text{ oder}$$

$$\cos a\, l = 1.$$

Damit diefe Gleichung erfüllt werde, mufs

$$a\, l = 2\, n\, \pi$$

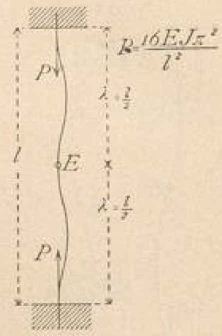
fein, worin n die Werthe $0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots$ haben kann.

Aus Gleichung 119 folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\,\pi\, l}{2\, n\, \pi} = \frac{l}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{n}.$$

Fig. 146.

Fig. 147.



Ferner wird nach Gleichung 119

$$a^2 = \frac{P}{E\,\mathfrak{J}} = \frac{4\,\pi^2}{\lambda^2} \quad \text{und} \quad P = \frac{4\,E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{\lambda^2}.$$

Diefe beiden Gleichungen geben über die Gröfse von P Auffchlufs. Es ift

für $n = 1$:

$$\frac{\lambda}{l} = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = l;$$

$$P = \frac{4\,E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{l^2};$$

für $n = 2$:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{l}{2};$$

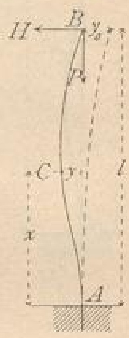
$$P = \frac{16\,E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{l^2}.$$

Der erftere Fall ift durch Fig. 146, der zweite durch Fig. 147 dargeftellt; letzterer tritt ein, wenn der Punkt E in der Stabmitte feft gehalten wird.

138. Stab mit einem eingefpannten und einem geführten Ende.

δ) Stab mit einem eingefpannten und einem in der Lothrechten geführten Ende (Fig. 148). Wenn der Punkt B nicht in der lothrechten Linie geführt wäre, würde er etwa die punktirte Lage eingenommen haben; die Führung mufs alfo durch eine wagrechte Kraft H verurfacht werden, welche ftets genügend grofs ift, um ein Ausweichen von B zu verhüten. Diefe Kraft H ift ihrer Gröfse nach nicht bekannt.

Fig. 148.



Das Biegungsmoment für irgend einen Punkt C des Stabes mit der Abfciffe x ift nun

$$M = H(l - x) - P\,y = P\left[\frac{H}{P}(l - x) - y\right],$$

und die Differentialgleichung der elaftifchen Linie (fiehe Gleichung 100)

$$E\,\mathfrak{J}\,\frac{d^2 y}{d\,x^2} = P\left[\frac{H}{P}(l - x) - y\right]$$

oder

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} = \frac{P}{E\,\mathfrak{J}}\left[\frac{H}{P}(l - x) - y\right] \quad \ldots\ldots\ 136.$$

Man fetzt, um diefe Gleichung aufzulöfen, $\frac{d^2 y}{d\,x^2} = z$; wieder fei abkürzungsweife $\frac{P}{E\,\mathfrak{J}} = a^2$; alsdann ift

$$z = a^2\left[\frac{H}{P}(l - x) - y\right] \quad \text{und} \quad \frac{d\,z}{d\,x} = a^2\left(-\frac{H}{P} - \frac{d\,y}{d\,x}\right);$$

ferner

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = - a^2 \frac{d^2 y}{d x^2} = - a^2 z.$$

Die Auflöfung diefer Differentialgleichung ergiebt wiederum genau, wie in Art. 134 (S. 123)

$$z = A \sin a x + B \cos a x, \quad \ldots \quad 137.$$

und wenn für z der Werth eingeführt wird,

$$a^2 \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right] = A \sin a x + B \cos a x \quad \ldots \quad 138.$$

Die Differentiation nach x ergiebt

$$- a^2 \left(\frac{H}{P} + \frac{d y}{d x} \right) = A a \cos a x - B a \sin a x \quad \ldots \quad 139.$$

Aus den beiden Gleichungen 138 u. 139 ergeben fich die Werthe der Conftanten A und B, wie folgt.

Für $x = 0$ ift $y = 0$, alfo nach Gleichung 138: $\frac{a^2 H}{P} l = B$; für $x = 0$ ift $\frac{d y}{d x} = 0$, alfo nach Gleichung 139: $-\frac{a^2 H}{P} = A a$ und $-\frac{a H}{P} = A$. Endlich ift für $x = l$ auch $y = 0$, weil der Endpunkt des Stabes in der Lothrechten geführt wird, alfo nach Gleichung 138

$$0 = A \sin (a l) + B \cos (a l), \text{ woraus } \operatorname{tg} a l = - \frac{B}{A}$$

folgt, und wenn für B und A die foeben gefundenen Werthe eingefetzt werden,

$$\operatorname{tg} a l = a l \quad \ldots \quad 140.$$

Diefe Beziehung findet ftatt für $a l = 0$, aufserdem aber auch für den Winkel $257° 27' 12''$; für diefen Winkel ift $\operatorname{tg} a l = a l = 4{,}4934$, alfo $a = \frac{4{,}4934}{l}$ und da $a^2 = \frac{P}{E \mathfrak{J}}$ ift, fo wird

$$P = \frac{E \mathfrak{J} (4{,}4934)^2}{l^2} = 20{,}19 \frac{E \mathfrak{J}}{l^2} \quad \ldots \quad 141.$$

Dies ift der Werth von P, für welchen Gleichung 140 erfüllt ift und einen Sinn hat; der Werth $a l = 0$ ift nicht zu verwerthen. Diefes P vermag fonach die in Fig. 148 gezeichnete Formänderung hervorzurufen, alfo nach Früherem auch den Stab zu zerknicken.

In Art. 135 bis 138 find diejenigen Werthe der zerknickenden Kraft entwickelt worden, welche für die Praxis hauptfächlich von Bedeutung find. Nachftehend find diefelben in Fig. 149 bis 152 überfichtlich zufammengeftellt, wobei überall der Stab auf feine ganze Länge frei angenommen ift; der Werth von P im vierten Falle ift des bequemen Vergleiches wegen ebenfalls als Product mit dem Factor $\frac{E \mathfrak{J} \pi^2}{l^2}$ dargeftellt. 139. Zufammenftellung.

Die Tragfähigheit der Stäbe verhält fich demnach

in den Fällen	1	2	4	3
wie	$\frac{1}{4}$:	1 :	2,048 :	4.

Fig. 149.

Fall 1.

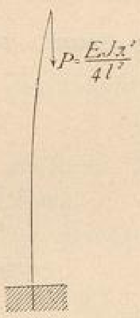


Fig. 150.

Fall 2.

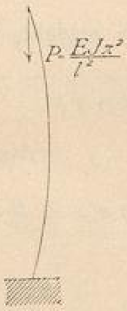


Fig. 151.

Fall 3.

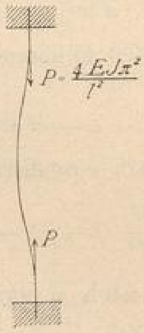
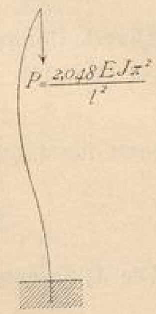


Fig. 152.

Fall 4.



Durch entsprechende Endanordnung würde man also die Tragfähigkeit des Stabes versechzehnfachen können. Die angegebenen Kräfte sind thatsächlich im Stande, den Stab zu zerknicken, und desshalb sind Sicherheits-Coefficienten einzuführen.

2) Querschnittsermittelung bei centrischer Druckbelastung.

140. Zulässige Beanspruchung.

Die unter 1 entwickelten Formeln geben die Grösse derjenigen Kraft P an, welche im Stande ist, den Stab oder die Stütze zu zerknicken. Die dem Stabe wirklich zuzumuthende Last darf naturgemäss diesen Werth niemals erreichen; sie darf nur einen Bruchtheil des ermittelten Knickwerthes betragen. Versteht man unter s den sog. Sicherheits-Coefficienten, unter C einen von der Endbefestigung des Stabes abhängigen Coefficienten, so ist die Kraft, welche mit Rücksicht auf die Zerknickungsgefahr auf den Stab wirken darf,

$$P = \frac{C E \mathfrak{J}}{s\,l^2} \qquad \text{142.}$$

Dieser Werth ist aber nicht ohne Weiteres für alle Fälle anwendbar. Wenn die Stablänge l, also auch die im Nenner vorkommende Grösse l^2, sehr klein ist, so ergeben sich für P sehr grosse Werthe, grössere Werthe, als die einfache Druckbeanspruchung des Stabes gestattet. Wird die zulässige Druckbeanspruchung für die Flächeneinheit des Querschnittes mit K, die Querschnittsfläche mit F bezeichnet, so darf höchstens sein

$$P = F K \qquad \text{143.}$$

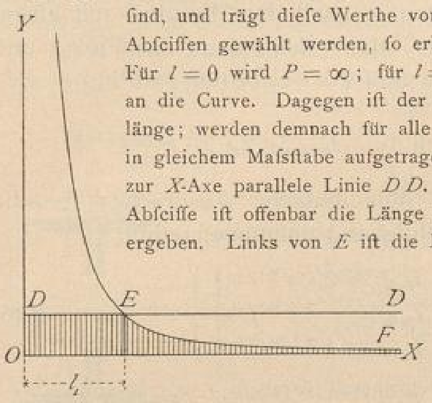
Grösser, als der Werth in Gleichung 143 ist, darf P mit Rücksicht auf die zulässige Druckbeanspruchung nicht werden; grösser, als der Werth in Gleichung 142 ist, darf P der Zerknickungsgefahr halber nicht werden; desshalb ist stets der kleinere dieser beiden Werthe für diejenige Belastungsgrösse massgebend, welche dem Stabe zugemuthet werden darf. Bei grosser Stablänge l ergiebt die Gleichung 142, bei geringer Stablänge l die Gleichung 143 kleinere Werthe für P. Der Grenzwerth von l, etwa l_1, wird derjenige sein, für welchen aus beiden Gleichungen derselbe Werth von P folgt. Dieser Grenzwerth ergiebt sich durch Gleichsetzung der beiden Werthe von P in den Ausdrücken 142 u. 143 zu

$$l_1 = \sqrt{C}\,\sqrt{\frac{E}{K s}}\,\sqrt{\frac{\mathfrak{J}}{F}} \qquad \text{144.}$$

Zerknickungsgefahr tritt erſt auf, wenn $l > l_1$ iſt; demnach iſt, falls die Stablänge kleiner als l_1 iſt, die Gleichung 143, falls ſie gröſser als l_1 iſt, die Gleichung 142 anzuwenden.

Klaren Einblick in die hier maſsgebenden Verhältniſſe verſchafft die graphiſche Darſtellung der Veränderlichkeit von P in Fig. 153. Ermittelt man diejenigen Werthe von P, welche ein Stab bei verſchiedenen Längen mit Rückſicht auf die Zerknickungsgefahr ertragen kann, falls Material, Querſchnittsform und Querſchnittsgröſse, ſo wie Befeſtigungsweiſe der Enden ſtets dieſelben ſind, und trägt dieſe Werthe von P als Ordinaten auf, während die zugehörigen Längen als Abſciſſen gewählt werden, ſo erhält man eine Curve, offenbar die Curve der Gleichung 142. Für $l = 0$ wird $P = \infty$; für $l = \infty$ wird $P = 0$; die Y- und X-Axe ſind alſo Aſymptoten an die Curve. Dagegen iſt der Werth für P aus Gleichung 143 unabhängig von der Stablänge; werden demnach für alle möglichen Längen dieſe Werthe ermittelt und als Ordinaten in gleichem Maſsſtabe aufgetragen, wie die Werthe aus Gleichung 142, ſo ergiebt ſich eine zur X-Axe parallele Linie DD. Im Punkte E ſchneiden ſich beide Linien; die zugehörige Abſciſſe iſt offenbar die Länge l_1, für welche beide Gleichungen denſelben Werth von P ergeben. Links von E iſt die Linie DE, rechts von E die Curve EF maſsgebend. Die ſchraffirte Fläche deutet dies an.

Fig. 153.



Wenn, wie gewöhnlich, die Laſt P und die Länge l gegeben ſind, ſo handelt es ſich um die Ermittelung von Form und Gröſse des Stabquerſchnittes. Für dieſe Beſtimmung ſtehen die beiden Gleichungen 142 u. 143 zur Verfügung. F und $\mathfrak{J}$ müſſen wenigſtens die aus dieſen Gleichungen ſich ergebenden Werthe haben, ſo daſs ſich die Bedingungen für die Querſchnittsbildung ergeben zu 141. Querſchnitts-ermittelung.

$$F \geq \frac{P}{K} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_{min} \geq \frac{P s l^2}{C E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 145.$$

Dabei iſt zu bemerken, daſs, wenn Ausbiegen nach allen Richtungen möglich iſt, das kleinſte für eine Schwerpunktsaxe des Querſchnittes ſich ergebende Trägheitsmoment zum mindeſten die verlangte Gröſse haben muſs; deſshalb wurde in Gleichung 145: $\mathfrak{J}_{min}$ geſetzt. Iſt Ausbiegen nur nach beſtimmten Richtungen möglich, ſo muſs das kleinſte in Betracht kommende Schweraxen-Trägheitsmoment die berechnete Gröſse haben.

Die in obigem Ausdruck vorkommenden Conſtanten C, E, K und s bedeuten beſtimmte Zahlenwerthe; für die in Fig. 149 bis 152 dargeſtellten vier Fälle iſt C:

Fall 1:	Fall 2:	Fall 3:	Fall 4:
$C = \frac{\pi^2}{4}$	$= \pi^2$	$= 4\,\pi^2$	$= 2\,\pi^2$ (genügend genau)
$\sqrt{C} = 1{,}57$	$= 3{,}14$	$= 6{,}28$	$= 4{,}44$.

Die Coefficienten E, K und s haben für alle Stäbe aus demſelben Material gleiche Werthe; wird als Flächeneinheit das Quadrat-Centimeter, als Krafteinheit das Kilogramm angenommen, ſo kann man für K, E und s nachſtehende Werthe ſetzen:

für Schweiſseiſen und Fluſseiſen:	für Guſseiſen:	für Holz:
$E = 2\,000\,000$	1 000 000	120 000 kg für 1 qcm
$K = 700$	500	65 » »
$s = 5$	8	10

Alsdann wird auch P in Kilogr. eingeführt werden müffen; F wird in Quadr.-Centim. und $\mathfrak{J}$ in cm^4 erhalten. Die Formel ergiebt für Fall 2 und Schweifseifen

$$\mathfrak{J}_{min} \geqq \frac{P^{kg} \cdot 5\, l^{cm\,2}}{\pi^2 \cdot 2\,000\,000}.$$

Wefentlich bequemer werden die Ausdrücke für $\mathfrak{J}_{min}$, wenn man P und E in Tonnen, l in Met. einführt und $\pi^2 = 10$ fetzt; letzteres ift nicht ganz genau, aber der Fehler kommt gar nicht in Betracht, da man je nach dem Bauftoff mit einem Sicherheitscoefficienten 5, 8, bezw. 10 arbeitet. Man erhält dann für Fall 2 und Schweifseifen, da $P^{kg} = 1000\, P^t$, $l^{cm} = 100\, l^m$ und $l^{cm\,2} = 10\,000\, l^{m\,2}$ ift,

$$\mathfrak{J}_{min} \geqq \frac{1000\, P^t \cdot 5 \cdot 10000 \cdot l^{m\,2}}{10 \cdot 2\,000\,000}, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{J}_{min} \geqq 2{,}5\; P^t\, l^{2\,m}.$$

Eben fo ergeben fich für Holz und Gufseifen fehr einfache Ausdrücke; für die Hauptftoffe find diefe Ausdrücke für Fall 2 nachftehend zufammengeftellt:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für Schweifs- und Flufseifen} & \mathfrak{J}_{min} \geqq 2{,}5\; P^t\, l^{m\,2} \\ \text{für Gufseifen} & \mathfrak{J}_{min} \geqq 8\; P^t\, l^{m\,2} \\ \text{für Holz} & \mathfrak{J}_{min} \geqq 83\; P^t\, l^{m\,2} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 146.$$

Die Zufammenftellung für alle vier Fälle ergiebt die nachftehende Tabelle. $\mathfrak{J}_{min}$ mufs fein $\geqq$:

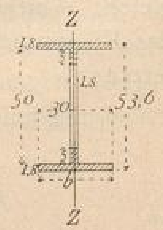
Conftructionsmaterial	Fall 1 (Fig. 149)	Fall 2 (Fig. 150)	Fall 3 (Fig. 151)	Fall 4 (Fig. 152)
Schweifseifen und Flufseifen .	10	2,5	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{4}$
Gufseifen	32	8	2	4
Holz	332	83	20	41
	P Tonnen $\times$ l (Meter)^2			

Je mehr fich der Flächeninhalt des Querfchnittes, welcher dem nothwendigen Trägheitsmomente entfpricht, dem zuläffigen Kleinftwerth $\frac{P}{K}$ nähert, defto zweckmäfsiger ift die Conftruction. Man nimmt gewöhnlich zunächft einen Querfchnitt an, für welchen $F = \frac{P}{K}$ ftattfindet und ermittelt das Trägheitsmoment deffelben. Genügt letzteres nicht, fo ift die Querfchnittsfläche entfprechend zu vergröfsern, bis das verlangte $\mathfrak{J}$ vorhanden ift. Diefes Verfahren foll an einigen Beifpielen gezeigt werden.

Beifpiele. α) In einer gufseifernen Stütze fei der gröfste Druck $P = 50\,000^{kg} = 50$ Tonnen; die Länge der Stütze fei $l = 4{,}5^m$; die Enden follen als bewegliche vorausgefetzt werden; die Querfchnittsform fei die neben ftehende (Fig. 154); die Querfchnittsmafse find zu ermitteln.

Für einfachen Druck mufs $F = \frac{50\,000}{500} = 100^{qcm}$ und nach Gleichung 146 mufs $\mathfrak{J}_{min} = 8 \cdot 50 \cdot 4{,}5^2 = 8100$ fein.

Fig. 154.



Die Höhe des Querfchnittes fei durch bauliche Rückfichten zu $53{,}6^{cm}$ vorgefchrieben, die Stärke des Steges und der Gurte fei $1{,}8^{cm}$; alsdann findet, wenigftens bei nicht aufsergewöhnlich grofser Breite der Gurtungen, das Minimal-Trägheitsmoment für die Axe ZZ ftatt, und es ift

$$\mathfrak{J}z = \frac{2 \cdot 1{,}8 \cdot b^3}{12} + \frac{50 \cdot 1{,}8^3}{12} = 0{,}3\, b^3 + 24{,}3.$$

Hiermit ift das erforderliche Trägheitsmoment als Function von b dargeftellt, und da nach Obigem auch

$$\mathfrak{J}_{min} = 8100$$

fein mufs, fo lautet die Bedingungsgleichung für b:

$$0{,}3\, b^3 + 24{,}3 = 8100,$$

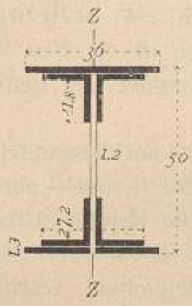
woraus fich für $b = \infty$ 30 cm ergiebt.

Die Querfchnittsfläche wird $F = 2 \cdot 1{,}8 \cdot 30 + 50 \cdot 1{,}8 = 198$ qcm, während nur 100 qcm Querfchnittsfläche nöthig find. Daraus folgt, dafs unbedenklich ein Theil des Steges auf einzelne Theile der Höhe fortfallen kann; alsdann bleibt als Querfchnittsfläche der fchraffirte Theil übrig, und zwar in diefem Falle $F = 2 \cdot 30 \cdot 1{,}8 + 2 \cdot 5 \cdot 1{,}8 = 126$ qcm, und diefe Querfchnittsgröfse genügt. Auch das Trägheitsmoment wird durch Fortfall des Steges nur unwefentlich beeinflufst.

β) In einem fchmiedeeifernen Stabe herrfcht ein Druck $P = 130\,000$ kg $= 130$ Tonnen; die Stablänge betrage 6,0 m, der Stab fei beiderfeits eingefpannt.

Nach obiger Tabelle mufs

Fig. 155.



$$\mathfrak{J} = \frac{5}{8} \cdot 130 \cdot 6^2 = 2925 \text{ cm}^4,$$

ferner $F = \dfrac{130\,000}{700} = 196$ qcm fein.

Der Querfchnitt in Fig. 155 wurde vorläufig, wie folgt, zufammengefetzt:

4 Winkeleifen zu $13 \times 13 \times 1{,}2$ cm $= 29{,}8$ qcm	$= 119{,}2$ qcm
1 obere Deckplatte $36 \times 1{,}3$ cm	$= 46{,}8$ »
1 untere Deckplatte $34{,}8 \times 1{,}3$ cm	$= 45{,}2$ »
Summe des Brutto-Querfchnittes	211,2 qcm
ab für 4 Nietlöcher $4 \times 2{,}5 \times 2{,}3$ cm	$= 23{,}0$ »
bleibt Netto-Querfchnitt	188,2 qcm,

der allerdings etwas kleiner als F ift, aber genügen dürfte.

Für diefen Querfchnitt findet $\mathfrak{J}_{min}$ für die ZZ-Axe ftatt, und es ift

$$\mathfrak{J}z = \frac{1}{12}\left[2 \cdot 1{,}3 \cdot 36^3 + 2 \cdot 1{,}2 \cdot 27{,}2^3 + 2 \cdot 11{,}8 \cdot 3{,}6^3 - (2 \cdot 13 + 1{,}3)\, 1{,}2^3\right] - 4 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}3 \cdot 7^2 = 13094.$$

Das Trägheitsmoment ift alfo bei ausreichender Querfchnittsfläche wefentlich gröfser, als es zu fein braucht, der Querfchnitt fonach genügend.

Sehr einfach geftaltet fich die Rechnung, wenn man den Querfchnitt aus den »Deutfchen Normal-Profilen für Walzeifen« bildet, für welche die Minimal-Trägheitsmomente im vorhergehenden Halbband diefes »Handbuches« (Abth. I: Die Technik der wichtigeren Bauftoffe) angegeben find. Man berechnet das nothwendige Trägheitsmoment und die nöthige Querfchnittsfläche aus den Ausdrücken 145 und fucht aus den Tabellen ein Profileifen, bezw. einen aus Profileifen zufammengefetzten Querfchnitt, deffen Minimal-Trägheitsmoment und Querfchnittsfläche den verlangten zum mindeften gleich find.

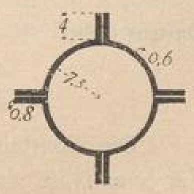
Beifpiel. In einem fchmiedeeifernen Stabe herrfche ein Druck $P = 18\,000$ kg $= 18$ Tonnen; die Stablänge fei $l = 5{,}0$ m; die Stabenden feien drehbar; mithin ift Fall 2 zu Grunde zu legen.

Nach Gleichung 146 mufs $\mathfrak{J} = 2{,}5 \cdot 18 \cdot 5^2 = 1125$ cm⁴ und nach Gleichung 143: $F = \dfrac{18\,000}{700} = 26$ qcm fein.

Soll der Stab aus einem I-förmigen Walzbalken gebildet werden, fo ift das Profil Nr. 38 (fiehe die angezogenen Tabellen) zu wählen; bei demfelben ift $\mathfrak{J}_{min} = 1138$, F (nach Abzug für Niete) $= 107{,}5 - 4 \cdot 2 \cdot 2{,}05 = 91{,}1$ qcm und das Gewicht für 1 m 83,9 kg.

Wollte man ftatt deffen einen aus 4 kreuzförmig geftellten Winkeleifen gebildeten Querfchnitt verwenden, fo könnte man 4 Winkeleifen Nr. 9 (fiehe die angezogenen Tabellen) zu $9 \times 9 \times 1{,}3$ cm verwenden, deren $\mathfrak{J} = 1284$ ift, alfo genügt; dabei ift der Netto-Querfchnitt $F = 4 \cdot 21{,}7 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1{,}3$ (für Niete) $= 76{,}4$ qcm und das Gewicht $4 \cdot 16{,}9$ kg $= 67{,}6$ kg. Zweckmäfsiger ift die Verwendung von 4 Winkeleifen Nr. 10 zu $10 \times 10 \times 1$ cm mit $\mathfrak{J} = 1346$, $F = 4 \cdot 19 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 68$ qcm und einem Gewicht für 1 m von $4 \cdot 14{,}8$ kg $= 59{,}2$ kg.

Fig. 156.



Würde endlich der Querfchnitt aus 4 Quadranteifen (nach Fig. 156) conftruirt, fo wird bei neben ftehendem Querfchnitt (fiehe die angezogenen Tabellen) $\mathfrak{J} = 2046$, $F = 54{,}9 - 4 \cdot 2 \cdot 0{,}8$ (für Niete) $= 48{,}59$ qcm und das Gewicht für das laufende Meter 42,9 kg.

Am ungünſtigſten iſt demnach im vorliegenden Falle das I-Profil mit 83,9 kg Gewicht; günſtiger iſt das kreuzförmige Profil mit 59,2 kg, und am günſtigſten iſt das aus Quadranteiſen zuſammengeſetzte, röhrenförmige Profil mit 42,9 kg Gewicht.

3) Querſchnittsermittelung bei excentriſcher Druckbelaſtung.

142. Zuläſſige Beanſpruchung.

Man iſt neuerdings vielfach beſtrebt geweſen, Gröſse und Form des Querſchnittes auf Knicken axial beanſpruchter Stäbe aus der Bedingung zu beſtimmen, daſs die gröſste, wirklich auftretende Beanſpruchung σ an keiner Stelle die für das Material als zuläſſig erachtete Beanſpruchung überſchreite. Die Spannung σ iſt, ſobald die Kraft für den Querſchnitt ein Moment hat, in hohem Maſse von der Gröſse der Ausbiegung y abhängig; da aber diejenige axial wirkende Kraft, welche überhaupt eine Ausbiegung y hervorrufen kann, nach Obigem auch ein beliebig groſses y und damit auch ein beliebig groſses σ erzeugen kann, ſo iſt σ, eben ſo wie y, bei der oben betrachteten Aufgabe eine unbeſtimmte Gröſse, eignet ſich demnach nicht als Grundlage für die Querſchnittsbeſtimmung.

Man darf weiter nicht erwarten, daſs die Verſuchsergebniſſe mit den theoretiſch entwickelten Werthen der zerknickenden Kraft genau übereinſtimmen; auch eine kleinere Kraft kann bereits Zerknicken herbeiführen, wenn etwa die Kräfte etwas excentriſch wirken oder nicht genau in die Richtung der Stabaxe fallen oder der Bauſtoff des Stabes nicht ganz gleichmäſsig iſt. Allen dieſen Möglichkeiten, welche theoretiſch nicht gut verfolgt werden können, wird am beſten dadurch Rechnung getragen, daſs man einen Sicherheits-Coefficienten n einführt, alſo nur den n-ten Theil derjenigen Kraft auf den Stab wirken läſſt, welche denſelben nach der Formel zerknicken könnte. Es iſt gut, daſs man die Stelle ganz genau kennt, an welcher alle Unſicherheiten zuſammentreffen und dieſe ganz klar bezeichnet.

143. Querſchnitts-ermittelung.

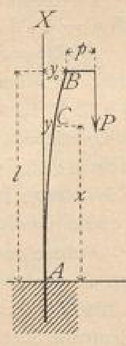
Wenn das Maſs der Excentricität der wirkenden Kräfte bekannt wäre, ſo würde auch eine genaue Berechnung möglich ſein; denn dann hätte der Pfeil einen ganz beſtimmten Werth, und damit würden ſich auch für σ gewiſſe, von der Gröſse der Kraft P abhängige Werthe ergeben. Da unter Umſtänden die Gröſse der Excentricität bekannt iſt, bezw. angenommen werden kann, ſo ſoll die Berechnung hier vorgeführt werden.

Für irgend einen Punkt C des Stabes AB (Fig. 157), welcher urſprünglich mit der Axe AX zuſammenfiel, iſt

$$M = P(p + y_0 - y) = E\mathfrak{J}\frac{d^2 y}{d x^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P}{E\mathfrak{J}}(p + y_0 - y),$$

und wenn wieder, wie oben, abkürzungsweiſe $\frac{P}{E\mathfrak{J}} = a^2$ geſetzt wird,

Fig. 157.



$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a^2 (p + y_0 - y).$$

Die zweimalige Integration dieſer Gleichung ergiebt

$$y = (p + y_0) + A \sin a x + B \cos a x \quad . \quad . \quad . \quad 147.$$

Daraus folgt

$$\frac{d y}{d x} = A a \cos a x - B a \sin a x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 148.$$

Die Conſtanten A und B ergeben ſich folgendermaſsen.

Für $x = 0$ iſt $y = 0$, alſo $0 = p + y_0 + B$ und $B = -(p + y_0)$;

für $x = 0$ ift $\frac{dy}{dx} = 0$, alfo $0 = A a$ und $A = 0$; demnach heifst die Gleichung der elaftifchen Linie:

$$y = (p + y_0)(1 - \cos a x) \quad \ldots \ldots \quad 149.$$

Für $x = l$ ift $y = y_0$, d. h. $y_0 = (p + y_0)(1 - \cos a l)$ oder

$$y_0 = p \frac{1 - \cos a l}{\cos a l} \quad \ldots \ldots \quad 150.$$

y_0 ift alfo eine ganz beftimmte Gröfse. Das gröfste Moment findet am Einfpannungspunkte A ftatt, wo es den Werth

$$P(p + y_0) = P p \left(1 + \frac{1 - \cos a l}{\cos a l}\right) = \frac{P p}{\cos a l}$$

hat. In diefem Querfchnitte wird der gröfste Druck den Werth haben

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{P p r}{\mathcal{J} \cos a l} \quad \ldots \ldots \quad 151.$$

In diefer Gleichung ift r der Abftand des meift gefpannten Querfchnittspunktes von der Axe, $\mathcal{J}$ das in Betracht kommende Trägheitsmoment. Stellt man die Bedingung, dafs σ_{max} höchftens gleich K fein folle, fo ergiebt fich

$$K = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F p r}{\mathcal{J} \cos a l}\right), \quad \ldots \ldots \quad 152.$$

und die zuläffige Belaftung der Stütze vom Querfchnitt F und dem Trägheitsmomente $\mathcal{J}$

$$P = \frac{F K}{1 + \frac{F p r}{\mathcal{J} \cos a l}} \quad \ldots \ldots \quad 153.$$

Da $a = \sqrt{\frac{P}{E \mathcal{J}}}$ eine Gröfse ift, welche fowohl vom Drucke P, wie von der Querfchnittsgeftaltung, alfo von Werthen abhängt, welche meiftens von vornherein nicht gleichzeitig gegeben find, fo kann der Ausdruck für P aus Gleichung 153 nicht in gefchloffener Form entwickelt werden; denn a kommt auch auf der rechten Seite vor. Man wird defshalb zunächft eine angenäherte Rechnung vornehmen, auf welche die genauere zu folgen hat. Aehnlich ift es, wenn P und das Mafs der Excentricität gegeben find und der Querfchnitt gefucht wird. Dann ift aus Gleichung 153, wenn mit R der Trägheitsradius bezeichnet wird, alfo $\mathcal{J} = F R^2$ gefetzt wird,

$$F = \frac{P}{K}\left(1 + \frac{p r}{R^2 \cos a l}\right) \quad \ldots \ldots \quad 154.$$

Die Anwendung diefes Ausdruckes foll an einem einfachen Beifpiele gezeigt werden. 144. Beifpiel.

Die Stütze fei eine Holzftütze von der Länge $l = 5^{m} = 500^{cm}$; der Querfchnitt fei quadratifch und habe die Seitenlänge d; die Excentricität foll fo weit gehen können, dafs die Kraft P ungünftigftenfalls in der Kante des Quadrates angreift. Dann ift

$$p = \frac{d}{2}, \quad F = d^2, \quad r = \frac{d}{2}, \quad \mathcal{J} = F R^2 = \frac{d^4}{12} = d^2 R^2,$$

$$R^2 = \frac{d^2}{12}, \quad E = 120000^{kg}, \quad K = 65^{kg}, \quad p r = \frac{d^2}{4}.$$

Ferner folle eine Kraft $P = 16000^{kg}$ ertragen werden. Es ift alfo

$$a = \sqrt{\frac{P}{E\,\mathcal{J}}} = \sqrt{\frac{16000 \cdot 12}{120000\, d^4}} = \frac{1{,}265}{d^2}, \quad \text{ferner } a\,l = \frac{632{,}5}{d^2}; \quad \text{fonach}$$

$$F = \frac{16000}{65}\left(1 + \frac{d^2 \cdot 12}{4\, d^2 \cos a\, l}\right) = 246\left(1 + \frac{3}{\cos \dfrac{632{,}5}{d^2}}\right).$$

Zunächft werde $d = 25^{cm}$ angenommen; dann wird $F = 246\ (1 + 5{,}66) = 1638^{qcm}$; demnach müffte $d =$ ca. 40^{cm} fein. Wählt man $d = 35^{cm}$, fo wird

$$F = 246\ (1 + 3{,}45) = 1095^{qcm}.$$

Diefer Werth würde einer Seitenlänge $d = 33^{cm}$ entfprechen; 35^{cm} ift alfo ein angemeffener Werth.

4) Empirifche Formeln.

145. Allgemeine Formel.

Der Umftand, dafs man je nach der gröfseren oder geringeren Länge des Stabes mit verfchiedenen Formeln rechnen mufs, ift eine Unbequemlichkeit, der man durch Einführung empirifcher Formeln abzuhelfen geftrebt hat. Eine folche Formel mufs für P bei kleinen Werthen von l nahezu oder genau die für einfachen Druck entwickelte Gleichung 143, dagegen bei grofsen Werthen von l die mit Rückficht auf Zerknicken gefundene Gleichung 142 ergeben. Diefen Anforderungen entfpricht folgende Formel[30]):

$$P = \frac{K\,F\,\mathcal{J}}{\mathcal{J} + \dfrac{K\,s\,F\,l^2}{C\,E}}, \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 155.$$

in welcher alle Buchftaben die früheren Bedeutungen haben.

Für $l = 0$ wird entfprechend der für kurze Stäbe aufgeftellten Gleichung 143 auch hier $P = K\,F$; für den Werth $l = \infty$ mag obiger Formel die Geftalt

$$P = \frac{K\,F}{1 + \dfrac{K\,s\,F\,l^2}{C\,\mathcal{J}\,E}} \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 156.$$

gegeben werden. Ift l fehr grofs, bezw. $= \infty$, fo ift das erfte Glied im Nenner verfchwindend klein gegen das zweite; die Formel lautet alsdann:

$$P = \frac{K\,F}{\dfrac{K\,s\,F\,l^2}{C\,E\,\mathcal{J}}} = \frac{C\,E\,\mathcal{J}}{s\,l^2},$$

demnach übereinftimmend mit der Formel 142 für lange Stäbe. Die Gleichung 155 kann alfo als empirifche Formel angewendet werden und giebt auch ziemlich gut mit den Verfuchen übereinftimmende Werthe. Aus derfelben folgt

$$\frac{P}{K} = \frac{F\,\mathcal{J}}{\mathcal{J} + \dfrac{K\,s}{C\,E}\,F\,l^2},$$

und wenn der nur vom Material des Stabes und der Endbefeftigung abhängige Factor $\dfrac{K\,s}{C\,E} = \alpha$ gefetzt wird,

$$\frac{P}{K} = \frac{F\,\mathcal{J}}{\mathcal{J} + \alpha\,F\,l^2} \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 157.$$

30) Siehe: SCHÄFFER. Beftimmungen der zuläffigen Spannung und der Querfchnitte für Eifenconftructionen. Deutfche Bauz. 1877, S. 498.

$\frac{P}{K}$ ift diejenige Querfchnittsfläche, welche der Stab haben müffte, wenn er einfachen Druck zu erleiden hätte. Wir bezeichnen diefelbe mit f; alsdann ift

$$f = \frac{F\,\mathcal{J}}{\mathcal{J} + \alpha f l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 158.$$

Die Gleichung 158 kann benutzt werden, um die wirklich nöthige Querfchnittsfläche zu berechnen. Denn nach derfelben ift

$$F = \frac{f\,\mathcal{J}}{\mathcal{J} - \alpha f l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 159.$$

Das zur Ermittelung der nothwendigen Querfchnittsform und -Gröfse einzufchlagende Verfahren ift nun folgendes. Der gröfste Druck P, welcher auf den Stab wirken kann, ift bekannt, durch Rechnung oder Zeichnung gefunden; alsdann ift $f = \frac{P}{K}$ ebenfalls leicht zu ermitteln. Man conftruire nun einen diefer Querfchnittsfläche entfprechenden Querfchnitt und ermittele das kleinfte Trägheitsmoment deffelben für eine Schweraxe, alfo $\mathcal{J}$. Bekannt find jetzt die Gröfsen f, $\mathcal{J}$, α und l, und die Gleichung 159 ergiebt nun die dem Querfchnitt wirklich zu gebende Flächengröfse F. Fällt diefelbe gröfser aus, als die angenommene Querfchnittsfläche, fo ift letztere entfprechend zu vergröfsern, das neue Trägheitsmoment einzufetzen, F aus Gleichung 159 aufs Neue zu berechnen und diefes Verfahren fo lange zu wiederholen, bis eine genügende Uebereinftimmung der wirklichen Querfchnittsfläche mit der nöthigen ftattfindet. Dabei hat man fich jedoch vor dem Fehler zu hüten, bei den fpäteren Berechnungen den neuen Werth der Querfchnittsfläche für f einzuführen, da ja f nicht die wirkliche Querfchnittsfläche, fondern den für einen beftimmten Stab unveränderlichen Werth $\frac{P}{K}$ angiebt. Bei einiger Uebung ift es leicht, bereits bei der zweiten Rechnung eine entfprechende Querfchnittsfläche zu finden.

Tabelle für die Werthe von $\alpha = \frac{Ks}{CE}$.

Conftructions-material	Allgemeine Formel	Fall 1: Ein Ende eingefpannt, das andere frei drehbar	Fall 2: Beide Enden frei drehbar	Fall 3: Beide Enden eingefpannt	Fall 4: Ein Ende eingefpannt, das andere lothrecht geführt
Schweifseifen / Flufseifen	$\frac{0{,}00175}{C}$	0,00072	0,00018	0,000045	0,00009
Gufseifen	$\frac{0{,}004}{C}$	0,0016	0,0004	0,0001	0,0002
Holz	$\frac{0{,}0054}{C}$	0,0022	0,00054	0,00013	0,00026

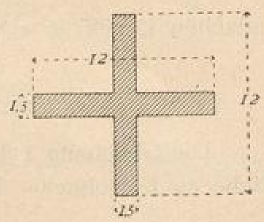
Die Anwendung obiger Formel foll an einigen Beifpielen gezeigt werden. 146 Beispiele.

α) Für einen gufseifernen Stab mit drehbaren Enden und kreuzförmigem Querfchnitt (Fig. 158) fei $P = 4800^{\text{kg}}$ und $l = 200^{\text{cm}}$. Alsdann ift $f = \frac{4800}{500} = 9{,}6^{\text{qcm}}$ und bei vorläufig, wie in Fig. 158 angenommenem Querfchnitt:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{12}\,(1{,}5 \cdot 12^3 + 10{,}5 \cdot 1{,}5^3) = \infty\ 219^{\text{cm}^4}.$$

Ferner ist $\alpha = 0{,}0004$ (vergl. die umstehende Tabelle); mithin müsste

Fig. 158.



$$F = \frac{219 \cdot 9{,}6}{219 - 0{,}0004 \cdot 9{,}6 \cdot 200^2} = 32 \text{ qcm}$$

sein. Der gewählte Querschnitt hat

$$1{,}5 \cdot 2 \cdot 12 - 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 33{,}75 \text{ qcm},$$

ist also etwas grösser, als er zu sein braucht; er empfiehlt sich für die Ausführung.

Die genauere Berechnung nach Formel 145 u. 146 ergiebt auf wenigstens eben so einfachem Wege: es muss $F \geqq 9{,}69$ cm, $\mathcal{J} \geqq 8 \cdot 4{,}8 \cdot 2^2$, d. h. $\mathcal{J} \geqq 153{,}6$ cm⁴ sein. Der gewählte Querschnitt ist also sehr reichlich.

β) Es sei $P = 3300$ kg, $l = 100$ cm; der Stab werde durch ein einfaches gleichschenkeliges Winkeleisen gebildet; der Fall 4 kann angenommen werden. Zunächst ist $f = \frac{3300}{700} = \infty\, 4{,}7$ qcm. Gewählt werde ein Winkeleisen von $5{,}5 \times 5{,}5 \times 0{,}8$ cm; das $\mathcal{J}_{min}$ dieses Winkeleisens ist nach dem Normal-Profilbuch $9{,}38$ cm⁴, ferner $\alpha = 0{,}00009$. Demnach muss

$$F = \frac{4{,}7 \cdot 9{,}38}{9{,}38 - 0{,}00009 \cdot 4{,}7 \cdot 100^2} = 8{,}55 \text{ qcm}$$

sein. Das gewählte Winkeleisen hat eine Querschnittsfläche von $8{,}16$ qcm.

Die genauere Berechnung nach Formel 145 u. 146 erweist, dass

$$\mathcal{J}_{min} \geqq \frac{5}{4} \cdot 3{,}3 \cdot 1^2, \quad \text{also} \quad \mathcal{J}_{min} \geqq 4{,}125 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad F \geqq 4{,}7 \text{ qcm}$$

sein muss. Das Winkeleisen mit $F = 8{,}16$ qcm und $\mathcal{J}_{min} = 9{,}38$ cm⁴ würde demnach reichlich genügen.

γ) In einem Holzstabe mit quadratischem Querschnitt und nicht beweglichen Enden, bei welchem Fall 4 vorausgesetzt werden kann, herrscht ein Druck $P = 9500$ kg; ferner sei $l = 300$ cm. Es ist $F = \frac{9500}{65} = 146$ qcm. Wird vorläufig die Querschnittsseite mit 18 cm gewählt, so ist

$$\mathcal{J} = \frac{18^4}{12} = 8748 \text{ cm}^4, \qquad \alpha = 0{,}00026 \qquad \text{und} \qquad F = \frac{146 \cdot 8748}{8748 - 0{,}00026 \cdot 146 \cdot 300^2} = \infty\, 240 \text{ qcm}.$$

Der angenommene Querschnitt hat $18 \times 18 = 324$ qcm, ist also zu gross.

Wird $h = 17$ cm gewählt, so wird

$$\mathcal{J} = \frac{17^4}{12} = 6960 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad F = \frac{146 \cdot 6960}{6960 - 0{,}00026 \cdot 146 \cdot 300^2} = 286 \text{ qcm};$$

der gewählte Querschnitt hat $17 \times 17 = 289$ qcm, ist also sehr passend.

Die genauere Berechnung ergiebt, dass

$$\mathcal{J}_{min} \geqq 41 \cdot 9{,}5 \cdot 3^2, \quad \text{d. h.} \quad \mathcal{J}_{min} \geqq 3505 \text{ cm}^4$$

sein muss; demnach würde schon ein quadratischer Querschnitt genügen, dessen Seitenlänge d aus der Bedingung folgt:

$$\frac{d^4}{12} = 3505 \quad \text{oder} \quad d = 14{,}32 \text{ cm}.$$

Da dieser Querschnitt ausserdem eine Fläche $d^2 = 204{,}5$ qcm² aufweist, während f nur gleich 146 qcm zu sein braucht, so ist er ausreichend.

Aus vorstehenden Beispielen erhellt zur Genüge, dass das Bedürfniss für empirische Formeln nicht gross ist; die Berechnung nach den genauen Ausdrücken 145 u. 146 ist durchaus nicht schwierig.

147. Tragfähigkeit der Stützen bei erhöhter Temperatur.

Die üblen Erfahrungen, welche man neuerdings bei verschiedenen grossen Bränden mit eisernen Stützen gemacht hat, führten zur Untersuchung der Frage, in welcher Weise die Tragfähigkeit solcher Stützen bei erhöhter Temperatur verändert werde, und zur Aufstellung von Formeln für diese Tragfähigkeit. Die nachstehend aufgeführten Formeln sind von *Möller*[31]) auf Grund von Versuchen unter

[31]) Siehe: Möller, M. u. R. Lühmann. Ueber die Widerstandsfähigkeit auf Druck beanspruchter eiserner Baukonstruktionstheile bei erhöhter Temperatur. Berlin 1888.

folgenden Annahmen aufgeftellt. Die dem Feuer zugewendete Seite der Stütze zeigt fchwache Rothgluth; die andere Seite hat eine bis zu 600 Grad C. geringere Temperatur, welche durch Anfpritzen der Säule mit kaltem Waffer herbeigeführt ift; die Beanfpruchung der Stützen erfolgt um 1 cm excentrifch, zwifchen Gelenken (Fall 2). Die Stütze foll die Laft P noch mit einiger Sicherheit tragen. Die allgemeine Formel, in welcher alle Buchftaben die frühere Bedeutung haben, lautet (vergl. Art. 145, S. 136)

$$P = K F \frac{1}{1 + \alpha \frac{F l^2}{\mathfrak{J}}}.$$

Die Zahlenwerthe K und α ergeben fich aus nachftehenden Formeln:

$$\text{für Schmiedeeifen:}\quad P = 1000\, F \frac{1}{1 + 0{,}0004 \frac{F l^2}{\mathfrak{J}}} \quad \ldots \quad 160.$$

$$\text{für Gufseifen:}\quad P = 1200\, F \frac{1}{1 + 0{,}0004 \frac{F l^2}{\mathfrak{J}}} \quad \ldots \quad 161.$$

In diefen Ausdrücken ift l die freie Länge zwifchen den Gelenken; wenn die Stützung als zwifchen parallelen Enden erfolgend angenommen werden kann, fo ift ftatt l nur $\frac{2}{3}$ der wirklich vorhandenen freien Länge einzuführen.

---

2. Kapitel.

Träger.

Wie bereits im Eingange zum vorliegenden Abfchnitte gefagt wurde, verfteht man unter Trägern folche Bau-Conftructionen, bei denen die Belaftungen ausfchliefslich oder vorwiegend fenkrecht zur Richtung der Längsaxe wirken. Die Längsaxe kann fowohl eine gerade, wie eine gebrochene, bezw. krumme Linie fein. Demnach rechnen wir zu den Trägern im weiteren Sinne auch die Dachftühle, die Sprengwerke u. A., bei denen die Längsaxe nicht fo deutlich vor die Augen tritt, wie bei den gewöhnlichen Balken; ferner auch die Gewölbe, bei denen die Längsaxe eine krumme Linie ift. 148. Allgemeines.

Um die obige Erklärung der Träger auch für diefe Conftructionen unbedingt richtig zu ftellen, könnte man in die Erklärung ftatt der Längsaxe die Verbindungslinie der Auflagerpunkte einführen und demnach die Träger folgendermafsen erklären: Träger find Bau-Conftructionen, bei denen die Belaftungen ausfchliefslich oder vorwiegend fenkrecht zur Verbindungslinie der Auflager, d. h. der Stützpunkte der Conftruction, wirken. Im vorliegenden Kapitel follen nur die Träger im engeren Sinne, welche man gewöhnlich als Balken bezeichnet, behandelt werden, während die Dachftühle und die Gewölbe in den beiden nächften Abfchnitten befprochen werden. Von den Sprengwerken wird bei den Dachftühlen eine befondere Form vorgeführt werden.

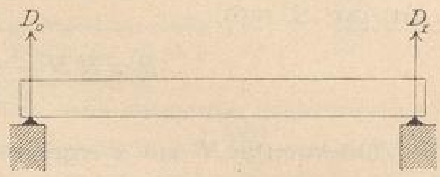
Die auf die Bau-Conftructionen wirkenden äufseren Kräfte find nach Art. 2 (S. 6): 1) die Belaftungen, d. h. die Eigengewichte und die Nutzlaften, und 2) die Auf- 149. Aeufsere Kräfte.

lager- oder Stützendrücke (auch Reactionen der Auflager genannt), d. h. diejenigen Kräfte, welche in den Auflagern auf die Conſtructionen übertragen werden.

150. Eintheilung. Die Träger ſind entweder:

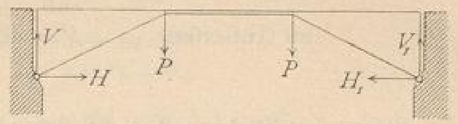
1) Balkenträger, d. h. Träger, auf welche bei lothrechten Belaſtungen nur lothrechte Stützendrücke wirken. Fig. 159 zeigt einen Balkenträger; D_0 und D_1 ſind die Auflagerdrücke.

Fig. 159.



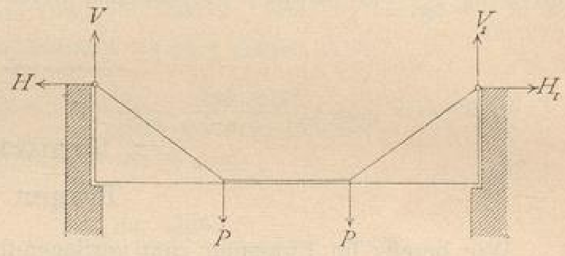
2) Sprengwerks- und Hängewerksträger, d. h. Träger, welche bei lothrechten Belaſtungen ſchiefe Stützendrücke erleiden; die ſchiefen Auflagerdrücke ſetzen ſich aus wagrechten und lothrechten Seitenkräften zuſammen.

Fig. 160.



Wirkt die wagrechte Seitenkraft auf den Träger als Druck, ſo hat man den Sprengwerksträger (Fig. 160); falls die Trägeraxe eine krumme Linie iſt, den Bogenträger. Wirkt die wagrechte Seitenkraft auf den Träger als Zug, ſo hat man den Hängewerksträger (Fig. 161).

Fig. 161.



Ob ein Träger ein Balkenträger, Sprengwerks- oder Hängewerksträger iſt, hängt von der Art ſeiner Auflagerung ab. Die Auflager ſind entweder feſte, d. h. ſolche, welche keine Bewegung des Trägerendes gegen die ſtützenden Theile (das Mauerwerk) geſtatten, oder ſie ſind bewegliche, d. h. ſolche, bei denen das Trägerende gegen das Mauerwerk ſich auf vorgeſchriebener Bahn ſo weit verſchieben kann, wie dies die elaſtiſchen, bei der Belaſtung auftretenden und die durch Temperatur bedingten Längenänderungen verlangen. Bei den feſten Auflagern ſoll alſo eine Verſchiebung des Trägerendes in jeder Richtung, ſowohl wagrecht, wie lothrecht, verhindert werden; die an dieſer Stelle auf den Träger übertragene Kraft, der Auflagerdruck, muſs demnach ſowohl eine wagrechte, wie eine lothrechte Seitenkraft haben können; bei den beweglichen Auflagern wird reibungsloſe Beweglichkeit angenommen; der Druck kann alſo zwiſchen den beiden einander hier berührenden Körpern — Träger und Pfeiler — nur ſenkrecht zur Berührungsfläche, d. h. zur Auflagerbahn gerichtet ſein. Wenn dieſe Bahn wagrecht iſt, ſo muſs demnach der Auflagerdruck lothrecht ſein.

Allgemein hat alſo bei einem feſten Auflager der zwiſchen Träger- und Stützmauerwerk wirkende Druck eine ſchiefe Richtung, genauer geſagt: er kann eine beliebige Richtung in der Ebene der Conſtruction haben; bei reibungslos wagrecht beweglichem Auflager muſs der Druck dagegen lothrecht gerichtet ſein. Iſt bei einem Träger auf zwei Stützpunkten das eine Auflager wagrecht beweglich, alſo der Auflagerdruck an demfelben lothrecht, fo mufs auch der Stützendruck des anderen Auflagers für lothrechte Belaftung lothrecht fein; denn die etwaige wagrechte Seitenkraft deffelben würde die einzige wagrechte Kraft fein, welche auf den Träger wirkt, und diefelbe mufs des Gleichgewichtes wegen gleich Null fein. Wenn alfo ein Auflager feft ift und das andere wagrechte reibungslofe Verfchiebung des betreffenden Trägerendes geftattet, fo ift der Träger ein Balkenträger. Auch wenn ein Auflager feft ift, eine Anzahl anderer aber wagrechte und reibungslofe Verfchiebung geftatten, hat man Balkenträger.

Für den Hochbau kommen die Hängewerksträger (Fig. 161) nur ganz ausnahmsweife zur Verwendung; auch die Sprengwerksträger werden wenig angewendet, weil die wagrechten durch fie auf die Mauern übertragenen Kräfte grofse Mauerftärken bedingen. Wenn es aber möglich ift, die Auflager der Sprengwerksträger tief zu legen, fo dafs die wagrechten Kräfte fofort in die Fundamente gelangen können, fo empfehlen fich diefe Träger fehr. In diefer Weife find viele grofse Bahnhofshallen der Neuzeit mit Sprengwerksträgern ausgeführt. Immerhin find die Balkenträger für den Hochbau die weitaus wichtigften.

Man unterfcheidet ferner ftatifch beftimmte Träger und ftatifch unbeftimmte Träger.

Unter ftatifch beftimmten Trägern verfteht man folche, bei denen zur Ermittelung der Stützendrücke die Gefetze der Statik ftarrer Körper hinreichen; bei den ftatifch unbeftimmten Trägern genügen zur Ermittelung der Auflagerdrücke diefe Gefetze nicht.

Zur Ermittelung der Stützendrücke bietet die Statik ftarrer Körper, wenn alle Kräfte in einer Ebene wirkend angenommen werden können, drei Gleichungen (vergl. Art. 6, S. 8); falls alfo in den Stützendrücken nur drei Unbekannte enthalten find, fo genügen diefe drei Gleichungen zur Ermittelung der Unbekannten, d. h. die Conftruction ift ftatifch beftimmt. Enthalten dagegen die Auflagerdrücke mehr als drei Unbekannte, fo genügen die drei Gleichungen zu ihrer Ermittelung nicht mehr; der Träger ift alsdann ftatifch unbeftimmt. Die fehlenden Gleichungen liefert die Elafticitätslehre.

Hierbei kommen zwei Hauptfälle vor:

1) Alle drei Gleichgewichtsbedingungen find anwendbar, d. h. die Stützendrücke enthalten fowohl wagrechte, wie lothrechte Seitenkräfte. Diefer Fall tritt bei den Sprengwerksträgern, Bogenträgern ftets, bei den Balkenträgern dann ein, wenn die Belaftungen auch wagrechte Seitenkräfte haben (z. B. bei Dachbindern mit Windbelaftung);

2) Nur zwei Gleichgewichtsbedingungen geben verwendbare Gleichungen. Diefer Fall tritt bei nur lothrecht belafteten Balkenträgern ein. Alsdann wird die Gleichgewichtsbedingung, welche befagt, dafs die wagrechten Kräfte die algebraifche Summe Null haben müffen, dazu verwendet, nachzuweifen, dafs die Auflagerdrücke lothrecht find. Für die Berechnung bleiben dann von den in Art. 6 (S. 8) angegebenen Gleichgewichtsbedingungen die folgenden verwendbar:

α) die algebraifche Summe der lothrechten Kräfte mufs gleich Null fein;

β) die algebraifche Summe der ftatifchen Momente aller äufseren Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene als Drehpunkt, mufs gleich Null fein.

Der einfachfte Fall ift der des Balkens auf zwei Stützen. Bei diefem find zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten (D_0 und D_1 in Fig. 159) verfügbar; der Fall ift alfo ftatifch beftimmt. Sind dagegen drei Stützpunkte vorhanden, fo hat man drei Unbekannte (D_0, D_1 und D_2), aber nur zwei Gleichungen, alfo einen ftatifch unbeftimmten Fall.

Man nennt die Träger, welche mehr als zwei Stützpunkte haben, continuirliche oder durchgehende Träger; diefelben find ftatifch unbeftimmte Träger.

a) Aeufsere Kräfte der Balkenträger.

151. Momente und Querkräfte.

Die Querfchnitte der Balken, bezw. der Stäbe, aus denen fich die Balken zufammenfetzen, find fo zu beftimmen, dafs die zuläffigen Beanfpruchungen auch unter ungünftigften Bedingungen in keinem Theile der Querfchnittsflächen je überfchritten werden. Wie im vorhergehenden Abfchnitt gezeigt wurde, find aber für die in den einzelnen Querfchnittsftellen entftehenden Beanfpruchungen oder Spannungen die äufseren Kräfte mafsgebend, insbefondere zwei von den äufseren Kräften abhängige Gröfsen: die Biegungsmomente, auch kurz Momente genannt, und die Quer- oder Transverfalkräfte. Für jeden Querfchnitt ergeben fich bei einer gegebenen Belaftung ein ganz beftimmtes Moment und eine ganz beftimmte Querkraft. Wir haben bei den lothrecht belafteten Balkenträgern nur mit lothrechten Kräften zu thun und werden demnach zunächft und, falls das Gegentheil nicht befonders bemerkt wird, ftets folche vorausfetzen.

Es möge hier daran erinnert werden, dafs man bei nur lothrechten Kräften als Querkraft eines Querfchnittes die Mittelkraft aller an der einen Seite diefes Querfchnittes auf den Balken wirkenden Kräfte bezeichnet (fiehe Art. 94, S. 70). Die Querkraft hat, abfolut genommen, diefelbe Gröfse, möge man den Trägertheil rechts oder denjenigen links vom betreffenden Querfchnitt gelegenen Trägertheil der Betrachtung zu Grunde legen; denn die Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden Kräfte mufs derjenigen an der anderen Seite, des Gleichgewichtes wegen, genau gleich fein. Nennt man diefe Mittelkräfte bezw. Q_{links} und Q_{rechts}, fo mufs, da diefe beiden Kräfte alle an dem Körper wirkenden äufseren Kräfte in fich fchliefsen, ftattfinden:

$$Q_{links} + Q_{rechts} = 0, \quad \text{alfo} \quad Q_{rechts} = - Q_{links}.$$

Wirkt alfo die Querkraft auf den Theil links vom Querfchnitt auf den Balken nach oben, fo wirkt fie auf den Theil rechts vom Querfchnitt nach unten und umgekehrt. Oder was daffelbe befagt: Führt man die Querkraft auf den Theil links vom Querfchnitt als pofitiv ein, wenn fie nach oben wirkt, fo mufs man die Querkraft, welche auf den Theil rechts nach unten wirkt, ebenfalls als pofitiv einführen; beide Richtungen ergänzen einander. Bei den nachfolgenden Unterfuchungen werden die Querkräfte als pofitiv eingeführt, wenn fie auf den Trägertheil links vom betrachteten Querfchnitt nach oben, bezw. auf den Trägertheil rechts vom betrachteten Querfchnitt nach unten wirken; als negativ, wenn fie auf den Theil links nach unten, bezw. auf den Theil rechts nach oben wirken. Eben fo wird daran erinnert, dafs das Biegungsmoment für einen Querfchnitt das refultirende Moment aller an der einen Seite des Querfchnittes wirkenden Kräfte, bezogen auf die im Schwerpunkt des Querfchnittes fenkrecht zur Kraftebene ftehende Axe als Drehaxe bedeutet. Bei den Trägern mit gegliederter Wand liegt die Drehaxe in der oberen oder unteren Gurtung, je nach der Form des Fachwerkes: bei nur lothrechten äufseren Kräften ändert fich dadurch am Werth des Moments nichts. In

Art. 94 (S. 70) ift bereits nachgewiefen, dafs es gleichgiltig ift, an welcher Seite des Querfchnittes man die Kräfte betrachtet; nur mufs man mit dem Vorzeichen vorfichtig fein. Weiterhin follen die Momente als pofitiv eingeführt werden, wenn fie auf den Theil links vom Querfchnitt nach rechts drehend (alfo in der Richtung des Uhrzeigers), bezw. auf den Theil rechts vom Querfchnitt nach links drehend wirken, d. h. den Balken fo zu drehen ftreben, dafs er feine convexe Seite nach unten kehrt; als negativ, wenn fie den Balken fo zu drehen ftreben, dafs er feine convexe Seite nach oben kehrt.

152. Belaftungen.

Die Belaftungen find entweder nach einem beftimmten Gefetze fortlaufend über den Träger vertheilt — im Hochbau meiftens gleichmäfsig über die wagrechte Projection der Trägeraxe, oder fie greifen in einzelnen Punkten als Einzellaften an. Zu den gleichmäfsig über die wagrechte Projection vertheilten Belaftungen rechnet man die Eigengewichte der Träger, welche Annahme genügend genau ift.

Die Gröfse des Eigengewichtes von Decken-Conftructionen kann nach den Angaben in Art. 23 u. 24 (S. 18) angenommen werden; bezüglich der Annahmen für die Nutzlaft fei auf Art. 26 (S. 20) verwiefen. Da die Belaftungen bekannt find, handelt es fich zunächft um die Ermittelung der durch diefelben erzeugten Stützendrücke, Momente und Querkräfte, ferner um die diefen entfprechenden Querfchnittsabmeffungen. Für jeden Querfchnitt ift die ungünftigfte mögliche Belaftung einzuführen.

In den folgenden Artikeln foll für die wichtigften Balkenträger und für verfchiedene Belaftungsarten die Ermittelung der Auflagerdrücke, der Querkräfte und Momente auf dem Wege der Rechnung, bezw. auf demjenigen der Conftruction gezeigt werden; die Ergebniffe gelten fowohl für vollwandige, wie für Träger mit gegliederter Wand (Fachwerkträger).

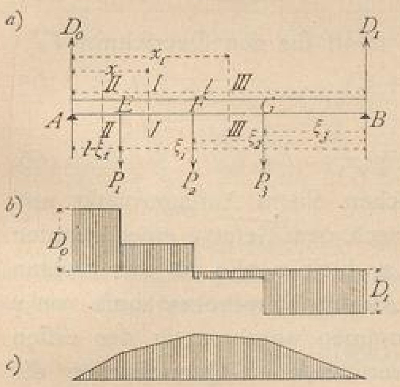
1) Balkenträger auf zwei Stützen.

153. Belaftung durch Einzellaften.

Die Stützweite des Trägers, von Auflagermitte zu Auflagermitte gerechnet, fei l.

Erfter Belaftungsfall: Der Träger wird durch beliebige Einzellaften belaftet.

Fig. 162.



Die Laften find P_1, P_2, P_3, wie aus neben ftehender Fig. 162 erfichtlich; für alle Querfchnitte des Balkens follen die Querkräfte und Momente ermittelt werden.

α) Berechnung. Zunächft find die nicht gegebenen äufseren Kräfte, die Auflagerdrücke D_0 und D_1, zu beftimmen. Da Gleichgewicht ftattfindet, fo ift die algebraifche Summe der ftatifchen Momente aller äufseren Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null. Um D_0 zu ermitteln, wählt man zweckmäfsig einen Punkt auf der Richtungslinie von D_1 als Drehpunkt, damit die zweite Unbekannte D_1 das ftatifche Moment Null habe, alfo nur eine Unbekannte in der Gleichung vorkomme. Alsdann ift, wenn B als Drehpunkt für die Gleichung der ftatifchen Momente gewählt wird,

$$0 = D_0 \, l - P_1 \, \xi_1 - P_2 \, \xi_2 - P_3 \, \xi_3 ,$$

$$D_0 = \frac{P_1 \, \xi_1}{l} + \frac{P_2 \, \xi_2}{l} + \frac{P_3 \, \xi_3}{l} = \sum_0^l \left(\frac{P \, \xi}{l} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 162.$$

Wählt man in gleicher Weife ein zweites Mal A als Drehpunkt, fo ergiebt fich

$$D_1 = \frac{P_1(l-\xi_1)}{l} + \frac{P_2(l-\xi_2)}{l} + \frac{P_3(l-\xi_3)}{l} = \sum_0^l \left[\frac{P(l-\xi)}{l}\right] \quad . \quad 163.$$

Der Beitrag, welchen jede Einzellaft zum Gefammtauflagerdruck leiftet, ift, wie man aus den Gleichungen 162 u. 163 erfieht, ganz unabhängig von der Gröfse und Art der übrigen Belaftungen; die Auflagerdrücke find die Summen der durch die einzelnen Laften erzeugten Einzeldrücke.

Nunmehr laffen fich die Querkräfte ermitteln.

Für einen beliebigen Querfchnitt II, im Abftande x vom linken Auflager A, ift die Querkraft, als Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden äufseren Kräfte,

$$Q_x = D_0 - P_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 164.$$

In diefem Ausdrucke kommt die Abfciffe x des Querfchnittes gar nicht vor; die Querkraft ift alfo, fo lange der angegebene Ausdruck überhaupt gilt, ganz unabhängig von x, d. h. conftant. Der Ausdruck gilt aber nur für die Querfchnitte zwifchen E und F; denn für einen Querfchnitt links von E, etwa für $II\,II$, ift

$$Q_{II} = D_0;$$

für einen folchen rechts von F, etwa für $III\,III$, ift

$$Q_{III} = D_0 - P_1 - P_2 = \sum_0^l \left(\frac{P\xi}{l}\right) - (P_1 + P_2) = \sum_0^l \left(\frac{P\xi}{l}\right) - \sum_0^{x_1}(P).$$

Daraus folgt: Falls eine Belaftung nur durch Einzellaften ftattfindet, ift die Querkraft für alle Querfchnitte zwifchen je zwei Laftpunkten, fo wie zwifchen einem Auflagerpunkt und einem Laftpunkt conftant; eine Aenderung der Querkraft findet nur in den Laftpunkten ftatt.

Das Gefetz der Aenderung der Querkräfte wird fehr anfchaulich, wenn man in jedem Querfchnitte die dafelbft ftattfindende Querkraft als Ordinate nach beliebigem (aber für alle Querfchnitte gleichem) Mafsftabe aufträgt und die Endpunkte der Ordinaten verbindet. Hierdurch ergiebt fich die in Fig. 162 *b* gezeichnete Linie, in welcher die pofitiven Werthe von der Abfciffe aus nach oben, die negativen Werthe nach unten getragen find.

Was die Beftimmung der Momente anbelangt, fo ift für den Querfchnitt II

$$M_I = D_0 x - P_1(x - l + \xi_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 165.$$

Für den Querfchnitt $III\,III$ ift

$$M_{III} = D_0 x_1 - P_1(x_1 - l + \xi_1) - P_2(x_1 - l + \xi_2) \quad . \quad . \quad . \quad 166.$$

Innerhalb je zweier Laftpunkte, fo wie zwifchen einem Auflagerpunkt und einem Laftpunkt ändert fich demnach das Moment nach dem Gefetze einer geraden Linie; denn für verfchiedene Werthe von x, bezw. x_1 bleiben alle auf den rechten Seiten der Gleichungen 165 u. 166 vorkommenden Ausdrücke mit Ausnahme von x und x_1 conftant; diefe einzigen Veränderlichen kommen aber nur in der erften Potenz vor. Trägt man alfo auch hier in den verfchiedenen Querfchnitten die Werthe von M als Ordinaten auf, fo erhält man als Verbindungslinien der Endpunkte gerade Linien; in jedem Laftpunkt ändert fich der Ausdruck für M, alfo auch die Gerade. In Fig. 162 *c* ift die Aenderung der Momente graphifch dargeftellt.

Da eine Gerade ihre gröfste Ordinate nur am Anfangspunkte oder Endpunkte haben kann, diefe aber hier mit den Laftpunkten zufammenfallen, fo folgt, dafs die gröfsten Momentenwerthe an den Laftpunkten ftattfinden. Diefes Ergebnifs ift wichtig. Wenn nur eine Einzellaft P vorhanden ift, fo ift demnach das gröfste Moment ftets am Laftpunkte. Liegt alsdann P in den Abftänden ξ, bezw. $l - \xi$ von den beiden Auflagern, fo ift das Moment am Laftpunkte, alfo das gröfste Moment, welches für die Querfchnittsbildung mafsgebend ift,

$$M_{max} = \frac{P(l - \xi)\,\xi}{l}.$$

Liegt P in der Mitte des Balkens, fo ift $\xi = (l - \xi) = \frac{l}{2}$, alfo

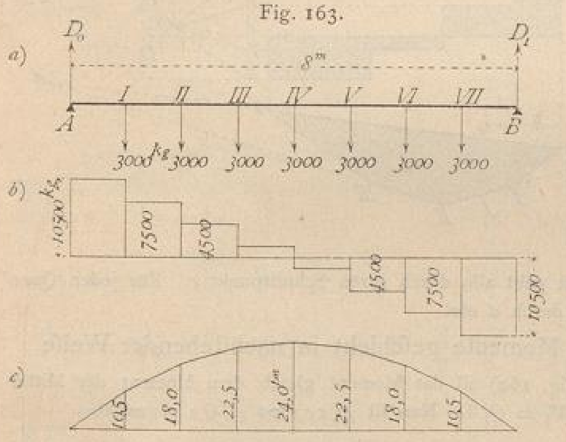
$$M_{max} = \frac{P\,l}{4}.$$

Sind zwei Einzellaften auf dem Balken, fo braucht man nur die beiden Momente an den Laftpunkten zu ermitteln; das gröfsere von beiden ift zugleich das gröfste. Wenn beide Laften gleich grofs, und zwar je gleich P find und im gleichen Abftande $\frac{a}{2}$ von der Balkenmitte liegen, fo ift das Moment an jedem Laftpunkte

$$M = \frac{P(l - a)}{2}.$$

Wenn endlich mehrere Laften vorhanden find, braucht man nur die Momente an den Laftpunkten aufzufuchen. Falls der Balken conftanten Querfchnitt erhält (wie dies z. B. beim Walzbalken der Fall ift), fo ift diefer nach dem gröfsten überhaupt ftattfindenden Momente zu beftimmen.

Fig. 163.



Beifpiel. Ein fchmiedeeiferner Unterzug (Fig. 163) von 8 m Stützweite trägt 7 Balken, deren Abftand von Mitte zu Mitte je 1 m beträgt. Jeder Balken belaftet den Unterzug mit einem Gewicht von 3000 kg. Die Auflagerdrücke, Querkräfte und Momente find zu ermitteln. Nach Gleichung 162 ift

$$D_0 = \frac{3000}{8}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 10\,500\,\text{kg};$$

eben fo nach Gleichung 163

$$D_1 = \frac{3000}{8}\,28 = 10\,500\,\text{kg}.$$

In Fällen, wie der vorliegende, wo die Belaftungen fymmetrifch zur Mitte des Balkens liegen und die Abftände derfelben gleich find, fafft man bequemer alle Laften zu einer Mittelkraft, hier ihrer Summe, zufammen, die in der Balkenmitte angreift. Alsdann ift

$$R = 7 \cdot 3000 = 21\,000\,\text{kg} \quad \text{und} \quad D_0 = \frac{21\,000}{l} \cdot \frac{l}{2} = 10\,500\,\text{kg} = D_1.$$

Die Querkräfte für die verfchiedenen Querfchnitte find:

von A bis $I = 10\,500$ kg,	von IV bis $V = 10\,500 - 4 \cdot 3000 = -\,1500$ kg,
» I » $II = 10\,500 - 3000 = 7500$ kg,	» V » $VI = 10\,500 - 5 \cdot 3000 = -\,4500$ kg,
» II » $III = 10\,500 - 2 \cdot 3000 = 4500$ kg,	» VI » $VII = 10\,500 - 6 \cdot 3000 = -\,7500$ kg,
» III » $IV = 10\,500 - 3 \cdot 3000 = 1500$ kg,	» VII » $B = 10\,500 - 7 \cdot 3000 = -\,10\,500$ kg.

Im Laftpunkte IV (in der Trägermitte) geht die Querkraft von den pofitiven zu den negativen Werthen über.

Die Momente in den Laſtpunkten ſind:

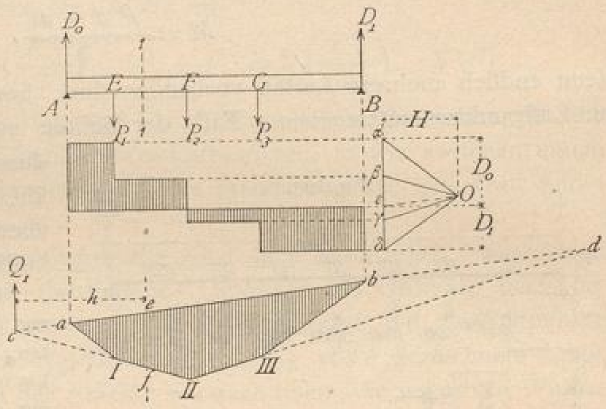
$$M_I = 10500 \cdot 1 = 10500^{\text{kgm}} = 1050000^{\text{kgcm}},$$
$$M_{II} = 10500 \cdot 2 - 3000 \cdot 1 = 18000^{\text{kgm}} = 1800000^{\text{kgcm}},$$
$$M_{III} = 10500 \cdot 3 - 3000 \cdot 1 - 3000 \cdot 2 = 22500^{\text{kgm}} = 2250000^{\text{kgcm}},$$
$$M_{IV} = 10500 \cdot 4 - 3000\,(1 + 2 + 3) = 24000^{\text{kgm}} = 2400000^{\text{kgcm}},$$
$$M_V = 10500 \cdot 5 - 3000\,(1 + 2 + 3 + 4) = 22500^{\text{kgm}} = 2250000^{\text{kgcm}} = M_{III},$$
$$M_{VI} = M_{II}, \quad M_{VII} = M_I, \quad M_A = M_B = 0.$$

Hiernach ſind die Momente und Querkräfte in Fig. 163 *c* u. 163 *b* aufgetragen.

β) Graphiſche Ermittelung. Um die Auflagerdrücke zu ermitteln, conſtruire man für die gegebenen Kräfte und den beliebigen Pol O (Fig. 164) das Kraft- und Seilpolygon, ziehe die Schluſslinie $a\,b$ und parallel zu dieſer die Linie $O\,\varepsilon$ durch den Pol O; dieſelbe theilt die Kraftlinie in zwei Theile, von denen $\overline{\delta\,\varepsilon} = D_1$ und $\overline{\varepsilon\,\alpha} = D_0$ iſt (vergl. Art. 19, S. 16). Nun laſſen ſich die Querkräfte graphiſch leicht ermitteln.

Für alle Querſchnitte von A bis E iſt die Querkraft gleich D_0, d. h. gleich $\varepsilon\,\alpha$ (Fig. 164). Zieht man alſo durch ε und α je eine Wagrechte, ſo giebt deren Abſtand die Gröſse der Querkraft zwiſchen A und E an. Zwiſchen E und F iſt die Querkraft gleich $D_0 - P_1 = \varepsilon\alpha - \alpha\beta = \varepsilon\beta$; man ziehe alſo durch β eine wagrechte Linie; alsdann giebt deren Abſtand von der durch ε gezogenen Geraden an jeder Stelle zwiſchen E und F die Gröſse der Querkraft. Eben ſo iſt zwiſchen F und G die Strecke $\varepsilon\gamma$, zwiſchen G und B die Strecke $\varepsilon\delta$ die Querkraft.

Fig. 164.



Die Querkraft als Mittelkraft aller an der einen Seite des Querſchnittes wirkenden Kräfte geht nach Art. 18 (S. 14) durch den Schnittpunkt derjenigen Seilpolygonſeiten, welche bezw. der erſten und letzten dieſer Kräfte vorangehen und folgen. Für einen Querſchnitt zwiſchen E und F ſind D_0 und P_1 die Kräfte, $a\,b$ und $I\,II$ die betreffenden Seilpolygonſeiten; die Querkraft geht alſo durch ihren Schnittpunkt c. Für jeden Querſchnitt zwiſchen II und III geht die Querkraft durch d etc.

Die graphiſche Beſtimmung der Momente geſchieht in nachſtehender Weiſe.

Für einen beliebigen Querſchnitt $I\,I$ (Fig. 164) iſt das Moment gleich dem Moment der Mittelkraft, d. h. hier der Querkraft. Demnach iſt $M_1 = Q_1\,h$. Nun iſt $\triangle\,c\,e\,f \sim \triangle\,O\,\varepsilon\,\beta$; mithin

$$\frac{\overline{e\,f}}{h} = \frac{\overline{\varepsilon\beta}}{H}, \quad \text{und, da } \overline{\varepsilon\beta} = Q_1 \text{ iſt}, \quad \overline{e\,f} = \frac{Q_1\,h}{H} = \frac{M_1}{H}, \quad \text{alſo} \quad M_1 = H \cdot \overline{e\,f}.$$

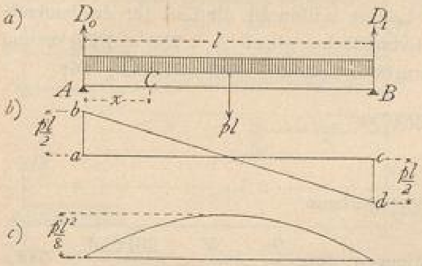
In vorſtehendem Ausdruck für M iſt H, der wagrechte Abſtand des Poles von der Kraftlinie oder der Polabſtand, für alle Querſchnitte conſtant; die Gröſse des Momentes iſt alſo mit $\overline{e\,f}$, d. h. der lothrechten Höhe des Seilpolygons veränderlich. Daraus folgt:

Das Moment in jedem Querſchnitte iſt gleich dem Producte aus dem lothrechten Abſtande der Seilpolygonſeiten in dieſem Querſchnitte und dem Polabſtand. Die vom Seilpolygon gebildete Fläche heiſst die Momentenfläche.

Die Momente ſind Producte aus Kräften und Längen; H iſt eine Kraft, wie alle Strahlen und Linien im Kraftpolygon, und kann nach Obigem beliebig angenommen werden, etwa mit 10^t, 20^t etc. Da das Moment in irgend einem Querſchnitt einen ganz beſtimmten Werth hat, der natürlich von einem beliebig gewählten H unabhängig iſt, ſo wird die Höhe des Seilpolygons deſto gröſser, je kleiner H iſt, und umgekehrt.

Zweiter Belastungsfall: Der Träger ist über seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet. 154. Gleichförmig vertheilte Belastung.

Fig. 165.



Die Belastung für die Längeneinheit des Trägers (Fig. 165) sei p; alsdann ist die Mittelkraft gleich der Gesammtlast, also gleich $p\,l$ und greift in der Trägermitte an. Die Gleichung der statischen Momente für B als Drehpunkt heifst demnach:

$$D_0\, l - p\, l \frac{l}{2} = 0,$$

und es wird

$$D_0 = \frac{p\,l}{2}; \text{ eben so } D_1 = \frac{p\,l}{2}. \qquad 167.$$

Die Querkraft für einen beliebigen Querschnitt C im Abstande x von A ist

$$Q_x = D_0 - p\,x = \frac{p\,l}{2} - p\,x = \frac{p}{2}(l - 2\,x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 168.$$

Die graphische Darstellung der Veränderung der Querkraft ergiebt die Linie der Gleichung 168, d. h. eine Gerade. Für $x = 0$ ist $Q_0 = \frac{p\,l}{2}$; für $x = l$ ist $Q_l = -\frac{p\,l}{2}$. Q_x wird Null für $l - 2\,x = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$. Die Ordinaten der Linie $b\,d$ (Fig. 165 b) sind also die Querkräfte an den verschiedenen Stellen des Balkens.

Das Moment für den Querschnitt C ist

$$M_x = D_0\, x - p\,x \frac{x}{2} = \frac{p\,l}{2} x - \frac{p\,x^2}{2} = \frac{p}{2}(l\,x - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad 169.$$

Trägt man die Momente in den verschiedenen Querschnitten als Ordinaten auf, so erhält man die Linie der Gleichung 169, d. h. eine Parabel. Für $x = 0$ ist $M_0 = 0$; für $x = l$ ist $M_l = 0$. M_x hat seinen Gröfstwerth für

$$\frac{d\,M_x}{d\,x} = \frac{p}{2}(l - 2\,x) = 0, \text{ d. h. für } x = \frac{l}{2}; \text{ demnach}$$

$$M_{max} = \frac{p}{2}\left[l \frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right] = \frac{p\,l^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 170.$$

Hiernach kann die Parabel leicht construirt werden (Fig. 165 c). Man trage $\frac{p\,l^2}{8}$ nach beliebig angenommenem Momenten-Mafsstabe auf und verzeichne in bekannter Weise die Parabel; alsdann sind alle Ordinaten auf diesem Mafsstabe zu messen.

Nennt man die gesammte auf den Träger entfallende Last $p\,l = P$, so kann man auch setzen

$$M_{max} = \frac{P\,l}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 171.$$

Dieser Ausdruck ist oft bequemer, als Gleichung 170. Wenn eine Last P als Einzellast in der Mitte wirkt, so erzeugt sie nach Art. 153 (S. 145) ein Maximalmoment $M_{max} = \frac{P\,l}{4}$, d. h. ein doppelt so grofses Moment, als die gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Last P.

Beiſpiele. 1) Ein Flurgang von 4 m Lichtweite iſt mit einer Decke aus Kappengewölben zwiſchen eiſernen I-Trägern zu überdecken; die Spannweite der Kappen ſei 2,2 m; die Träger ſollen berechnet werden.

Die Stützweite der Träger, d. h. die Entfernung von Auflagermitte zu Auflagermitte, kann zu 4,3 m, d. i. zu 430 cm angenommen werden; alsdann iſt $l = 430$ cm. Auf das laufende Meter des Trägers kommt eine zu tragende Grundfläche von 2,2 m Breite und 1 m Länge; mithin iſt die Laſt für das laufende Meter Träger, bei einer Gröſstbelaſtung von 750 kg für 1 qm Grundfläche, gleich $2{,}2 \cdot 750 = 1650$ kg und für das laufende Centimeter Träger $p = 16{,}5$ kg. Die Auflagerdrücke ſind alſo nach Gleichung 167

$$D_0 = D_1 = \frac{16{,}5 \cdot 430}{2} = 3547 \text{ kg},$$

und das Gröſstmoment nach Gleichung 170

$$M_{max} = M_{mitte} = \frac{16{,}5 \cdot 430^2}{8} = 381356 \text{ kgcm}.$$

Nun iſt der Querſchnitt nach Art. 97 (S. 76) ſo zu beſtimmen, daſs $\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M}{K} = \frac{381356}{700} = 544{,}8$ iſt. Falls ein I-Querſchnitt gewählt wird, iſt Nr. 28 der »Deutſchen Normal-Profile« zu wählen, da bei demſelben $\frac{\mathcal{J}}{a} = 547$ iſt [32]).

2) Es ſollen die Abmeſſungen beſtimmt werden, welche einem Deckenbalken aus Kiefernholz bei einer Lichtweite von 6 m zu geben ſind, wenn die Balkenentfernung von Mitte zu Mitte 0,9 m und die Geſammtbelaſtung der betreffenden Decke (Eigengewicht und Nutzlaſt) 500 kg für 1 qm beträgt.

Das laufende Meter Balken hat eine Grundfläche von 0,9 m Breite zu tragen, d. h. eine Laſt von $0{,}9 \cdot 500 = 450$ kg; mithin beträgt die Belaſtung für das laufende Centimeter des Balkens $p = 4{,}5$ kg. Die von Auflagermitte zu Auflagermitte zu rechnende Stützweite l nehmen wir zu $6{,}3$ m $= 630$ cm an. Das gröſste Moment, welches hier, da der Balkenquerſchnitt conſtant iſt, der Berechnung des ganzen Balkens zu Grunde gelegt werden muſs, findet in der Balkenmitte ſtatt und iſt nach Gleichung 170

$$M_{max} = \frac{4{,}5 \cdot 630^2}{8} = 223256 \text{ kgcm};$$

mithin nach Art. 100 (S. 79)

$$\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M_{max}}{K} = \frac{223256}{60} = 3721.$$

Da nun nach Gleichung 19 (S. 35): $\mathcal{J} = \frac{b h^3}{12}$, ferner $a = \frac{h}{2}$ iſt, wird $\frac{b h^2}{6} = 3721$, und wenn $b = 25$ cm angenommen wird,

$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 3721}{25}} = 29{,}9 \text{ cm} = \infty\ 30 \text{ cm}.$$

Sonach genügt ein Querſchnitt von 25×30 cm.

155. Theilweiſe gleichförmig vertheilte Belaſtung.

Dritter Belaſtungsfall: Der Träger iſt auf einen Theil ſeiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Laſt belaſtet.

Eine Laſt P im Abſtande x vom linken Auflager A (Fig. 166) erzeugt die Auflagerdrücke

$$D_0 = \frac{P(l - x)}{l} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P x}{l}.$$

Die Querkraft iſt für jeden Querſchnitt E links vom Laſtpunkte C

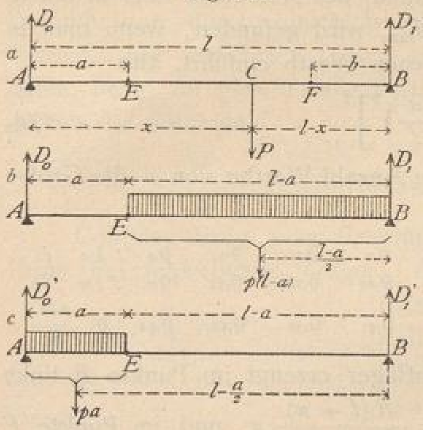
$$Q = D_0 = \frac{P(l - x)}{l}, \text{ d. h. poſitiv;}$$

für jeden Querſchnitt F rechts vom Laſtpunkt C:

---

32) Man muſs beim Einſetzen der Zahlenwerthe für p und l vorſichtig ſein. Es iſt eigentlich ſelbſtverſtändlich, daſs, wenn man l in Metern einführt, p die Belaſtung für das laufende Meter Träger bedeutet, und wenn l in Centimetern eingeführt wird, p die Belaſtung für das laufende Centimeter Träger bedeutet. Giebt man ferner K, die zuläſſige Beanſpruchung, in Kilogramm für 1 qcm und das Moment M in Kilogramm-Centimetern an, ſo ſind in der Gleichung $\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M}{K}$ die Werthe für $\mathcal{J}$ und a auf Centimeter bezogen einzuſetzen. Dennoch dürfte es nicht überflüſſig ſein, hier beſonders darauf aufmerkſam zu machen, da von Anfängern und Ungeübten oft in dieſer Hinſicht Fehler gemacht werden. Es empfiehlt ſich, ſtets Alles auf Centimeter und Kilogramm bezogen einzuführen.

Fig. 166.



$$Q_1 = D_0 - P = \frac{P(l-x)}{l} - P = -\frac{Px}{l},$$

d. h. negativ. Daraus folgt der Satz: In einem Querfchnitt erzeugt jede rechts liegende Laft eine pofitive, jede links liegende Laft eine negative Querkraft. Demnach wird in irgend einem Querfchnitte, etwa E, die gröfste Querkraft (Q_{max}) ftattfinden, wenn die ganze Trägerabtheilung rechts von E belaftet, der übrige Trägertheil (AE) unbelaftet ift (Fig. 166 *b*). Die kleinfte Querkraft (Q_{min}) wird in E eintreten, wenn die Abtheilung AE links von E belaftet, die Abtheilung EB rechts von E unbelaftet ift (Fig. 166 *c*).

Man erhält die Werthe von Q_{max}, bezw. Q_{min} für den Querfchnitt E, welcher um a vom linken Auflager entfernt liegt und für die Belaftung p auf das laufende Meter, wie folgt. Für die Belaftung nach Fig. 166 *b* ift

$$D_0 = Q_{max} = \frac{p(l-a)^2}{2l}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad 172.$$

für die Belaftung nach Fig. 166 *c* ift

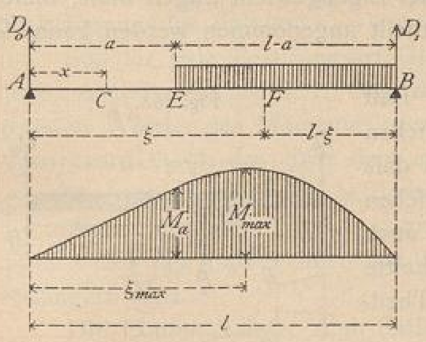
$$D_0' = \frac{pa}{l}\left(l - \frac{a}{2}\right) = pa - \frac{pa^2}{2l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = D_0' - pa;$$

fonach

$$Q_{min} = -\frac{pa^2}{2l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 173.$$

Die Belaftung nach Fig. 166 kommt im Hochbau fehr häufig vor, z. B. bei Trägern unter Mauern, in welchen fich Fenfter- oder Thüröffnungen befinden. Für die Querfchnittsbemeffung ift das gröfste Moment mafsgebend, welches demnach aufgefucht werden foll.

Fig. 167.



Für irgend einen Punkt C der Strecke AE (Fig. 167) ift das Moment

$$M_x = D_0\, x = \frac{p(l-a)^2}{2l}\, x;$$

die graphifche Darftellung ergiebt eine Gerade. Für einen Punkt F der Strecke CB ift das Moment bequem durch Betrachtung des rechts von F gelegenen Trägertheiles zu finden. Es ift

$$M_\xi = D_1(l-\xi) - \frac{p(l-\xi)^2}{2}, \quad \text{woraus} \quad M_\xi = \frac{p}{2l}(l-\xi)(l\xi - a^2).$$

Auf diefer Strecke ergiebt alfo die graphifche Darftellung des Momentes eine Parabel. Diefelbe hat ihr Maximum für

$$\xi_{max} = \frac{l}{2} + \frac{a^2}{2l}.$$

Aus der Formel ergiebt fich, dafs das Maximum des Momentes ftets in einem Punkte der belafteten Strecke EB ftattfindet. M_{max} wird gefunden, wenn man in den Ausdruck für M_ξ ftatt ξ den für ξ_{max} gefundenen Werth einführt, alfo

$$M_{max} = \frac{p\,l^2}{8}\left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2\right]^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 174.$$

Nachftehende kleine Tabelle ergiebt für eine Anzahl Werthe von a die Gröfse von M_{max} und von ξ_{max}:

Für a = 0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	l
ξ_{max} = 0,5	0,505	0,52	0,545	0,58	0,625	0,68	0,745	0,82	0,9	1,0	l
M_{max} = 1	0,98	0,92	0,83	0,71	0,56	0,41	0,26	0,13	0,04	0	$\frac{p\,l^2}{8}$

156. Gröfste Momente durch gleichförmig vertheilte Laften.

Eine Laft P im Abftande x vom linken Auflager erzeugt im Punkte E links vom Laftpunkte (Fig. 166 a) ein Moment $M_a = \frac{P(l-x)}{l}\,a$ und im Punkte F rechts vom Laftpunkte das Moment $M_b = \frac{P\,x}{l}\,b$. Beide Momentenwerthe find pofitiv; alfo erzeugt eine jede Einzellaft in allen Trägerquerfchnitten pofitive Momente. Die gröfsten Momente in den einzelnen Trägerquerfchnitten werden demnach ftattfinden, wenn alle Trägerpunkte belaftet find, d. h. bei voller Belaftung des Trägers. Ift alfo volle Belaftung eines Trägers mit gleichmäfsig vertheilter Laft p möglich, fo ruft diefe die gröfsten Momente hervor und ift defshalb der Berechnung zu Grunde zu legen. Bei diefer Belaftung ift nach Gleichung 169 für einen Querfchnitt mit der Abfciffe x

$$M_x = \frac{p}{2}\,(l\,x - x^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 175.$$

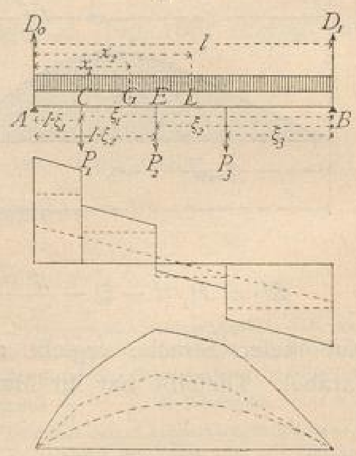
157. Gleichförmig vertheilte Laft und Einzellaften, bezw. theilweife Belaftung.

Vierter Belaftungsfall: Der Träger wird auf feine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Laft und aufserdem durch Einzellaften oder auf einen Theil feiner Länge durch eine weitere gleichförmig vertheilte Laft belaftet.

Da jeder Träger aufser der Nutzlaft noch das Eigengewicht tragen mufs, diefes aber als gleichförmig über die ganze Länge vertheilt angenommen werden kann, fo ift diefer Fall der am häufigften vorkommende.

In Art. 153 ift nachgewiefen, dafs jede Laft einen von den fonft noch auf dem Balken befindlichen Laften unabhängigen Stützendruck erzeugt, und dafs der Gefammt-Stützendruck gleich der algebraifchen Summe der Einzeldrücke ift. Daraus folgt, dafs auch die Querkräfte und Momente für alle Querfchnitte gleich den algebraifchen Summen der bez. Theil-Querkräfte und Momente find.

Fig. 168.



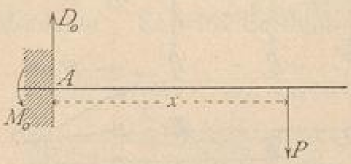
Demnach brauchen im vorliegenden Falle nur die Stützendrücke, Querkräfte und Momente, welche bei den einzelnen bereits betrachteten Belaftungen, derjenigen durch Einzellaften und derjenigen durch gleichförmig vertheilte Laft u. f. w., fich ergeben haben, algebraifch addirt zu werden, was fowohl auf dem Wege der Rechnung, wie graphifch gefchehen kann.

Fig. 168 ftellt die Querkräfte und Momente dar, welche in den verfchiedenen Querfchnitten durch gleichförmig vertheilte Laft und Einzellaften hervorgerufen werden. Die punktirten Linien geben die Werthe von Q und M nur für Einzellaften, bezw. für gleichförmig vertheilte Laft an; die voll ausgezogenen Linien bedeuten die Summen.

2) Confole-, Krag- oder Freiträger.

Confole-, Krag- oder Freiträger find am einen Ende unterftützte, am anderen Ende frei fchwebende Träger. Als äufsere Kräfte wirken auf diefelben die Belaftungen und die Auflagerdrücke der Unterftützungsftelle. Letztere laffen fich aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln. Damit der Träger im Gleichgewicht fei, mufs zunächft die algebraifche Summe der lothrechten Kräfte gleich Null fein, d. h. wenn die lothrechte Seitenkraft des Auflagerdruckes bei A (Fig. 169) gleich D_0 ift, wird $0 = D_0 - P$ oder 158. Erklärung.

Fig. 169.



$$D_0 = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 176.$$

Eine äufsere wagrechte Belaftung fei nicht vorhanden; daher wird der Auflagerdruck keine wagrechte Seitenkraft haben. Es mufs aber auch die algebraifche Summe der ftatifchen Momente für einen beliebigen Punkt der Ebene, alfo etwa für A, gleich Null fein; mithin mufs, da das Moment der gegebenen Kräfte für A nicht gleich Null ift, D_0 aber für den Drehpunkt A kein ftatifches Moment hat, an der Unterftützungsftelle noch eine Anzahl von Kräften wirken, deren refultirendes Moment mit demjenigen der Belaftungen zufammen die Summe Null ergiebt. Bei A wirkt alfo ein Moment M_0, deffen Gröfse fich bei dem in Fig. 169 gezeichneten Drehfinn aus der Gleichung ergiebt:

$$Px - M_0 = 0, \quad \text{d. h.} \quad M_0 = + Px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 177.$$

Diefes Moment, deffen Drehfinn demjenigen von P entgegengefetzt ift, kann auf verfchiedene Weife erzeugt werden, am einfachften durch Einmauerung, bezw. Einfpannung des Balkens.

Soll für jede Belaftungsart Gleichgewicht vorhanden fein, fo mufs der Balken derart eingemauert werden, dafs das von der Mauer geleiftete Moment auch die gröfsten Werthe des Momentes der Belaftungen aufheben kann. Das Moment der Mauer wird durch das über dem eingemauerten Balkentheil liegende Mauergewicht geleiftet, wonach diefes zu beftimmen ift.

Auch in anderer Weife kann ein Moment in A erzeugt werden, z. B. dadurch, dafs der Balken über den Punkt A hinaus, bis zu einer zweiten Stütze B, verlängert wird.

Die Confole-Träger find ftatifch beftimmt, da die beiden Unbekannten: der Auflagerdruck D_0 und das Moment M_0, nach den Gefetzen der Statik fefter Körper ermittelt werden können. Im Folgenden werden der Auflagerdruck, die Querkräfte und die Momente, wie beim Balkenträger auf zwei Stützen gefucht; daher werden bezüglich der Belaftungsart drei Fälle unterfchieden:

Erfter Fall: Der Confole-Träger wird durch beliebige Einzellaften belaftet. 159. Belaftung durch Einzellaften.

Die freie Balkenlänge AB (Fig. 170) fei gleich l; alsdann ift der Stützendruck

$$D_0 = P_1 + P_2 + P_3 = \sum_0^l (P) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 178.$$

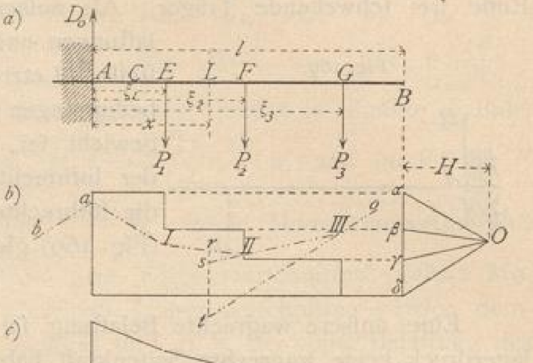
und das Moment

$$M_0 = -(P_1 \xi_1 + P_2 \xi_2 + P_3 \xi_3) = -\sum_0^l (P \xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 179.$$

Für einen beliebigen Querschnitt C zwischen A und E beträgt die Querkraft $Q = D_0 = \Sigma (P)$; diesen Werth hat Q für alle Punkte zwischen A und E. Für irgend einen Querschnitt L zwischen E und F ist $Q_1 = D_0 - P_1$, und es ist allgemein

$$Q = \sum_0^l (P) - \sum_0^x (P) = \sum_x^l (P) \quad . \quad 180.$$

Fig. 170.



Die Querkraft in jedem Querschnitte ist also gleich der Summe der zwischen diesem Querschnitte und dem freien Ende befindlichen Lasten. Dies folgt schon aus der Erklärung der Querkraft. Als graphische Darstellung der Veränderung der Querkräfte ergiebt sich die neben stehende Construction (Fig. 170 *b*).

Für einen beliebigen Punkt L mit der Abscisse x wird das Moment $M = -\left[P_3 (\xi_3 - x) + P_2 (\xi_2 - x)\right]$; allgemein wird sonach

$$M = -\sum_x^l \left[P (\xi - x)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 181.$$

Die graphische Darstellung der Momente zwischen je zwei Lastpunkten ergiebt also eine Gerade, wie in Fig. 170 *c* gezeichnet ist.

Die Momente sind als negativ einzuführen, weil die Kräfte das Bestreben haben den Balken so zu biegen, dass er seine convexe Seite nach oben kehrt (vergl. Art. 151, S. 142).

Sowohl Querkraft, wie Moment ist bei dieser, demnach auch bei jeder Belastung, am Auflager-, bezw. Einspannungspunkte am grössten; diese Stelle ist also bei den Console-Trägern die am meisten gefährdete. Wird, wie im Hochbau meistens, der Balken mit constantem Querschnitt ausgeführt, so ist der am Einspannungspunkte nöthige Querschnitt der Ausführung zu Grunde zu legen.

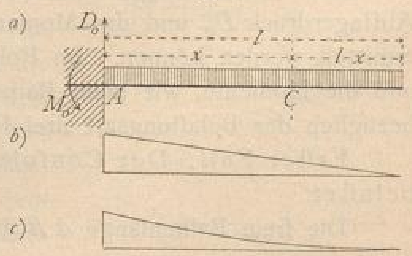
160. Gleichförmig vertheilte Belastung.

Zweiter Fall: Der Console-Träger wird durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Für den Auflagerpunkt A (Fig. 171) ergeben sich der Auflagerdruck und das Moment zu

$$D_0 = p\, l \quad \text{und} \quad M_0 = -\frac{p\, l^2}{2}; \quad . \quad 182.$$

Fig. 171.



für einen Punkt C mit der Abscisse x betragen die Querkraft und das Moment

$$Q_x = p\,(l - x) \quad \text{und} \quad M_x = -\frac{p\,(l-x)^2}{2} \quad 183.$$

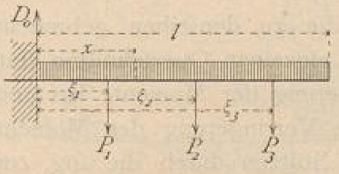
Die graphische Darstellung der Werthe von Q ergiebt eine Gerade; für $x = 0$ ist

$Q_0 = p\,l$, für $x = l$ ift $Q_l = 0$. Diejenige der Werthe von M ergiebt eine Parabel; für $x = 0$ ift $M_0 = -\frac{p\,l^2}{2}$; für $x = l$ ift $M_l = 0$. Da ferner für $x = l$ auch $\frac{d\,M_x}{d\,x} = +\,p\,(l - x)$ Null wird, fo ift die Abfciffenaxe im Punkte $x = l$ eine Tangente an die Parabel. Die Momente und Querkräfte find in Fig. 171 *c* und 171 *b* graphifch dargeftellt. Der gröfste Werth des Momentes und der Querkraft findet an derfelben Stelle, an der Einfpannungsftelle, ftatt.

Dritter Fall: Der Confole-Träger wird durch eine gleichförmig vertheilte Belaftung und durch Einzellaften belaftet. 161. Gleichförmig vertheilte Laft und Einzellaften.

Die Stützendrücke, Querkräfte und Momente ergeben fich als die Summen der bei den einzelnen Belaftungen ftattfindenden Stützendrücke, Querkräfte und Momente. Es wird defshalb genügen, hier die Werthe anzugeben (Fig. 172):

Fig. 172.

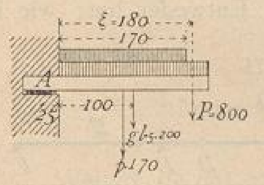


$$\left.\begin{aligned} D_0 &= P_1 + P_2 + P_3 + p\,l = \sum_0^l P + p\,l \\ Q_x &= \sum_x^l P + p\,(l - x) \\ M_x &= -\sum_x^l \Big[P\,(\xi - x)\Big] - \frac{p\,(l - x)^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 184.$$

Eben fo wird die Veränderlichkeit der Q und M durch graphifche Addition der für die Einzelbelaftungen fich ergebenden Werthe von Q und M graphifch dargeftellt.

Beifpiel. Ein fchmiedeeiferner Balcon-Träger von 2 m freier Länge hat als Eigengewicht eine gleichmäfsig vertheilte Belaftung von 500 kg für das laufende Meter und eine Nutzlaft von 800 kg für das laufende Meter zu tragen, aufserdem noch das Gewicht der Brüftung mit 800 kg in 1,8 m Abftand von der Wand. Demnach ift, wenn Alles in Centimetern angegeben wird, $g = 5$ kg, $p = 8$ kg, $P = 800$ kg, $\xi = 180$ cm und $l = 200$ cm.

Fig. 173.



Die Nutzlaft habe nur eine Länge von 170 cm.

Als Berechnungsweite darf man nicht die freie Länge bis zur Wand einführen, fondern mufs diejenige bis zur Auflagermitte nehmen, welche hier etwa 25 cm hinter der Mauerkante liegen möge. Alsdann ift für den Punkt A (Fig. 173), wenn M_g das Gröfstmoment für ruhende, M_p dasjenige für bewegliche Laft bezeichnet, abfolut genommen

$$M_g = P\,(\xi + 25) + g\,l\left(\frac{l}{2} + 25\right) = 800 \cdot 205 + 1000 \cdot 125 = 289\,000 \text{ kgcm},$$

$$M_p = p \cdot 170\left(\frac{170}{2} + 25\right) = 8 \cdot 170 \cdot 110 = 149\,600 \text{ kgcm}.$$

Der Querfchnitt an der Stelle A ift fo zu beftimmen, dafs, wenn als zuläffige Beanfpruchung $K = 800$ kg gewählt wird, ftattfindet:

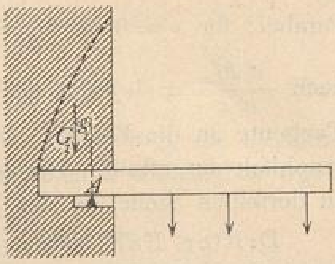
$$\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M}{K} = \frac{289\,000 + 149\,600}{800} = 548.$$

Profil Nr. 28 der »Deutfchen Normal-Profile für I-Eifen« hat ein Widerftandsmoment $\frac{\mathcal{J}}{a} = 547$, dürfte alfo für den vorliegenden Fall genügen.

Es möge hier noch einmal befonders darauf hingewiefen werden, dafs die Confole-Träger hauptfächlich dann gefährdet find, wenn das am Einfpannungspunkte von der Mauer geleiftete Moment nicht die genügende Gröfse hat. Damit Gleichgewicht beftehe, mufs diefes Moment wenigftens fo grofs fein, wie das gröfstmögliche

Moment der äuſseren Kräfte für A. Auch hier iſt aber ein Sicherheits-Coefficient n nöthig, und wenn beiſpielsweiſe dieſes Einſpannungsmoment durch das Gewicht des auf dem hinteren Balkentheile ruhenden Mauerwerkes geleiſtet wird (Fig. 174), ſo muſs $G_1 g_1 = n M_0$ ſein. Es dürfte ſich empfehlen, n nicht kleiner als 4 zu nehmen.

Fig. 174.



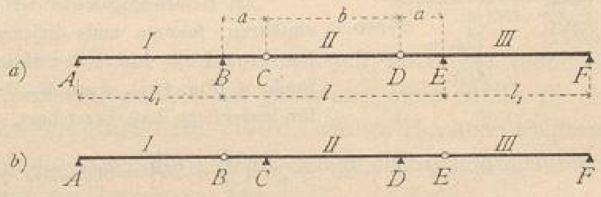
Dabei iſt aber auch zu beachten, daſs die Art der Conſtruction dafür Gewähr bieten muſs, daſs das Gewicht G_1 wirklich zur Wirkſamkeit kommt — etwa durch angemeſſene Unterlagsplatten, Verband, Cementmörtel u. dergl. Unter Umſtänden kann man auch das Gewicht des unterhalb gelegenen Mauerwerkes durch Anker und Ankerplatten am Balkenende aufhängen und dadurch für die Stabilität des Conſole-Trägers nutzbar machen. Zu beachten iſt auch, ob nicht ein Ausreiſsen nach der punktirten Linie in Fig. 174 möglich iſt.

3) Continuirliche Gelenkträger, Auslegerträger oder *Gerber*-Träger.

162. Princip. Die Querſchnittsgröſse der Träger und damit die zu denſelben gebrauchte Stoffmenge iſt weſentlich von der Gröſse der in den einzelnen Querſchnitten ſtattfindenden gröſsten Momente abhängig. Eine Verminderung der Momente hat auch eine Querſchnittsverringerung zur Folge. Eine ſolche Verringerung der Momente wird gegenüber den gewöhnlichen Trägern auf zwei Stützen durch die ſog. continuirlichen Gelenkträger oder Auslegerträger erreicht, bei denen die Stützpunkte eines Theiles der Träger durch die übergekragten Enden der Nachbarträger gebildet werden. Man erhält dadurch für die verſchiedenen Oeffnungen verſchiedene Trägerarten, und zwar wechſelt immer ein Träger mit einem, bezw. zwei Auslegern an den Enden und ein ſolcher ohne Ausleger ab.

Für drei neben einander liegende Oeffnungen I, II, III ſind die hauptſächlich vorkommenden Anordnungen in Fig. 175 *a* u. *b* dargeſtellt. Entweder hat, wie in Fig. 175 *a* gezeichnet iſt, jeder Seitenträger I und III einen über das Auflager B, bezw. E vorragenden Ausleger BC, bezw. DE, auf deren Enden der Mittelträger CD frei aufruht, oder der Mittelträger CD hat, wie in Fig. 175 *b*, jederſeits ein Kragſtück BC, bezw. DE, und die Seitenträger AB und EF ruhen einerſeits auf den Endſtützpunkten A, bezw. F, andererſeits auf den Enden B und E der erwähnten Kragſtücke oder Ausleger.

Fig. 175.



Die Pfetten der gröſseren eiſernen Dächer werden neuerdings meiſtens als ſolche Träger nach Fig. 176 hergeſtellt, wo immer ein Träger mit zwei Auslegern an den Enden und ein auf dieſen Auslegern frei aufgelagerter Träger abwechſeln. Die Beanſpruchung in dieſem Falle ſtimmt genau mit derjenigen der in Fig. 175 *b* angegebenen Anordnung überein; jeder Träger mit zwei Conſolen an den Enden wird wie Träger $BCDE$ in Fig. 175 *b* beanſprucht; jeder andere Träger wie AB,

Fig. 176.

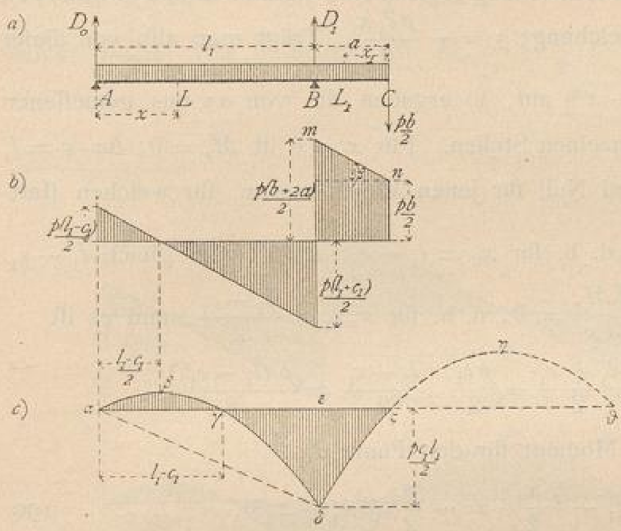
bezw. EF dieſer Figur. Es genügt deſshalb, die beiden Anordnungen in Fig. 175 a u. b in das Auge zu faſſen.

Erſte Anordnung: Die Kragſtücke befinden ſich an den Seitenträgern (Fig. 175 a). 163. Erſte Anordnung.

α) Erſter Belaſtungsfall: Der Träger iſt über ſeine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Laſt belaſtet.

a) Seitenträger mit einſeitigem Kragſtück. Es ſei $AB = l_1$, $BE = l$, $BC = DE = a$ und $CD = b$, alſo $l = 2a + b$; ferner ſei die Belaſtung für die Längeneinheit des Trägers p. Alsdann wirkt auſser dieſer Belaſtung auf den Seitenträger in C eine Kraft nach unten, welche dem im Punkte C auf den Balken CD nach oben wirkenden Auflagerdruck (nach dem Geſetze der Wechſelwirkung, vergl. Art. 9, S. 10) genau gleich iſt, d. h. eine Kraft $\frac{pb}{2}$. Der Stützendruck im Auflagerpunkte A (Fig. 177 a) ergiebt ſich durch Aufſtellung der Gleichung der ſtatiſchen Momente für Punkt B zu

Fig. 177.



$$D_0 = \frac{p\,l_1}{2} - \frac{p}{2} \cdot \frac{ab + a^2}{l_1}.$$

Setzt man die nur von den Längen abhängige Conſtante $\frac{ab + a^2}{l_1} = c_1$, ſo iſt

$$D_0 = \frac{p}{2}\,(l_1 - c_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 185.$$

Weiters iſt der Stützendruck im Auflagerpunkte B

$$D_1 = \frac{p\,l_1}{2} + \frac{pb}{2} \cdot \frac{l_1 + a}{l_1} + pa\,\frac{l_1 + \frac{a}{2}}{l_1} = \frac{p}{2}\,(l_1 + c_1 + 2a + b) \quad . \quad 186.$$

In der Strecke AB beträgt die Querkraft für einen Punkt L mit der Abſciſſe x, von A aus gerechnet,

$$Q_x = D_0 - px = \frac{p}{2}\,(l_1 - c_1 - 2x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 187.$$

d. h. die graphiſche Darſtellung ergiebt eine Gerade. Für $x = 0$ iſt $Q_0 = \frac{p}{2}\,(l_1 - c_1)$; für $x = l_1$ iſt $Q^l{}_1 = -\frac{p}{2}\,(l_1 + c_1)$; die Querkraft wird Null für $x_0 = \frac{l_1 - c_1}{2}$.

In der Strecke BC iſt die Querkraft für einen Punkt L_1 mit der Abſciſſe x_1, von C aus gerechnet,

$$Q_{x_1} = \frac{p}{2}\,(b + 2x_1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 188.$$

d. h. die graphische Darstellung derselben ergiebt eine Gerade. Für $x_1 = 0$ ist $Q_0 = \frac{pb}{2}$; für $x_1 = a$ ist $Q_a = \frac{p}{2}(b + 2a)$. Die Querkräfte sind in Fig. 177 *b* graphisch dargestellt.

In der Strecke AB ist das Moment für den Punkt L

$$M_x = D_0 x - \frac{px^2}{2} = \frac{p}{2}(l_1 - c_1)x - \frac{px^2}{2} = \frac{p}{2}(l_1 x - x^2) - \frac{pc_1 x}{2} \quad . \quad . \quad 189.$$

Der erste Theil dieses Ausdruckes ist das Moment, welches in einem frei aufliegenden Balken AB von der Länge l_1 entstehen würde; in Folge des Auslegers und seiner Belastung erhält man demnach hier an jeder Stelle ein um $\frac{pc_1 x}{2}$ kleineres Moment. Die graphische Darstellung ergiebt eine Parabel $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 177 *c*); die Linie $\alpha\delta$ ist die Linie der Gleichung: $y = -\frac{pc_1 x}{2}$. Trägt man also von dieser aus die Ordinaten $z = \frac{p}{2}(l_1 x - x^2)$ auf, so ergeben die von $\alpha\varepsilon$ aus gemessenen Ordinaten die Momente an den einzelnen Stellen. Für $x = 0$ ist $M_x = 0$; für $x = l_1$ ist $M_{l_1} = -\frac{pc_1 l_1}{2} = \varepsilon\delta$. M_x wird Null für jenen Werth von x, für welchen stattfindet: $0 = \frac{p}{2}(l_1 - x) - \frac{pc_1}{2}$, d. h. für $x_0 = l_1 - c_1$; $\alpha\gamma$ ist also gleich $l_1 - c_1$. M_x hat seinen Gröfstwerth für $\frac{dM_x}{dx} = 0$, d. h. für $x_{max} = \frac{l_1 - c_1}{2}$, und es ist

$$M_{max} = \frac{p}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} \cdot \frac{l_1 + c_1}{2} - \frac{pc_1}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} = \frac{p(l_1 - c_1)^2}{8}.$$

In der Strecke BC ist das Moment für den Punkt L_1

$$M_{x_1} = -\frac{pb}{2}x_1 - \frac{px_1^2}{2} = -\frac{p}{2}(bx_1 + x_1^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 190.$$

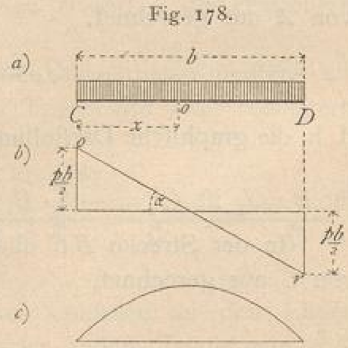
d. h. die graphische Darstellung liefert eine Parabel. M_{x_1} wird Null für $x_1 = 0$ und für $b + x_1 = 0$, d. h. für $x_1 = -b$, also für Punkt C, und wenn die Curve über den Nullpunkt C nach rechts auf die negative Seite der Abscissenaxe fortgesetzt wird, für den Punkt D (Fig. 175 *a*). Ferner wird M_{x_1} ein Gröfstwerth für $0 = b + 2x_1$, d. h. es wird $x_{1max} = -\frac{b}{2}$. Für $x_1 = a$, d. h. für den Auflagerpunkt B, wird $M_{x_1} = -\frac{p}{2}(ab + a^2) = -\frac{p}{2}c_1 l_1$, wie bereits oben gefunden. Hiernach ist die Parabel $\delta\zeta\eta\vartheta$ in Fig. 177 *c* construirt.

b) Balkenträger auf den beiden Kragstücken. Für diesen Träger CD (Fig. 178) gilt das unter 1 für den Träger auf zwei Stützen Gefundene. Daher ist für einen Punkt mit der Abscisse x

$$Q_x = \frac{p}{2}(b - 2x) \quad \text{und} \quad M_x = \frac{p}{2}(bx - x^2). \quad 191.$$

Die graphischen Darstellungen der Querkräfte und Momente giebt Fig. 178.

Fig. 178.

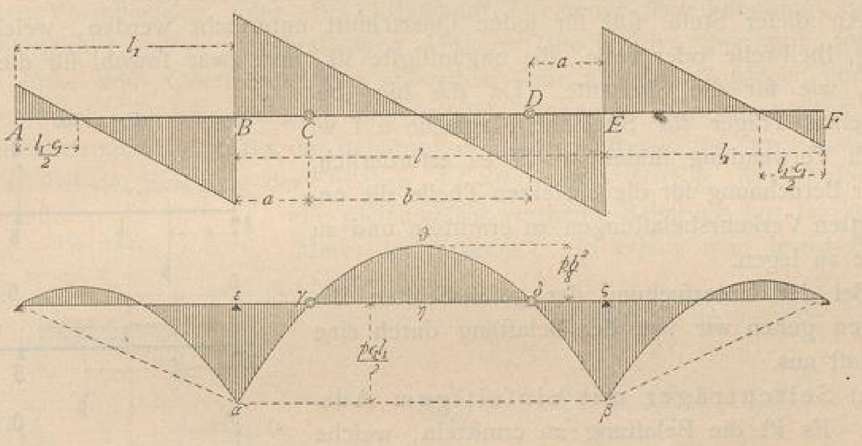


c) Ganzer Träger. Betrachtet man nun den ganzen Träger (Fig. 179), so sieht man zunächst, dafs die Querkräfte und Momente in C gleiche Gröfse haben, ob man vom Träger ABC oder vom Träger CD ausgeht. Auch die Neigung der Linie or, welche die Querkraft auf CD darftellt (Fig. 178), ftimmt mit derjenigen von mn (Fig. 177), welche die Querkraft der Strecke BC darftellt, überein; denn es ift (Fig. 178)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{pb}{2}}{\frac{b}{2}} = p \quad \text{und (Fig. 177}\,b\text{)} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{pa}{a} = p, \quad \text{d. h. } \beta = \alpha;$$

demnach bilden die beiden Linien or und mn eine einzige Linie. Auch die Momenten-Curven beider Theile ftimmen überein; denn für die Abtheilung BC ift nach Gleichung 190: $M_{x_1} = -\frac{p}{2}(bx_1 + x_1^2)$ und für negative x_1, d. h. für Punkte, welche rechts von C liegen, ift $M_{x_1} = -\frac{p}{2}(-bx_1 + x_1^2) = +\frac{p}{2}(bx_1 - x_1^2)$.

Fig. 179.



Dies ift aber nach Gleichung 191 der Werth, welcher fich für das Moment auf der Strecke CD ergiebt. Die in Fig. 177 c gezeichnete Curve $\delta\zeta\eta\vartheta$ ift alfo die richtige Momenten-Curve.

In Fig. 179 find die Momente und Querkräfte für den ganzen Träger angegeben.

b) Vergleich mit dem Träger auf zwei Stützen. Für den mittleren Theil $BCDE$ (Fig. 179) find die Querkräfte genau, wie bei einem frei aufliegenden Träger von der Spannweite $l = 2a + b$; für die Seitenträger find die Querkräfte an jeder Stelle um $\frac{pc_1}{2}$ kleiner, als beim einfachen, auf den Stützen A und B aufruhenden Balkenträger. Die abfoluten Werthe der Querkräfte find alfo auf der pofitiven Seite um $\frac{pc_1}{2}$ kleiner, auf der negativen Seite um $\frac{pc_1}{2}$ gröfser, als dort.

Was die Momente anbelangt, fo ift für die Seitenträger oben bereits nachgewiefen, dafs das Moment an jeder Stelle um $\frac{pc_1 x}{2}$ kleiner ift, als beim frei aufliegenden Balkenträger von der Spannweite l_1. Falls der Mittelträger in B und E frei aufläge, würde an einer beliebigen Stelle mit der Abfciffe ξ, von B aus gemeffen, das Moment $M_\xi = \frac{p}{2}(l\xi - \xi^2) = \frac{p}{2}\left[(b + 2a)\xi - \xi^2\right] = pa\xi + \frac{p}{2}b\xi - \frac{p\xi^2}{2}$ fein, oder, wenn man des bequemeren Vergleiches halber die Abfciffen vom Punkt C aus rechnet und mit x bezeichnet (nach rechts pofitiv), fo wird $\xi = a + x$ und nach einigen Umformungen

$$M_x = \frac{p}{2}(bx - x^2) + \frac{p}{2} c_1 l_1 .$$

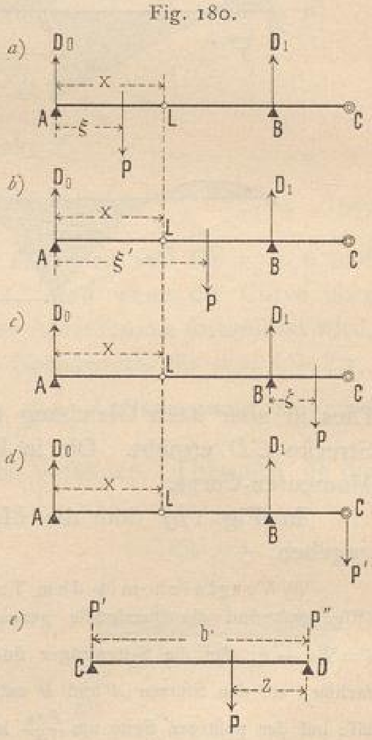
Für den Mittelträger $BCDE$ mit den Gelenken in C und D ift, wie oben gezeigt, das Moment $M_x = \frac{p}{2}(bx - x^2)$, alfo um $\frac{p}{2} c_1 l_1$ kleiner, als wenn die Auflagerung in gewöhnlicher Weife in B und E erfolgte. Nun ift aber diefe Differenz $\frac{p}{2} c_1 l_1$ gerade das negative Moment an den Stützen B und E; die von der Wagrechten $\alpha\beta$ in Fig. 179 aus gemeffenen Ordinaten ergeben daher die Momente des in B und E frei aufliegenden Trägers. Conftruirt man demnach die Parabel der Gleichung $\frac{p}{2}(l\xi - \xi^2)$ in gewöhnlicher Weife und zieht durch die Punkte γ und δ, in welchen die Lothrechten der Auslegerenden die Parabel fchneiden, eine Wagrechte $\varepsilon\zeta$, fo find die von diefer Linie aus gemeffenen Ordinaten die Momente.

Es empfiehlt fich, die Auslegerlänge fo zu beftimmen, dafs das negative Moment über den Stützen abfolut genommen genau fo grofs ift, wie das pofitive Moment in der Mitte. Man theile zu diefem Zwecke einfach die Pfeilhöhe der Parabel $\alpha\vartheta\beta$ in zwei gleiche Theile und ziehe durch den Theilpunkt eine Wagrechte; alsdann geben die Längen $\varepsilon\gamma$, bezw. $\delta\zeta$ die Längen der Ausleger.

β) Zweiter Belaftungsfall: Der Träger ift auf einen Theil feiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Laft belaftet.

An diefer Stelle foll für jeden Querfchnitt unterfucht werden, welche Belaftung, theilweife oder volle, die ungünftigfte ift, und zwar fowohl für die Querkräfte, wie für die Momente. Da die hier befprochenen Träger für Speicher, Magazine u. f. w. vielfach Verwendung finden, fo ift es erforderlich, bei der Berechnung für die einzelnen Theile die ungünftigften Verkehrsbelaftungen zu ermitteln und zu Grunde zu legen.

Fig. 180.



Bei der Unterfuchung der gefährlichften Belaftungen gehen wir von der Belaftung durch eine Einzellaft aus.

α) Seitenträger mit einfeitigem Ausleger. Es ift die Belaftung zu ermitteln, welche in einem Querfchnitt L im Abftande x vom linken Auflager A die gröfste Querkraft und das gröfste Moment hervorruft. Liegt eine Laft P links von L im Abftande ξ von A (Fig. 180 *a*), fo erzeugt fie die Auflagerdrücke

$$D_0 = \frac{P(l_1 - \xi)}{l_1} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P\xi}{l_1},$$

ferner

$$Q = -\frac{P\xi}{l_1} \quad \text{und} \quad M = \frac{P\xi}{l_1}(l_1 - x).$$

Liegt die Einzellaft P rechts vom Querfchnitt L und links vom Auflager B (Fig. 180 *b*), fo ift

$$D_0 = \frac{P(l_1 - \xi')}{l_1}, \quad D_1 = \frac{P\xi'}{l_1},$$

und für den Querfchnitt L

$$Q = \frac{P(l_1 - \xi')}{l_1}, \quad M = \frac{P(l_1 - \xi')}{l_1} x.$$

Liegt die Einzellaſt auf dem Ausleger um ζ von B entfernt (Fig. 180 c), ſo iſt

$$D_0 = -\frac{P\zeta}{l_1}, \quad D_1 = \frac{P(l_1 + \zeta)}{l_1},$$

und für den Querſchnitt L

$$Q = -\frac{P\zeta}{l_1}, \quad M = -\frac{P\zeta}{l_1}\,x.$$

Liegt endlich die Einzellaſt auf dem Zwiſchenträger CD im Abſtande z vom rechten Auflager D (Fig. 180 e), ſo überträgt ſie im Laſtpunkte C eine Laſt auf den Ausleger im Werthe von $P_1 = \frac{Pz}{b}$ und erzeugt die Auflagerdrücke (Fig. 180 d):

$$D_0 = -\frac{Pz}{b}\,\frac{a}{l_1} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{Pz}{b}\,\frac{(a + l_1)}{l_1};$$

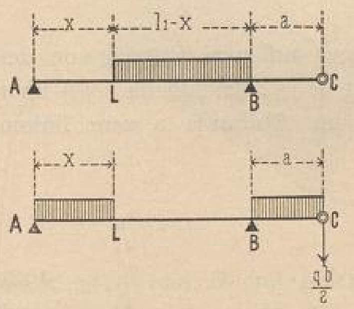
im Querſchnitt L treten dadurch

$$Q = -\frac{Pz}{b}\,\frac{a}{l_1} \quad \text{und} \quad M = -\frac{Pz}{b}\,\frac{a}{l_1}\,x$$

auf. Eine Belaſtung des Seitenträgers DEF iſt ohne Einfluſs auf die Momente und Querkräfte im Querſchnitt L.

Aus Vorſtehendem folgt: Im Querſchnitt L erzeugt jede Belaſtung zwiſchen dem Querſchnitt und dem rechtsſeitigen Auflager eine poſitive Querkraft, jede Belaſtung links vom Querſchnitt und auſserdem jede auf dem Ausleger und dem Zwiſchenträger CD liegende Laſt eine negative Querkraft. Gröſste poſitive Querkraft findet demnach ſtatt bei der Belaſtung der ganzen Strecke BL, gröſste negative Querkraft bei der Belaſtung der Strecken $\overline{AL}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ (Fig. 181). Nennt man die gleichmäſsig vertheilte Belaſtung für das laufende Meter des Trägers q, ſo erhält man leicht für den Querſchnitt L:

Fig. 181.



$$Q_{x_{max}} = \frac{q\,(l_1 - x)^2}{2\,l_1} \quad \ldots \quad 192.$$

$$Q_{x_{min}} = -\frac{q\,x^2}{2\,l_1} - \frac{q}{2}\,\frac{(a^2 + ab)}{l_1},$$

oder, da $\frac{a^2 + ab}{l_1} = c_1$ iſt,

$$Q_{x_{min}} = -\frac{q\,x^2}{2\,l_1} - \frac{q}{2}\,c_1 \quad \ldots \quad 193.$$

Ferner ergiebt ſich aus dem Vorſtehenden: Jede Belaſtung der Strecke AB erzeugt im Querſchnitt L ein poſitives Moment; jede Belaſtung des Auslegers BC und des Zwiſchenträgers erzeugt ein negatives Moment im Querſchnitt L. Demnach findet ſtatt: Gröſstes poſitives Moment in L bei voller Belaſtung des Seitenträgers AB, gröſstes negatives Moment bei Belaſtung des Auslegers BC und des Zwiſchenträgers CD. Man erhält für Querſchnitt L:

$$M_{max} = \frac{q}{2}\,(l_1\,x - x^2) \quad \ldots \quad 194.$$

$$M_{min} = -\frac{q}{2}\,\frac{(ab + a^2)}{l_1}\,x = -\frac{q\,c_1\,x}{2} \quad \ldots \quad 195.$$

Für einen Querſchnitt O auf dem Ausleger (Fig. 182) ergiebt ſich: Eine Laſt P zwiſchen A und B iſt ohne Einfluſs auf den Querſchnitt O, da die Kräfte P, D_0 und D_1

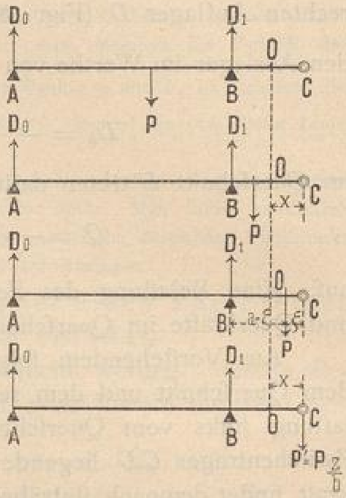
einander im Gleichgewicht halten; das Gleiche gilt von einer Laſt zwiſchen B und dem Querſchnitt O. Liegt P rechts von O, ſo iſt in O:

$$Q = P \quad \text{und} \quad M = -P(x - \xi).$$

Liegt endlich die Laſt auf dem Zwiſchenträger CD im Abſtande z vom rechten Auflager D, ſo wird im Laſtpunkte C ein Druck auf den Ausleger übertragen, $P' = \frac{Pz}{b}$, und für Querſchnitt O iſt

$$Q = \frac{Pz}{b} \quad \text{und} \quad M = -\frac{Pz}{b} x.$$

Fig. 182.



Es folgt: Jede Belaſtung links von O iſt ohne Einfluſs auf Q und M in O; jede Laſt rechts von O auf Ausleger und Zwiſchenträger ruft in O poſitive Querkraft und negatives Moment hervor. Gröſstes poſitives Q und gröſstes negatives Moment werden demnach in O (und in jedem Querſchnitte des Auslegers) ſtattfinden, wenn der Ausleger rechts vom Querſchnitt und der Zwiſchenträger voll mit q belaſtet iſt. Da aber die übrige Belaſtung des Trägers ohne Einfluſs iſt, ſo kann man auch ſagen: Für alle Querſchnitte O des Auslegers finden gröſste poſitive Querkraft und gröſstes negatives Moment bei voller Belaſtung des Balkens ſtatt. Man erhält für Querſchnitt O:

$$\left.\begin{aligned} Q_{max} &= \frac{q}{2}(b + 2x) \\ M_{max} &= -\frac{q}{2}(bx + x^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 196.$$

b) Zwiſchenträger CD. Derſelbe iſt ein Träger auf zwei Stützen von der Stützweite b; es gilt von ihm daſſelbe, was in Art. 151 u. 152 (S. 148 bis 150) über dieſen Träger vorgeführt iſt. Für einen Querſchnitt im Abſtande x vom linken Auflager iſt alſo

$$\left.\begin{aligned} Q_{max} &= \frac{q(b - x)^2}{2b} \\ Q_{min} &= -\frac{qx^2}{2b} \\ M_{max} &= \frac{q}{2}(bx - x^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 197.$$

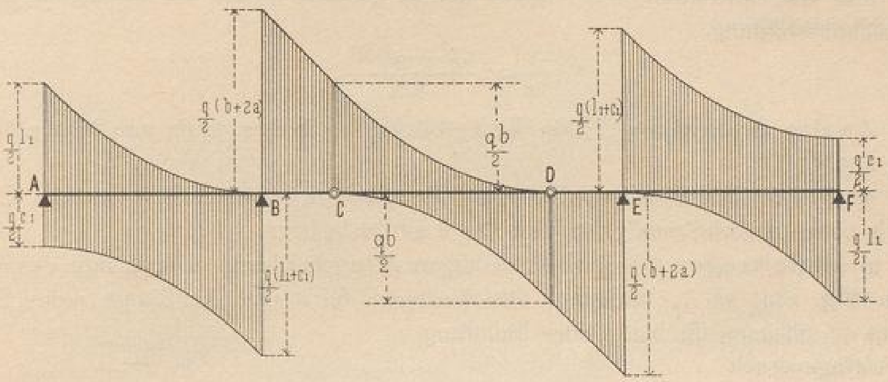
Für alle Querſchnitte des Balkens ſind in Fig. 183a u. 183b die Werthe Q_{max} und Q_{min}, M_{max} und M_{min} in Folge der gleichförmig vertheilten Verkehrslaſt q zuſammengeſtellt; die Curven ergeben ſich aus den vorſtehend vorgeführten Gleichungen.

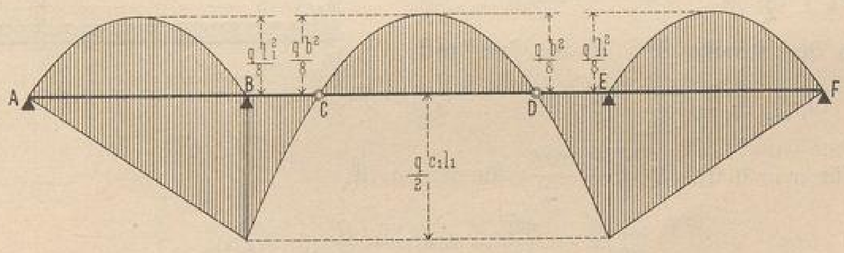
Aus den Gleichungen 192 u. 193 ergiebt ſich, daſs auf dem Seitenträger in der Oeffnung AB die poſitiven Gröſstwerthe von Q genau ſo ſind, wie bei einem in A und B frei gelagerten Träger (vergl. Art. 151, S. 148), die negativen Gröſstwerthe von Q dagegen um das für alle Querſchnitte gleich groſse Stück $\frac{qc_1}{2}$, abſolut genommen, gröſser ſind, als jene. Auf dem Ausleger BC kann die Querkraft durch Verkehrslaſt nach Gleichung 196 nur poſitiv ſein; ermittelt man die gröſste durch

Verkehrslaft hervorgerufene Querkraft für alle Querfchnitte des Auslegers und trägt fie als Ordinaten in den bezw. Querfchnitten auf, fo ergiebt fich eine Gerade. Im Zwifchenträger *CD* ift wieder Alles wie beim Träger auf zwei Stützen. Beim rechtsfeitigen Seitenträger ergeben fich diefelben Werthe, wie beim linksfeitigen Seitenträger; nur kehren fich mit Rückficht auf die Erläuterungen in Art. 151 (S. 142) die Vorzeichen um.

Was die pofitiven und negativen Gröfstmomente durch die angegebene Belaftungsart anlangt, fo erfieht man aus Gleichung 194, dafs das pofitive Gröfstmoment im Seitenträger auf der Strecke *AB* genau diefelben Gröfsen hat, wie bei

Fig. 183.





einem in *A* und *B* frei gelagerten Träger; die negativen Gröfstmomente in den einzelnen Querfchnitten ändern fich geradlinig; der abfolute Gröfstwerth findet bei *B* ftatt und hat die Gröfse $\frac{q\,c_1\,l_1}{2}$. Auf dem Ausleger *BC* kann nach Gleichung 196 nur ein negatives Gröfstmoment, im Zwifchenträger *CD* nur ein pofitives Gröfstmoment ftattfinden (fiehe Gleichung 197). Vom Gröfstmoment auf der Strecke *BCDE* gilt Alles, was in Art. 163 (S. 157) über die Momente durch volle Belaftung *p* vorgeführt ift. Der rechte Seitenträger befindet fich in genau gleicher Lage, wie der linke.

Bei den im Hochbau verwendeten Auslegerträgern ift vielfach der Querfchnitt für jeden der drei Einzelbalken conftant gebildet; derfelbe mufs demnach unter Zugrundelegung des im betreffenden Theile möglichen gröfsten Momentes, abfolut genommen, beftimmt werden. Führt man das Eigengewicht als gleichförmig über den ganzen Balken vertheilte Laft *p* auf das lauf. Meter ein, die Nutzlaft eben fo als Laſt q, ſo iſt für den Seitenträger gewöhnlich das Moment über der Stütze B maſsgebend, d. h.

$$M_{B_{min}} = -\left(\frac{p}{2} c_1 l_1 + \frac{q}{2} c_1 l_1\right) = -\frac{c_1 l_1}{2} (p + q).$$

Alsdann müſſte die Querſchnittsgröſse und -Form nach der Gleichung beſtimmt werden:

$$\frac{J}{a} = \frac{(p + q) c_1 l_1}{2 K}.$$

Ob das gröſste poſitive Moment auf der Strecke AB, abſolut genommen, gröſser iſt, als $M_{B_{min}}$, wird leicht durch Auftragen von Fig. 179 u. 183 und durch Zuſammenrechnen der für p und q erhaltenen Werthe ermittelt.

Für das Mittelſtück CD ergiebt ſich in gleicher Weiſe als Bedingung für die Querſchnittsbildung:

$$\frac{J}{a} = \frac{(p + q) b^2}{8 K}.$$

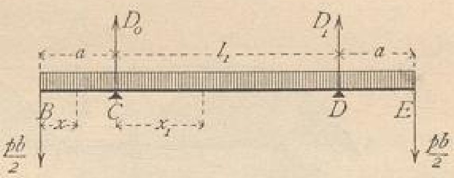
164. Zweite Anordnung.

Zweite Anordnung: Die Kragſtücke befinden ſich am Mittelträger (Fig. 175 b).

α) Erſter Belaſtungsfall: Der Träger iſt über ſeine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Laſt belaſtet.

a) Mittelträger mit beiderſeitigen Kragſtücken. Die Länge des Mittelfeldes (Fig. 184) ſei l_1, diejenige des Auslegers ſei a und die Länge jedes Seitenträgers b; alsdann iſt bei voller Belaſtung der Auflagerdruck

Fig. 184.



$$D_0 = \frac{p}{2} (l_1 + 2 a + b) = D_1 \quad . \quad 198.$$

In der Strecke BC iſt die Querkraft

$$Q_x = -\frac{p b}{2} - p x \quad . \quad . \quad . \quad 199.$$

Für $x = 0$ iſt $Q_0 = -\frac{p b}{2}$; für $x = a$ iſt

$$Q_a = -\frac{p b}{2} - p a = -\frac{p}{2} (b + 2 a).$$

In der Strecke CD iſt die Querkraft

$$Q_{x_1} = D_0 - \frac{p b}{2} - p a - p x_1 = \frac{p}{2} (l_1 - 2 x_1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 200.$$

d. h. genau ſo groſs, wie ohne Ausleger. Für $x_1 = 0$ iſt $Q_0 = \frac{p l_1}{2}$; für $x_1 = l_1$ iſt $Q_{l_1} = -\frac{p l_1}{2}$.

In der Strecke DE iſt die Querkraft eben ſo groſs, wie in BC; nur iſt hier poſitiv, was dort negativ iſt. Die graphiſche Darſtellung der Querkräfte ergiebt Fig. 185 a.

In den Strecken BC und DE haben die Momente die gleichen Werthe, wie bei den in Art. 163 (S. 155) behandelten Auslegern. Demnach iſt, vom Punkte B aus gerechnet,

$$M_x = -\frac{p b}{2} x - \frac{p x^2}{2} = -\frac{p}{2} (b x + x^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 201.$$

Für $x = 0$ ift $M_0 = 0$; für $x = a$ ift $M_a = -\frac{p}{2}(ab + a^2) = -\frac{p}{2} c_1 l_1$.

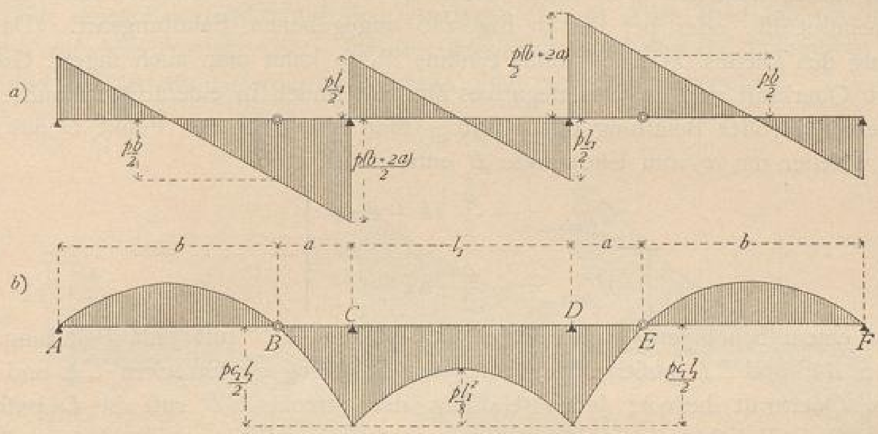
In der Strecke CD ift das Moment

$$M_{x_1} = D_0 x_1 - \frac{p x_1^2}{2} - pa\left(\frac{a}{2} + x_1\right) - \frac{pb}{2}(a + x_1) = \frac{p}{2}(l_1 x_1 - x_1^2) - \frac{p}{2} c_1 l_1 \quad . \quad 202.$$

Der erfte Theil des Momentes ift das Moment für einen frei aufliegenden Balken von der Stützweite l_1; der zweite Theil ift das Moment über der Stütze C, bezw. D.

Alfo auch hier gilt daffelbe, was im vorhergehenden Artikel über den dortigen Mittelträger ($BCDE$) gefagt wurde. Die graphifche Darftellung der Momente ift in Fig. 185 *b* gegeben.

Fig. 185.



𝔟) Seitenträger. Die Seitenträger find frei auf zwei Stützpunkten gelagerte Träger, für welche Alles gilt, was in Art. 154 (S. 147) entwickelt wurde. Demnach ift, wenn der linke Auflagerpunkt hier als Anfangspunkt der Coordinaten gewählt wird,

$$Q_x = \frac{p}{2}(b - 2x) \quad \text{und} \quad M_x = \frac{p}{2}(bx - x^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 203.$$

und es ergiebt fich leicht, wie in Art. 163, dafs die Curven für die Momente und die Querkräfte diefelben find, wie die für die Confole BC gefundenen.

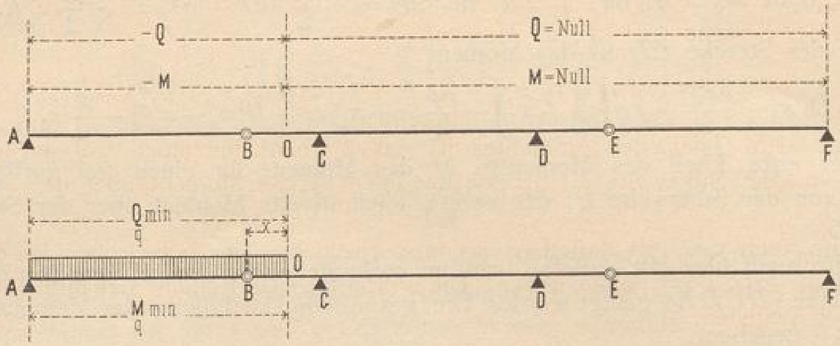
Die Momente und Querkräfte für die verfchiedenen Querfchnitte find in Fig. 185 graphifch aufgetragen.

β) Zweiter Belaftungsfall: Der Träger ift auf einen Theil feiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Laft belaftet.

Geht man in derfelben Weife, welche bei der erften Anordnung gezeigt ift, vom Einfluffe einer an verfchiedenen Stellen des Trägers liegenden Einzellaft aus, fo ergiebt fich:

In einem beliebigen Querfchnitt O des Auslegers BC (Fig. 186) erzeugt eine auf der Strecke AO befindliche Laft negative Querkraft und negatives Moment; jede Belaftung der anderen Trägertheile, alfo der Strecke $OCDE$, hat auf die Querkraft und das Moment in O keinen Einflufs. In Fig. 186 ift dem entfprechend die Strecke AO mit $-Q$, bezw. $-M$ überfchrieben, der übrige Theil des Trägers mit $Q = \text{Null}$, bezw. $M = \text{Null}$. Gröfste negative Querkraft und gröfstes negatives

Fig. 186.

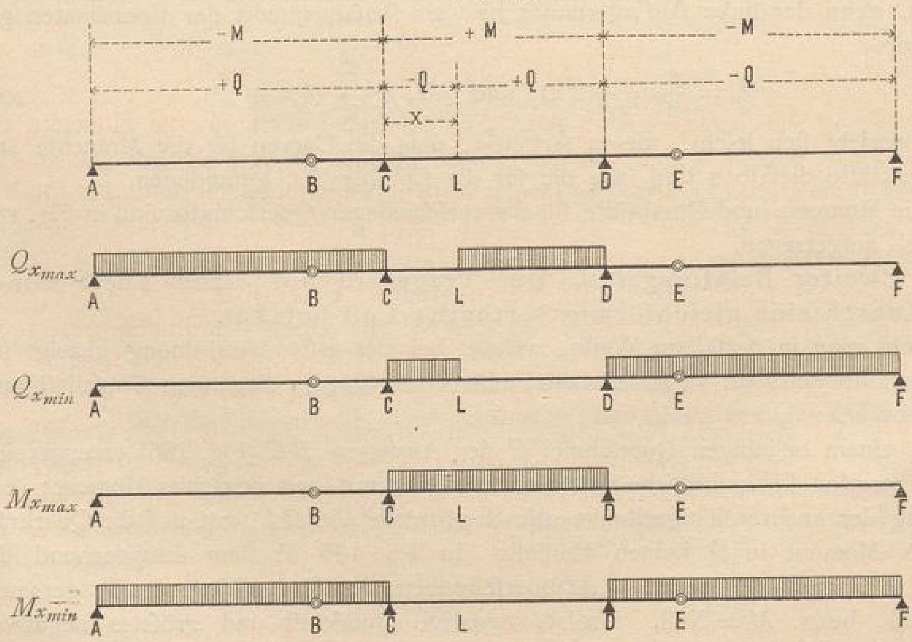


Moment finden demnach in O ftatt, wenn die Strecke $\overline{AO}$ belaftet, alles Andere nicht belaftet ift, oder bei der in Fig. 186 angegebenen Belaftungsart. (Da die Belaftung des Theiles $OCDEF$ ohne Einflufs ift, fo kann man auch fagen: Gröfste negative Querkraft und gröfstes negatives Moment finden in einem Querfchnitte des Auslegers bei voller Belaftung mit q ftatt.) Man erhält für den Punkt O des Auslegers, welcher um x vom Endpunkte B entfernt ift,

$$\left.\begin{aligned} Q_{q_{min}} &= -\frac{q}{2}\,(b + 2x) \\ M_{q_{min}} &= -\frac{q}{2}\,(bx + x^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 204.$$

In einem beliebigen Querfchnitt L des Balkens CD ruft jede Belaftung der Strecken AC und LD pofitive Querkraft, jede Belaftung der Strecken CL und DF negative Querkraft hervor; jede Belaftung der Strecke CD ruft in L pofitives Moment, jede Belaftung der Seitenöffnungen AC und DF erzeugt dagegen in L negatives Moment. In Fig. 187 find die betreffenden Strecken durch die Ueber-

Fig. 187.



fchriften $+Q$ und $-Q$, bezw. $+M$ und $-M$ bezeichnet. Die fich demnach ergebenden ungünftigften Belaftungen, welche bezw. $+Q_{max}$ und $-Q_{max}$, $+M_{max}$ und M_{min} erzeugen, find in Fig. 187 fchematifch dargeftellt.

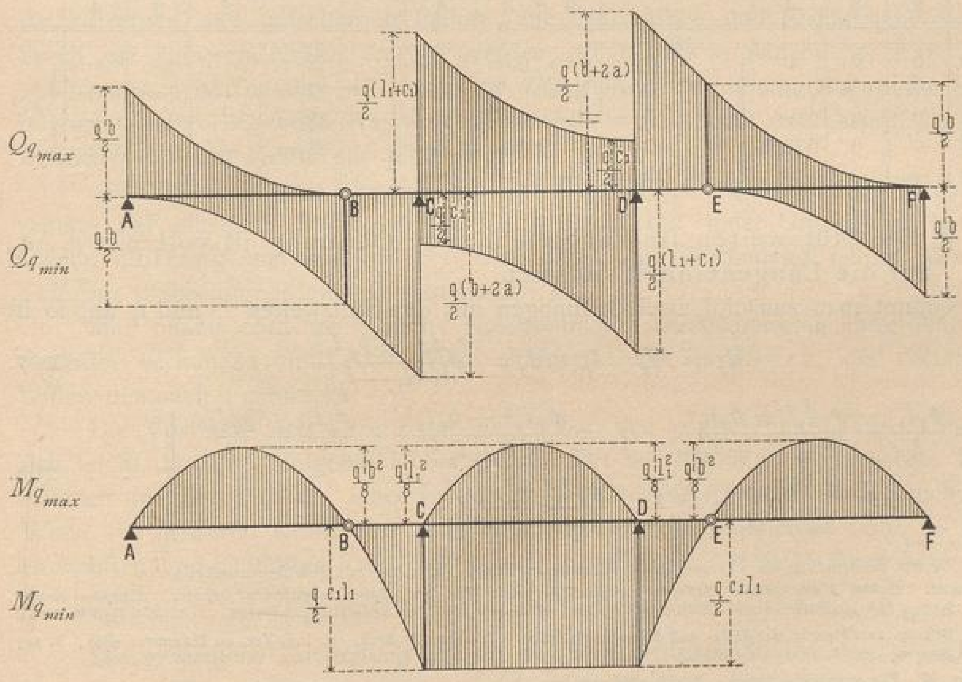
Man erhält für den Punkt L, welcher um x vom Stützpunkt C entfernt liegt,

$$\left.\begin{aligned} Q_{max} &= \frac{q}{2\,l_1}(l_1 - x)^2 + \frac{q}{2}\,c_1 \\ Q_{min} &= -\frac{q\,x^2}{2\,l_1} - \frac{q}{2}\,c_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 205.$$

$$\left.\begin{aligned} M_{max} &= \frac{q}{2}\,(l_1 x - x^2) \\ M_{min} &= -\frac{q}{2}\,c_1 l_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 206.$$

Für einen Querfchnitt auf dem Ausleger DE ift Alles eben fo, wie für denjenigen auf dem Ausleger BC; für die Querfchnitte auf den frei gelagerten Balken AB und EF ift das Erforderliche bereits oben mehrfach angegeben.

Fig. 188.



Ermittelt man nunmehr für jeden Querfchnitt der ganzen Anordnung die Werthe $Q_{q_{max}}$ und $Q_{q_{min}}$ und eben fo $M_{q_{max}}$ und $M_{q_{min}}$ und trägt die gefundenen Werthe als Ordinaten an den betreffenden Querfchnitten auf, fo ergeben fich die Zufammenftellungen in Fig. 188.

4) Continuirliche oder durchgehende Träger.

Die continuirlichen Träger oder Träger auf mehr als zwei Stützpunkten find nach Art. 150 (S. 140) ftatifch unbeftimmt. Die Stützendrücke werden mit Hilfe der Elafticitätslehre ermittelt. Bei der verhältnifsmäfsig geringen Verwendung diefer 165. Princip.

Träger im Hochbau und weil der Raum für die eingehende Befprechung im vorliegenden »Handbuch« nicht ausreicht, foll nur für eine Reihe von gewöhnlichen Belaftungsfällen die Gröfse der Stützendrücke, der Momente und Querkräfte angegeben werden. Wegen des eingehenden Studiums wird auf die unten ftehenden Werke[32]) verwiefen.

Im Folgenden bezeichnen: D_0, D_1, D_2 ... die Auflagerdrücke in den verfchiedenen Stützpunkten *0, 1, 2 ...*; M_0, M_1, M_2 ... die Momente an diefen Stützpunkten; $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ ... die Gröfstmomente in den Oeffnungen *1, 2, 3 ...*; l die Stützweite jeder Oeffnung, falls alle Stützweiten gleich grofs find; l_1, l_2, l_3 ... die Stützweiten der Oeffnungen *1, 2, 3 ...*, falls nicht alle Stützweiten gleich grofs find; p_1, p_2, p_3 ... die gleichförmig vertheilten Belaftungen für die Längeneinheit in den Oeffnungen *1, 2, 3* ... des Trägers.

α) Sämmtliche Oeffnungen haben die gleiche Stützweite l und die gleiche volle Belaftung p für die Längeneinheit zu tragen. Die mafsgebenden Werthe von *M, D* und $\mathfrak{M}$ find in folgender Tabelle zufammengeftellt:

Anzahl der Oeffnungen:

	2	3	4			2	3	4			2	3	4	
$M_0 =$	0	0	0		$D_0 =$	0,375	0,400	0,3929		$\mathfrak{M}_1 =$	0,07031	0,08	0,0772	
$M_1 =$	0,125	0,10	0,10714		$D_1 =$	1,250	0,100	1,1428		$\mathfrak{M}_2 =$	0,07031	0,025	0,0363	pl^2
$M_2 =$	0	0,10	0,0714	pl^2	$D_2 =$	0,375	0,100	0,9186	pl	$\mathfrak{M}_3 =$	—	0,08	0,0363	
$M_3 =$	—	0	0,10714		$D_3 =$	—	0,400	1,1428		$\mathfrak{M}_4 =$	—	—	0,0772	
$M_4 =$	—	—	0		$D_4 =$	—	—	0,3929						

β) Die Stützweiten find ungleich; jede Oeffnung ift voll mit p_1, p_2, p_3 ... auf die Längeneinheit belaftet.

Nimmt man zunächft zwei Oeffnungen mit den Stützweiten l_1 und l_2 an, fo ift

$$M_0 = M_2 = 0, \quad M_1 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8\,(l_1 + l_2)}, \qquad \ldots \ldots \quad 207.$$

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8\,l_1\,(l_1 + l_2)}, \quad D_1 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8\,l_1\,l_2} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2}, \\ D_2 &= \frac{p_2 l_2}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8\,l_2\,(l_1 + l_2)}. \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad 208.$$

[32]) Für das Studium der »Theorie der continuirlichen Träger« feien folgende Schriften empfohlen:

CLAPEYRON. *Calcul d'une poutre élaftique repofant librement fur des appuis inégalement efpacés. Comptes rendus*, Bd. 45, S. 1076.

MOHR. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eifen-Conftruction. Zeitfchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1860, S. 323; 1868, S. 19.

CULMANN, K. Die graphifche Statik. Zürich 1866. S. 273.

WINKLER, E. Die Lehre von der Elafticität und Feftigkeit etc. Theil I. Prag 1867. S. 112.

RITTER, W. Die elaftifche Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken. 2. Aufl. Zürich 1883.

OTT, K. v. Grundzüge der graphifchen Statik. Prag 1870. — 4. Aufl. 1885.

LIPPICH, F. Theorie des continuirlichen Trägers conftanten Querfchnittes. Allg. Bauz. 1871, S. 104 u. 175. (Auch als Sonderabdruck erfchienen: Wien 1871.)

WEYRAUCH, J. J. Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.

WINKLER, E. Vorträge über Brückenbau. Theorie der Brücken. Heft I: Aeufsere Kräfte gerader Träger. 3. Aufl. Wien 1886.

LAISSLE, F. & A. SCHÜBLER. Der Bau der Brückenträger mit befonderer Rückficht auf Eifen-Conftructionen. Theil I. 4. Aufl. Stuttgart 1867. S. 161.

GRASHOF, F. Theorie der Elafticität und Feftigkeit etc. 2. Aufl. Berlin 1878. S. 100.

CANOVETTI. *Théorie des poutres continues etc.* Paris 1882.

STELZEL, K. Grundzüge der graphifchen Statik und deren Anwendung auf die continuirlichen Träger. Graz 1882.

CASTIGLIANO, A. *Théorie de l'équilibre des fyftèmes élaftiques.* Turin. — Deutfch von E. HAUFF. Wien 1886.

Bei drei Oeffnungen mit den Stützweiten l_1, l_2 und l_1 ergeben fich folgende Werthe:

$$M_0 = M_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4(3 l_2 + 2 l_1)}, \quad \ldots \ldots \quad 209.$$

$$D_0 = D_3 = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4 l_1 (3 l_2 + 2 l_1)}, \quad D_1 = D_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4 l_1 (3 l_2 + 2 l_1)} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2}. \quad 210.$$

Aus diefen allgemeinen Gleichungen kann man in befonderen Fällen die betreffenden Werthe leicht finden. Wenn z. B. eine ganze Oeffnung unbelaftet ift, fo ift einfach in den obigen Ausdrücken das entfprechende p gleich Null zu fetzen.

b) Innere Kräfte der Gitterträger.

Die Balkenträger find entweder vollwandige Träger oder gegliederte Träger, letztere gewöhnlich Gitterträger genannt. Bei den erfteren bildet der ganze Querfchnitt eine zufammenhängende Fläche; bei den letzteren befteht derfelbe aus zwei getrennten Theilen, den fog. Gurtungsquerfchnitten; beide Gurtungen find durch Stäbe mit einander verbunden. 166. Allgemeines.

Die Ermittelung der Spannungen, welche in den vollwandigen Trägern, wozu die hölzernen und gufseifernen Balken, die Walzbalken und Blechträger gehören, durch die äufseren Kräfte erzeugt werden, ift bereits in Abfchn. 2, Kap. 4 vorgeführt worden; dafelbft ift auch die Querfchnittsbeftimmung für diefe Balken gezeigt. Im vorliegenden Kapitel follen defshalb nur die in den Gitterträgern entftehenden inneren Kräfte entwickelt werden.

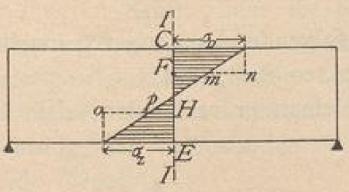
Gitterträger find aus einzelnen Stäben zufammengefetzte Träger. Die Kreuzungspunkte der einzelnen Stäbe heifsen Knotenpunkte. Jeder Gitterträger hat eine obere Gurtung und eine untere Gurtung. Zur Verbindung beider dient das zwifchen ihnen angeordnete Gitterwerk.

Man nennt jedes aus Stäben, welche in den Schnittpunkten ihrer Axen mit einander verbunden find, beftehende Stabwerk ein Fachwerk; die Gitterträger bilden demnach Fachwerke.

Die Vortheile der Gitterträger gegenüber den vollwandigen Trägern ergeben fich leicht durch die folgende Ueberlegung. Die auf Biegung beanfpruchten Träger erleiden in allen Punkten eines jeden Querfchnittes verfchiedene Beanfpruchungen. Wenn die äufseren Kräfte nur fenkrecht zur Balkenaxe gerichtet find, fo ift im einfachften und häufigften Falle die Spannung eines in der Höhe z über, bezw. unter der wagrechten Schwerpunktsaxe liegenden Punktes nach Gleichung 56: $\sigma = \frac{M}{\mathcal{J}} z$.

Die graphifche Darftellung der an den verfchiedenen Stellen des Querfchnittes auftretenden Spannungen σ ift die durch Fig. 189 veranfchaulichte, da $\frac{M}{\mathcal{J}}$ für irgend einen Querfchnitt conftant ift. Im Punkte C des Querfchnittes II ift die Spannung σ_D (Druck), in E ift fie σ_Z (Zug); in allen anderen Punkten des Querfchnittes hat fie geringere Werthe. Da aber die Beanfpruchungen σ_D und σ_Z die zuläffigen Grenzen K'' für Druck und K' für Zug nicht überfchreiten dürfen, fo ift $\sigma_D = K''$ und $\sigma_Z = K'$ zu fetzen und danach die Querfchnittsfläche zu beftimmen. Die zuläffige Beanfpruchung

Fig. 189.



findet alfo nur in wenigen Querfchnittspunkten ftatt, nämlich in denjenigen, welche am weiteften nach oben, bezw. unten von der wagrechten Schwerpunktsaxe abliegen. In allen anderen Querfchnittspunkten ift die wirklich höchftens vorhandene Spannung viel kleiner, als zuläffig wäre, fo z. B. im Punkte F um $\overline{mn}$ und im Punkte H um $\overline{op}$. Demnach wird bei einem vollwandigen, auf Biegung beanfpruchten Träger der Bauftoff durchaus nicht ausgenutzt. Eine Ausnutzung des Materials bis zur zuläffigen Grenze kann nur ftattfinden, wenn die Stäbe in der Richtung ihrer Axe, alfo auf Zug oder Druck beanfprucht werden, weil nur dann die Annahme einer gleichmäfsigen Vertheilung der Kraft über den ganzen Querfchnitt annähernd erfüllt ift. Bei den richtig conftruirten Gitterträgern werden aber alle Stäbe nur auf Zug oder Druck in der Richtung ihrer Axe beanfprucht, fo dafs man der Bauftoff voll ausnutzen und folglich mit geringerem Stoffaufwande als bei vollwandigen Trägern auskommen kann. Hierzu möge noch bemerkt werden, dafs diefe Vortheile nur bei gröfseren Weiten voll in die Erfcheinung treten; bei kleineren Weiten ergeben fich die Stabquerfchnitte für die praktifche Ausführung zu klein, fo dafs für folche Aufgaben vollwandige Träger vorzuziehen find.

167. Eintheilung der Gitterträger.

Nach der Form der Gurtung unterfcheidet man:

1) Parallelträger, d. h. Träger, deren beide Gurtungen parallel (gewöhnlich auch wagrecht) find.

2) Träger mit einer krummen und einer geraden Gurtung oder mit zwei krummen Gurtungen. Die erfteren nennt man, wenn die Endhöhe des Trägers gleich Null ift und die obere Gurtung krumm, die untere Gurtung gerade ift, Bogenfehnenträger; wenn die untere Gurtung gekrümmt, die obere Gurtung gerade ift, Fifchbauchträger. Je nach der Curve der Krümmung unterfcheidet man Parabelträger, Hyperbel- (Schwedler-) Träger, Ellipfenträger etc.

3) Dreieck- und Trapezträger, d. h. Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bezw. ein Paralleltrapez bilden.

Eintheiliges Gitterwerk ift folches, bei welchem fich jeder Gitterftab nur in den Gurtungen mit den anderen Gitterftäben kreuzt; mehrtheiliges Gitterwerk ift folches, bei welchem jeder Gitterftab fich aufser in den Gurtungen noch ein oder mehrere Male mit anderen Gitterftäben kreuzt.

Für die Zwecke des Hochbaues ift wohl immer das eintheilige Gitterwerk, welches eine genaue und einfache Berechnung zuläfft, ausreichend, fo dafs hier nur Träger mit eintheiligem Gitterwerk befprochen werden follen.

Die Gitterftäbe find entweder geneigt oder lothrecht; fie werden in der Folge bezw. als Diagonalen und Verticalen oder Pfoften bezeichnet werden.

Gitterwerk mit zwei Lagen Diagonalen nennt man Netzwerk; Gitterwerk mit einer Lage Diagonalen und einer Lage Pfoften bezeichnet man wohl im engeren Sinne mit dem Namen Fachwerk.

Die Dachbinder find in den allermeiften Fällen Gitterträger, fo dafs die hier zunächft zu entwickelnden allgemeinen Regeln und Gefetze auch für die im nächften Kapitel zu behandelnden Dachbinder giltig find.

168. Voraus-fetzungen.

Bei den nachftehenden Unterfuchungen werden folgende Annahmen gemacht:

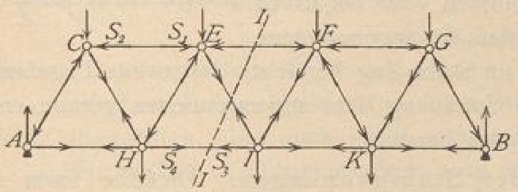
1) die Belaftungen finden nur in den Knotenpunkten ftatt, und

2) die Stäbe find in den Knotenpunkten fo mit einander verbunden, dafs fie fich um diefelben frei drehen können.

1) Verfahren für die Beſtimmung der Stabſpannungen.

Die Ermittelung der Spannungen in den einzelnen Stäben des Fachwerkes erfolgt nach dem allgemeinen Verfahren, welches in Art. 4 (S. 6) angegeben worden iſt. Man unterſucht den Gleichgewichtszuſtand irgend eines Theiles des Fachwerkes unter der Einwirkung aller an demſelben thätigen Kräfte. In jeder Stabaxe wirken zwei Kräfte, welche einander an Gröſse gleich ſind, aber entgegengeſetzten Sinn haben: die Stabſpannungen. Im Stabe CE (Fig. 190) wird von C eine Kraft S_1 auf E übertragen, und eine gleich groſse Kraft S_2 von E auf C; beide ſind Druck. In HI wird von H auf I ein Zug S_3, von I auf H ein gleich groſser Zug S_4 ausgeübt. In Fig. 190 ſind alle auf die Knotenpunkte wirkenden Stabſpannungen angegeben. 169. Erläuterungen.

Fig. 190.



Betrachtet man nur einen Theil des Trägers, etwa den links vom Schnitte II gelegenen, ſo wirken auf denſelben auſser den äuſseren Kräften die Stabſpannungen. Alle Stäbe, deren beide Knotenpunkte dem betreffenden Theile angehören, enthalten zwei Kräfte, die einander das Gleichgewicht halten, alſo für die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nicht in Betracht kommen. In anderer Lage ſind diejenigen Stäbe, welche vom Schnitte II getroffen werden, von denen alſo nur ein Knotenpunkt links vom Schnitte liegt. Nur diejenigen Spannungen dieſer Stäbe, welche auf die dem betreffenden Trägertheile angehörenden Knotenpunkte wirken, ſind als auf das Bruchſtück wirkende Kräfte einzuſetzen; ſo viele Stäbe alſo durch den Schnitt getroffen werden, ſo viele Stabſpannungen ſind in den Gleichgewichtsgleichungen vorhanden, welche für den Trägertheil aufzuſtellen ſind. Dieſe Spannungen ſind die unbekannten Kräfte, für deren Ermittelung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen zu Gebote ſtehen. Da für Kräfte in der Ebene drei Gleichgewichtsbedingungen vorhanden ſind, ſo iſt die Aufgabe auf dem angegebenen, rein ſtatiſchen Wege nur dann lösbar, wenn ſich bei jedem Schnitte nur drei unbekannte Stabſpannungen ergeben.

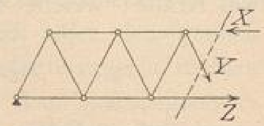
Ein ſolches Fachwerk, bei welchem ſämmtliche Stabſpannungen durch die Geſetze des Gleichgewichtes ſtarrer Körper beſtimmbar ſind, nennt man **ſtatiſch beſtimmt**; reichen dieſe Geſetze dazu nicht aus, ſo iſt das Fachwerk **ſtatiſch unbeſtimmt**. In letzterem Falle ſind die Stabſpannungen auch noch von den elaſtiſchen Formänderungen abhängig. Es iſt aus verſchiedenen Gründen empfehlenswerth, im Hochbau nur ſtatiſch beſtimmte Fachwerke zu verwenden.

Unter Berückſichtigung des Vorſtehenden iſt nun folgendermaſsen zu verfahren. 170. Verfahren im Allgemeinen.
Das Fachwerk wird an derjenigen Stelle durchſchnitten gedacht, an welcher man die inneren Kräfte, hier die Stabſpannungen, kennen lernen will; an den Schnittſtellen werden die inneren Kräfte angebracht und auf das Bruchſtück die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen angewendet. Da hier die Stäbe, wie angenommen wurde, um die Knotenpunkte frei drehbar ſind, ſo muſs jede Stabſpannung mit der Richtung des betreffenden Stabes zuſammenfallen. Sonach ergiebt ſich die folgende Regel.

Man denke fich den Träger fo durchfchnitten, dafs die Stäbe, deren Spannung man fucht, durch den Schnitt getroffen werden, bringe die mit den Stabrichtungen zufammenfallenden Spannungen diefer Stäbe als vorläufig unbekannte Kräfte an (Fig. 191) und ftelle für das Bruchftück die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

Die Stäbe werden gezogen oder gedrückt; im erften Falle wirkt die Spannung vom Knotenpunkte ab (Y und Z in Fig. 191); im zweiten Falle wirkt fie nach dem Knotenpunkt hin (X in Fig. 191). Da man beim Beginne der Berechnung vielfach noch nicht den Sinn der Beanfpruchung kennt, fo werden wir zunächft ftets alle Spannungen als Zugfpannungen, d. h. vom Knotenpunkte ab gerichtet, einführen; die Rechnung ergiebt entweder einen pofitiven oder negativen Werth. Das erftere Ergebnifs bedeutet, dafs die angenommene Pfeilrichtung die richtige war, d. h. dafs im Stabe Zug herrfcht; das zweite Ergebnifs bedeutet, dafs der Sinn der wirklichen Spannung dem angenommenen gerade entgegengefetzt ift, d. h. dafs im Stabe Druck herrfcht.

Fig. 191.



171. Verfahren durch Rechnung.

α) Analytifche Beftimmung der Stabfpannungen. Diefelbe kann in zweifacher Weife gefchehen: entweder durch Aufftellung aller Gleichgewichtsbedingungen oder nach der fog. Momenten-Methode.

172. Gleichgewichtsbedingungen.

a) Die Aufftellung der Gleichgewichtsbedingungen für das Bruchftück (Fig. 192), welches, wie in Art. 170 angegeben, behandelt ift, ergiebt drei Gleichungen, welche nach Art 6 (S. 8) lauten:

$$\left.\begin{array}{c} X \cos \sigma + Y \sin \tau + Z = 0; \quad D_0 - P_1 - P_2 + X \sin \sigma - Y \cos \tau = 0 \\ D_0 \, . \, 2a - P_1 a - Zz = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 211.$$

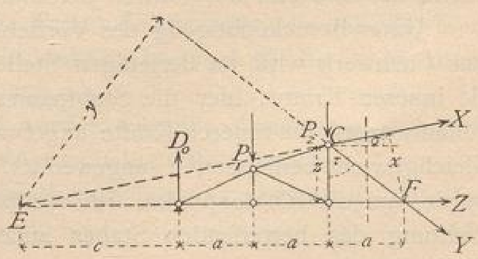
Als Drehpunkt für die dritte Gleichung ift der Punkt C gewählt; alsdann haben X, Y und P_2 kein ftatifches Moment, weil fie für diefen Drehpunkt keinen Hebelsarm haben.

Der angegebene Weg führt ftets, wenn nur 3 Unbekannte, alfo 3 gefchnittene Stäbe vorhanden find, zum Ziele; er hat den Nachtheil, dafs meiftens 3 Gleichungen gelöst werden müffen, felbft wenn man nur eine Spannung kennen lernen will.

173. *Ritter*'fches Verfahren.

b) Das Charakteriftifche der von *Ritter* angegebenen Momenten-Methode ift, dafs man für jede Spannung nur eine Gleichung erhält; das Mittel dazu bietet die Gleichgewichtsbedingung, welche befagt, dafs die algebraifche Summe der ftatifchen Momente aller Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene, gleich Null fein mufs. Wird der Momentenpunkt fo gewählt, dafs zwei von den drei Unbekannten das Moment Null haben, fo bleibt in der Gleichung nur eine Unbekannte. Das ftatifche Moment jeder der beiden Kräfte ift aber gleich Null für den Schnittpunkt beider Kraftrichtungen, weil für diefen Punkt jede der beiden Kräfte den Hebelsarm Null hat. Das Verfahren ift demnach das folgende.

Fig. 192.



Man lege durch den Träger einen Schnitt, fo dafs nur 3 Stäbe mit unbekannten Spannungen gefchnitten werden, bringe diefe Spannungen und alle am

Bruchſtück wirkenden äuſseren Kräfte an, ſetze die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente dieſer Kräfte gleich Null und wähle dabei als Momentenpunkt für die Ermittelung der Spannung eines Stabes ſtets den Schnittpunkt der beiden mitdurchſchnittenen Stäbe.

Um in Fig. 192 die Spannung X zu finden, wählt man F als Momentenpunkt; die Gleichung der ſtatiſchen Momente heiſst dann

$$Xx + D_0 \,.\, 3a - P_1 \,.\, 2a - P_2 a = 0,$$

woraus ſich die einzige Unbekannte X leicht finden läſst. Für C als Momentenpunkt ergiebt ſich

$$D_0 \,.\, 2a - P_1 a - Zz = 0,$$

woraus Z zu berechnen iſt, und für E als Momentenpunkt

$$Yy - D_0 c + P_1 (c + a) + P_2 (c + 2a) = 0,$$

woraus Y zu ermitteln iſt.

Die Länge der Hebelsarme kann meiſtens genügend genau aus der Zeichnung abgegriffen, aber auch leicht rechneriſch ermittelt werden.

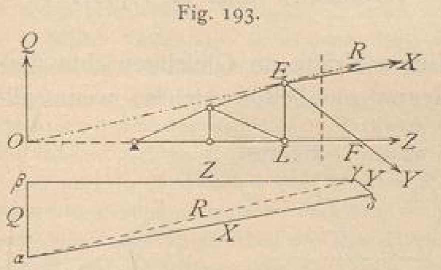
Wir werden den für einen Stab nach dieſer Methode ſich ergebenden Momentenpunkt den dieſem Stabe conjugirten Punkt nennen.

β) Graphiſche Beſtimmung der Stabſpannungen. Auch das graphiſche Verfahren kann nach verſchiedenen Arten durchgeführt werden, entweder nach der Schnittmethode oder nach der Vieleckmethode oder nach einer aus Zeichnung und Rechnung zuſammengeſetzten Weiſe (*Zimmermann*'s Verfahren). 174. Graphiſches Verfahren.

α) Die Schnittmethode wurde von *Culmann* angegeben. 175. *Culmann*'ſches Verfahren.

Werden die ſämmtlichen am Bruchſtück wirkenden äuſseren Kräfte zu einer Mittelkraft Q (Fig. 193) zuſammengefaſst, ſo wirken auf daſſelbe 4 Kräfte, nämlich Q und die drei unbekannten Spannungen der durch den Schnitt getroffenen Stäbe. Für dieſe 4 Kräfte ergiebt ſich ein geſchloſſenes Kraftpolygon. Von einer dieſer Kräfte, nämlich von Q, ſind Gröſse, Richtung und Lage bekannt; von den drei anderen wohl die Richtung und Lage, nicht aber die Gröſse. Erſetzt man 2 der unbekannten Kräfte, etwa X und Y, durch ihre Mittelkraft R, ſo bleiben nur noch die 3 Kräfte Q, Z und R, welche ſich nach Art. 8 (S. 10) in einem Punkte ſchneiden müſſen. R muſs alſo durch den Schnittpunkt O von Q und Z gehen. Da R auſserdem durch den Schnittpunkt E von X und Y geht, ſo ſind 2 Punkte der Richtungslinie von R, ſomit iſt auch dieſe Richtung ſelbſt bekannt. R hat demnach die Richtung OE. Im Punkte O halten ſich nun die 3 Kräfte Q, R und Z das Gleichgewicht; das für dieſelben conſtruirte Kraftpolygon iſt eine geſchloſſene Figur, hier ein Dreieck. Iſt $Q = \alpha\beta$, ſo ziehe man durch β eine Parallele zur Richtung von Z, durch α eine ſolche zur Richtung von R; der Schnittpunkt γ beider Linien ergiebt die beiden Kräfte $R = \gamma\alpha$ und $Z = \beta\gamma$.

Fig. 193.

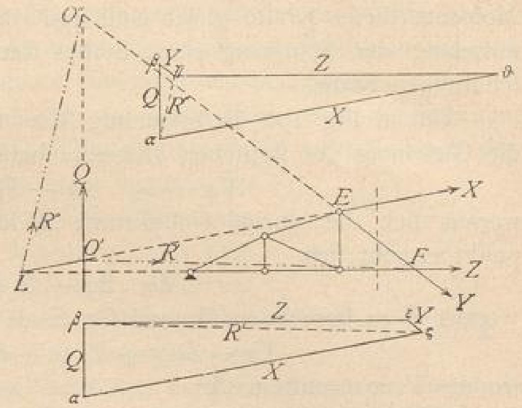


In derſelben Weiſe kann nun R in ſeine beiden Seitenkräfte X und Y zerlegt werden, indem man durch die beiden Endpunkte von R Parallelen zu den Richtungen von bezw. X und Y zieht. Es ergiebt ſich $\gamma\delta = Y$ und $\delta\alpha = X$.

Es iſt für das Endergebniſs gleichgiltig, welche beiden von den unbekannten Spannungen man zu einer Mittelkraft vereinigt. Man kann auch Y und Z (Fig. 194) durch ihre Mittelkraft R' erſetzen, welche dann durch F und den Schnittpunkt O' der Kraft X mit Q geht. Als Kraftpolygon erhält man $\alpha\beta\varepsilon\zeta$.

Eben fo kann man auch X und Z zu einer Mittelkraft vereinen und erhält die ebenfalls in Fig. 194 gezeichnete Conftruction.

Fig. 194.



Die angegebene Conftruction giebt zugleich Auffchlufs darüber, ob die Stäbe gezogen oder gedrückt werden. Da die am Bruchftück wirkenden Kräfte im Gleichgewicht find, fo haben fie nach Art. 15 (S. 12) denfelben Umfahrungsfinn, und demnach ift der Sinn aller im Kraftpolygon vorkommenden Kräfte bekannt, wenn der Sinn einer derfelben bekannt ift. Hier ift ftets der Sinn von Q bekannt; denn dies ift die Querkraft für den bezüglichen Querfchnitt. Q hat den Sinn von α nach β; alfo ift in Fig. 193 Z von β nach γ, d. h. vom Knotenpunkt L ab gerichtet, Y von γ nach δ und X von δ nach α gerichtet. X wirkt alfo nach dem Knotenpunkte E hin, ift demnach Druck, während Z und Y Zug bedeuten. Richtung, Gröfse und Lage der Kraft Q für eine gegebene Belaftung find mit Hilfe des Kraft- und Seilpolygons leicht beftimmbar. (Siehe Art. 153, S. 146.)

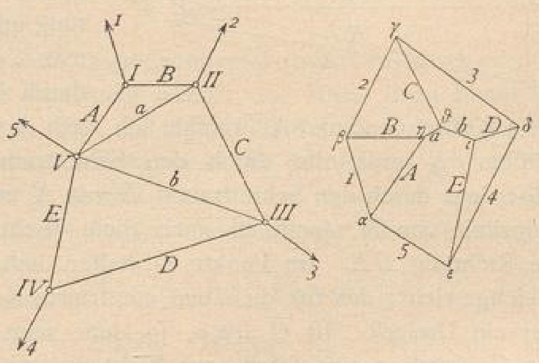
176. *Cremona*'fches Verfahren.

b) Die Vieleckmethode ift von *Cremona* angegeben worden.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein. Randftäbe feien Stäbe, welche zwei auf einander folgende äufsere Knotenpunkte mit einander verbinden, alfo *I II*, *II III* . . . in Fig. 195; Zwifchenftäbe feien Stäbe, welche zwei nicht auf einander folgende äufsere Knotenpunkte verbinden, alfo *II V*, *III V* in Fig. 195.

Da alle auf das Fachwerk wirkenden äufseren Kräfte im Gleichgewichte find, fo ift für diefelben ein gefchloffenes Kraftpolygon möglich, welches, wenn alle äufseren Kräfte nach Gröfse und Richtung gegeben find, leicht conftruirt werden kann. Aufserdem find an jedem Knotenpunkte die an demfelben wirkenden Kräfte für fich im Gleichgewicht; fonach ift für jeden diefer Knotenpunkte ein weiteres, fich fchliefsendes Kraftpolygon zweiter Ordnung möglich. An jedem Knotenpunkte wirken: eine äufsere Kraft, die im befonderen Falle Null fein kann, und die Spannungen der Stäbe, welche fich in ihm fchneiden, alfo im Knotenpunkte *II* die Kräfte *2*, *B*, *C*, *a*.

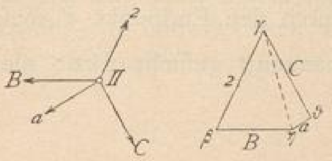
Fig. 195.



In den meiften der kleinen Kraftpolygone kommt nun je eine äufsere Kraft vor, welche bereits im grofsen Hauptpolygon der äufseren Kräfte enthalten ift; es wird alfo offenbar möglich fein, jedes kleine Kraftpolygon fo an das grofse zu legen, dafs die beiden gemeinfame äufsere Kraft durch diefelbe Gerade dargeftellt wird. Da ferner jeder Stab zu zwei Knotenpunkten gehört, fo kommt jede Stabfpannung in zwei Kraftpolygonen zweiter Ordnung vor. Es wird nun durch zweckmäfsige Anordnung möglich, die kleinen Kraftpolygone fo in das grofse einzufchachteln, dafs nicht nur jede äufsere Kraft, fondern auch jede Stabfpannung nur einmal im Kräftezuge vorkommt, d. h. auch die kleinen Kraftpolygone hängen dann fo zufammen, dafs die zweien gemeinfame Stabfpannung durch diefelbe Gerade dargeftellt wird.

Für die Conftruction der kleinen Kraftpolygone ift Folgendes zu beachten. Wenn, wie hier, die Richtung fämmtlicher Kräfte bekannt ift und das Kraftpolygon wegen des Gleichgewichtes der Kräfte fich fchliefst, fo ift die Conftruction deffelben ftets möglich, falls am Knotenpunkte nur zwei unbekannte Kräfte vorhanden find. Denn feien etwa in Fig. 196 B und 2 bekannt, a und C unbekannt, fo erfordert das Gleichgewicht, dafs die Mittelkraft von a und C der bekannten Mittelkraft von 2 und B der Gröfse nach genau gleich ift. Die bekannte Mittelkraft von 2 und B ift aber die Verbindungslinie $\eta\gamma$ im Kraftpolygon, und diefelbe ift im entgegengefetzten Sinne genommen ohne Schwierigkeit in die beiden Seitenkräfte C und a zu zerlegen, indem durch den einen Endpunkt, etwa γ, eine Parallele zu C, durch den anderen Endpunkt, etwa η, eine Parallele zu a gezogen wird. Der Schnittpunkt ϑ ergiebt $\gamma\vartheta = C$ und $\vartheta\eta = a$. Alsdann ift $\beta\gamma\vartheta\eta$ das kleine Kraftpolygon für Punkt *II*. Man mufs demnach die kleinen Kraftpolygone fo conftruiren, dafs fich ftets nur 2 Unbekannte ergeben. Zu diefem Zwecke beginnt man mit demjenigen Knotenpunkte, in welchem fich nur 2 Stäbe fchneiden, hier (Fig. 195) alfo etwa mit *I*. Die äufsere Kraft ift bekannt; unbekannt find demnach nur A und B und nach Obigem leicht zu ermitteln. Man geht nun zu einem Knotenpunkt über, von welchem man wiederum alle Kräfte mit Ausnahme von zweien kennt, hier zu *II*. Bekannt find hier 2 und B, unbekannt C und a, demnach leicht ermittelt. So fchreitet man weiter. Ein Knotenpunkt, in welchem fich nur 2 Stäbe fchneiden, ift bei den in der Praxis üblichen Gitterträgern ftets vorhanden.

Fig. 196.



Damit nun jede äufsere Kraft und jede Stabfpannung nur einmal in dem entftehenden Kraftzuge — dem Kräfteplan — vorkommen, ift folgende Regel zu befolgen. Man vereine fämmtliche äufseren Kräfte zu einem gefchloffenen Kraftpolygon, indem man fie in der Folge der Knotenpunkte oder, wie man fagt, in cyclifcher Reihenfolge an einander legt, und ziehe nun durch die Eckpunkte diefes Kraftpolygons Parallelen zu den Randftäben derart, dafs die Parallele zu einem Randftabe, etwa zu A, durch denjenigen Eckpunkt des grofsen Kraftpolygons geht, welcher zwifchen den beiden äufseren Kräften liegt, zwifchen denen der betreffende Randftab im Fachwerk fich befindet. Der Randftab A liegt im Fachwerk zwifchen den äufseren Kräften 1 und 5; die Parallele zu A wird alfo durch den Punkt α zwifchen 1 und 5 gezogen; eben fo die Parallele zum Randftab B durch β zwifchen 1 und 2 etc. Unter Benutzung der hier gezogenen Parallelen conftruire man nun, wie oben angegeben, die kleinen Kraftpolygone; alsdann erhält man einen Linienzug zwifchen den Randftäben, in welchem jede einzelne Linie eine Zwifchenftabfpannung darftellt und in welchem jede Zwifchenftabfpannung nur einmal vorkommt. Die auf den Parallelen zu den Randftäben abgefchnittenen Längen geben die Spannungen der Randftäbe an.

Der Sinn der Stabfpannungen wird hier genau in derfelben Weife aus dem Kraftpolygon für einen Knotenpunkt ermittelt, wie im vorhergehenden Artikel angegeben ift.

c) Verfahren von *Zimmermann* für Fachwerke, welche durch parallele äufsere Kräfte beanfprucht werden. 177. *Zimmermann's* Verfahren.

Die wagrechte Projection des Abftandes je zweier Knotenpunkte derfelben Gurtung fei conftant; fie fei gleich a (abgefehen von derjenigen der zunächft an den Auflagern gelegenen Knotenpunkte der unteren Gurtung). In einem Stabe der oberen Gurtung (Fig. 197), etwa im Stabe *II III*, ift die Spannung bei einer Belaftung, welche für den Punkt 3 das Moment M_3 erzeugt,

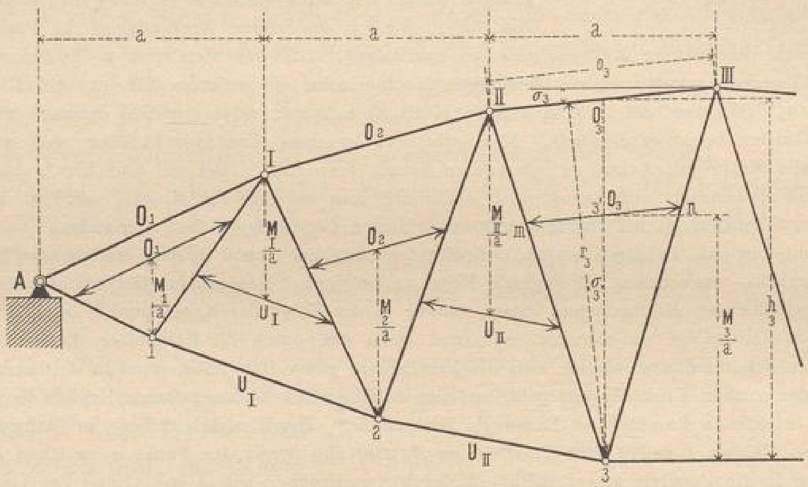
$$O_3 = - \frac{M_3}{r_3}.$$

Das Vorzeichen foll zunächft unberückfichtigt gelaffen und nur die abfolute Gröfse von O_3 in das Auge gefafft werden. Alsdann ift

$$O_3 = \frac{M_3}{r_3} = \frac{M_3}{a} \cdot \frac{a}{r_3} = \frac{M_3}{a} \cdot \frac{\frac{a}{\cos \sigma_3}}{\frac{r_3}{\cos \sigma_3}}.$$

Nun iſt aber $\frac{a}{\cos \sigma_3} = o_3$ gleich der Länge des Stabes *II III* der oberen Gurtung, deſſen Spannung geſucht wird; ferner iſt $\frac{r_3}{\cos \sigma_3} = h_3$ gleich der Länge der lothrechten Linie, welche durch den Momentenpunkt *3* gelegt iſt vom Momentenpunkt *3* bis zum Schnittpunkt mit dem Stabe *II III.* Trägt man nun $\frac{M_3}{a}$ (d. h. eine Kraft) nach beliebigem Maſsſtabe auf der durch den Momentenpunkt *3* gezogenen Lothrechten ab, ſo ſei $3\,3' = \frac{M_3}{a}$; nun ziehe man durch den Endpunkt *3'* dieſer Linie eine Parallele zu dem Stabe *II III*, deſſen Spannung geſucht wird; dieſe

Fig. 197.



Parallele ſchneide die nächſten Diagonalen in *m* und *n*; dann iſt $\overline{mn}$ die geſuchte Spannung in O_3, und zwar in demſelben Kräftemaſsſtab, in welchem $\frac{M_3}{a}$ aufgetragen iſt. Denn wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke *3 II III* und *3 mn* verhält ſich

$$\frac{\overline{mn}}{o_3} = \frac{3\,3'}{h_3}, \quad \text{d. h.} \quad \overline{mn} = o_3 \frac{3\,3'}{h_3} = \frac{\frac{a}{\cos \sigma_3}}{\frac{r_3}{\cos \sigma_3}} \cdot \frac{M_3}{a}.$$

Dies iſt aber genau der Werth, welcher oben für die Spannung O_3 gefunden iſt.

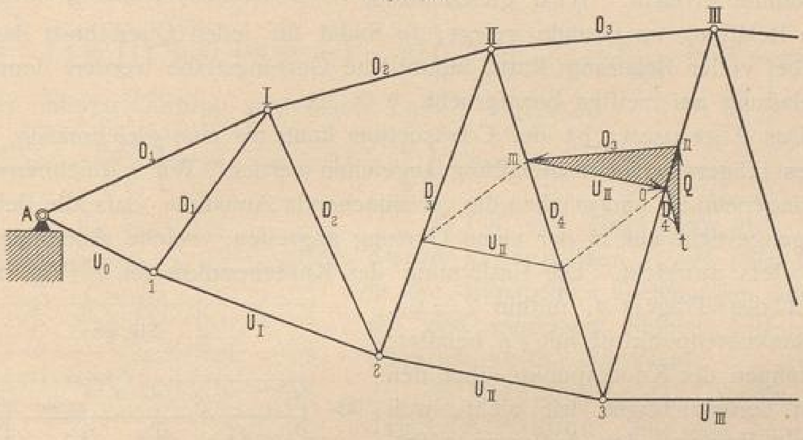
Was vom Stabe *II III* der oberen Gurtung nachgewieſen iſt, gilt für alle Stäbe der oberen und unteren Gurtung. Demnach ergiebt ſich als Regel für die Auffindung der Gurtſtab-Spannungen: Man trage von den Momentenpunkten der Gurtungsſtäbe die Werthe $\frac{M}{a}$ nach beliebigem Kraftmaſsſtabe aus lothrecht ab und ziehe durch die erhaltenen Endpunkte Linien parallel zu den betreffenden Gurtungsſtäben; alsdann geben die zwiſchen den Diagonalen erhaltenen Längen dieſer

Parallelen die Spannungen der Gurtungsftäbe in demfelben Mafsftabe an, nach welchem $\frac{M}{a}$ aufgetragen ift.

In Fig. 197 find für die Stäbe der oberen und unteren Gurtung die Stabfpannungen nach vorftehendem Verfahren ermittelt.

Man kann nach diefem Verfahren auch die Spannungen der Gitterftäbe leicht finden. Denkt man in Fig. 198 einen Schnitt durch die Stäbe O_3, U_{II} und D_4 gelegt, fo wirken auf das links von diefem Schnitt liegende Trägerftück vier Kräfte, welche mit einander im Gleichgewicht fein müffen: die Mittelkraft aller äufseren auf das Trägerftück wirkenden Kräfte, d. h. die Querkraft Q, ferner die Spannungen O_3, U_{II}, D_4 der drei vom Schnitt getroffenen Stäbe. Für diefe vier Kräfte ergiebt fich demnach ein fich fchliefsendes Kraftpolygon. Bekannt find O_3 und U_{II} nach Gröfse und Richtung, Q und D_4 nach ihrer Richtung. Man lege U_{II} in m an O_3 und ziehe durch den Endpunkt o diefer Linie die Parallele zu D_4, durch n eine Parallele zu Q,

Fig. 198.



d. h. die Lothrechte; beide Parallelen fchneiden fich in t; alsdann ift $\overline{ot} = D_4$ und $\overline{tn} = Q$. In Fig. 198 ift das Kraftpolygon fchraffirt[33]). Die Art der Beanfpruchung ergiebt fich, wie ftets, aus dem Umfahrungsfinn im Kraftpolygon.

Wenn einzelne Felder in der wagrechten Projection andere Knotenpunktsabftände haben, als a, fo ändert dies im Grundgedanken nichts; im Einzelnen wird die Conftruction etwas anders. Die Werthe $\frac{M}{a}$ kann man durch Rechnung oder durch Conftruction beftimmen.

2) Parallelträger mit Netzwerk oder zwei Scharen von Diagonalen.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Um diefe Spannungen für eine beliebige Belaftung zu ermitteln, bezeichnen wir die Mittelkraft aller auf das Bruchftück links vom Schnitte II (Fig. 199) wirkenden äufseren Kräfte mit Q. Für irgend einen Stab CE der oberen Gurtung ift F der Momenten- oder conjugirte Punkt, und das Moment der äufseren Kräfte in Bezug auf diefen Punkt ift $M = Q\eta$. Daraus folgt als Bedingungsgleichung: 178. Berechnung der Gurtungsfpannungen.

$$0 = M + Xh, \quad \text{woraus} \quad X = -\frac{M}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 212.$$

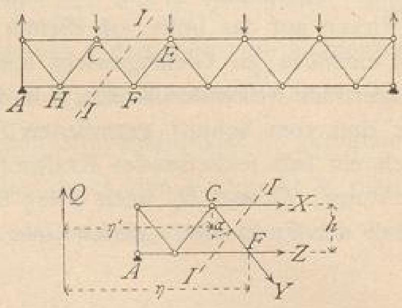
[33]) Dafs in Fig. 198 der Endpunkt o von U_{II} auf die Diagonale $III\,3$ fällt, ift zufällig.

In gleicher Weiſe ergiebt ſich für C als Momentenpunkt, wenn M_1 das Moment von Q in Bezug auf C iſt,

$$0 = M_1 - Zh, \quad \text{woraus} \quad Z = \frac{M_1}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 213.$$

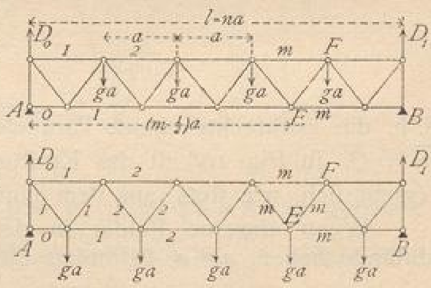
Da bei einem Träger auf zwei Stützen M ſtets die angegebene Drehrichtung hat (ſtets poſitiv iſt, vergl. Art. 156, S. 150), ſo folgt aus den Gleichungen 212 u. 213: Bei Trägern auf zwei Stützen werden die oberen Gurtungsſtäbe ſtets gedrückt, die unteren Gurtungsſtäbe ſtets gezogen. Ferner: X_{max} und Z_{max} werden bei derſelben Belaſtung wie M_{max} ſtattfinden, d. h. in jedem Gurtungsſtabe findet gröſste Beanſpruchung bei derjenigen Belaſtung ſtatt, bei welcher das Moment für den dem Stabe conjugirten Punkt ſein Maximum erreicht. Wird gleichmäſsig vertheilte Belaſtung zu Grunde gelegt, ſo findet für jeden Querſchnitt das gröſste Moment bei voller Belaſtung ſtatt; ſämmtliche Gurtungsſtäbe werden demnach bei voller Belaſtung am meiſten beanſprucht.

Fig. 199.



α) Das Eigengewicht der Conſtruction kann als eine gleichmäſsig über die Länge des Trägers vertheilte Belaſtung angeſehen werden. Wir bezeichnen es mit g für die Längeneinheit und machen die vereinfachende Annahme, daſs alle Belaſtungen durch Eigengewicht nur in der einen Gurtung angreifen, welche Annahme für den Hochbau ſtets ausreicht. Die Entfernung der Knotenpunkte ſei a (Fig. 200), die Felderzahl des Trägers n, mithin $l = na$. Jeder Mittenknotenpunkt iſt mit ga belaſtet; die Belaſtungen der Knotenpunkte über den Auflagern berückſichtigen wir nicht, weil dieſe unmittelbar von den Auflagern aufgenommen werden.

Fig. 200.



Greifen die Laſten an der oberen Gurtung an (Fig. 200 a), ſo iſt bei der angenommenen Diagonalenanordnung der Auflagerdruck

$$D_0 = D_1 = (n-1)\,\frac{ga}{2}.$$

Für den m-ten Stab der oberen Gurtung iſt E der Momentenpunkt und

$$M = D_0\left(m - \frac{1}{2}\right)a - (m-1)\,ga\left(\frac{m-2}{2}\,a + \frac{a}{2}\right);$$

$$M = \frac{ga^2}{2}\left[(n+1)\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2\right];$$

$$X_m^g = -\frac{ga^2}{2h}\left[(n+1)\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 214.$$

Für den m-ten Stab der unteren Gurtung iſt F der Momentenpunkt und

$$M_1 = D_0\,ma - (m-1)\,ga\,\frac{ma}{2} = \frac{ga^2}{2}\,m\,(n-m);$$

$$Z_m^g = \frac{ga^2}{2h}\,m\,(n-m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 215.$$

Greifen die Laſten an der unteren Gurtung an (Fig. 200 *b*), ſo iſt

$$D_0 = D_1 = \frac{n g a}{2}.$$

Genau wie oben erhält man

$$X_m^g = -\frac{g a^2}{2 h}\left[m(n - m + 1) - \frac{n}{2}\right] \quad \text{und} \quad Z_m^g = \frac{g a^2}{2 h} m (n - m) \quad . \quad 216.$$

Wenn die Diagonalen eine andere Richtung haben, ſo daſs die erſte vom Auflagerpunkt nach der Mitte anſteigt, ſo ergeben ſich etwas andere Formeln, die auf gleiche Weiſe, wie eben gezeigt, zu ermitteln ſind.

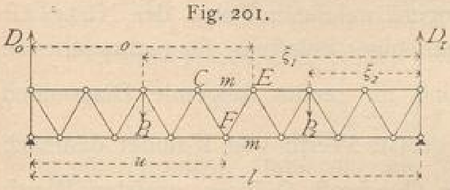
b) Die gröſsten Gurtungsſpannungen in Folge gleichmäſsig vertheilter Nutzlaſt finden ſtatt, wenn der ganze Träger belaſtet iſt. Nennt man die gleichmäſsig vertheilte Nutzlaſt für die Längeneinheit p, ſo ergeben ſich offenbar für dieſe Belaſtung, die für den Knotenpunkt gleich $p a$ iſt, genau dieſelben Formeln, wie für das Eigengewicht, wobei nur g durch p zu erſetzen iſt. Man erhält alſo für an der oberen Gurtung angreifende Laſten (Fig. 200 *a*)

$$X_m^p = -\frac{p a^2}{2 h}\left[(n + 1)\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2\right] \quad \text{und} \quad Z_m^p = \frac{p a^2}{2 h} m (n - m), \quad 217.$$

für an der unteren Gurtung angreifende Laſten (Fig. 200 *b*)

$$X_m^p = -\frac{p a^2}{2 h}\left[m(n - m + 1) - \frac{n}{2}\right] \quad \text{und} \quad Z_m^p = \frac{p a^2}{2 h} m (n - m) \quad . \quad 218.$$

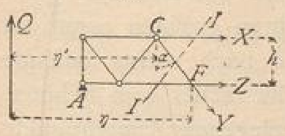
Fig. 201.



c) Für eine Belaſtung des Trägers durch Einzellaſten P_1, P_2 (Fig. 201) ſind in die allgemeinen Gleichungen 212 u. 213 die den einzelnen Stäben entſprechenden Momentenwerthe einzuſetzen.

β) Berechnung der Spannungen in den Gitterſtäben. Für eine beliebige Be- 179. Berechnung der Gitterſtabsſpannungen.

Fig. 202.

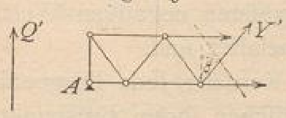


laſtung ſei Q die Mittelkraft aller links vom Schnitte II (Fig. 202) wirkenden äuſseren Kräfte. Nennt man die Spannung der vom Schnitte getroffenen, nach rechts fallenden Diagonale Y, ſo muſs, weil die algebraiſche Summe der auf das Bruchſtück wirkenden lothrechten Kräfte gleich Null iſt, ſtattfinden:

$$0 = Q - Y \cos \alpha, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{Q}{\cos \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 219.$$

für eine nach rechts ſteigende Diagonale (Fig. 203) iſt

Fig. 203.



$$0 = Q' + Y' \cos \beta, \quad \text{woraus} \quad Y' = -\frac{Q'}{\cos \beta} \quad . \quad 220.$$

α) Das Eigengewicht erzeugt, wenn die Laſten an der oberen Gurtung angreifen, den Auflagerdruck (Fig. 200 *a*)

$$D_0 = D_1 = (n - 1)\frac{g a}{2}.$$

Für den m-ten nach rechts fallenden Stab iſt

$$Q_m = (n - 1)\frac{g a}{2} - (m - 1) g a = \frac{g a}{2}(n - 2m + 1),$$

ſonach

$$Y^g_m = \frac{g\,a}{2\cos\alpha}\,(n - 2m + 1); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 221.$$

für den m-ten nach rechts ſteigenden Stab iſt

$$Q'_m = \frac{g\,a}{2}\,(n - 2m + 1), \quad \text{daher} \quad Y'^g_m = -\frac{g\,a}{2\cos\beta}\,(n - 2m + 1) \quad . \quad 222.$$

Aus den Gleichungen 221 u. 222 für Y^g_m und Y'^g_m folgt leicht: Bei gleichmäfsig über den Träger vertheilter Belaſtung g (oder p) auf die Längeneinheit werden die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu ſteigenden Diagonalen gedrückt.

Greifen die Laſten an der unteren Gurtung an (Fig. 200 *b*), ſo iſt für die m-te rechts fallende Diagonale

$$Y = \frac{g\,a}{2\cos\alpha}\,(n - 2m + 2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 223.$$

für die m-te rechts ſteigende Diagonale

$$Y' = -\frac{g\,a}{2\cos\beta}\,(n - 2m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 224.$$

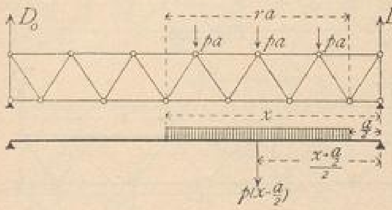
Das Geſetz, daſs bei dieſer Belaſtungsart die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu ſteigenden Diagonalen gedrückt werden, iſt auch hier giltig.

β) Um die ungünſtigſten Gitterſtabſpannungen, welche in Folge der Nutzlaſt entſtehen, zu ermitteln, erwäge man, daſs bei beliebiger Belaſtung für rechts fallende Diagonalen nach Gleichung 219: $Y = \frac{Q}{\cos\alpha}$ und für rechts ſteigende Diagonalen nach Gleichung 220: $Y' = -\frac{Q'}{\cos\beta}$ iſt. Der gröſste Werth von Y findet demnach bei derjenigen Belaſtung ſtatt, bei welcher die Querkraft Q ihren gröſsten Werth hat. Nach Art. 155 (S. 148) hat aber die Querkraft für einen Querſchnitt ihren gröſsten poſitiven Werth, wenn der Trägertheil rechts vom betrachteten Querſchnitte belaſtet, der Trägertheil links davon unbelaſtet iſt, ihren gröſsten negativen Werth bei der umgekehrten Belaſtung. Daraus folgt: Jede nach rechts fallende Diagonale erleidet den gröſsten Zug durch Nutzlaſt, wenn die rechts vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belaſtet, die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte unbelaſtet ſind; dagegen den gröſsten Druck, wenn die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belaſtet, die übrigen unbelaſtet ſind. Da $Y' = -\frac{Q'}{\cos\beta}$, ſo findet in den nach rechts ſteigenden Diagonalen der gröſste Druck ſtatt, wenn Q' ſeinen gröſsten poſitiven Werth hat, wenn alſo nur die Knotenpunkte rechts vom Schnitte belaſtet ſind, der gröſste Zug dagegen, wenn Q' ſeinen gröſsten negativen Werth hat, wenn alſo nur die Knotenpunkte links vom Schnitte belaſtet ſind.

Allgemeiner kann die Regel wie folgt ausgeſprochen werden: Jede Diagonale erleidet den gröſsten Zug, wenn nur die Knotenpunkte zwiſchen ihrem Fuſspunkte und demjenigen Auflager, nach welchem dieſer Fuſspunkt zeigt, belaſtet ſind; jede Diagonale erleidet den gröſsten Druck, wenn nur die Knotenpunkte zwiſchen ihrem Kopfpunkte und demjenigen Auflager belaſtet ſind, nach welchem dieſer Kopfpunkt hinweiſt. Dieſer Satz gilt allgemein, ob die Laſtpunkte an der oberen oder unteren Gurtung liegen. Daraus folgt, daſs für die Diagonalen nicht die volle, ſondern die theilweife Belaftung die ungünftigfte ift und dafs man demnach auch im Hochbau, falls einfeitige Belaftung möglich ift (in Verfammlungsräumen, Schulen etc.), bei der Berechnung der Träger auf diefelbe Rückficht nehmen mufs. Für jede Diagonale ift eine andere ungünftigfte Belaftung einzuführen.

Nachdem nunmehr die ungünftigften Belaftungsarten für die einzelnen Stäbe ermittelt find, handelt es fich um die Auffuchung der durch diefelben erzeugten pofitiven, bezw. negativen Gröfstwerthe von Y und Y'. Greifen die Laften an der oberen Gurtung an (Fig. 204), fo ift Q genau eben fo grofs, als wenn beim vollwandigen Träger die Einzellaften pa je auf die Längen a gleichmäfsig vertheilt wären, d. h. als wenn die Laft p für die Längeneinheit von der Mitte des äufserften Feldes am rechten, bezw. linken Auflager bis zur Mitte desjenigen Feldes der oberen Gurtung vorgerückt ift, dem die Diagonale angehört. Denn im erften Falle ift, wenn r belaftete Knotenpunkte vorhanden find,

Fig. 204.



$$D_0 = \frac{rap}{l}\left(\frac{ra}{2} + \frac{a}{2}\right) = \frac{rpa^2}{2l}(r+1),$$

und da $x = ra + \frac{a}{2} = a\left(r + \frac{1}{2}\right)$, alfo $x + \frac{a}{2} = a(r+1)$ ift, fo wird

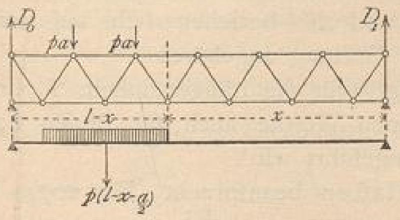
$$D_0 = \left(x + \frac{a}{2}\right)\frac{rpa}{2l} = \frac{p}{2l}\left(x + \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right].$$

Derfelbe Werth ergiebt fich für den vollwandigen Träger in Fig. 204, nämlich

$$D_0 = \frac{p}{2l}\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x + \frac{a}{2}\right).$$

Dies gilt allgemein, falls die den Auflagern zunächft liegenden Knotenpunkte der mit der Nutzlaft belafteten Gurtung um eine ganze Feldweite von den Auflagern abliegen.

Fig. 205.



Nun ift für diejenigen Diagonalen, für welche die gezeichnete Belaftung den gröfsten Zug, bezw. gröfsten Druck erzeugt, $Q_{max} = D_0$, alfo auch

$$Q_{x\,max} = \frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right],$$

daher nach Gleichung 219

$$Y_{max} = \frac{p}{2l\cos\alpha}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 225.$$

In gleicher Weife ergiebt fich nach Fig. 205

$$D_0 = \frac{p\left(l - x - \frac{a}{2}\right)}{l}\left(x + \frac{l - x - \frac{a}{2}}{2}\right) = \frac{p}{2l}\left[\left(l - \frac{a}{2}\right)^2 - x^2\right];$$

$$Q_{x\,min} = \frac{p}{2l}\left[\left(l - \frac{a}{2}\right)^2 - x^2\right] - p\left(l - \frac{a}{2} - x\right) = -\frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right],$$

und

$$Y_{min} = -\frac{p}{2l\cos\alpha}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 226.$$

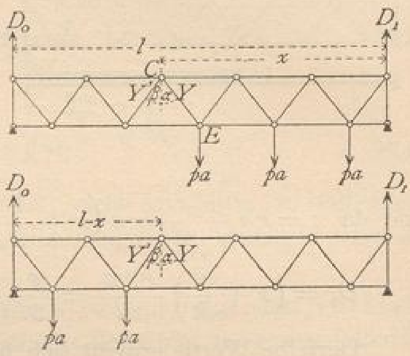
Dem entſprechend wird

$$Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos\beta} = -\frac{p}{2\,l\cos\beta}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 227.$$

$$Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos\beta} = \frac{p}{2\,l\cos\beta}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 228.$$

Greifen die Laſten an der unteren Gurtung an (Fig. 206), ſo iſt (wenn mit ganz geringem Fehler die Belaſtung der beiden den Auflagern zunächſt liegenden Knotenpunkte gleichfalls mit $p\,a$ eingeführt wird) Q_{max}, bezw. Q_{min} eben ſo groſs, wie bei einem vollwandigen Träger, bei welchem die Laſt p für die Längeneinheit vom rechten. bezw. linken Auflager aus bis zur Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vorgerückt iſt, welchem die Diagonale angehört. Der Beweis iſt in gleicher Weiſe, wie oben, zu führen und gilt allgemein, falls die den Auflagern zunächſt liegenden Knotenpunkte der mit Nutzlaſt belaſteten Gurtung um eine halbe Feldweite von den Auflagern entfernt ſind. Demnach iſt

Fig. 206.



$$Q_{max} = \frac{p\,x^2}{2\,l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = -\frac{p\,(l-x)^2}{2\,l}.$$

x bedeutet in dieſen Gleichungen den Abſtand der Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vom rechten Auflager, zu welchem die Diagonale gehört.

Man erhält

$$Y_{max} = \frac{p\,x^2}{2\,l\cos\alpha} \quad \text{und} \quad Y_{min} = -\frac{p\,(l-x)^2}{2\,l\cos\alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 229.$$

$$Y'_{min} = -\frac{p\,x^2}{2\,l\cos\beta} \quad \text{und} \quad Y'_{max} = \frac{p\,(l-x)^2}{2\,l\cos\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 230.$$

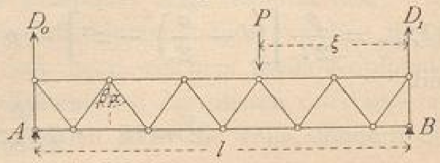
Die zuſammengehörigen Werthe von Y und Y' beziehen ſich auf zwei Diagonalen, welche demſelben Felde der unteren Gurtung angehören.

c) Erfährt der Träger eine volle Belaſtung p für die Längeneinheit, ſo ſind die unter a für Eigengewichtsbelaſtung gefundenen Werthe auch für dieſen Fall giltig, wenn ſtatt des dortigen g die Gröſse p eingeführt wird.

d) Wird endlich der Träger durch Einzellaſten beanſprucht (Fig. 207), ſo erzeugt die Laſt P im Abſtande ξ von B den Stützendruck $D_0 = \frac{P\xi}{l}$. In ſämmtlichen rechts fallenden Diagonalen links vom Laſtpunkt wird dann $Y = \frac{D_0}{\cos\alpha} = \frac{P\xi}{l\cos\alpha}$; in ſämmtlichen rechts ſteigenden Diagonalen links vom Laſtpunkte iſt $Y' = -\frac{P\xi}{l\cos\beta}$.

Eben ſo iſt für alle Querſchnitte rechts vom Laſtpunkte $Q = D_0 - P = -\frac{P\,(l-\xi)}{l}$, mithin für die nach rechts fallenden Diagonalen dieſer Strecke $Y_1 = -\frac{P\,(l-\xi)}{l\cos\alpha}$, für die nach rechts ſteigenden Diagonalen dieſer Strecke $Y_1' = \frac{P\,(l-\xi)}{l\cos\beta}$. Daraus folgt die

Fig. 207.

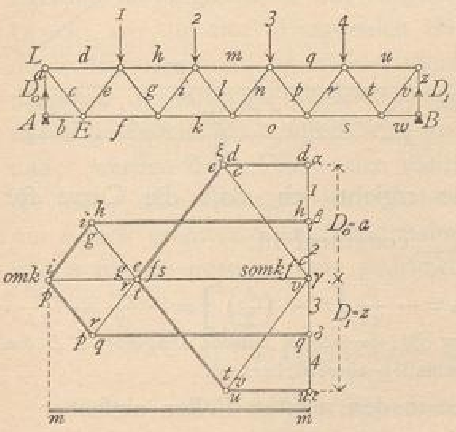


Regel: Die nach dem Laftpunkte zu fallenden Diagonalen werden gezogen, die nach demfelben fteigenden Diagonalen werden gedrückt.

180. Graphifche Ermittelung der Spannungen.

γ) Graphifche Ermittelung der Spannungen. Setzt man zunächft eine gleichmäfsig vertheilte Belaftung (Eigengewicht, bezw. volle Nutzlaft) voraus, fo macht es für das Verfahren keinen Unterfchied, ob die Laften an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen. Wenn in jedem Knotenpunkte, z. B. der oberen Gurtung (Fig. 208), die Belaftung $g\,a$, bezw. $p\,a$ wirkt, fo empfiehlt fich für die Ermittelung der Spannungen die Vieleckmethode, weil diefelbe fämmtliche Stabfpannungen in einem Linienzuge giebt.

Fig. 208.



Nachdem D_0 und D_1 auf bekannte Art gefunden find, trägt man alle äufseren Kräfte *1*, *2*, *3*, *4*, D_1 und D_0 in der Reihenfolge der Knotenpunkte an einander. Es fei $\alpha\beta = 1$, $\beta\gamma = 2$, $\gamma\delta = 3$, $\delta\varepsilon = 4$; nun trägt man an ε (den Endpunkt von *4*) $D_1 = \varepsilon\gamma$ und $D_0 = \gamma\alpha$. Damit fchliefst fich das Kraftpolygon der äufseren Kräfte. Wir gehen nun von demjenigen Knotenpunkte, in welchem fich nur 2 Stäbe fchneiden, d. h. von A aus. In A wirken D_0, a und b; die Zerlegung von D_0 in die beiden Componenten a und b ergiebt $a = D_0$ und $b = 0$. Im Knotenpunkte L wirken jetzt a, c und d. Bei der Zerlegung von a ($= \gamma\,\alpha$) ift zu beachten, dafs die Parallele zum Randftabe d durch den Punkt im Kraftpolygon gehen mufs, der zwifchen D_0 und *1* liegt, d. h. durch α. Man erhält $\alpha\xi = d$ und $\xi\gamma = c$. (Nach Art. 175, S. 171 ift d Druck und c Zug.) Geht man nun zum Knotenpunkte E über, fo wirken dafelbft ($b = 0$) c, e und f; bekannt ift $c = \gamma\,\xi$. Demnach find e und f durch Zerlegung zu ermitteln, wobei die Parallele zum Randftabe f durch den Punkt γ im Kraftpolygon gehen mufs, welcher zwifchen D_1 und D_0 liegt, da der Randftab f im Syftem fich zwifchen den Kräften D_0 und D_1 befindet. Man erhält leicht e und f. (Da c, wie oben gefunden, Zug ift, erhält e Druck, f Zug.) Geht man fo weiter, fo ergiebt fich der in Fig. 208 gezeichnete Kräfteplan. Darin find die Druckfpannungen durch doppelte, die Zugfpannungen durch einfache Linien bezeichnet; m ift Druck, fällt aber mit einer Anzahl von Zugfpannungen zufammen und ift defshalb befonders herausgezeichnet. Die Endpunkte der Stabfpannungen find ftets durch diejenigen Buchftaben bezeichnet, welche die bezüglichen Stäbe im Syftem führen. Die Spannungen b, l, n, w werden gleich Null.

Um die gröfsten in den Gitterftäben durch die Nutzlaften erzeugten Zug-, bezw Druckfpannungen zu beftimmen, beachte man, dafs $Y_{max} = \frac{Q_{max}}{\cos\alpha}$, $Y_{min} = \frac{Q_{min}}{\cos\alpha}$, $Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos\beta}$ und $Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos\beta}$ ift.

Wenn die Laften $p\,a$ an der oberen Gurtung angreifen oder allgemein, wenn die den Auflagern zunächft gelegenen Knotenpunkte der belafteten Gurtung von diefen um eine ganze Feldweite a abliegen, fo ift

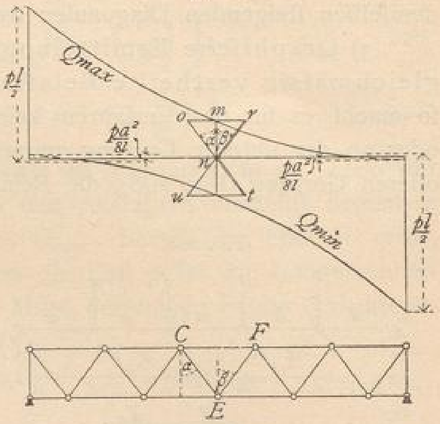
$$Q_{max} = \frac{p}{2\,l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad 231.$$

Die graphifche Darftellung von Q_{max} ergiebt eine Parabel (Fig. 209 *a*).

Für $x = 0$ wird $Q_{max} = -\frac{p\,a^2}{8\,l}$; für $x = l$ wird $Q_{max} = \frac{p}{2\,l}\left[l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{p\,l}{2} - \frac{p\,a^2}{8\,l}$. Q_{max} wird Null für $x = \frac{a}{2}$; die Curve hat ein Minimum für $0 = 2\,x$, d. h. für $x = 0$. Danach ift die Curve in Fig. 209 *a* conftruirt.

In der Gleichung für Q_{max} bedeutet x den Abftand des Endes der Nutzlaft vom rechten Auflager; diefe Belaftung ift die ungünftigfte für die Diagonalen, deren Fufspunkte in demfelben Abftande vom

Fig. 209.



rechten Auflager liegen (Fig. 204). Für die Berechnung der ungünftigften Diagonalfpannungen find fonach diejenigen Werthe von x einzufetzen, welche den Fufspunkten der Diagonalen entfprechen und die zugehörigen Ordinaten aus Fig. 209 *a* zu entnehmen. Für die Diagonale CE ergiebt fich $\overline{mn}$ als Werth von Q_{max}. Die durch n parallel zur Diagonale CE gezogene Linie $\overline{no}$ ergiebt den Werth von

$$Y = \frac{Q_{max}}{\cos\alpha}, \text{ weil } \overline{no} = \frac{\overline{mn}}{\cos\alpha} = \frac{Q_{max}}{\cos\alpha}$$

ift. Nach Gleichung 227 ift $Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos\beta}$, alfo $\overline{nr}$ der gröfste Druck in der rechts fteigenden Diagonale EF.

Ferner ift

$$Q_{min} = -\frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \quad 232.$$

Wird die Differenz $l - x = \xi$ gefetzt, fo ergiebt fich, dafs die Curve für $Q_{min} = -\frac{p}{2l}\left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$ derjenigen für Q_{max} congruent ift.

Für $\xi = 0$ ift $Q_{min} = +\frac{pa^2}{8l}$; für $\xi = l$ ift $Q_{min} = -\frac{p}{2l}\left[l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = -\frac{pl}{2} + \frac{pa^2}{8l}$. Man erhält die in Fig. 209 *a* gezeichnete Curve, in welcher für die rechts fallende Diagonale CE das Minimum nt, für die rechts fteigende Diagonale das Maximum nu eingezeichnet ift.

Ohne bemerkenswerthen Fehler kann man in den meiften Fällen einfacher

$$Q_{max} = \frac{p}{2l}x^2 \quad \text{und} \quad Q_{min} = -\frac{p}{2l}(l-x)^2$$

fetzen. Die Curven verlaufen dann genau fo, wie in Fig. 210.

Greifen die Laften an der unteren Gurtung an oder allgemein, find die an der mobil belafteten Gurtung gelegenen Knotenpunkte zunächft den Auflagern von diefen

Fig. 210.

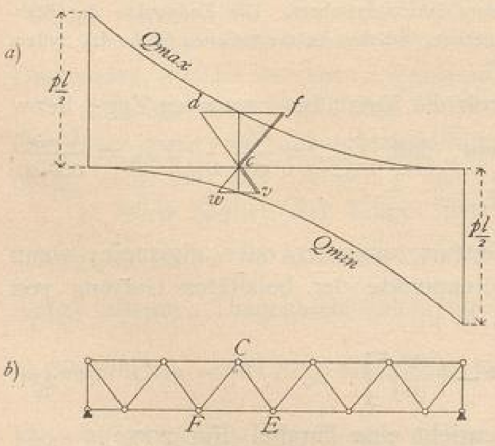
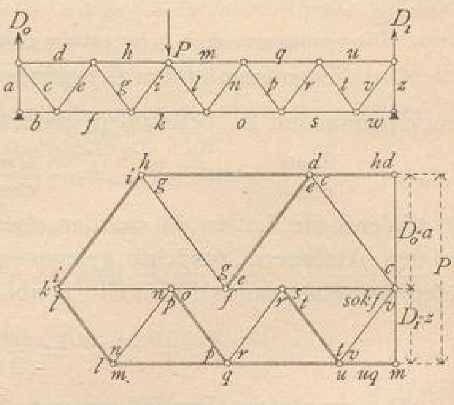


Fig. 211.



um je eine halbe Feldweite entfernt, fo ergiebt das Verzeichnen der Curven für Q_{max} und Q_{min} entfprechend den Gleichungen in Art. 179 (S. 180) die in Fig. 210 *a* dargeftellten Parabeln.

Man erhält genau wie oben: der Maximalzug in CE ift cd; der Maximaldruck in CF ift cf; der Maximaldruck in CE ift cv; der Maximalzug in CF ift cw.

Für eine Einzellaſt wird die Ermittelung der Spannungen bequem mittels des *Cremona*'ſchen Kräfteplans vorgenommen, wie in Fig. 211 geſchehen iſt; dieſelbe iſt ohne Weiteres verſtändlich.

δ) Art der Beanſpruchung der Stäbe bei einem Träger auf zwei Stützen. Nach Art. 178 (S. 175) werden die oberen Gurtungsſtäbe ſtets gedrückt, die unteren ſtets gezogen. Die Diagonalen erhalten verſchiedene Beanſpruchungen. Durch das Eigengewicht erhalten die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen Zug, die nach der Mitte zu ſteigenden Diagonalen Druck; durch die ungünſtigſte Nutzlaſt erhalten im Allgemeinen alle Diagonalen ſowohl Zug, wie Druck. Wenn der gröſste Druck, der in einer Diagonalen durch Nutzlaſt entſteht, kleiner iſt, als der Zug durch Eigengewicht, ſo erleidet die Diagonale nur Zug, umgekehrt nur Druck. Für die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen nahe dem Auflager iſt der Zug in Folge des Eigengewichtes meiſtens viel gröſser, als der gröſste Druck durch Nutzlaſt, und daher werden dieſe Diagonalen meiſtens nur gezogen. Eben ſo ergiebt ſich, daſs die nahe dem Auflager befindlichen, nach der Mitte zu anſteigenden Diagonalen nur Druck erhalten. Die Diagonalen im mittleren Theile des Trägers werden dagegen ſowohl gezogen, wie gedrückt.

181. Art der Stab-beanſpruchung.

3) Parallelträger mit Diagonalen und Pfoſten.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Für eine beliebige Belaſtung wird genau ſo, wie in Art. 178 (S. 175), wenn M das Biegungsmoment für den zu einem oberen Gurtungsſtabe gehörigen Momentenpunkt, M' das Biegungsmoment für den zu einem unteren Gurtungsſtabe gehörigen Momentenpunkt bezeichnet,

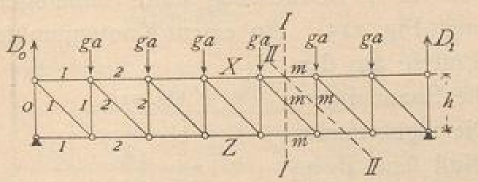
182. Berechnung der Gurtungs-ſpannungen.

$$X = -\frac{M}{h} \quad \text{und} \quad Z = \frac{M'}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 233.$$

Auch hier findet alſo die gröſste Beanſpruchung der Gurtungsſtäbe bei voller Belaſtung des Trägers ſtatt.

Für die Belaſtung durch Eigengewicht, bezw. volle gleichmäſsig vertheilte Nutzlaſt (Fig. 212) iſt die Spannung in den Gurtungsſtäben davon unabhängig, ob die Laſten an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen.

Fig. 212.



Für den m-ten Stab der oberen, bezw. der unteren Gurtung erhält man die durch das Eigengewicht g für die Längeneinheit erzeugten Spannungen

$$X_g = -\frac{g\,a^2 m\,(n-m)}{2\,h} \quad \text{und} \quad Z_g = \frac{g\,a^2}{2\,h}\,(m-1)\,(n-m+1) \quad . \quad 234.$$

und die durch volle Nutzlaſt p für die Längeneinheit erzeugten Spannungen

$$X_p = -\frac{p\,a^2 m\,(n-m)}{2\,h} \quad \text{und} \quad Z_p = \frac{p\,a^2}{2\,h}\,(m-1)\,(n-m+1) \quad . \quad 235.$$

X_p und Z_p ſind zugleich die gröſsten Spannungen, die durch Nutzlaſt hervorgebracht werden.

183. Berechnung der Gitterftabs-fpannungen.

β) Berechnung der Spannungen in den Gitterftäben. Für das Bruchftück in Fig. 213 fei bei beliebiger Belaftung die Querkraft Q; alsdann ift für die Spannung in der Diagonalen

$$Y \cos \alpha = Q, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{Q}{\cos \alpha} \quad \ldots \ldots \quad 236.$$

Ift in Fig. 214 für das Bruchftück die Querkraft Q', fo ift die Spannung im Pfoften

$$V = -Q' \quad \ldots \ldots \quad 237.$$

Für die Diagonalen ift es, da der Schnitt lothrecht gelegt werden kann, gleichgiltig, ob die Laft in der oberen oder unteren Gurtung liegt; für die Pfoften dagegen ergiebt fich, da der Schnitt bei diefen fchräg gelegt wird, ein anderes Q', wenn die Laft oben, als wenn fie unten liegt.

Fig. 213.

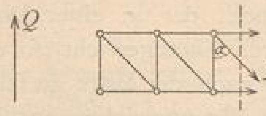
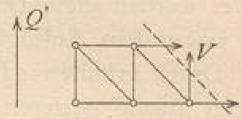


Fig. 214.



a) Das Eigengewicht erzeugt (Fig. 212) in der m-ten Diagonale (Schnitt II) die Querkraft $Q_m = D_0 - (m-1) g a = \frac{g a}{2}(n - 2m + 1)$ und

$$Y^g_m = \frac{Q_m}{\cos \alpha} = \frac{g a}{2 \cos \alpha}(n - 2m + 1) \quad \ldots \ldots \quad 238.$$

Denfelben Ausdruck fanden wir in Art. 179 (S. 178), Gleichung 221, für die beim Netzwerk rechts fallenden Diagonalen. Die in Bezug auf Zug und Druck dort gefundenen Ergebniffe gelten demnach auch hier: Die nach der Mitte fallenden Diagonalen erhalten durch das Eigengewicht Zug; die nach der Mitte fteigenden Diagonalen erhalten Druck.

Für die Ermittelung der Spannungen in den Pfoften ift zu unterfcheiden, ob fich die Laftpunkte oben oder unten befinden. Im erfteren Falle (Fig. 212) ift

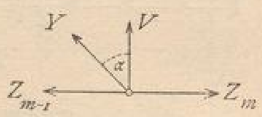
$$V_m = -Q_m = -\frac{g a}{2}(n - 2m + 1), \quad \ldots \ldots \quad 239.$$

im zweiten Falle

$$V'_m = -Q'_m = -\frac{g a}{2}(n - 1 - 2m) \quad \ldots \ldots \quad 240.$$

Die Art der Beanfpruchung ergiebt fich durch Betrachtung eines beliebigen Knotenpunktes an der nicht belafteten Gurtung (Fig. 215). An einem Knotenpunkte der unteren Gurtung wirken, wenn die Laften an der oberen Gurtung angenommen werden, nur die Spannungen der Stäbe, welche fich an ihm treffen. Die algebraifche Summe aller lothrechten Seitenkräfte mufs Null fein, d. h. es mufs $0 = Y \cos \alpha + V$, alfo $V = -Y \cos \alpha$ fein. Hieraus folgt der Satz: Pfoften- und Diagonalfpannung am Knotenpunkte der nicht belafteten Gurtung haben entgegengefetzte Beanfpruchung; die Belaftung, welche in einer Diagonalen Zug erzeugt, erzeugt in demjenigen Pfoften, welcher mit ihr an einem Knotenpunkte der nicht belafteten Gurtung zufammentrifft, Druck und umgekehrt.

Fig. 215.



b) Für die ungünftigfte Beanfpruchung der Gitterftäbe, welche durch die Nutzlaft hervorgebracht wird, ergiebt fich bezüglich der Diagonalen durch diefelbe Beweisführung, wie in Art. 179 (S. 178), die gleiche Regel wie dort. Für die Pfoften

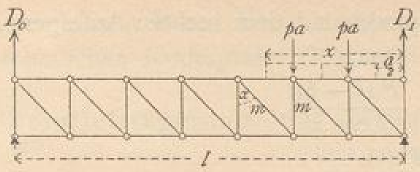


Fig. 216.

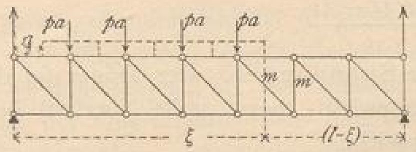


Fig. 217.

ergiebt ſich zugleich aus dem Schluſsſatze unter α: Jeder Pfoſten erhält ſeinen gröſsten Druck (bezw. Zug) bei derjenigen Belaſtung, bei welcher die mit ihm an einem unbelaſteten Knotenpunkte zuſammentreffende Diagonale ihren gröſsten Zug (bezw. Druck) erhält.

Wirken die Laſten an der oberen Gurtung, ſo ergeben ſich die Werthe für die Spannungen, wenn wir wiederum zur Ermittelung von Q die Knotenpunktsbelaſtungen durch gleichförmig vertheilte Laſten erſetzt denken, wie folgt. Für das Maximum von Y_m und das Minimum von V_m ergiebt ſich nach Fig. 216 der Auflagerdruck

$$D_0 = \frac{p\left(x - \frac{a}{2}\right)}{2l}\left(x + \frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = Q_m.$$

Sonach

$$Y_{m \atop max} = \frac{p}{2l \cos \alpha}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad \text{und} \quad V_{m \atop min} = -\frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]. \quad 241.$$

Für Y_{min} und V_{max} findet man nach Fig. 217

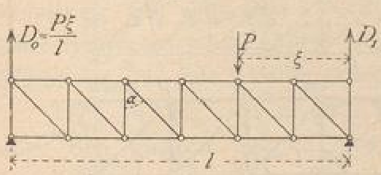
$$Q = -\frac{p}{2l}\left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right];$$

$$Y_{m \atop min} = -\frac{p}{2l \cos \alpha}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad \text{und} \quad V_{m \atop max} = +\frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]. \quad 242.$$

x bedeutet den Abſtand der Mitte desjenigen Feldes, zu dem die Diagonale gehört, vom rechten Auflager; bei den Pfoſten die Mitte des Feldes, zu welchem diejenige Diagonale gehört, die mit dem Pfoſten an einem Knotenpunkte der nicht belaſteten Gurtung zuſammentrifft (hier alſo der unteren Gurtung).

Greifen die Laſten an der unteren Gurtung an, ſo ſtimmen die Formeln für die Diagonalen genau mit den eben entwickelten; auch diejenigen für die Pfoſten, wenn man beachtet, daſs x den ſoeben erwähnten Werth hat, daſs ſich alſo x hier auf die Mitte des Feldes bezieht, zu dem die Diagonale gehört, welche ſich mit dem Pfoſten an einem Knotenpunkte der oberen Gurtung ſchneidet; ſtatt V_m iſt alſo dann V_{m-1} zu ſetzen.

Fig. 218.



c) Wenn der Träger durch eine Einzellaſt belaſtet wird (Fig. 218), ſo erhält jede Diagonale zwiſchen dem Laſtpunkt und dem linken Auflager, nach welchem hier die Diagonalen ſteigen, einen Zug

$$Y = \frac{P\xi}{l \cos \alpha}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 243.$$

jeder Pfoſten auf dieſer Seite der Laſt einen Druck

$$V = -\frac{P\xi}{l}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 244.$$

Jede Diagonale zwifchen dem Laftpunkt und dem rechten Auflager, nach dem die Diagonalen hier fallen, erhält einen Druck

$$Y = -\frac{P(l-\xi)}{l \cos \alpha}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 245.$$

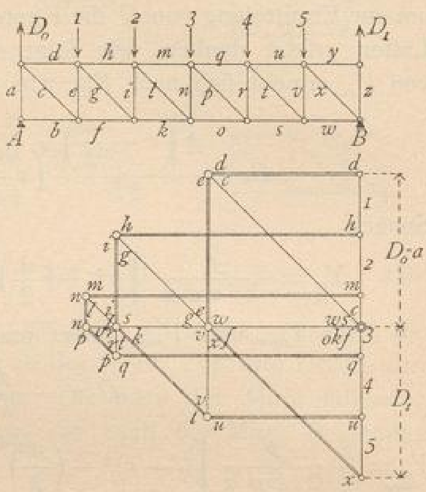
jeder Pfoften auf diefer Seite einen Zug

$$V = \frac{P(l-\xi)}{l}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 246.$$

184. Graphifche Ermittelung der Spannungen.

γ) Graphifche Ermittelung der Spannungen. Der Träger fei durch eine gleichmäfsig vertheilte Laft (Eigengewicht, bezw. volle Nutzlaft) belaftet; in jedem Knotenpunkte der oberen Gurtung wirke die Laft ga, bezw. pa. Hiernach ift in Fig. 219 der Kräfteplan nach dem *Cremona*'fchen Verfahren gezeichnet, worüber weitere Bemerkungen unnöthig find.

Fig. 219.



Wenn die Zeichnung für eine Belaftung g auf die Längeneinheit conftruirt ift, fo geben die Längen der einzelnen Linien auch zugleich die Beanfpruchungen für die Belaftung p auf die Längeneinheit, falls diefelben nur auf einem Mafsftabe abgegriffen werden, auf welchem diejenige Länge pa bedeutet, welche vorher ga bedeutet hatte.

Sind die Maximalfpannungen in den Gitterftäben, welche durch Verkehrslaft erzeugt werden, zu beftimmen, fo ergiebt die Vergleichung der in Art. 183 (S. 185) für $Y_{\substack{max \\ min}}$ und $V_{\substack{max \\ min}}$ gefundenen Werthe mit den in Art. 179 (S. 177) für den Parallelträger mit Netzwerk gefundenen Werthen für Y und Q die genaue Uebereinftimmung beider, falls x den in Art. 183 (S. 185) angegebenen Werth hat.

Die unten ftehende Curve (Fig. 220) ergiebt demnach die Werthe für Q_{max}, fo wie Q_{min} und damit, wie gezeichnet, leicht die Werthe für Y und V. Der für $V_{3\,min}$

Fig. 220.

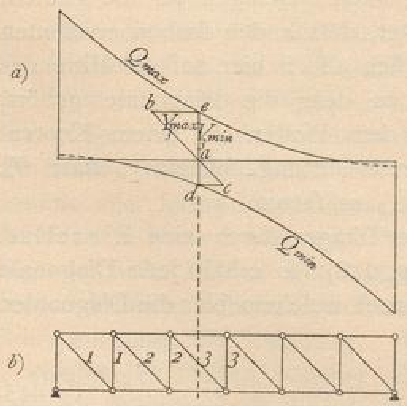
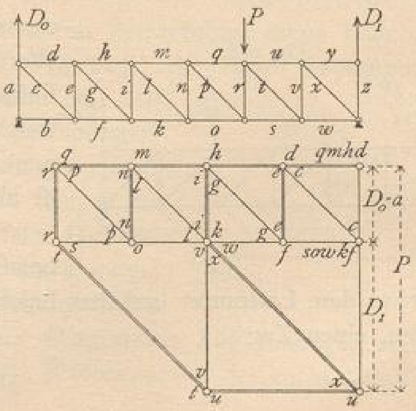


Fig. 221.



angegebene Werth entfpricht einer Belaftung der oberen Gurtung. Auch hier kann ohne merklichen Fehler an Stelle der Curve in Fig. 220a diejenige in Fig. 210a gefetzt werden.

Sämmtliche durch eine Einzellaſt erzeugten Spannungen werden leicht mittels eines *Cremona*'ſchen Kräfteplanes (Fig. 221) ermittelt.

4) Parallelträger mit nur gezogenen, bezw. nur gedrückten Diagonalen.

Im vorhergehenden Kapitel iſt gezeigt worden, daſs die gedrückten Stäbe mit Rückſicht auf Widerſtand gegen Zerknicken unter Umſtänden weſentlich ſtärker conſtruirt werden müſſen, als die einfache Druckbeanſpruchung erfordert Bei der Beſtimmung der Querſchnittsgröſse ſind vielfach Zuſchläge zu machen, welche bei den gezogenen Stäben nicht nöthig ſind. Man hat deſshalb bei gewiſſen Bauſtoffen, beſonders bei Schmiedeeiſen und Fluſseiſen, die Verwendung gedrückter Stäbe möglichſt beſchränkt und ſtatt derſelben, wenn möglich, gezogene angeordnet. Wo aber gedrückte Stäbe nicht entbehrt werden können, empfiehlt es ſich, die kürzeren Stäbe als gedrückte, die längeren als gezogene auszuführen. Bei manchen Bauſtoffen hingegen, insbeſondere beim Holz, macht die Anordnung der Verbindungen eine möglichſt geringe Verwendung von Zugſtäben und eine möglichſt ausgedehnte Verwendung von Druckſtäben wünſchenswerth. 185. Grundſatz.

Bei den Trägern mit Fachwerk iſt die Anordnung von nur gezogenen, bezw. nur gedrückten Diagonalen möglich.

Wir betrachten zunächſt die Träger mit nur gezogenen Diagonalen. 186. Träger mit nur gezogenen Diagonalen.

Wie in Art. 183 (S. 184) nachgewieſen iſt, erzeugt das Eigengewicht, ſo wie auch eine gleichmäſsige Belaſtung aller Knotenpunkte in den nach der Mitte fallenden Diagonalen Zug, in den nach der Mitte ſteigenden Diagonalen Druck. Soll alſo durch die angegebene Belaſtung, welche für den Hochbau weitaus die wichtigſte iſt, in den Diagonalen nur Zug entſtehen, ſo ordnet man nur nach der Mitte fallende Diagonalen an, conſtruirt alſo den Träger genau ſymmetriſch zur Mitte (Fig. 222).

Fig. 222.

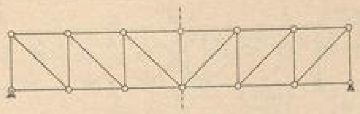
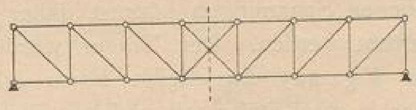


Fig. 223.



Iſt die Felderzahl ungerade, ſo erhalten die Diagonalen im Mittelfelde bei dieſer Belaſtung den Zug und Druck Null (Fig. 223). Bei dieſer Trägerform erhalten je zwei ſymmetriſch zur Mitte liegende Stäbe gleiche Spannungen; dieſelben wurden früher für die eine Hälfte gefunden und ſind demnach leicht zu übertragen.

Die in Fig. 222 u. 223 gezeichneten Diagonalen erhalten aber durch nicht über den ganzen Träger ausgedehnte Belaſtungen unter Umſtänden Druckbeanſpruchungen, und zwar findet, wie in Art. 179 (S. 178) u. 183 (S. 184) ermittelt, in einer Diagonalen der gröſste Druck ſtatt, wenn die Knotenpunkte vom Kopfpunkte der Diagonalen bis zu demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist, belaſtet, die übrigen Knotenpunkte aber unbelaſtet ſind. Durch das ſtets noch vorhandene Eigengewicht findet andererſeits in den Diagonalen eine beſtändige Zugſpannung ſtatt, welche die erwähnte Druckbeanſpruchung vermindert. Diejenigen Diagonalen nun, bei denen (beides abſolut genommen) die Zugſpannung durch das Eigengewicht gröſser iſt, als die gröſstmögliche Druckſpannung in Folge der Verkehrslaſt, werden ſtets gezogen, nie gedrückt. Bei denjenigen Diagonalen dagegen, welche durch das Eigengewicht einen geringeren Zug erhalten, als ungünſtigſtenfalls der Druck durch Nutzlaſt beträgt (wiederum beides abſolut genommen), wird eine Druckbeanſpruchung eintreten, die zu vermeiden iſt. Man bringt deſshalb im betreffenden Felde eine zweite Diagonale mit einer ſolchen Richtung an, daſs die Belaſtung, welche in der bereits im Felde vorhandenen Diagonalen Druck erzeugen würde, in der zweiten Diagonalen Zug hervorruft. Die Diagonale muſs demnach ſo gerichtet ſein, daſs die erwähnte Nutzlaſt die Knotenpunkte vom Fuſspunkte dieſer Diagonalen an bis zu demjenigen Auflager belaſtet, nach welchem dieſer Fuſspunkt hinweiſt; mit anderen Worten, man bringt eine Diagonale an, welche die bereits vorhandene Diagonale kreuzt, eine ſog. Gegendiagonale (in Fig. 224 die punktirte Diagonale *E′F′*).

Damit dieſelbe aber auch wirkſam ſei, erhält die Hauptdiagonale *EF* einen derartigen Querſchnitt, daſs ſie bei Druckſpannungen ausbiegt, daſs ſie alſo in dieſem Falle als nicht vorhanden angeſehen werden kann.

Solche Gegendiagonalen ſind in denjenigen Feldern anzuordnen, in welchen die Hauptdiagonalen unter Umſtänden Druckſpannungen erhalten. In den Feldern nahe am Auflager iſt die Zugſpannung durch das Eigengewicht meiſtens groſs, die Druckſpannung durch Nutzlaſt meiſtens klein, ſo daſs in dieſen Feldern keine Gegendiagonalen nöthig ſind; in den mittleren dagegen ſind ſie anzuordnen. Die Spannungen in den Gegendiagonalen ſind dann genau ſo zu ermitteln, als wären die Hauptdiagonalen nicht vorhanden; jede Gegendiagonale, z. B. *E′F′*, befindet ſich genau in derſelben Lage, wie die ſymmetriſch zur Trägermitte liegende Hauptdiagonale im Träger mit nur nach einer Seite fallenden Diagonalen, alſo hier wie *RS* (Fig. 224). Die oben gefundenen Spannungen können daher hier ſofort verwerthet werden. Der Träger würde demnach die in Fig. 225 dargeſtellte Form erhalten, in welcher je zwei Stäbe mit gleichen Bezeichnungen gleiche Spannungen erleiden.

Fig. 224.

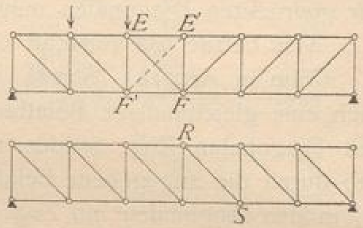
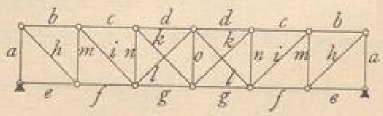


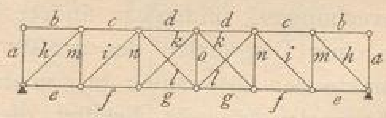
Fig. 225.



187. Träger mit nur gedrückten Diagonalen.

Bei der Conſtruction eines Trägers mit nur gedrückten Diagonalen iſt nach gleichem Grundſatze zu verfahren. Zunächſt ſind beiderſeits nur nach der Mitte anſteigende Diagonalen zu verwenden, damit man für Belaſtung durch Eigengewicht, bezw. Geſammtlaſt nur Druck erhalte. In denjenigen Feldern alsdann, in welchen die Diagonalen unter Umſtänden Zugſpannung erhalten würden, ſind wie oben Gegendiagonalen anzuordnen (Fig. 226). Die Verbindung in den Knotenpunkten iſt ſo anzuordnen, daſs die Hauptdiagonalen keinen Zug übertragen können.

Fig. 226.



Die Beanſpruchung der Pfoſten ergiebt ſich nach Art. 183 (S. 184) ſtets der Beanſpruchung derjenigen Diagonalen entgegengeſetzt, welche an einem unbelaſteten Knotenpunkte mit dem Pfoſten zuſammentrifft. Werden demnach alle Diagonalen nur gezogen, ſo werden alle Pfoſten nur gedrückt (Fig. 225); werden alle Diagonalen nur gedrückt, fo werden alle Pfoften nur gezogen (Fig. 226). Im zweiten Falle werden diefelben meiftens aus Schmiedeeifen hergeftellt, während die Diagonalen aus Holz beftehen.

Beifpiel. Ein als Parallelträger mit Diagonalen und Pfoften (nach Art von Fig. 222) hergeftellter Unterzug hat folgende Abmeffungen und Belaftungen: Stützweite $l = 12$ m; Höhe zwifchen den Gurtungs-Schwerpunkten $h = 1{,}5$ m; Anzahl der Felder $n = 8$; Feldweite $a = 1{,}5$ m. Die Diagonalen fallen jederfeits nach der Trägermitte zu; Gegendiagonalen find nicht vorhanden. Die Belaftung durch das Eigengewicht für das laufende Meter ift $g = 1800$ kg, diejenige durch Nutzlaft $p = 2400$ kg; mithin find die Knotenpunktslaften bezw. $ga = 2700$ kg und $pa = 3600$ kg. Die Laftpunkte liegen in der oberen Gurtung. Die durch diefe Belaftungen entftehenden Spannungen find zu berechnen. 188. Beifpiel.

α) Spannungen in den Gurtungen. Nach Gleichung 234 u. 235 find für den m-ten Stab der oberen Gurtung

$$X_g = -\frac{1800 \cdot 1{,}5^2}{2 \cdot 1{,}5} m (8 - m) = -1350\, m (8 - m)$$

und

$$X_p = -\frac{2400 \cdot 1{,}5^2}{2 \cdot 1{,}5} m (8 - m) = -1800\, m (8 - m).$$

Für den m-ten Stab der unteren Gurtung find nach Gleichung 234 u. 235

$$Z_g = \frac{1800 \cdot 1{,}5^2}{2 \cdot 1{,}5} (m - 1)(9 - m) = 1350 (m - 1)(9 - m) \quad \text{und} \quad Z_p = 1800 (m - 1)(9 - m).$$

Man erhält aus vorftehenden Ausdrücken, indem man der Reihe nach für m die Werthe 1, 2, 3, 4 einführt, die Gurtungsfpannungen der Stäbe links der Mitte. Die Spannungen in den fymmetrifch zur Mitte liegenden Stäben find den gefundenen genau gleich. Die Addition der Werthe X_g und X_p ergiebt die Maximalfpannungen in der oberen, die Addition der Werthe Z_g und Z_p die Maximalfpannungen in der unteren Gurtung. Die Ergebniffe find in umftehender Tabelle angegeben.

β) Spannungen in den Diagonalen. a) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 238 ift für die m-te Diagonale die Spannung durch das Eigengewicht, da hier $\cos \alpha = \cos 45° = 0{,}707$ ift,

$$Y_g = \frac{1800 \cdot 1{,}5}{2 \cdot 0{,}707} (9 - 2m) = 1910 (9 - 2m).$$

Durch Einfetzung der Zahlenwerthe $m = 1, 2, 3, 4$ erhält man die Spannungen Y_g.

b) Durch die Nutzlaft. Die gröfsten Zug- und Druckfpannungen, welche in den Diagonalen hervorgerufen werden, find nach Gleichung 241 u. 242

$$Y_{p\,max} = \frac{2400}{2 \cdot 12 \cdot 0{,}707} (x^2 - 0{,}75^2) = 141{,}4 (x^2 - 0{,}56)$$

und

$$Y_{p\,min} = -\frac{2400}{2 \cdot 12 \cdot 0{,}707} \left[(l - x)^2 - 0{,}75^2\right] = -141{,}4 \left[(l - x)^2 - 0{,}56\right].$$

Man erhält für				
$m =$	1	2	3	4
$x =$	11,25	9,75	8,25	6,75 m
$(l - x) =$	0,75	2,25	3,75	5,25 m

und für $Y_{p\,max}$, bezw. $Y_{p\,min}$ die Werthe, welche in der umftehenden Tabelle folgen.

γ) Spannungen in den Pfoften. a) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 239 ift, da die Laftpunkte oben liegen,

$$V_g = -\frac{1800 \cdot 1{,}5}{2} (9 - 2m) = -1350 (9 - 2m).$$

b) Durch die Nutzlaft. Die gröfsten Druck-, bezw. Zugfpannungen ergeben fich aus den Gleichungen 241 u. 242 zu

$$V_{p\,min} = -\frac{2400}{2 \cdot 12} (x^2 - 0{,}75^2) = -100 (x^2 - 0{,}56) \quad \text{und} \quad V_{p\,max} = 100 \left[(l - x)^2 - 0{,}56\right].$$

Für x find diefelben Werthe, wie bei den Diagonalen einzuführen. Man erhält die Werthe der umftehenden Tabelle.

Im Endpfoften ift die Druckfpannung ftets gleich dem Auflagerdruck, alfo hier, da die Belaftung des Endknotenpunktes mit $\frac{ga}{2}$, bezw. $\frac{pa}{2}$ hinzukommt,

$$\underset{0}{V_g} = -(3{,}5 + 0{,}5)\, g a = -4 g a = -4 \cdot 1800 \cdot 1{,}5 = -10800^{\text{kg}},$$

$$\underset{0}{V_{p\,min}} = -4 p a = -4 \cdot 2400 \cdot 1{,}5 = -14400^{\text{kg}}.$$

Zug kann in diefem Pfoften nicht entftehen.

Auf den Mittelpfoften find die obigen Gleichungen nicht anwendbar, weil an feinem unteren Endpunkte fich die zwei Diagonalen der anftofsenden Felder treffen, alfo der fchräge Schnitt andere Stäbe trifft, als bei der Entwickelung der Formeln vorgefehen war. Da am oberen Endpunkt des Pfoftens keine Diagonale anfetzt, fo kann derfelbe nur folche lothrechte Kräfte aufnehmen, welche im oberen Knotenpunkte unmittelbar angreifen. Wir erhalten alfo die Spannungen in demfelben genau fo grofs, wie die Knotenpunktsbelaftungen. Diefe Werthe find in die Tabelle eingefetzt worden.

Tabelle der Stabfpannungen.

Theil der Conftruction	m =	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Obere Gurtung	X_g =		− 9450	−16200	−20250	−21600	−21600	−20250	−16200	− 9450
	X_p =		−12600	−21600	−27000	−28800	−28800	−27000	−21600	−12600
Untere Gurtung	Z_g =		0	9450	16200	20250	20250	16200	9550	0
	Z_p =		0	12600	21600	27000	27000	21600	12600	0
Diagonalen	Y_g =		13370	9550	5730	1910	1910	5730	9450	13370
	$Y_{p\,max}$ =		17820	13362	9545	6363	6363	9545	13362	17820
	$Y_{p\,min}$ =		0	− 636	− 1910	− 3818	− 3818	− 1910	− 636	0
Pfoften	V_g =	−10800	− 9450	− 6750	− 4050	− 2700	− 4050	− 6750	− 9450	−10800
	$V_{p\,min}$ =	−14400	−12600	− 9450	− 6750	− 3600	− 6750	− 9450	−12600	−14400
	$V_{p\,max}$ =	0	0	4500	1350	0	1350	450	0	0
		Kilogramm								

Zur Beftimmung der Querfchnitte nach den Gleichungen 42 bis 48 (fiehe Art. 84 u. 85, S. 62 u. 63) dient die Zufammenftellung der nachftehenden Tabelle.

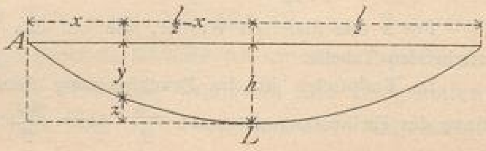
Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen: Ueberwiegender Zug				Pfoften: Ueberwiegender Druck			
Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2
1 u. 8	− 9450	−12600	1 u. 8	0	0	1 u. 8	13370	17820	0	0 u. 8	−10800	−14400	0
2 u. 7	−16200	−21600	2 u. 7	9450	12600	2 u. 7	9550	13362	− 636	1 u. 7	− 9450	−12600	0
3 u. 6	−20250	−27000	3 u. 6	16200	21600	3 u. 6	5730	9545	−1910	2 u. 6	− 6750	− 9450	450
4 u. 5	−21600	−28800	4 u. 5	20250	27000	4 u. 5	1910	6363	−3818	3 u. 5	− 4050	− 6750	1350
										4	− 2700	− 3600	0
Kilogramm			Kilogramm			Kilogramm				Kilogramm			

5) Parabelträger.

189. Berechnung der Spannungen:

Parabelträger find Träger, bei denen die Knotenpunkte einer oder beider Gurtungen auf Parabeln liegen. Hier follen nur folche Parabelträger behandelt werden, bei welchen die obere Gurtung eine gerade Linie, die untere Gurtung ein der Parabel eingefchriebenes Vieleck ift (Fig. 227). Bezeichnet man die Pfeilhöhe der Parabel mit h, die Trägerftützweite mit l und legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in das linke Auflager (nach A), fo ift, wenn L der Scheitel der Parabel ift,

Fig. 227.



$$\frac{z}{h} = \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}, \quad \text{woraus} \quad z = h\left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2, \quad \text{ferner} \quad y = (h - z);$$

fonach lautet die Gleichung der Parabel bezogen auf A als Coordinaten-Anfang:

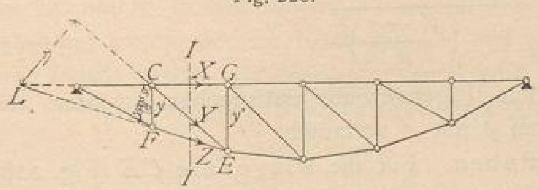
$$y = \frac{4h}{l^2}(lx - x^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 247.$$

Die Spannungen in den fämmtlichen Stäben können nun mittels der in Art. 170 bis 177 (S. 169 bis 173) vorgeführten Verfahren leicht ermittelt werden. Dabei macht es keine Schwierigkeit, die Berechnung auch für den Fall durchzuführen, dafs die obere Gurtung gekrümmt, die untere eine gerade Linie ift.

α) Spannungen in den Gurtungen. Für einen Stab FE der unteren Gurtung (Fig. 228) ift C der conjugirte Punkt; wird mit M das Moment der an der einen Seite des Schnittes II wirkenden äufseren Kräfte bezeichnet, fo ergiebt fich 190. in den Gurtungen;

$$0 = M - Zy\cos\sigma, \quad \text{woraus} \quad Z = \frac{M}{y\cos\sigma} \quad \ldots\ldots \quad 248.$$

Fig. 228.



Für einen Stab CG der oberen Gurtung ift E der conjugirte Punkt, und wenn das Moment der äufseren Kräfte für diefen Punkt mit M' bezeichnet wird,

$$0 = M' + Xy', \quad \text{woraus} \quad X = -\frac{M'}{y'} \quad 249.$$

Wie beim Parallelträger in Art. 178 (S. 175) ergiebt fich auch hier, dafs die oberen Gurtungsftäbe ftets gedrückt, die unteren Gurtungsftäbe ftets gezogen werden, fo wie dafs alle Gurtungsftäbe bei voller Belaftung am meiften beanfprucht werden.

Nunmehr können die durch Eigengewicht, bezw. durch gleichmäfsig über den ganzen Träger vertheilte Nutzlaft erzeugten Gurtungsfpannungen ermittelt werden. Das erftere fei g, die letztere p für die Längeneinheit; beide Belaftungsarten find einander genau gleich; es genügt alfo eine, etwa die letztere, zu betrachten. Es wird wieder angenommen, dafs die Laften nur in den Knotenpunkten wirken; bei einer Feldweite a (Fig. 229) ift die Knotenpunktslaft gleich pa (bezw. ga). Die Auflagerdrücke find $D_0 = D_1 = \frac{pa(n-1)}{2}$ und, da $a(n-1) = (l-a)$ ift,

$$D_0 = D_1 = \frac{p(l-a)}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 250.$$

Für einen beliebigen Knotenpunkt E mit der Abfciffe x ift nun das Moment

$$M_x = \frac{p(l-a)}{2}x - p(x-a)\left(\frac{x-a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2}(lx - x^2).$$

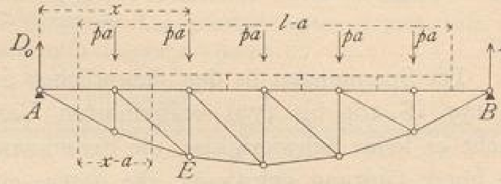
Dies ift aber nach Art. 154 (S. 147) auch der Ausdruck für das Moment im Punkte E bei einem vollwandigen, gleichmäfsig mit p für die Längeneinheit belafteten Träger.

Werden die Werthe von M und y (Gleichung 247) in die Ausdrücke von Z und X eingeführt, fo ergiebt fich allgemein

$$\left.\begin{aligned} Z \cos \sigma &= \frac{M}{y} = \frac{p}{2} \cdot \frac{(l x - x^2)\, l^2}{4 h\, (l x - x^2)} = \frac{p\, l^2}{8 h} \\ X &= - \frac{p}{2} \cdot \frac{(l x - x^2)\, l^2}{4 h\, (l x - x^2)} = - \frac{p\, l^2}{8 h} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 251.$$

$Z \cos \sigma$ ift die wagrechte Seitenkraft der Spannung in der gekrümmten Gurtung. Die rechte Seite obiger Ausdrücke enthält nur conftante Gröfsen, fo dafs fich ergiebt: Beim Parabelträger ift für gleichmäfsige Belaftung des ganzen Trägers die Spannung in der geraden Gurtung (X) und die wagrechte Seitenkraft der Spannung in der gekrümmten Gurtung conftant.

Fig. 229.



Da $\cos \sigma = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + (y' - y)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{y' - y}{a}\right)^2}}$ ift, erhält man aus Gleichung 251

$$Z = \frac{p\, l^2}{8 h} \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 252.$$

Die Spannungen Z und X, welche dem Eigengewicht entfprechen, werden aus obigen Gleichungen erhalten, indem man p mit g vertaufcht.

191. in den Gitterftäben. β) Spannungen in den Gitterftäben. Für die Diagonale CE (Fig. 228) ift L der conjugirte Punkt, η der Hebelsarm von Y, und wenn mit M_1 das Moment der äufseren Kräfte am Bruchftück links vom Schnitt II, bezogen auf L als Drehpunkt, bezeichnet wird, ift

$$0 = Y \eta - M_1, \quad \text{woraus} \quad Y = + \frac{M_1}{\eta} \quad \ldots \ldots \quad 253.$$

Liegt die Diagonale rechts der Mitte, fo fällt der conjugirte Punkt rechts vom rechten Auflager. Die Aufftellung der Momentengleichung für diefen Punkt ergiebt genau wie in Gleichung 253 die Diagonalfpannung als Quotienten aus dem Moment der am Bruchftück wirkenden äufseren Kräfte, dividirt durch den Hebelsarm der Diagonalfpannung.

Fig. 230.

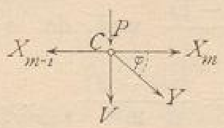
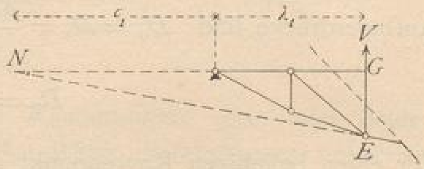


Fig. 231.



Häufig ift ein anderer Ausdruck der Diagonalfpannung bequemer, als Gleichung 253. Die am Knotenpunkt C der geraden Gurtung (Fig. 230) angreifenden Kräfte find im Gleichgewicht; die algebraifche Summe aller wagrechten Seitenkräfte ift demnach gleich Null; mithin

$$0 = Y \cos \varphi + X_m - X_{m-1}, \quad \text{woraus} \quad Y = - \frac{X_m - X_{m-1}}{\cos \varphi} \quad \ldots \quad 254.$$

Für die Beftimmung der Spannungen in den Pfoften ift der Schnitt fchief zu legen (Fig. 231). Der conjugirte Punkt für den Pfoften EG ift N. Bezeichnet

— M_2 das Moment der am Bruchſtück wirkenden äuſseren Kräfte für N als Drehpunkt, ſo wird

$$0 = - V(\lambda_1 + c_1) - M_2, \quad \text{woraus} \quad V = - \frac{M_2}{\lambda_1 + c_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 255.$$

Falls der conjugirte Punkt nach rechts vom rechten Auflager fällt, ergiebt ſich eine geringe Abänderung der Gleichung 255.

Ein für manche Fälle bequemerer Ausdruck wird wiederum durch Betrachtung des Knotenpunktes an der geraden Gurtung erhalten. Es ergiebt ſich, da die Kräfte an demſelben im Gleichgewicht ſind,

$$0 = Y \sin \varphi + V + P, \quad \text{woraus} \quad V = -(Y \sin \varphi + P) \quad . \quad . \quad . \quad 256.$$

α) Das Eigengewicht, bezw. eine gleichmäſsig über den ganzen Parabelträger vertheilte Laſt p für die Längeneinheit erzeugt in allen Diagonalen die Spannung Null. Denn bei dieſer Belaſtung iſt nach Art. 190 (S. 191) die Gurtungsſpannung X conſtant, alſo $X_m = X_{m-1}$, mithin nach Gleichung 254: $Y = 0$.

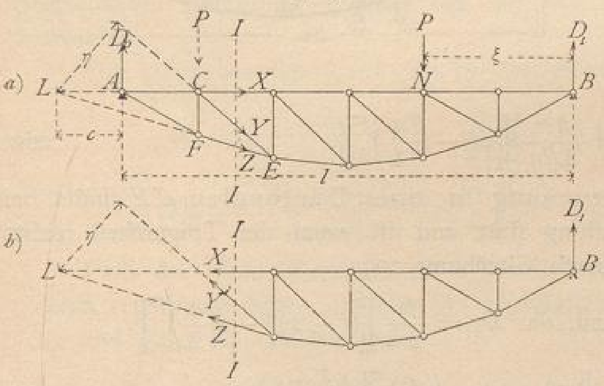
Die Spannung in den Pfoſten ergiebt ſich nach Gleichung 256, da $Y = 0$ und $P = pa$ (bezw. ga) iſt, zu

$$V_p = - pa, \quad \text{bezw.} \quad V_g = - ga \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 257.$$

Die Spannung in den Pfoſten iſt ſonach beim Parabelträger und der angegebenen Belaſtung gleich der im Knotenpunkte der geraden Gurtung wirkenden Laſt, und zwar Druck, wenn, wie hier angenommen iſt, die obere gerade Gurtung belaſtet iſt.

β) Ungünſtigſte Belaſtungen und gröſste Stabſpannungen der Gitterſtäbe. Die ungünſtigſte Belaſtung für eine Diagonale CE (Fig. 232) wird folgendermaſsen erhalten. Eine rechts von dem durch die Diagonale verlaufenden Schnitte II gelegene Laſt P erzeugt in A den Auflagerdruck $D_0 = \frac{P \xi}{l}$ und in CE eine Diagonalſpannung Y, die aus der Momentengleichung für Punkt L und das links vom Schnitte liegende Bruchſtück folgt:

Fig. 232.



$$0 = Y\eta - D_0 c,$$

woraus

$$Y = \frac{D_0 c}{\eta} = \frac{P \xi c}{l \eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 258.$$

So lange ſich die Laſt rechts vom Schnitt II befindet, gilt der hier für Y gefundene Ausdruck. Jede Laſt rechts vom Schnitt erzeugt alſo in CE einen Zug.

Befindet ſich die Laſt P links vom Schnitte II, ſo betrachte man das Bruchſtück an der rechten Seite des Schnittes (Fig. 232 b). Auf daſſelbe wirken der Auflagerdruck D_1 in B und die drei Spannungen X, Y' und Z; die Gleichung der ſtatiſchen Momente für L als Drehpunkt heiſst dann:

$$0 = Y' \eta + D_1 (l + c), \quad \text{woraus} \quad Y' = - \frac{D_1 (l + c)}{\eta} \quad . \quad . \quad . \quad 259.$$

Die Laſt P links von II erzeugt alſo in der Diagonale Druck und in gleicher Weiſe jede links vom Schnitt liegende Laſt.

Für die rechts von der Mitte gelegenen Diagonalen, bei welchen der Momentenpunkt rechts von B liegt, ergiebt ſich die gleiche Geſetzmäſsigkeit.

Es folgt, daſs auch hier das für die Parallelträger (Art. 179, S. 177) gefundene Geſetz gilt: Jede Belaſtung zwiſchen dem durch die Diagonalenmitte gelegten lothrechten Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Fuſspunkt der Diagonalen hinweist, erzeugt in derſelben Zug; jede Belaſtung zwiſchen dem erwähnten Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonale hinweist, erzeugt in derſelben Druck.

Gröſster Zug findet demnach in einer Diagonalen dann ſtatt, wenn alle Knotenpunkte zwiſchen dem Schnitte und demjenigen Auflager belaſtet ſind, nach welchem der Fuſs der Diagonale hinweist; gröſster Druck, wenn die Knotenpunkte zwiſchen dem Schnitte und demjenigen Auflager belaſtet ſind, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist.

Die gröſste Zugbeanſpruchung in einer Diagonalen CE findet daher bei der in Fig. 233 gezeichneten Belaſtung ſtatt; ſie iſt

$$Y_{max} = \frac{D_0 c}{\eta}.$$

Fig. 233.

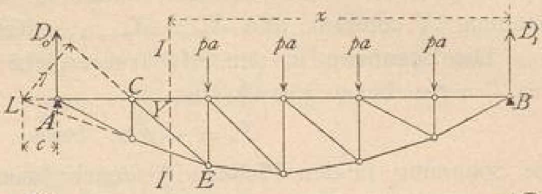
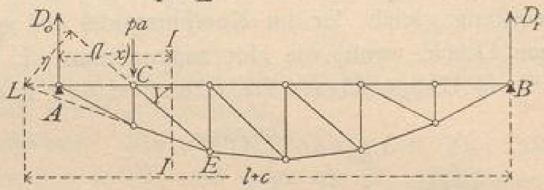


Fig. 234.



Genau, wie in Art. 179 (S. 177), erhält man für den Auflagerdruck:

$$D_0 = \frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right],$$

alſo

$$Y_{max} = \frac{pc}{2l\eta}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 260.$$

Die gröſste Druckbeanſpruchung in einer Diagonalen CE findet bei der in Fig. 234 gezeichneten Belaſtung ſtatt und iſt (wenn der Trägertheil rechts vom Schnitte II betrachtet wird) nach Gleichung 259

$$Y_{min} = -D_1\left(\frac{l+c}{\eta}\right) \quad \text{und, da} \quad D_1 = \frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right],$$

$$Y_{min} = -\frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\left(\frac{l+c}{\eta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 261.$$

Die Gleichungen 260 u. 261 gelten, wenn die Diagonalen, wie hier, nach rechts fallen, nur für diejenigen links der Mitte; für die Diagonalen rechts der Mitte, bei denen der Momentenpunkt rechts von B fällt, ergeben ſich folgende Werthe, in denen η_1 den Hebelsarm von Y, c_2 den Abſtand des Momentenpunktes von B bedeutet:

$$Y_{max} = \frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{l+c_2}{\eta_1} \quad \text{und} \quad Y_{min} = -\frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{c_2}{\eta_1}. \quad 262.$$

Bei der angenommenen Belaſtungsart genügt es, entweder Y_{max} oder Y_{min} auszurechnen; denn für die Belaſtung aller Knotenpunkte mit je pa iſt die Diagonalſpannung (ſiehe oben) gleich Null. Sind nur die Knotenpunkte der Druckabtheilung belaſtet, ſo iſt die Spannung in der Diagonalen gleich Y_{min}; ſind nur die Knotenpunkte der Zugabtheilung belaftet, fo ift die Spannung gleich Y_{max}. Bei voller Belaftung ift die Spannung $Y_{summa} = Y_{max} + Y_{min}$, und zwar ift $Y_{summa} = 0$, d. h. $0 = Y_{max} + Y_{min}$ und $Y_{min} = - Y_{max}$.

Um die ungünftigfte Belaftung der Pfoften zu ermitteln, verfährt man eben fo, wie bei den Diagonalen gezeigt ift. Man findet, dafs Diagonale und Pfoften, welche an einem Knotenpunkte der unbelafteten Gurtung zufammentreffen, diefelbe ungünftigfte Belaftungsart haben; nur findet im Pfoften gröfster Druck ftatt bei derjenigen Belaftung, welche in der entfprechenden Diagonalen gröfsten Zug

Fig. 235.

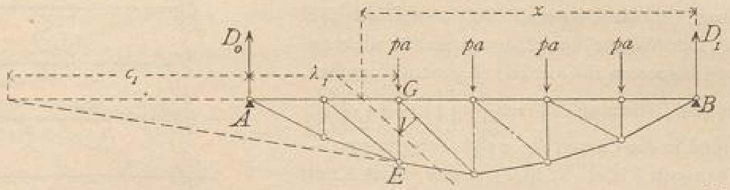
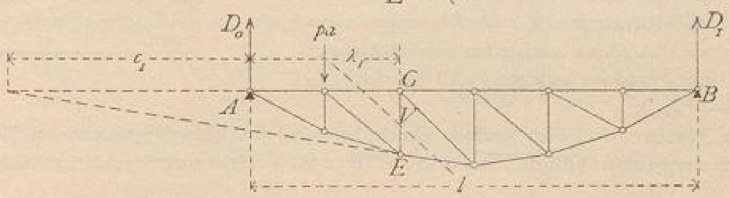


Fig. 236.



erzeugt und umgekehrt. Somit wird gröfster Druck in GE bei der in Fig. 235 gezeichneten Belaftung, gröfster Zug bei der in Fig. 236 gezeichneten Belaftung ftattfinden.

Die gröfsten Spannungen in den Pfoften ergeben fich mit

$$\left.\begin{aligned} V_{min} &= -\frac{D_0 c_1}{\lambda_1 + c_1} = -\frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{c_1}{\lambda_1 + c_1} \\ V_{max} &= \frac{D_1 (l + c_1)}{\lambda_1 + c_1} = \frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{l + c_1}{\lambda_1 + c_1} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; 263.$$

Falls der Momentenpunkt um c_1' nach rechts von B fällt, was hier bei allen Pfoften rechts der Mitte, einfchl. der Mittelpfoften, ftattfindet, fo ergeben fich für V_{min} und V_{max} die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} V'_{min} &= -\frac{D_0 (l + c_1')}{c_1' + l - \lambda_1} = -\frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{l + c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} \\ V'_{max} &= \frac{D_1 c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} = \frac{p}{2l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 264.$$

c) Bei entgegengefetzter Richtung der Diagonalen ergeben fich nur geringe Aenderungen, welche leicht aus Vorftehendem folgen.

Die Spannungen durch eine oder mehrere Einzellaften find gleichfalls nach einem der in Art. 172 u. 173 (S. 170) angegebenen Verfahren leicht zu finden.

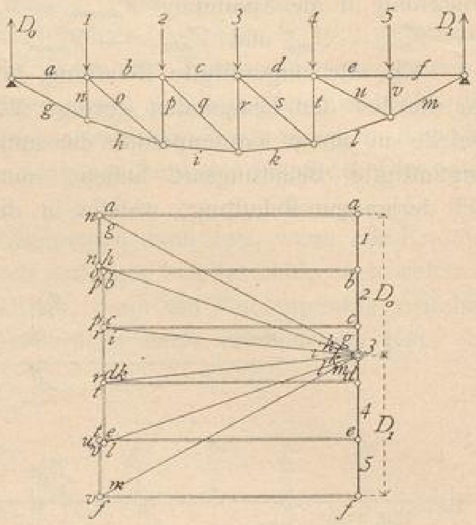
192. Graphifche Ermittelung der Spannungen.

γ) Graphifche Ermittelung der Spannungen. Wird eine gleichmäfsig vertheilte Belaftung (Eigengewicht, bezw. volle zufällige Belaftung) vorausgefetzt, fo ergiebt der in Fig. 237 gezeichnete *Cremona*'fche Kräfteplan fofort die Spannungen.

Was die durch zufällige Belaftung erzeugten Maximalfpannungen betrifft, fo ergeben fich die gröfsten Gurtungsfpannungen aus dem eben erwähnten Kräfteplan (Fig. 237), falls eine Belaftung des ganzen Trägers mit der Laft p für die Längeneinheit zu Grunde gelegt wird.

Zur Beftimmung der gröfsten Diagonalfpannungen, welche bei den oben angegebenen Belaftungen ftattfinden, empfiehlt fich die Schnittmethode.

Fig. 237.



Auf das Trägerftück links vom Schnitte II wirken bei der in Fig. 238a gezeichneten gröfsten Zugbelaftung für die Diagonale CE die Kräfte D_0, X, Y, Z. Die Werthe von D_0, welche für die verfchiedenen Diagonalen zu Grunde zu legen find, ergeben fich aus der Gleichung $D_0 = \frac{p}{2l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$; diefelben find in der Curve (Fig. 238b) aufgetragen. — Für die Diagonale CE z. B. ift $D_0 = mn$; diefe Kraft ift nach den Richtungen AE und X zerlegt in no und om; no ift alsdann noch nach den Richtungen Z und Y in np und po zerlegt; po ift gleich Y_{max} ($Y_{min} = - Y_{max}$).

Im Pfoften CF findet gröfster Druck bei der in Fig. 239 gezeichneten Belaftung ftatt. D_0 ift hier gleich derjenigen Ordinate der Curve in Fig. 238b, welche zu x' gehört, d. h. gleich rs. Nun wird

Fig. 238.

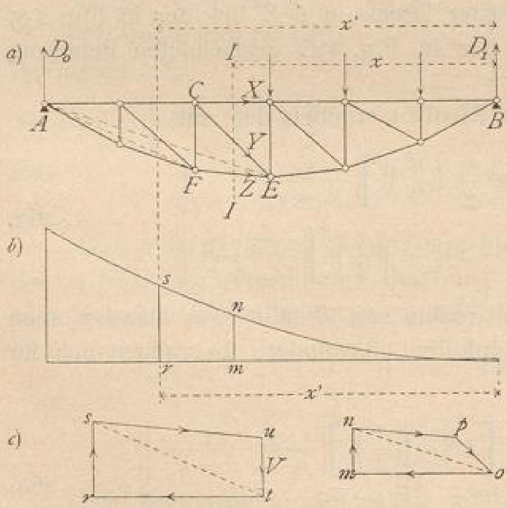


Fig. 239.

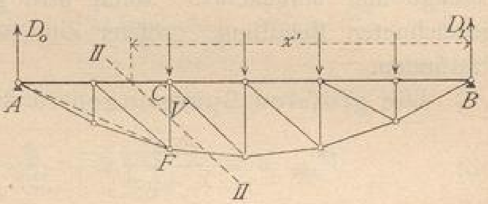
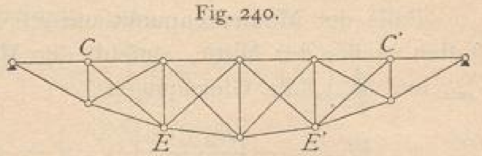


Fig. 240.



genau wie oben zerlegt. Es wird $V_{min} = ut$. Entfprechend ift der gröfste in CF auftretende Zug zu ermitteln.

193. Gegendiagonalen. δ) Träger mit Gegendiagonalen. Durch die Verkehrslaft erhält jede Diagonale fowohl Zug wie Druck, durch das Eigengewicht gar keine Spannung. Die ungünftigften Zug-, bezw. Druckfpannungen find alfo genau fo grofs, wie diejenigen durch die ungünftigften Verkehrslaften. Sollen nur gezogene Diagonalen vorkommen, fo wird nach Art. 186 (S. 187) in jedem Felde eine Gegendiagonale angeordnet werden müffen. Man erhält die in Fig. 240 gezeichnete Trägerform. Die Gegendiagonale $C'E'$ wird genau eben fo beanfprucht, wie die fymmetrifch zur Mitte liegende Hauptdiagonale CE des Trägers mit einfeitig fallenden Diagonalen.

Daffelbe gilt von allen Gegendiagonalen; fomit wird die Berechnung eines Trägers mit nach einer Richtung fallenden Diagonalen genügen.

Beifpiel. Ein als Unterzug dienender Parabelträger mit gerader oberer und gekrümmter unterer Gurtung hat die nachfolgenden Hauptabmeffungen und Belaftungen: Stützweite $l = 12{,}0^{\mathrm{m}}$; Pfeilhöhe $h = 1{,}20^{\mathrm{m}}$; Feldweite $a = 1{,}00^{\mathrm{m}}$; Eigengewicht für das laufende Meter des Trägers $g = 320^{\mathrm{kg}}$, alfo $ga = 320^{\mathrm{kg}}$; Verkehrslaft für das laufende Meter des Trägers $p = 1280^{\mathrm{kg}}$, alfo $pa = 1280^{\mathrm{kg}}$. Der Träger hat ein aus Pfoften und Diagonalen beftehendes Gitterwerk; die Diagonalen fallen beiderfeits nach der Mitte zu; der Träger ift alfo zur Mitte fymmetrifch angeordnet. Die in den einzelnen Stäben entftehenden Spannungen find zu ermitteln. Wegen der Symmetrie des Trägers braucht man nur die Spannungen in den Stäben links der Mitte zu beftimmen; die fymmetrifch zur Mitte liegenden Stäbe erhalten gleiche Beanfpruchungen. 194. Beifpiel.

a) Form der unteren Gurtung. Die Parabel-Ordinaten ergeben fich nach Gleichung 247 aus der Beziehung $y = \frac{4 \cdot 1{,}2}{144} x (12 - x) = 0{,}033\, x (12 - x)$. Man erhält:

für $x =$	1^{m}	2^{m}	3^{m}	4^{m}	5^{m}	6^{m}	7^{m}	8^{m}	9^{m}	10^{m}	11^{m}
$y =$	$0{,}36^{\mathrm{m}}$	$0{,}66^{\mathrm{m}}$	$0{,}89^{\mathrm{m}}$	$1{,}06^{\mathrm{m}}$	$1{,}16^{\mathrm{m}}$	$1{,}2^{\mathrm{m}}$	$1{,}16^{\mathrm{m}}$	$1{,}06^{\mathrm{m}}$	$0{,}89^{\mathrm{m}}$	$0{,}66^{\mathrm{m}}$	$0{,}36^{\mathrm{m}}$.

b) Spannungen in der oberen Gurtung. Durch das Eigengewicht, bezw. volle zufällige Belaftung entfteht in fämmtlichen Stäben der oberen Gurtung eine Spannung nach Gleichung 251

$$X_g = -\frac{320 \cdot 12^2}{8 \cdot 1{,}2} = -4800^{\mathrm{kg}} \quad \text{und} \quad X_p = -\frac{1280 \cdot 12^2}{8 \cdot 1{,}2} = -19200^{\mathrm{kg}}.$$

X_p ift zugleich die gröfste durch zufällige Belaftung entftehende Spannung.

c) Spannungen in der unteren Gurtung. Nach Gleichung 252 find

$$Z_g = 4800 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \quad \text{und} \quad Z_p = 19200 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2}.$$

Hiernach erhält man die in der linksfeitigen Hälfte der nächftfolgenden Tabelle zufammengeftellten Ergebniffe. Die Werthe Z_p find zugleich die gröfsten durch die zufällige Laft entftehenden Spannungen.

d) Spannungen in den Diagonalen. Die Spannungen durch das Eigengewicht find gleich Null (fiehe Art. 191, S. 192). Die durch Verkehrslaft erzeugten gröfsten Zug- und Druckfpannungen find für die Diagonalen links der Mitte nach Gleichung 260 u. 261

$$Y_{max} = \frac{1280}{2 \cdot 12} (x^2 - 0{,}25) \frac{c}{\eta} = 53{,}33 \frac{c}{\eta} (x^2 - 0{,}25) \quad \text{und} \quad Y_{min} = -53{,}33 \left[(l - x)^2 - 0{,}25\right] \frac{l + c}{\eta}.$$

Die Gröfsen c und η können berechnet oder conftruirt werden; die Werthe für c werden beffer berechnet, weil die Zeichnung wegen der fpitzen Schnittwinkel der Gurtungsftabrichtungen nicht genaue Werthe ergiebt. Man erhält mit Hilfe ähnlicher Dreiecke leicht

$$\frac{c_2 + a}{y_1} = \frac{a}{y_2 - y_1}; \quad \frac{c_3 + 2a}{y_2} = \frac{a}{y_3 - y_2}; \quad \frac{c_4 + 3a}{y_3} = \frac{a}{y_4 - y_3} \quad \text{u. f. w.}$$

Die Werthe für η können in ähnlicher Weife leicht berechnet werden; doch kann man, befonders wenn c berechnet und der Schnittpunkt entfprechend den Rechnungsergebniffen aufgetragen wird, die η mit hinreichender Genauigkeit conftruiren. Die Werthe für c, η, x, Y_{max} und Y_{min} find in nachftehender Tabelle zufammengeftellt.

Stab Nr.	y'	y	Z_g	Z_p	Diagonale Feld-Nr.	c	η	x	Y_{max}	Y_{min}
1	0,36	0,0	5102	20410	2	0,2	0,66	10,5	+ 1777	— 1971
2	0,66	0,36	5011	20045	3	0,87	1,91	9,5	+ 2186	— 2156
3	0,89	0,66	4925	19699	4	2,23	3,8	8,5	+ 2304	— 2396
4	1,06	0,89	4867	19469	5	6,6	8,03	7,5	+ 2449	— 2460
5	1,16	1,06	4824	19296	6	24	22,3	6,5	+ 2410	— 2582
6	1,20	1,16	4804	19216						
	Meter		Kilogramm			Meter			Kilogramm	

Nach Art. 191 (S. 192) müffen die abfoluten Werthe von V_{max} und V_{min} einander gleich fein; dies ift hier nicht der Fall, was feinen Grund darin hat, dafs nicht die genauen Parabel-Ordinaten der Berechnung zu Grunde gelegt find, fondern eine Abrundung auf zwei Decimalen ftattgefunden hat. Aus demfelben Grunde würden fich auch die durch das Eigengewicht erzeugten Spannungen nicht genau gleich Null ergeben, wenn man fie nach Gleichung 253 berechnete. Immerhin ergeben fich diefe Unterfchiede fo gering, dafs fie vernachläffigt werden können.

e) Spannungen in den Pfoften. Durch das Eigengewicht entfteht in jedem Pfoften nach Art. 191 (S. 193) der Druck $V = -320$ kg. Die durch Verkehrslaft in den Pfoften links der Mitte erzeugten Maximalfpannungen find nach Gleichung 263

$$V_{min} = -53{,}33\,(x^2 - 0{,}25)\,\frac{c_1}{\lambda + c_1} \quad \text{und} \quad V_{max} = +53{,}33\left[(l-x)^2 - 0{,}25\right]\frac{12 + c_1}{\lambda_1 + c_1}.$$

Man erhält die in folgender Tabelle zufammengeftellten Werthe von c_1, λ_1, x, $(l - x)$, V_{min} und V_{max}. Der 6. (der Mittel-) Pfoften, an deffen Fufspunkt fich die beiden Diagonalen der anfchliefsenden Felder fchneiden, kann nicht nach den obigen Gleichungen berechnet werden, da die dort für den Schnitt gemachten Vorausfetzungen hier nicht zutreffen. Da aber im oberen Knotenpunkte derfelben keine Diagonale anfetzt, fo kann diefelbe nur die Kräfte aufnehmen, welche unmittelbar in derfelben wirken, d. h. der gröfste Druck ift gleich der Knotenpunktsbelaftung dafelbft.

Pfoften Nr.	c_1	λ_1	x	$l - x$	V_{min}	V_{max}
1	0,2	1,0	11,5	0,5	− 1173	0
2	0,87	2,0	10,5	1,5	− 1778	+ 478
3	2,23	3,0	9,5	2,5	− 2047	+ 870
4	6,60	4,0	8,5	3,5	− 2391	+ 1123
5	24	5,0	7,5	4,5	− 2469	+ 1324
6	—	—	—	—	− 1280	0
	Meter				Kilogramm	

f) Zur Beftimmung der Querfchnitte nach den Gleichungen 42 bis 48 (fiehe Art. 84 u. 85, S. 62 u. 63) dient die Zufammenftellung in der folgenden Tabelle:

Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen:				Pfoften: Druck überwiegt			
Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2
1 u. 12	− 4800	− 19 200	1 u. 12	5102	20 410					1 u. 11	− 320	− 1173	0
2 u. 11	− 4800	− 19 200	2 u. 11	5011	20 045	2 u. 11	0	1777	− 1971	2 u. 10	− 320	− 1778	478
3 u. 10	− 4800	− 19 200	3 u. 10	4925	19 699	3 u. 10	0	2186	− 2156	3 u. 9	− 320	− 2047	870
4 u. 9	− 4800	− 19 200	4 u. 9	4867	19 469	4 u. 9	0	2304	− 2396	4 u. 8	− 320	− 2301	1123
5 u. 8	− 4800	− 19 200	5 u. 8	4824	19 296	5 u. 8	0	2449	− 2460	5 u. 7	− 320	− 2469	1324
6 u. 7	− 4800	− 19 200	6 u. 7	4804	19 216	6 u. 7	0	2410	− 2582	6	− 320	− 1280	0
	Kilogr.			Kilogr.			Kilogramm				Kilogramm		

In die Gleichungen 42 bis 48 find die abfoluten Zahlenwerthe für P_0, P_1 und P_2 einzufetzen.

6) Dreieckträger.

195. Trägerformen. Dreieck- und Trapezträger find, wie bereits in Art. 167 (S. 168) gefagt wurde, Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bezw. ein Paralleltrapez bilden. Die eine Gurtung zeigt eine gerade, die andere eine gebrochene Linie. Ift die untere Gurtung gerade, fo erhält man die unter dem Namen des einfachen, bezw. doppelten Hängebockes bekannte Trägerform (Fig. 241 *a*, bezw. 242 *a*) — nicht zu verwechfeln mit den Hängewerksträgern, welche nach Art. 150 (S. 140) von den hier betrachteten

Fig. 241.

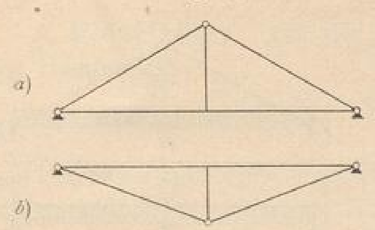
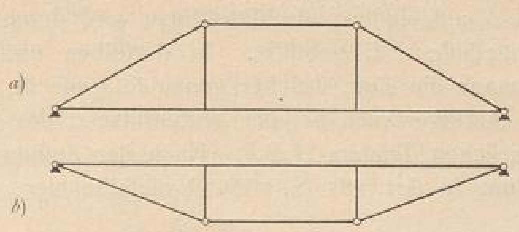


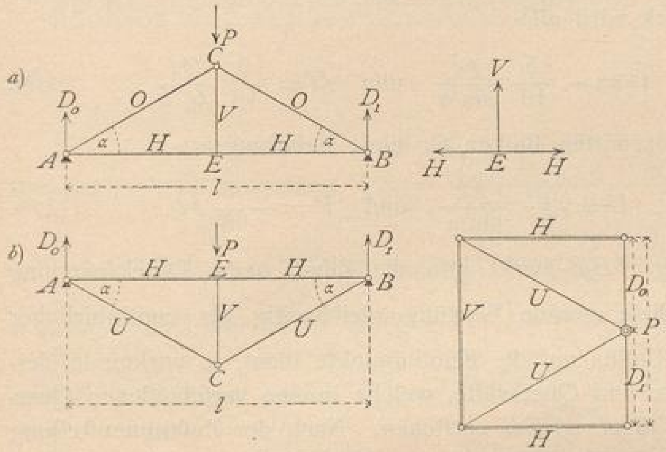
Fig. 242.



wesentlich verschieden sind. Ist die obere Gurtung gerade, so erhält man die unter dem Namen des armirten Balkens bekannte Trägeranordnung (Fig. 241 *b* u. 242 *b*).

196. Belastung durch Einzellast. α) Belastung durch Einzellast (Fig. 243). Wenn im Knotenpunkte *C* oder *E* des Hängebockes (Fig. 243 *a*) die Last *P* wirkt, so wird der Auflagerdruck

Fig. 243.



$$D_0 = D_1 = \frac{P}{2}.$$

Die im Punkte *A* wirkenden drei Kräfte D_0, O und H halten einander im Gleichgewicht; demnach sind die algebraischen Summen der in diesem Knotenpunkte wirkenden wagrechten, bezw. lothrechten Seitenkräfte je gleich Null, d. h. es ist

$$0 = D_0 + O \sin \alpha, \quad \text{woraus} \quad O = -\frac{P}{2 \sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 265.$$

$$0 = O \cos \alpha + H, \quad \text{woraus} \quad H = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 266.$$

Die Spannungen der symmetrisch zur Mitte liegenden Stäbe sind gleich.

Falls die Last *P* im Punkte *C* angreift, so ergiebt sich als Gleichgewichtsbedingung für den Punkt *E* die Beziehung $0 = V$; falls *P* in *E* angreift, so heisst die Gleichgewichtsbedingung: $0 = V - P$, woraus

$$V = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 267.$$

Eben so ergiebt sich für den armirten Träger (Fig. 243 *b*)

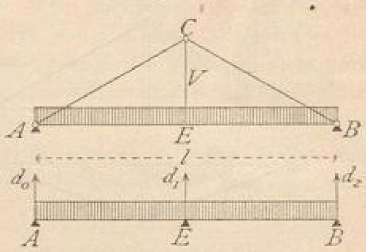
$$U = \frac{P}{2 \sin \alpha}, \quad H = -\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{und} \quad V = -P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 268.$$

Die Construction der Spannungen ergiebt den Kräfteplan in Fig. 243, welcher ohne weitere Erläuterung verständlich ist.

197. Gleichförmig vertheilte Belastung. β) Gleichförmig vertheilte volle Belastung. Wird der Berechnung eine gleichförmig vertheilte Belastung zu Grunde gelegt, so ist die volle Belastung für die Stabspannungen auch die ungünstigste; denn jede Last, wo sie auch liegen möge, erzeugt in *A* und *B* (Fig. 244) Auflagerdruck, also in den Stäben der oberen Gurtung Druck, in denen der unteren Gurtung Zug. Bei dieser Belastung ist *AEB*

wie ein continuirlicher Balken auf drei Stützen A, E und B aufzufassen; die Mittelstütze wird durch die Hängesäule CE gebildet. In derselben entsteht demnach ein Zug, welcher genau so groß ist, wie der Auflagerdruck bei der Mittelstütze E des continuirlichen Trägers AEB. Nach der Zusammenstellung in Art. 165 (S. 166) ist dieselbe hier

Fig. 244.



$$d_1 = 1{,}25\, p \frac{l}{2} = \frac{5}{8} p l,$$

während $d_0 = d_2 = 0{,}375\, p \frac{l}{2} = \frac{3}{16} p l$ ist; die letzteren Drücke werden vom Auflager aufgenommen und belasten den Träger nicht. Die Stabspannungen werden demnach die unter α gefundenen Werthe haben, wenn statt P die Größe $\frac{5}{8} p l$ eingesetzt wird. Beim Hängebock wird also

$$V = P = \frac{5}{8} p l, \quad O = -\frac{5}{16} \frac{pl}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad H = \frac{5}{16} \frac{pl}{\operatorname{tg} \alpha} \quad . \quad . \quad 269.$$

Eben so ergiebt sich im armirten Balken für diese Belastungsart

$$H = -\frac{5}{16} \frac{pl}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad U = \frac{5}{16} \frac{pl}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad V = -\frac{5}{8} p l \quad . \quad . \quad . \quad 270.$$

In der geraden Gurtung AEB wirkt also die Zug-, bezw. Druckspannung $H = \pm \frac{5}{16} \frac{pl}{\operatorname{tg} \alpha}$; da aber diese gerade Gurtung gleichzeitig als continuirlicher Träger zum Uebertragen der Lasten auf die Knotenpunkte dient, so wirken in derselben auch noch die Momente und Querkräfte, welche in den verschiedenen Querschnitten des continuirlichen Trägers AEB entstehen. Nach der Zusammenstellung in Art. 165 (S. 166) findet das größte Moment am Mittelauflager statt, und dasselbe ist

$$M_1 = 0{,}125\, p \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{p l^2}{32}.$$

198. Querschnittsbestimmung.

γ) Querschnittsbestimmung. Die Querschnitte der nur gezogenen, bezw. nur gedrückten Stäbe ergeben sich leicht, wie in Art. 82 bis 86 (S. 59 ff.) und im vorhergehenden Kapitel angegeben ist. Der Querschnitt der geraden Gurtung AEB ist für die gemeinsame Beanspruchung durch Zug, bezw. Druck und die Momente zu construiren. Wird der ganze Querschnitt (für Holz) als constant angenommen, so ist das größte im Balken wirkende Moment der Berechnung zu Grunde zu legen. An der Stelle, wo das größte Moment M_{max} wirkt, ist die größte in den äußersten Querschnittspunkten stattfindende Axialspannung für die Flächeneinheit nach Gleichung 54 (S. 75)

$$\sigma_{max} = \pm \left(\frac{H}{F} + \frac{M_{max}\, a}{J}\right).$$

Beim Rechteckquerschnitt ist $F = bh$, und $\frac{J}{a} = \frac{b h^2}{6}$; wenn noch statt σ_{max} die größte zulässige Spannung K eingeführt wird, so ergiebt sich als Bedingungsgleichung für den Querschnitt:

$$K = \pm \left(\frac{H}{bh} + \frac{6 M_{max}}{b h^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 271.$$

In dieser Gleichung sind b und h unbekannt. Man nimmt zunächst für b einen Werth probeweise an und bestimmt h aus Gleichung 271; ergiebt sich für h eine unzweckmäßige Größe, so nehme man für b einen anderen Werth an und bestimme wiederum h nach Gleichung 271. Meistens werden sich bei der zweiten Rechnung entsprechende Werthe für b und h ergeben.

7) Trapezträger.

α) Einzellaften. Für die Belaftungen in Fig. 245 *a* find die Auflagerdrücke beim Hängebock 199. Einzellaften.

$$D_0 = \frac{P_2 a + P_1 (a+b)}{l} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P_1 a + P_2 (a+b)}{l}.$$

Die Stabfpannungen ergeben fich dann durch Aufftellung der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte, wie folgt:

Fig. 245 *a*.

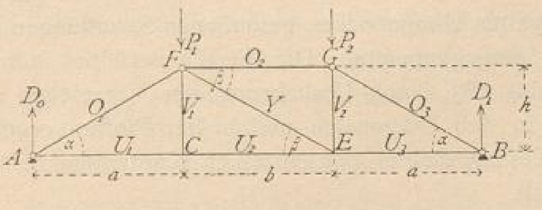
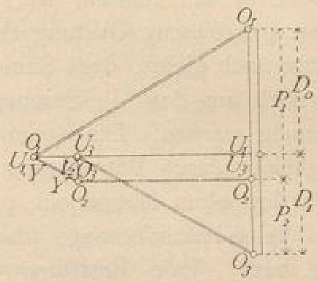


Fig. 245 *b*.



$$0 = D_0 + O_1 \sin \alpha, \text{ woraus } O_1 = -\frac{P_2 a + P_1 (a+b)}{l \sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad 272.$$

$$0 = O_1 \cos \alpha + U_1, \text{ woraus } U_1 = \frac{P_2 a + P_1 (a+b)}{l \operatorname{tg} \alpha} = [P_2 a + P_1 (a+b)] \frac{a}{l h} \quad 273.$$

$$0 = U_1 - U_2, \text{ woraus } U_2 = U_1 = [P_2 a + P_1 (a+b)] \frac{a}{l h} \quad . \quad . \quad . \quad 274.$$

$$0 = D_1 + O_3 \sin \alpha, \text{ woraus } O_3 = -\frac{P_1 a + P_2 (a+b)}{l \sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad 275.$$

$$0 = U_3 + O_3 \cos \alpha, \text{ woraus } U_3 = \frac{P_1 a + P_2 (a+b)}{l \operatorname{tg} \alpha} = [P_1 a + P_2 (a+b)] \frac{a}{l h} \quad 276.$$

$$0 = O_2 - O_3 \cos \alpha, \text{ woraus } O_2 = -\frac{P_1 a + P_2 (a+b)}{l \operatorname{tg} a} = -[P_1 a + P_2 (a+b)] \frac{a}{l h} \quad 277.$$

$$0 = V_1 \text{ (falls die Laft } P_1 \text{ in } C \text{ wirkt, fo ift } V_1' = P_1) \quad . \quad . \quad . \quad 278.$$

$$0 = P_2 + V_2 + O_3 \sin \alpha, \text{ woraus } V_2 = (P_1 - P_2) \frac{a}{l} \quad . \quad . \quad . \quad 279.$$

Falls die Laft P_2 in E wirkt, fo wird

$$0 = V_2' + O_3 \sin \alpha, \text{ woraus } V_2' = \frac{P_1 a + P_2 (a+b)}{l} \quad . \quad . \quad . \quad 280.$$

$$0 = U_2 + Y \cos \beta - U_3, \text{ woraus } Y = -\frac{U_2 - U_3}{\cos \beta} = -\frac{a b}{l h \cos \beta} (P_1 - P_2),$$

$$Y = +(P_2 - P_1) \frac{a}{l \sin \beta} \quad . \quad . \quad . \quad 281.$$

Falls die Laften in der unteren Gurtung, in C und E, angreifen, fo wird

$$Y' \sin \beta + V_2' - P_2 = 0, \text{ woraus } Y' = \frac{P_2 - V_2'}{\sin \beta} = \frac{P_2}{\sin \beta} - \frac{P_1 a + P_2 (a+b)}{l \sin \beta},$$

$$Y' = (P_2 - P_1) \frac{a}{l \sin \beta}. \quad . \quad . \quad . \quad 282.$$

d. h. eben fo grofs, wie in Gleichung 281.

Wenn, wie meiftens, $P_1 = P_2 = P$ ift, wird

$$\left.\begin{array}{l} O_1 = -\frac{P}{\sin\alpha};\quad U_1 = \frac{Pa}{h} = U_2;\quad O_2 = -\frac{Pa}{h};\quad O_3 = -\frac{P}{\sin\alpha}; \\ U_3 = \frac{Pa}{h};\quad V_1 = 0;\quad V_2 = 0;\quad Y = 0 \end{array}\right\} \qquad 283.$$

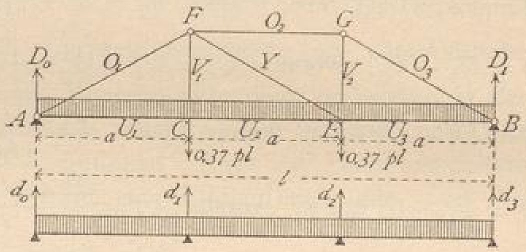
Die Conftruction ergiebt den auf der vorhergehenden Seite ftehenden, ohne Erklärung verftändlichen Kräfteplan (Fig. 245 *b*).

Was den armirten Balken anbelangt, fo find bei diefem die Spannungen fowohl in der oberen, wie in der unteren Gurtung den foeben für die gerade, bezw. gebrochene Gurtung des doppelten Hängebockes gefundenen Spannungen der Gröfse nach gleich, dem Sinne nach entgegengefetzt. Die Werthe derfelben können demnach aus den Gleichungen 272 bis 283 durch Umkehrung der Vorzeichen entnommen werden. Die Spannungen in den Diagonalen und in den Pfoften ergeben fich leicht durch Betrachtung des Gleichgewichtes der einzelnen Knotenpunkte, wie beim doppelten Hängebock gezeigt ift.

200. Gleichförmig vertheilte Belaftung.

β) Gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Belaftung (Fig. 246). Jede Belaftung erzeugt in den Stäben der unteren Gurtung Zug, in denjenigen der oberen Gurtung Druck, wie fich aus den Gleichungen 272 bis 277 ergiebt. Gröfster Zug, beziehungsweife Druck findet alfo in den Gurtungen bei Belaftung des ganzen Trägers ftatt.

Fig. 246.



Die untere Gurtung wirkt, wenn keine Gelenke in den Knotenpunkten derfelben angenommen werden, wie ein continuirlicher Balken auf 4 Stützen. Die Endftützen find A und B; die Mittelftützen werden durch die Pfoften FC und GE gebildet. Wird $a = b$ gefetzt, fo ergiebt fich bei Belaftung des ganzen Trägers mit der Laft p für die Längeneinheit als Auflagerdruck der Mittelftützen nach der Zufammenftellung in Art. 165 (S. 166) $d_1 = d_2 = 1{,}1\,\frac{pl}{3} = 0{,}37\,pl$. Eben fo grofs ift die Laft, welche in den Knotenpunkten C und E des Syftems nach unten wirkt. Werden diefe Werthe für P_1 und P_2 in die obigen Gleichungen eingeführt, fo ergiebt fich

$$\left.\begin{array}{l} O_1 = -\frac{0{,}37\,pl}{\sin\alpha};\quad U_1 = 0{,}37\,pl\,\frac{a}{h};\quad O_2 = -\,0{,}37\,pl\,\frac{a}{h};\quad O_3 = -\frac{0{,}37\,pl}{\sin\alpha}; \\ U_2 = 0{,}37\,pl\,\frac{a}{h};\quad U_3 = 0{,}37\,pl\,\frac{a}{h};\quad V_1 = 0{,}37\,pl;\quad V_2 = 0{,}37\,pl;\quad Y = 0 \end{array}\right\} \qquad 284.$$

Die hier gefundenen Spannungen O und U find die gröfsten Stabfpannungen, welche durch gleichförmig vertheilte Nutzlaft entftehen. Wird ftatt p das Eigengewicht g für die Längeneinheit eingeführt, fo ergeben fich die durch das Eigengewicht entftehenden Stabfpannungen.

201. Ungünftigfte Beanfpruchung der Gitterftäbe.

γ) Ungünftigfte Beanfpruchung der Diagonale und der Pfoften. Den allgemeinen Ausdruck für die Diagonalfpannung giebt die Gleichung 281. Y wird feinen gröfsten pofitiven Werth (Zug) haben, wenn P_2 möglichft grofs, P_1 möglichft klein ift; Y wird feinen gröfsten negativen Werth (Druck) erreichen, wenn P_2 möglichſt klein, P_1 möglichſt groſs iſt. Wird als Nutzlaſt eine gleichmäſsig vertheilte Laſt eingeführt, ſo kann man, wenn $a = b$ iſt, mit einer für die Zwecke des Hochbaues hinreichenden Sicherheit annehmen, daſs die Diagonale den gröſsten Zug erleidet, wenn der Punkt E am Fuſspunkte derſelben mit $p a + 0{,}37\, g l$ belaſtet iſt, der Punkt C (in der Lothrechten des Kopfes der Diagonalen) nur das Eigengewicht $0{,}37\, g l$ trägt. Bei der umgekehrten Belaſtung dagegen erleidet die Diagonale ihren gröſsten Druck. Demnach wird

$$Y_{\substack{max\\min}} = \pm \frac{p a^2}{l \sin \beta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 285.$$

Ferner iſt hier, wo die Laſten unten wirken, $V_1 = P_1$, d. h.

$$V_{1\,max} = 0{,}37\,(g + p)\, l \quad \text{und} \quad V_{1\,min} = 0{,}37\, g l \quad \ldots \ldots \quad 286.$$

Auch V_2 erleidet den gröſsten Zug bei voller Belaſtung; da bei dieſer Belaſtung $Y = 0$ iſt, ſo wird auch

$$V_{2\,max} = 0{,}37\,(g + p)\, l \quad \text{und} \quad V_{2\,min} = 0{,}37\, g l \quad \ldots \ldots \quad 287.$$

δ) Die Querſchnittsbeſtimmung iſt in genau gleicher Weiſe vorzunehmen, wie dies in Art. 198 (S. 200) beim Dreieckträger gezeigt iſt. Die Maximalmomente in der geraden Gurtung finden bei C und E ſtatt und ſind genau genug für $a = b$ nach der Zuſammenſtellung in Art. 165 (S. 166) $M = p \left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{1}{10} = \frac{p l^2}{90}$. Die Abmeſſungen b und h des rechteckigen Querſchnittes (für Holz) ſind demnach aus der Gleichung zu beſtimmen: 202. Querſchnitts-beſtimmung.

$$\sigma_{max} = K = \pm \left(\frac{U}{b h} + \frac{6 M_{max}}{b h^2} \right).$$

Die Dreieck- und Trapezträger mit einer gröſseren Anzahl von Laſtpunkten werden durch Einfügen von Dreiecken in die oben (Fig. 241 u. 242) dargeſtellten Trägerformen hergeſtellt. Die Berechnung entſpricht der vorſtehenden, kann aber auch bequem nach der Momentenmethode vorgenommen werden.

Literatur.

Bücher über »Statik der Stützen und Träger«.

KLOSE, H. A. Theorie der eiſernen Träger mit Doppelflanſchen. Hannover 1862.

RITTER, A. Theorie und Berechnung eiſerner Dach- und Brücken-Conſtructionen. Berlin 1863. — 5. Aufl.: Hannover 1894.

ASSMANN, G. Hilfstafeln zur Berechnung eiſerner Träger und Stützen. Berlin 1865.

FRANCIS, J. B. *On the ſtrength of caſt-iron pillars.* New-York 1866.

KLERITJ, LJ. J. Abhandlung über genauere Berechnung und Conſtruction einiger Träger von gleichem Widerſtande. Freiberg 1869.

LIPPICH, F. Theorie des continuirlichen Trägers conſtanten Querſchnittes. Elementare Darſtellung der von CLAPEYRON und MOHR begründeten analytiſchen und graphiſchen Methoden und ihres Zuſammenhanges. Wien 1871.

RITTER, W. Die elaſtiſche Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken etc. Zürich 1871. — 2. Aufl. 1883.

KECK, W. Ueber die Ermittlung der Spannungen in Fachwerksträgern, mit Hilfe der graphiſchen Statik. Hannover 1872.

WEYRAUCH, J. Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.

TETMAJER, L. Die äuſsern und innern Kräfte an ſtatiſch beſtimmten Brücken- und Dachſtuhl-Conſtructionen. Zürich 1875.

PINZGER, L. Neue Methode zur Berechnung von Trägern mit unſymmetriſchen Querſchnittsformen. München 1879.

CLERC, A. *Mémoire sur une nouvelle théorie de la résistance des poutres.* Paris 1880.

ZIMMERMANN, H. Trägheitsmomente, Widerstandsmomente und Gewichte genieteter Blechträger. Berlin 1881. 3. Aufl. 1893.

CANOVETTI. *Théories des poutres continues etc.* Paris 1882.

HULEWICZ. *Calcul de résistance des poutres droites à plusieurs travées.* Paris 1882.

MÜLLER-Breslau, H. F. B. Die wichtigsten Resultate für die Berechnung eiserner Träger und Stützen etc. Berlin 1883.

STONEY, B. B. *The theory of stresses in girders and similar structures.* London 1886.

WEYRAUCH, J. J. Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1887.

WEYRAUCH, J. J. Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1888.

ALLIEVI, L. Inneres Gleichgewicht der Pfeiler aus Metallconstruction nach den Gesetzen der elastischen Deformation. Aus dem Ital. von R. TOTZ. Wien 1888.

KOENEN, M. Tabellen der Spannweiten für Träger und Balken etc. Leipzig 1888.

MÖLLER, M. & R. LÜHMANN. Ueber die Widerstandsfähigkeit auf Druck beanspruchter eiserner Bauconstructionstheile bei erhöhter Temperatur etc. Berlin 1888.

KOECHLIN, M. *Applications de la statique graphique.* Paris 1889.

MÜLLER-Breslau, F. B. Beiträge zur Theorie der ebenen elastischen Träger. Berlin 1890.

RITTER, W. Anwendungen der graphischen Statik. Theil II: Das Fachwerk. Zürich 1890.

FROELICH, H. Elementare Anleitung zur Anfertigung statischer Berechnungen für die im Hochbau üblichen Constructionen mit eisernen Trägern und Stützen etc. Berlin 1892.

KRÜGER, R. Graphische Pläne zur Ermittelung der Höhen schmiedeeiserner Träger und Holzbalken, der Durchmesser gusseiserner Voll- und Hohlsäulen und der Stärke hölzerner Stützen. Bremen 1896.

DOMITROWICH, A. Statische Berechnung von Balkendecken, Säulen und Stützen im Holzbaufache. Wien 1897.

I. Theil, 2. Abtheilung:

DIE STATIK DER HOCHBAU-CONSTRUCTIONEN.

4. Abſchnitt.

Dachſtühle.

203. Dachbinder.

Der vorliegende Abſchnitt wird ſich nur mit der Berechnung der Dachbinder beſchäftigen. Die Dachbinder bilden den weſentlichſten Theil der Dachſtühle; ſie ſind die Hauptträger der Dach-Conſtructionen und haben die übrigen Theile derſelben, wie Pfetten, Sparren etc., zu tragen. Sie werden in beſtimmten Abſtänden von einander angeordnet.

Was die Querſchnittsermittelung der Pfetten, der Sparren, des Windverbandes etc. betrifft, ſo iſt einerſeits in den beiden vorhergehenden Abſchnitten bereits das Erforderliche vorgeführt worden; andererſeits wird im III. Theile dieſes »Handbuches« (Band 2, Heft 4, Abſchn. 2, E: Dachſtuhl-Conſtructionen) nochmals auf dieſen Gegenſtand zurückgekommen werden.

Bei den meiſten Dach-Conſtructionen iſt jeder Binder unter dem Einfluſſe der äuſseren Kräfte für ſich ſtabil, ſo lange die letzteren nur in der Ebene des Binders wirken; eine Ausnahme machen die Flechtwerkdächer, welche als räumliches Fachwerk erſt durch die Pfetten und die in der Dachfläche angeordneten Diagonalen ſtabil werden. Hierher gehören ſowohl die *Schwedler*'ſchen Kuppeldächer und die ähnlich conſtruirten Zeltdächer, als auch die von *Foeppl* vorgeſchlagenen Tonnen-Flechtwerke. Die letzteren werden in Theil III, Band 2, Heft 4 (Abth. III, Abſchn. 2, E, Kap. 29, a, 7: *Foeppl*'ſche Flechtwerkdächer) dieſes »Handbuches« vom Verfaſſer eingehend beſprochen werden, und daſelbſt iſt auch die Berechnung derſelben vorgeführt; deſshalb wird an dieſer Stelle nicht auf ſolche Conſtructionen näher eingegangen werden.

Für die Gröſse der Belaſtungen, welche der Berechnung zu Grunde zu legen ſind, iſt die Stellung der Binder zu einander von groſser Wichtigkeit. Die Binder ſind entweder einander im Grundriſs parallel oder ſchlieſsen von Null verſchiedene Winkel mit einander ein.

Nach der Art und Weiſe, wie die Dachbinder unterſtützt ſind, laſſen ſich die Dächer unterſcheiden als:

1) Balkendächer oder Dächer, deren Binder bei lothrechten Belaſtungen nur lothrechte Stützendrücke erleiden (Fig. 247);

2) Sprengwerksdächer oder Dächer, deren Binder ſelbſt bei nur lothrechten Belaſtungen ſchiefe Stützendrücke erhalten (Fig. 248), und

Fig. 247.

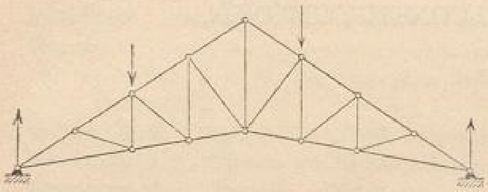
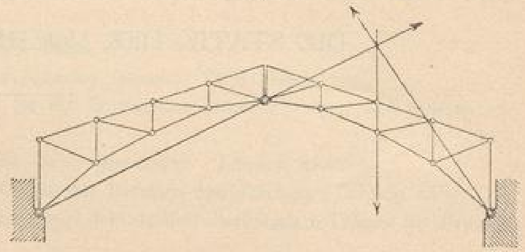


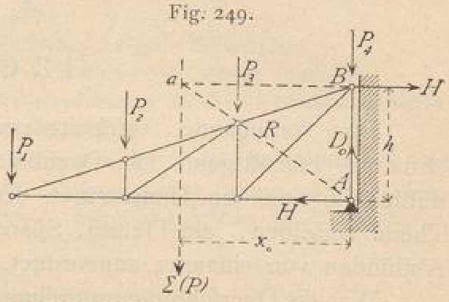
Fig. 248.



3) Ausleger- oder Kragdächer oder Dächer, auf deren Binder an den Unterstützungsstellen ein Stützendruck und ein Moment wirkt (Fig. 249).

Im Vorliegenden sollen nur diejenigen Dachbinder behandelt werden, deren Construction eine genaue Berechnung ohne Berücksichtigung der elastischen Formänderungen gestattet, also einmal nur solche mit nicht mehr als zwei Auflagern, sodann von diesen nur jene, welche ohne Rücksicht auf den Biegungswiderstand der Verbindungsstellen auch für einseitige und schiefe Belastungen stabil sind. Nicht stabil sind ohne Rücksicht auf den erwähnten Biegungswiderstand die Dächer mit liegendem Dachstuhle und die sog. Hängewerksdächer mit zwei Hängesäulen, falls, wie gewöhnlich, Diagonalen im Mittelfelde fehlen. Verzichtet man bei letzteren auf die Annahme verschieden belasteter Dachflächen, so kann die Berechnung genau so durchgeführt werden, wie in Art. 200 (S. 202) für den Trapezträger gezeigt ist.

Fig. 249.



Solche Dachbinder kommen übrigens fast nur in Holz und in solchen Spannweiten vor, für welche eine vielhundertjährige Erfahrung die Querschnittsabmessungen fest gestellt hat. Aussergewöhnliche Spannweiten mit solchen Dachbindern zu überspannen, ist nicht empfehlenswerth. Eine Berechnung ist wohl unter gewissen Annahmen möglich; die Zuverlässigkeit derselben hängt aber in hohem Masse davon ab, wie weit die Annahmen zutreffen. Da aber für grosse Dachweiten das Eisen als vorzügliches und durchaus zuverlässiges Material zur Verfügung steht, sollte man dasselbe für solche Dachweiten stets wählen und genau berechenbare Constructionen anordnen. Demnach ist kein Bedürfnis vorhanden, die Berechnung der oben als nicht stabil bezeichneten Dachbinder hier vorzuführen. Der Verfasser wird übrigens in dem eben erwähnten Heft dieses »Handbuches« Vorschläge machen, durch deren Befolgung auch die Holzbinder als stabile Constructionen hergestellt werden können.

---

1. Kapitel.

Belastungen und Auflagerdrücke.

a) Belastungen.

204. Knotenpunkts-belastungen. Die Belastungen, welche auf die Dächer wirken und aus dem Eigengewichte, der Belastung durch Schneedruck und durch Winddruck bestehen, sind in Art. 25, 28, 29 u. 30 (S. 19 bis 23) angegeben und ausführlich besprochen. Indem auf das dort Vorgeführte verwiesen wird, möge bemerkt werden, dass die zufällige Belastung durch Arbeiter bei Berechnung der Binder und Pfetten ausser Acht gelassen werden

kann; dagegen ift diefe Belaftung bei den fchwachen Nebentheilen des Daches (z. B. den Sproffen der Glasdächer etc.) unter Umftänden ausfchlaggebend.

In Abfchn. 1, Kap. 2 find die Belaftungen, bezogen auf das Quadr.-Meter fchräger Dachfläche, bezw. die wagrechte Projection der Dachfläche angegeben; aus diefen erhält man nun leicht die auf das laufende Meter der Dachbinder wirkenden Laften. Wird die Entfernung der parallel zu einander angeordneten Dachbinder gleich b gefetzt, fo ergeben fich das Eigengewicht und die Schneelaft für das laufende Meter Stützweite der Binder, wenn noch q' das Eigengewicht für 1 qm Grundfläche einfchl. Bindergewicht bezeichnet, zu

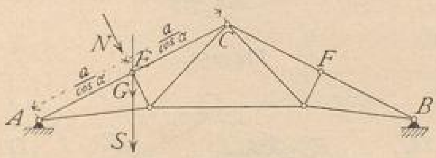
$$g = b\,q' \quad \text{und} \quad s = 75\,b, \qquad 288.$$

ferner der Winddruck für das laufende Meter fchräger Dachlinie zu

$$n = b\,\nu \qquad 289.$$

Sind die Dachbinder einander nicht parallel, fo ift die Belaftung für das laufende Meter Binder veränderlich, entfprechend der Gröfse der Dachfläche, die auf die einzelnen Bindertheile kommt.

Fig. 250.



Die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden Laften werden erhalten, indem man die Belaftung für das laufende Meter Stützweite, bezw. fchräger Dachlinie mit derjenigen Länge multiplicirt, welche auf einen Knotenpunkt entfällt. Für den Knotenpunkt E (Fig. 250) wird demnach

$$G = a\,b\,q', \quad S = 75\,a\,b \quad \text{und} \quad N = \frac{a}{\cos\alpha}\,b\,\nu \qquad 290.$$

Man könnte die Werthe für G, S und N auch nach der Theorie der continuirlichen Träger beftimmen, indem man $A\,E\,C$ als continuirlichen Träger auf drei Stützen auffafft; doch empfiehlt fich das angegebene einfachere Verfahren mehr, da die Annahmen, welche der Berechnung der continuirlichen Träger zu Grunde gelegt werden, hier doch nicht genau erfüllt find und die verwickeltere Rechnung keine entfprechend genaueren Werthe giebt.

Sämmtliche Laften werden in den Knotenpunkten der Binder wirkend angenommen. Die Eigengewichte wirken zum allergröfsten Theile in den Knotenpunkten derjenigen Gurtung, die in den Dachflächen liegt; nur ein ganz geringer Bruchtheil wirkt in den Knotenpunkten der anderen Gurtung. Meiftens kann man annehmen, dafs die Eigenlaften ganz in den erfteren Knotenpunkten angreifen. 205. Belaftungs-annahmen.

Die Windbelaftung kann nur einfeitig wirken; denn da die Windrichtung nach der üblichen Annahme einen Winkel $\beta = 10$ Grad mit der wagrechten Ebene einfchliefst, fo kann der Wind beide Dachflächen nur dann treffen, wenn diefe einen kleineren Winkel mit der Wagrechten bilden, als 10 Grad. Für derartig flache Dächer ift aber der Winddruck fo gering, dafs er ungefährlich ift. Der Winddruck ift alfo ftets einfeitig zu rechnen.

Der Schnee endlich kann das ganze Dach oder einen Theil deffelben belaften Wenn nun auch für manche Stäbe unter Umftänden eine Schneebelaftung über einen beftimmten Bruchtheil des Daches die ungünftigfte Beanfpruchung ergeben follte, fo werden wir doch diefe der Berechnung nicht zu Grunde legen, weil diefelbe nur in den allerfeltenften Fällen einmal vorkommen kann; vielmehr werden wir nur volle Belaftung des Daches und Belaftung der einen Dachhälfte durch Schnee in das Auge faſſen. Wir werden ſpäter zeigen, daſs die zweite Belaſtungsart zu Ergebniſſen führt, aus denen die Spannungen für volle Schneebelaſtung ohne Schwierigkeit abgeleſen werden können.

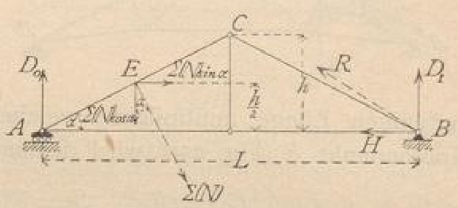
b) Auflagerdrücke bei Balkendächern.

206. Lothrechte Belaſtungen. Die durch lothrechte Belaſtungen (Eigengewicht und Schneedruck) erzeugten Stützendrücke ſind, da die Dachbinder genau wie Träger auf zwei Stützen wirken, eben ſo zu ermitteln, wie bei den »Trägern« (Kap. 2 des vorhergehenden Abſchnittes) gezeigt worden iſt.

207. Schiefe Belaſtungen. Sind die Auflagerdrücke zu ermitteln, welche durch die ſchiefen Winddruckbelaſtungen erzeugt werden, ſo ſind zwei Fälle zu unterſcheiden: entweder ſind alle Winddrücke einander parallel, welcher Fall eintritt, wenn die vom Winde getroffene Dachfläche eine Ebene iſt, oder die Winddrücke ſind nicht parallel, welcher Fall eintritt, wenn die vom Winde getroffene Dachfläche ſich aus mehreren Ebenen zuſammenſetzt.

Für beide Fälle iſt zunächſt klar, daſs der Dachbinder nicht einfach frei auf die Stützpunkte gelagert werden darf. Denn iſt $\Sigma(N)$ die Mittelkraft aller Winddrücke (Fig. 251), ſo hat $\Sigma(N)$ eine wagrechte Seitenkraft $\Sigma\ (N)\ \sin\ \alpha$. Gleichgewicht iſt alſo nur möglich, wenn Seitens des einen der beiden Auflager eine wagrechte Kraft $H = \Sigma\,(N)\ \sin\ \alpha$ auf den Binder wirkt; demnach muſs das Dach in A oder B unverſchieblich mit dem Auflager verbunden werden, um eine wagrechte Kraft übertragen zu können.

Fig. 251.



Wollte man ein eiſernes Dach in beiden Punkten A und B feſt mit dem Auflager verbinden, ſo würde daſſelbe bei Aenderung der Temperatur nicht im Stande ſein, ſich auszudehnen, bezw. zuſammenzuziehen; demnach würden durch die Temperaturveränderungen weſentliche Spannungen im Dache entſtehen, bezw. die ſtützenden Wände würden gelockert werden. Man conſtruirt deſshalb bei eiſernen Dachſtühlen das eine Auflager ſo, daſs daſſelbe eine freie Ausdehnung und Zuſammenziehung geſtattet; das andere ſtellt eine feſte Verbindung zwiſchen Träger und ſtützender Wand her. Wir wollen in der Folge ſtets ein feſtes und ein bewegliches Auflager, und zwar das Auflager bei A als das bewegliche, dasjenige bei B als das feſte annehmen. Nehmen wir ferner an, daſs das Auflager bei A eine Bewegung ohne Reibung geſtatte, ſo kann der Stützendruck bei A nur lothrecht wirken. Dieſe Annahme iſt nicht genau richtig, aber für die Praxis ausreichend. Der Auflagerdruck bei B dagegen kann beliebige Richtung annehmen. Es iſt übrigens leicht, den Einfluſs des gröſstmöglichen Reibungswiderſtandes auf die Stabſpannungen zu ermitteln, indem man denſelben als äuſsere auf den Binder wirkende Kraft einführt. In dem mehrfach erwähnten Heft dieſes »Handbuches« wird die betreffende Unterſuchung durchgeführt werden.

Es ergeben ſich verſchiedene Auflagerdrücke, je nachdem die Windbelaſtung auf derjenigen Dachſeite ſtattfindet, an welcher das bewegliche Auflager A iſt, oder auf derjenigen, an welcher das feſte Auflager B liegt.

208. Parallele Winddrücke. 1) Die Winddrücke ſind parallel. α) Diejenige Dachhälfte iſt belaſtet, an welcher das bewegliche Auflager liegt (Fig. 251). Die Mittel-

kraft $\Sigma (N)$ ſämmtlicher Winddrücke greiſe in der Mitte von AC, etwa in E, an und ſei gleich der Summe aller Einzeldrücke. $\Sigma (N)$ zerlegt ſich im Punkte E in eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft $\Sigma (N) \sin \alpha$ und $\Sigma (N) \cos \alpha$; in A wirkt der lothrechte Stützendruck D_0, in B der ſchiefe Auflagerdruck R, welcher gleichfalls in eine wagrechte Seitenkraft H und in eine lothrechte Seitenkraft D_1 zerlegt wird. Die drei Unbekannten D_0, D_1 und H erhält man durch die drei Gleichgewichtsbedingungen. Es iſt

$$0 = \Sigma (N) \sin \alpha - H, \quad \text{woraus} \quad H = \Sigma (N) \sin \alpha; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 291.$$

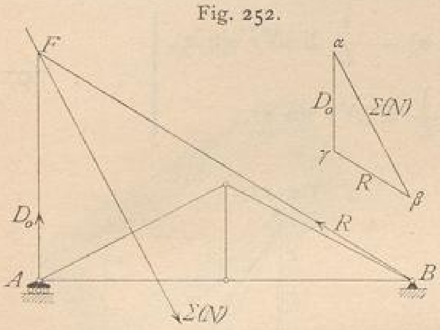
$$D_0 L + \Sigma (N) \sin \alpha \frac{h}{2} - \Sigma (N) \cos \alpha \frac{3}{4} L = 0, \quad \text{woraus, da} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{L},$$

$$D_0 = \frac{\Sigma (N) \cos \alpha}{4} (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 292.$$

$$D_1 L - \Sigma (N) \sin \alpha \frac{h}{2} - \Sigma (N) \cos \alpha \frac{L}{4} = 0, \quad \text{woraus} \quad D_1 = \frac{\Sigma (N)}{4 \cos \alpha} \quad . \quad 293.$$

Auf graphiſchem Wege geſchieht die Ermittelung der Auflagerdrücke in der durch Fig. 252 veranſchaulichten Weiſe.

Fig. 252.



Die drei auf das Dach wirkenden Kräfte D_0, R und $\Sigma (N)$ halten daſſelbe im Gleichgewicht, ſchneiden ſich alſo in einem Punkte; die Kraft R geht ſonach durch den Schnittpunkt F der Kräfte D_0 und $\Sigma (N)$. R geht auch durch B; alſo iſt BF die Richtung der Kraft R Aus dem Kräftedreieck für dieſe Kräfte ergiebt ſich, wenn $\alpha\beta = \Sigma (N)$ iſt, $R = \beta\gamma$ und $D_0 = \gamma\alpha$.

β) Diejenige Dachhälfte iſt belaſtet, an welcher das feſte Auflager liegt (Fig. 253). Die Mittelkraft $\Sigma (N)$ greift in der Mitte der rechtsſeitigen Dachfläche, in E', an und zerlegt ſich in eine lothrechte und eine wagrechte Seitenkraft. Wir erhalten durch Aufſtellung der Gleichgewichtsbedingungen:

$$0 = H' - \Sigma (N) \sin \alpha, \quad \text{woraus} \quad H' = \Sigma (N) \sin \alpha; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 294.$$

$$0 = D'_0 L - \Sigma (N) \sin \alpha \frac{h}{2} - \Sigma (N) \cos \alpha \frac{L}{4}, \quad \text{woraus} \quad D'_0 = \frac{\Sigma (N)}{4 \cos \alpha}; \quad 295.$$

$$0 = D'_1 L + \Sigma (N) \sin \alpha \frac{h}{2} - \Sigma (N) \cos \alpha \frac{3}{4} L,$$

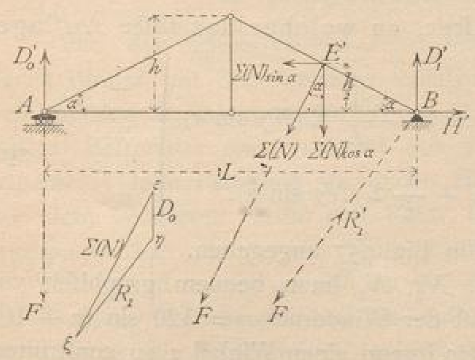
woraus

$$D'_1 = \frac{\Sigma (N) \cos \alpha}{4} (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 296.$$

Man ſieht, es iſt $D_0 = D'_1$, $D_1 = D'_0$ und $H = H'$; nur iſt bei H' der Sinn demjenigen von H entgegengeſetzt.

Durch Conſtruction laſſen ſich die Auflagerdrücke im vorliegenden Falle, wie in Fig. 253 gezeigt, ermitteln.

Fig. 253.

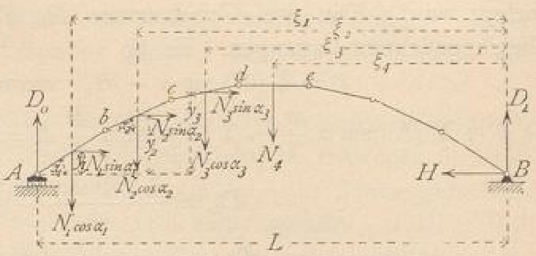


Die drei Kräfte D'_0, $\Sigma (N)$ und die Mittelkraft R'_1 von H' und D'_1 ſind im Gleichgewichte, ſchneiden ſich daher in einem Punkte, und zwar in demjenigen Punkte, in welchem die Richtungen von D'_0 und $\Sigma (N)$ ſich ſchneiden, alſo in F. Die Verbindungslinie der beiden Punkte B und F ergiebt demnach die Richtung der Kraft R'_1 Iſt $\Sigma (N) = \varepsilon\xi$, ſo wird $\xi\eta = R'_1$ und $\eta\varepsilon = D'_0$.

209. Nicht parallele Winddrücke.

2) Die Winddrücke haben nicht parallele Richtungen. α) Diejenige Dachhälfte ift belaftet, an welcher das bewegliche Auflager liegt. Bei gebrochener Dachfläche werden die Winddrücke, welche auf die einzelnen Flächen wirken, nach den Angaben in Art. 30 (S. 23) ermittelt. Bei einer cylindrifchen Dachfläche genügt es, einzelne Dachtheile zufammenzufaffen und für jeden diefer Theile den Winddruck unter Zugrundelegung eines mittleren Neigungswinkels α zu beftimmen. Man erhält etwa N_1 für die Strecke Ab (Fig. 254), N_2 für bc etc. Die Zerlegung jeden Winddruckes in eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft und die Aufftellung der Gleichgewichtsbedingungen ergeben die Unbekannten D_0, D_1 und H. Es wird

Fig. 254.



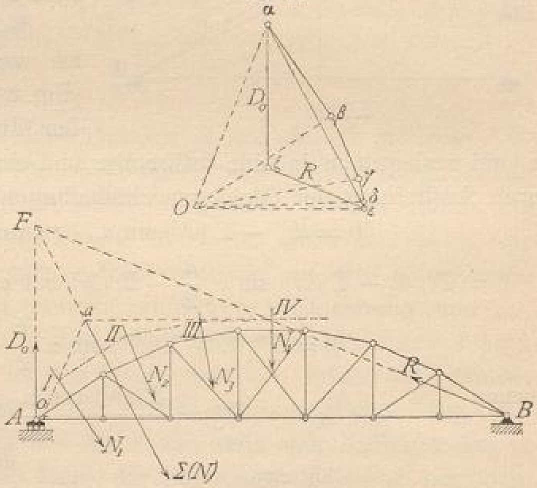
$$
\left.\begin{array}{c}
H = \Sigma\,(N \sin\alpha),\quad D_0 = \dfrac{1}{L}\,\Sigma\,(N\xi\cos\alpha) - \dfrac{1}{L}\,\Sigma\,(Ny\sin\alpha), \\[2ex]
D_1 = \dfrac{1}{L}\,\Sigma\,[N(L-\xi)\cos\alpha] + \dfrac{1}{L}\,\Sigma\,(Ny\sin\alpha).
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 297.
$$

Die graphifche Ermittelung der Auflagerdrücke zeigt Fig. 255.

Die einzelnen Winddrücke (N_1, N_2, N_3 ...) werden mittels eines Kraftpolygons $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ zu einer Mittelkraft vereinigt; hierauf wird für einen beliebigen Pol O das Seilpolygon $O\,I\,II\,III\,IV$ conftruirt. Alsdann geht die Mittelkraft durch den Schnittpunkt a der äufserften Seilpolygonfeiten und ift parallel zu $\alpha\varepsilon$. Jetzt erfetzt $\Sigma\,(N)$ alle Winddrücke, und es wirken nur noch die drei Kräfte D_0, $\Sigma\,(N)$ und R, fo dafs die graphifche Ermittelung von D_0 und R in der foeben gezeigten Weife erfolgen kann. Es ergiebt fich $\varepsilon\xi = R$ und $\xi\alpha = D_0$.

Wenn die Dachfläche aus einzelnen ebenen Dach- und Laternenflächen fich zufammenfetzt, fo ift das Verfahren genau fo, wie eben angegeben.

Fig. 255.



β) Diejenige Dachhälfte ift belaftet, an welcher das fefte Auflager liegt (Fig. 256). Die Berechnung ergiebt

$$
\left.\begin{array}{c}
H' = \Sigma\,(N \sin\alpha),\quad D'_1 = \dfrac{1}{L}\,\Sigma\,(N\xi'\cos\alpha) - \dfrac{1}{L}\,\Sigma\,(Ny\sin\alpha), \\[2ex]
D'_0 = \dfrac{1}{L}\,\Sigma\,[N(L-\xi')\cos\alpha] + \dfrac{1}{L}\,\Sigma\,(Ny\sin\alpha).
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 298.
$$

Die Conftruction von D'_0 und R'_1 ift in Fig. 257 angegeben.

Die Ermittelung der Werthe für N_1, N_2, N_3 kann bequem graphifch vorgenommen werden. Nach Art. 30 (S. 23) ift der Winddruck $\nu = 120 \sin(\alpha + 10^0)$ für 1 qm. Diefes ν ift nach Fig. 258 leicht für irgend einen Winkel α zu conftruiren.

Fig. 256.

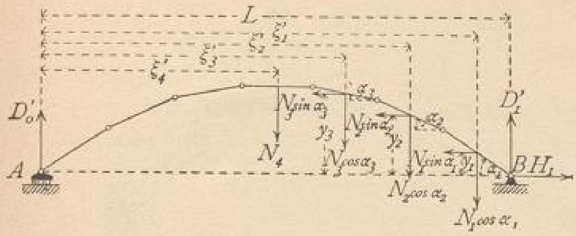
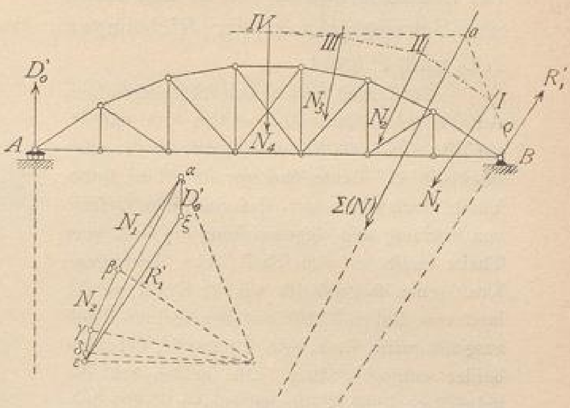


Fig. 257.



Man mache in der Dachfläche nach beliebigem Mafsftabe $\overline{ab} = 120^{kg}$, lege durch b eine Linie parallel zur Windrichtung und fälle auf diefelbe von a aus die Senkrechte ac; alsdann ift

$$\overline{ac} = \overline{ab} \sin (\alpha + 10^0).$$

Da $\overline{ab} = 120^{kg}$ ift, fo ift $\overline{ac} = 120 \sin (\alpha + 10^0) = \nu$, d. h. der gefuchte Winddruck. Trägt man ac fenkrecht zur Dachfläche ab, fo erhält man die in Fig. 258 fchraffirte Belaftungsfläche für Winddruck.

Fig. 258.

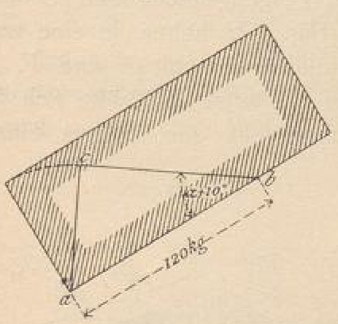


Fig. 259.

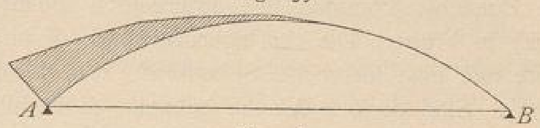
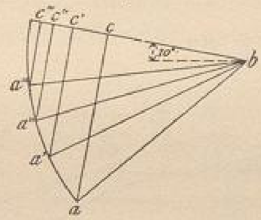


Fig. 260.



Bildet die Dachfläche eine Cylinderfläche, fo wähle man eine genügend grofse Anzahl von Punkten aus, für welche man die gezeigte Conftruction vornimmt. Man erhält die in Fig. 259 gezeichnete Belaftungsfläche und kann daraus leicht die Gröfse des Winddruckes ermitteln, welcher auf die einzelnen Knotenpunkte der Conftruction entfällt.

Bequemer macht man die Conftruction der Winddrücke in einer befonderen Zeichnung (Fig. 260) und erhält ac, bezw. $a'c'$, $a''c''$ ...

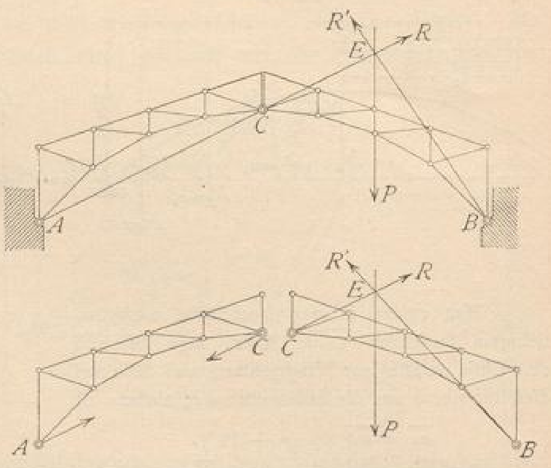
c) Auflagerdrücke bei Sprengwerksdächern.

Von den Sprengwerksdächern follen hier nur diejenigen behandelt werden, deren Binder mit drei Gelenken conftruirt find (Fig. 261). Zwei Gelenke befinden fich an den Auflagerpunkten A und B, ein drittes C gewöhnlich in der Bindermitte. Betrachtet man zunächft den Träger felbft als gewichtslos, fo ergiebt fich allgemein: Jede Belaftung der einen Hälfte, etwa CB, erzeugt im Auflagerpunkt der nicht belafteten Hälfte eine Kraft, deren Richtung durch den betreffenden Auflagerpunkt, hier A, und das Mittelgelenk C beftimmt ift. 210. Allgemeines.

Eine Laft P auf der Hälfte BC erzeugt alfo in A einen Stützendruck R mit der Richtung AC, und da auf das Syftem nur drei Kräfte, nämlich die Laft P und die Drücke der Auflager A und B, wirken, fo müffen fich diefelben in einem

Punkte ſchneiden. Daraus folgt, daſs der Stützendruck R' von B aus durch den Schnittpunkt E der Richtungen AC und P geht.

Fig. 261.



Der Beweis ergiebt ſich folgendermaſsen. Auf die rechte Hälfte BC wirken P, R und R', auf die linke Hälfte eine Kraft in A, eine zweite in C. Beide ſind vor der Hand unbekannt; doch wiſſen wir, daſs nach dem Geſetze von Wirkung und Gegenwirkung die in C vom Theile rechts auf den Theil links übertragene Kraft genau ſo groſs iſt, wie die Kraft, welche in C vom linken Theile auf den rechten Theil ausgeübt wird, d. h. wie R; nur iſt der Sinn beider entgegengeſetzt. Die beiden auf die unbelaſtete linke Hälfte wirkenden Kräfte halten dieſen Theil im Gleichgewicht; dies iſt aber nur möglich, wenn beide in dieſelbe Richtung fallen, d. h. in diejenige, welche durch die beiden Angriffspunkte A und C gegeben iſt, entgegengeſetzten Sinn und gleiche Gröſse haben; der Stützendruck von A geht alſo durch C.

211.
Lothrechte Belaſtungen.

Zunächſt kommen die lothrechten Belaſtungen (Eigengewicht und Schneedruck) in Frage. Die Auflagerdrücke in A und B (Fig. 262) haben je eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft. Wir bezeichnen dieſelben mit H und V, H_1 und V_1. Sind dieſe 4 Werthe bekannt, ſo iſt alles auf die äuſseren Kräfte ſich Beziehende bekannt. Wir betrachten zuerſt das Gleichgewicht der rechten Hälfte

Fig. 262.

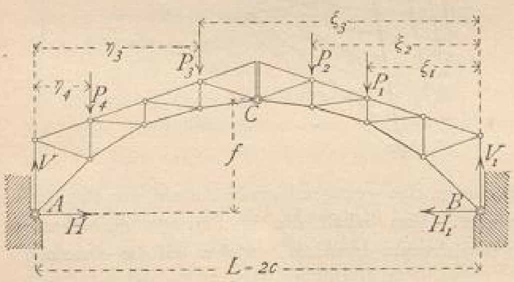
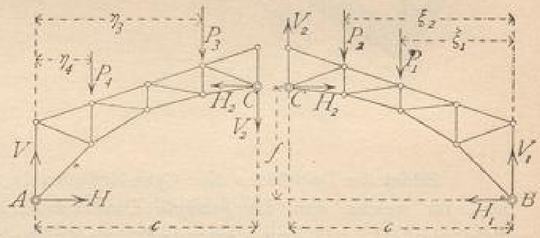


Fig. 263.



(Fig. 263). In C wirkt auf dieſelbe eine Kraft, deren Seitenkräfte H_2 und V_2 ſein mögen. Alsdann iſt die Summe der ſtatiſchen Momente für B als Drehpunkt gleich Null, mithin

$$H_2 f + V_2 c - \Sigma (P \xi) = 0.$$

Betrachtet man nun die linke Hälfte (Fig. 263), ſo wirkt auf dieſe in C eine genau ſo groſse Kraft, wie in C auf die rechte Hälfte wirkt; nur iſt der Sinn entgegengeſetzt. Demnach werden die Seitenkräfte derſelben wiederum H_2 und V_2, aber mit entgegengeſetztem Sinne ſein. Die Summe der ſtatiſchen Momente für A als Drehpunkt iſt gleich Null; mithin, wenn ſtets die Summen, welche ſich auf die linke Hälfte beziehen, mit dem Zeiger 1 bezeichnet werden,

$$H_2 f - V_2 c - \Sigma_1 (P \eta) = 0.$$

Damit ſind für H_2 und V_2 die beiden Gleichungen gefunden:

$$H_2 f + V_2 c = \Sigma (P \xi) \quad \text{und} \quad H_2 f - V_2 c = \Sigma_1 (P \eta).$$

Aus diefen beiden Gleichungen erhält man

$$H_2 = \frac{\Sigma\,(P\,\xi) + \underset{1}{\Sigma}\,(P\,\eta)}{2\,f} \quad \text{und} \quad V_2 = \frac{\Sigma\,(P\,\xi) - \underset{1}{\Sigma}\,(P\,\eta)}{L} \quad . \; . \; . \quad 299.$$

Die Anwendung der übrigen Gleichgewichtsbedingungen auf die beiden Hälften ergiebt nun leicht

$$\left.\begin{aligned} H = H_2 = H_1 &= \frac{\Sigma\,(P\,\xi) + \underset{1}{\Sigma}\,(P\,\eta)}{2\,f}, \\ V = V_2 + \underset{1}{\Sigma}\,(P) &= \frac{\Sigma\,(P\,\xi) + \underset{1}{\Sigma}\,(P\,\xi)}{L}, \\ V_1 = \Sigma\,(P) - V_2 &= \frac{\Sigma\,[P\,(L-\xi)] + \underset{1}{\Sigma}\,[P\,(L-\xi)]}{L}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 300.$$

Die lothrechten Seitenkräfte der Lagerdrücke find demnach genau fo grofs, wie bei gleicher Belaftung an einem Balkenträger von der Spannweite L. Jetzt find auch die Kräfte R und R_1, fo wie ihre Winkel α und α_1 mit der Wagrechten gefunden. Es werden

$$R = \sqrt{H^2 + V^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H}; \quad R_1 = \sqrt{H_1^{\,2} + V_1^{\,2}} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{V_1}{H_1} \quad 301.$$

Beifpiel. 1) Die beiden Dachhälften feien gleich belaftet, je mit g auf die Längeneinheit der wagrechten Projection (Fig. 264). Dann ift

$$\Sigma\,(P) = \underset{1}{\Sigma}\,(P) = g\,c; \quad \Sigma\,(P\,\xi) = \underset{1}{\Sigma}\,(P\,\eta) = \frac{g\,c^2}{2};$$

$$H = \frac{g\,c^2}{2\,f}; \quad V_2 = 0; \quad V = V_2 + \underset{1}{\Sigma}\,(P) = g\,c; \quad V_1 = \Sigma\,(P) - V_2 = g\,c \quad . \; . \; . \quad 302.$$

Fig. 264.

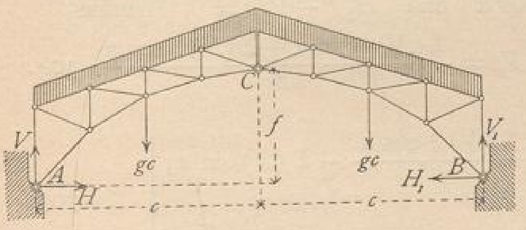
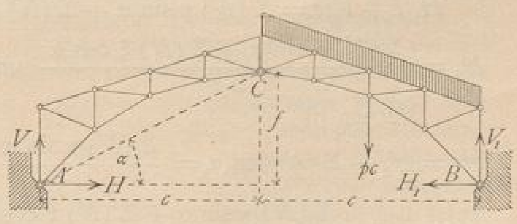


Fig. 265.



2) Die eine (rechte) Hälfte fei mit p für die Längeneinheit der wagrechten Projection belaftet, die andere (linke) Hälfte fei unbelaftet (Fig. 265). Alsdann ift

$$\Sigma\,(P) = p\,c; \quad \underset{1}{\Sigma}\,(P) = 0; \quad \Sigma\,(P\,\xi) = \frac{p\,c^2}{2}; \quad \underset{1}{\Sigma}\,(P\,\eta) = 0;$$

$$H_2 = H = H_1 = \frac{p\,c^2}{4\,f}; \quad V_2 = \frac{p\,c^2}{2\,.\,2\,c} = \frac{p\,c}{4}; \quad V = \frac{p\,c}{4}; \quad V_1 = \frac{3\,p\,c}{4} \quad . \; . \; . \quad 303.$$

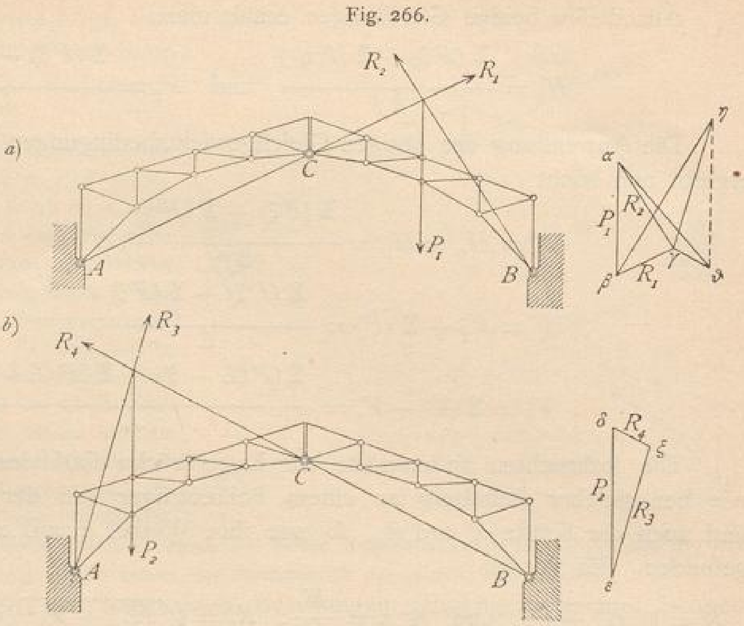
Hier ift nach Gleichung 301: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p\,c\,.\,4\,f}{4\,p\,c^2} = \frac{f}{c}$, d. h. die Richtung von R geht durch A und C (fiehe oben).

Die graphifche Ermittelung der in Rede ftehenden Auflagerdrücke ift in Fig. 266 dargeftellt.

Es empfiehlt fich, für beliebige Belaftung zuerft nur die eine Hälfte belaftet anzunehmen und für diefe Belaftung die Auflagerdrücke zu ermitteln, darauf die Auflagerkräfte für die Belaftung nur der anderen Hälfte aufzufuchen. Die Zufammenfetzung der für die einzelnen Belaftungen gefundenen Kräfte ergiebt alsdann die wirklichen Auflagerdrücke.

Zunächſt ſei nur die rechte Hälfte belaſtet und die Mittelkraft dieſer Laſten gleich P_1; alsdann haben R_1 und R_2 die in Fig. 266 *a* gezeichneten Richtungen, und die Gröſse beider ergiebt ſich durch das Kraftpolygon zu $\beta\gamma = R_1$ und $\gamma\alpha = R_2$. In gleicher Weiſe erhält man für Belaſtung der linken Hälfte mit P_2: $\varepsilon\xi = R_3$ und $\xi\delta = R_4$. Wenn nun beide Hälften mit P_1, bezw. P_2 belaſtet ſind, ſo wirken in A: R_1 und R_3, in B: R_2 und R_4. Die Gröſse und Richtung der geſammten Auflagerdrücke R und R' erhält man durch Conſtruction der Kraftpolygone aus den bezüglichen Kräften. Iſt $\gamma\eta = R_3$, ſo wird $\beta\eta = R$; iſt $\vartheta\gamma \# \xi\delta = R_4$, ſo wird $\vartheta\alpha = R'$.

Fig. 266.



Als Controle diene, daſs die wagrechten Projectionen von R und R' gleich ſein müſſen, da ja H im ganzen Sprengwerksträger conſtant iſt.

212. Schiefe Belaſtungen.

Uebergehen wir nunmehr zu den vom Winddruck (durch ſchiefe Belaſtung) erzeugten Stützendrücken, ſo ſei $\Sigma\,(N)$ die Mittelkraft aller Winddrücke (Fig. 267). Wir zerlegen dieſe Kraft in $\Sigma\,(N)\cos\alpha$ und $\Sigma\,(N)\sin\alpha$ und erhalten, wie im vorhergehenden Artikel, die Gleichgewichtsbedingungen:

$$H_2 f + V_2 c = \Sigma\,(N)\,y\sin\alpha + \Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha \quad \text{und} \quad H_2 f - V_2 c = 0, \quad \text{woraus}$$

$$H_2 = \frac{\Sigma\,(N)\,y\sin\alpha + \Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha}{2f} \quad \text{und} \quad V_2 = \frac{\Sigma\,(N)\,y\sin\alpha + \Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha}{2c} \qquad 304.$$

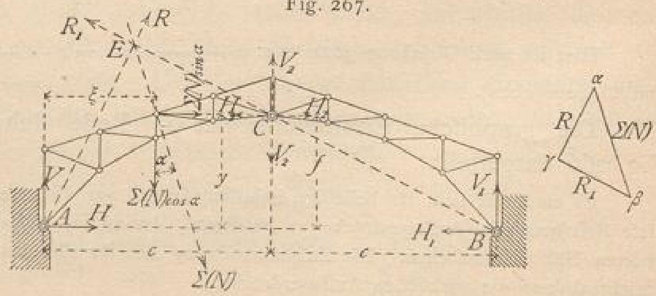
Ferner iſt

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= H_2 - \Sigma\,(N)\sin\alpha = \frac{\Sigma\,(N)\,y\sin\alpha + \Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha}{2f} - \Sigma\,(N)\sin\alpha, \\ H_1 &= H_2 = \frac{\Sigma\,(N)\,y\sin\alpha + \Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha}{2f}, \end{aligned}\right\} \quad 305.$$

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \Sigma\,(N)\cos\alpha - V_2 = \Sigma\,(N)\cos\alpha - \frac{\Sigma\,(N)\,y\sin\alpha + \Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha}{2c}, \\ V_1 &= V_2 = \frac{\Sigma\,(N)\,y\sin\alpha + \Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha}{2c}. \end{aligned}\right\} \quad 306.$$

Wenn die ſchiefen Belaſtungen einander nicht parallel ſind, ſo bleibt das Verfahren das gleiche; nur ſind ſtatt $\Sigma\,(N)\,y\sin\alpha$ und $\Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha$ bezw. $\Sigma\,(N y \sin\alpha)$ und $\Sigma\,(N \xi\cos\alpha)$ in die Rechnung einzuführen.

Fig. 267.



Für die graphiſche Ermittelung der fraglichen Auflagerdrücke iſt die in Fig. 267 angegebene Conſtruction ohne Weiteres verſtändlich, und es ergiebt ſich $\beta\gamma = R_1$, $\gamma\alpha = R$.

Bei nicht parallelen Winddrücken iſt für die graphiſche Behandlung zunächſt die Mittelkraft derſelben nach Gröſse, Richtung und Lage in bekannter Weiſe aufzuſuchen und alsdann zu verfahren, wie in Fig. 267 dargeſtellt iſt.

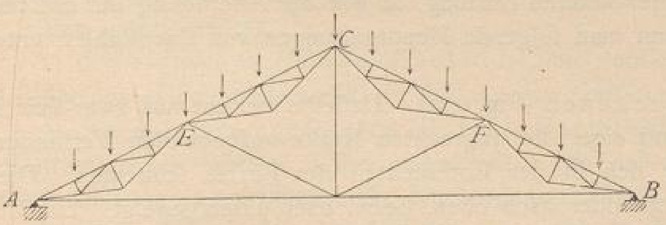
---

2. Kapitel.

Balkendächer.

Indem wir nunmehr zur Ermittelung der Spannungen in den wichtigſten Dachſtuhl-Conſtructionen übergehen, werden wir bei den diesfälligen Unterſuchungen für jede Gattung von Dachbindern die verſchiedenen Belaſtungsfälle geſondert betrachten. Wir beſtimmen demnach die Spannungen, welche erzeugt werden: 1) durch das Eigengewicht, 2) durch einſeitige, bezw. volle Schneebelaſtung, 3) durch Windbelaſtung, ſowohl von der Seite, an der das bewegliche, wie von der Seite, an welcher das feſte Auflager liegt. Indem dann dieſe Spannungen in einer Tabelle zuſammengeſtellt werden, iſt es leicht, für jeden Stab die ungünſtigſte Belaſtungsart und die ungünſtigſten Spannungen zu beſtimmen, ferner für die Querſchnittsbeſtimmung (ſiehe Art. 84 u. 85, S. 60 bis 63) die Werthe P_0, P_1 und P_2 zu ermitteln. Da die Dachbinder meiſt Gitterträger ſind, ſo werden die im Kapitel »Träger« gezeigten Verfahren für die Spannungsermittelung hier genau, wie dort, Anwendung finden. Auch hier machen wir die Annahmen: 1) daſs die Stäbe in den Knotenpunkten durch Gelenke mit einander verbunden ſind, 2) daſs die Laſten nur in den Knotenpunkten der Conſtruction wirken. Die berechneten Spannungen werden deſto mehr mit den wirklichen übereinſtimmen, je mehr die Conſtruction dieſen Annahmen entſpricht. Die zweite Annahme (Belaſtung nur in den Knotenpunkten) iſt häufig nicht erfüllt; in dieſem Falle kann man dennoch die in den folgenden Artikeln zu zeigenden Methoden anwenden, indem man annimmt, daſs die zwiſchen je zwei Knotenpunkten befindlichen Laſten durch beſondere Träger auf die Knotenpunkte übertragen werden. Die Berechnung dieſer Träger hat, wie im Kapitel »Träger« gezeigt iſt, zu erfolgen. Die Belaſtung, welche im Hauptſyſtem auf die Knotenpunkte übertragen wird, iſt dann der Gröſse und Richtung nach gleich den auf die Zwiſchenträger wirkenden Auflagerdrücken. Der Sinn iſt entgegengeſetzt. In Fig. 268 z. B. ſind zwiſchen je zwei Knotenpunkten des Hauptſyſtemes Pfetten, demnach Laſtpunkte. Das Stück *CE* kann wie ein beſonderer, in *C* und *E* frei aufliegender Träger aufgefaſst und berechnet werden; eben ſo verhält es ſich mit dem Stück *AE*. Im Punkte *E* des Hauptſyſtemes wirken dann der linke Auflagerdruck des Balkens *CE* und der rechte Auflagerdruck des Balkens *AE* nach unten, auſserdem noch die Belaſtung der Pfette in *E*. Demnach ſind die Spannungen im Hauptſyſtem auch hier zunächſt genau ſo zu berechnen, als wenn die Geſammtlaſten nur in den Hauptknotenpunkten *A*, *C*, *E*, *F* und *B* angriffen; zu dieſen Spannungen im Hauptſyſtem kommen alsdann noch die in den kleinen Trägern *AE*, *EC* etc. ſtattfindenden Spannungen hinzu. Die Spannungen derjenigen Stäbe der kleinen Träger, welche mit den Linien *AE*, *EC* etc. zuſammenfallen, addiren ſich einfach zu den Spannungen in dieſen Stäben. 213. Allgemeines.

Fig. 268.

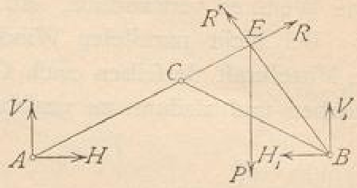


Die erſte Annahme (Anordnung von Gelenken in den Knotenpunkten) iſt bei den hölzernen Dachbindern niemals, allein auch bei den eiſernen Dachſtühlen häufig nicht erfüllt; doch braucht bei den gewöhnlichen Dächern auf die hierdurch bedingten Unterſchiede der wirklich auftretenden Spannungen gegenüber den berechneten keine Rückſicht genommen zu werden.

Das einfachſte Dach entſteht dadurch, daſs ſich zwei Sparren *AC* und *BC* gegen einander lehnen (Fig. 269). Jede Belaſtung deſſelben, etwa des Sparrens *BC*, 214. Princip der Balkendächer.

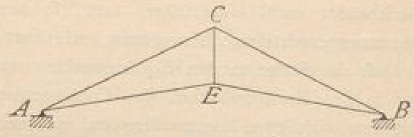
durch eine Laſt P, erzeugt nach Art. 210 in A eine Kraft R, deren Richtung mit AC zuſammenfällt, in B eine Kraft R' in der Richtung BE. Die Auflagerkräfte R und R' haben die wagrechten Seitenkräfte H und H_1, und da auſserdem hier keine wagrechten Kräfte auf das Syſtem wirken, ſo iſt $H = H_1$. Dieſe Kräfte H werden von den Seitenmauern des Gebäudes oder von den ſonſtigen ſtützenden Conſtructionen geleiſtet; umgekehrt wirken Seitens des Daches die Kräfte H auf die Seitenmauern des Gebäudes oder auf die ſonſtigen Stützen nach auſsen.

Fig. 269.



Die Standſicherheit der das Dach tragenden Wände, Stützen etc. macht es in den meiſten Fällen wünſchenswerth, daſs dieſe wagrechten Kräfte nicht auf dieſelben übertragen werden; man verbindet deſshalb die beiden Punkte A und B durch einen Stab oder eine Anzahl von Stangen, welche die Kräfte H und H_1 nach einem Punkte übertragen, in welchem ſie alsdann einander aufheben. Dadurch erhält man, wenigſtens für lothrechte Belaſtungen des Daches, nur lothrechte Auflagerdrücke und lothrechten Druck auf die Wände, Stützen etc. Im einfachſten Falle beſteht die Stangenverbindung aus einem einfachen Holzbalken oder einer einfachen eiſernen Zugſtange AB; ſtatt deſſen werden auch zwei Stangen AE und EB (Fig. 270) angeordnet, die ſowohl nach oben, wie nach unten von der wagrechten Linie abweichen können. Alsdann iſt im Eckpunkte E eine weitere lothrechte Stange anzuordnen. Auch eine mehrfach gebrochene Stangenverbindung kann zur Verbindung der Punkte A und B gewählt werden. Beim Balkendach werden demnach ſtets die wagrechten Seitenkräfte der Auflagerdrücke, welche durch die lothrechten Belaſtungen entſtehen, mittels der Stangenverbindung aufgehoben.

Fig. 270.



215.
Eintheilung.

Je nach der Anordnung der eben erwähnten Stangenverbindung, bezw. je nach der Form der oberen und der unteren Gurtung, ſo wie der Anordnung der zwiſchen beiden gelegenen Stäbe kann man folgende Hauptgattungen von Dachſtühlen unterſcheiden[34]):

a) Einfaches Dreieckdach (Fig. 270). Daſſelbe beſteht aus zwei ſich im Firſt ſtützenden Sparren und einer die wagrechten Kräfte aufhebenden Verbindung von zwei Stangen, welche ſich in der Lothrechten des Firſtes ſchneiden. Dieſe beiden Stangen ſind wagrecht oder nach oben, bezw. nach unten geneigt. Zur Verbindung des Firſtpunktes mit dem Schnittpunkte der Stangen, welche den wagrechten Schub aufnehmen, iſt eine lothrechte Stange CE angeordnet.

b) Deutſcher Dachſtuhl (Fig. 271). Die obere Gurtung hat jederſeits einen Knotenpunkt, welcher durch einen Stab mit E verbunden iſt.

Fig. 271.

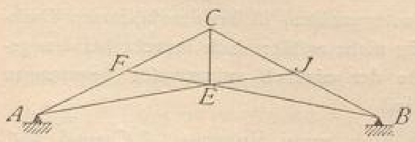
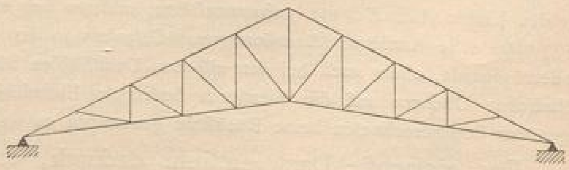


Fig. 272.



[34]) Vergl. auch Theil III, Band 2, Heft 4 (Art. 144 bis 149, S. 199 bis 207) dieſes »Handbuches«.

c) Engliſcher Dachſtuhl (Fig. 272). Die obere Gurtung hat jederſeits eine Anzahl von Knotenpunkten; die obere Gurtung und die den wagrechten Schub aufhebende Stangenverbindung (die untere Gurtung) ſind durch Gitterwerk mit einander verbunden. Das Gitterwerk beſteht aus einer Schar Pfoſten und einer Schar Diagonalen oder aus zwei Scharen von Diagonalen, von denen die eine vortheilhaft ſenkrecht zur Dachneigung ſteht.

d) Franzöſiſcher oder belgiſcher Dachſtuhl, *Polonceau*-Dachſtuhl oder *Wiegmann*-Dachſtuhl (Fig. 273 bis 276). Er entſteht aus dem einfachen Dreieckdach, wenn in Fig. 269 die einfachen Sparren durch Dreieckträger erſetzt werden.

Fig. 273.

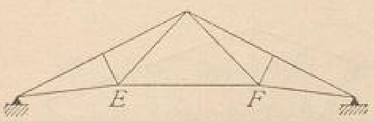


Fig. 274.

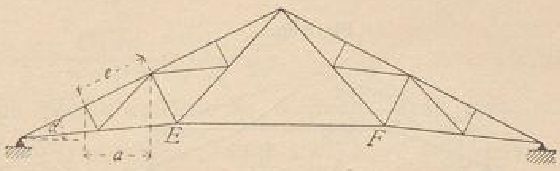


Fig. 275.

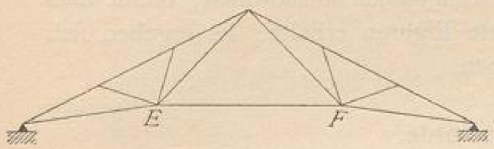
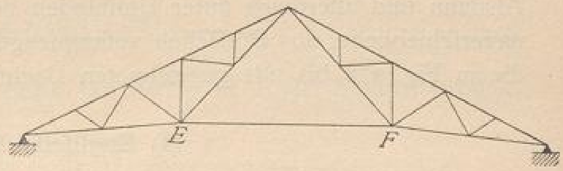


Fig. 276.



Die Form der letzteren richtet ſich nach der Anzahl von Stützpunkten (Knotenpunkten), welche jederſeits nöthig werden. Der wagrechte Schub wird durch eine Stange EF aufgehoben, welche die unteren Eckpunkte der beiden Dreieckträger verbindet. In Fig. 273 bis 276 ſind *Polonceau*-Dachſtühle für 1, 2, 3 und 4 Laſtpunkte an jeder Seite des Firſtes dargeſtellt.

Man unterſcheidet:

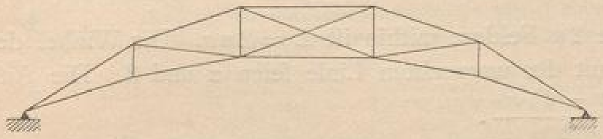
1) den einfachen *Polonceau*-Dachſtuhl; bei demſelben hat der Dreieckträger jederſeits nur einen Knotenpunkt in der unteren Gurtung (Fig. 273 u. 275);

2) den zuſammengeſetzten *Polonceau*-Dachſtuhl; bei dieſem ſind in den Hauptträger noch weitere Stäbe eingeſchaltet, ſo daſs der Dreieckträger in der unteren Gurtung jederſeits mehrere Knotenpunkte hat (Fig. 274 u. 276).

Die Anzahl der Laſtpunkte beſtimmt ſich nach der Tragweite, welche man den Sparren geben kann. Letztere heiſse e; ſomit iſt die wagrechte Projection derſelben $e \cos \alpha = a$, die Geſammtſtützweite des Daches L. Alsdann ergiebt ſich die Anzahl der Laſtpunkte zu $n = \frac{L}{e \cos \alpha} - 1 = \frac{L}{a} - 1$; e iſt nach der Stärke der Sparren verſchieden; n muſs eine ganze gerade Zahl ſein.

e) Sicheldach (Fig. 277). Die obere und die untere Gurtung ſind nach einer krummen Linie oder nach einem der krummen Linie

Fig. 277.



eingefchriebenen Vieleck gebildet; das Gitterwerk ift verfchieden. Man kann hierher auch die Träger mit gekrümmter oberer und geradliniger unterer Gurtung rechnen.

Bei den vorftehend angeführten Dächern ift ftets angenommen, dafs die beiden Gurtungen fich über dem Auflager fchneiden; die Formen find aber auch möglich, ohne dafs die Schnittpunkte der Gurtungen in den Auflager-Lothrechten liegen.

Fig. 278.

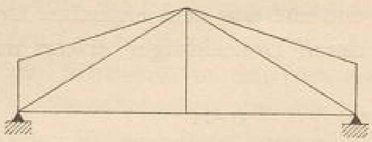


Fig. 279.

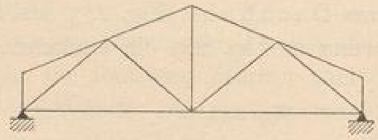


Fig. 280.

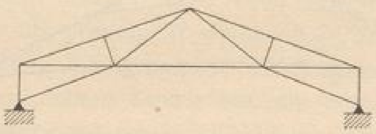
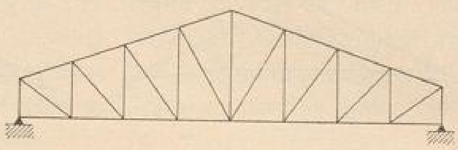


Fig. 281.



Alsdann find allerdings unter Umftänden noch Diagonalen anzuordnen, damit man unverfchiebliche, aus Dreiecken zufammengefetzte Figuren erhalte. Es ergeben fich die in Fig. 278 bis 281 gezeichneten Dachformen.

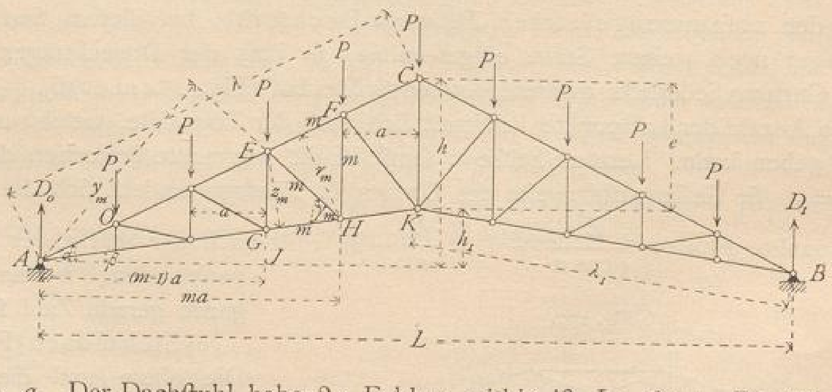
a) Englifche Dachftühle.

216. Berechnung der Spannungen durch lothrechte Belaftung.

Die Belaftungsgefetze und Spannungsermittelungen follen für einen Dachftuhl mit Pfoften und nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezeigt werden; für andere Anordnungen des Gitterwerkes ergeben fich aus dem Nachftehenden die Aenderungen ohne Schwierigkeit.

1) Berechnung der Spannungen. α) Belaftung durch das Eigengewicht, bezw. volle Schneebelaftung (Fig. 282). Die Belaftung für den Knotenpunkt fei P, die Stützweite L, die Entfernung der Knotenpunkte, wagrecht

Fig. 282.



gemeffen, a. Der Dachftuhl habe $2n$ Felder; mithin ift $L = 2na$. Die Winkel der oberen, bezw. unteren Gurtung mit der wagrechten Linie feien α und β. Die Auflagerdrücke find $D_0 = D_1 = \frac{(2n-1)P}{2}$.

Für die m-te Stange EF der oberen Gurtung iſt H der Momentenpunkt, alſo 217. Spannungen in den Gurtungen.

$$0 = X_m r_m + D_0 m a - (m-1) P \frac{m a}{2},$$

woraus

$$X_m = \frac{-\frac{(2n-1)}{2} P m a + (m-1) P \frac{m a}{2}}{r_m}.$$

Nun iſt $r_m = \overline{AH} \sin(\alpha - \beta)$ und $\overline{AH} = \frac{m a}{\cos\beta}$; ſonach

$$r_m = m a \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} = m a \cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$$

und

$$X_m = -\frac{P(2n-m)}{2\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 307.$$

Oft iſt es unbequem, mit den Winkelwerthen zu rechnen; dann giebt man der Formel folgende Geſtalt. Es iſt $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2h}{L}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2h_1}{L}$, $h - h_1 = e$ und $\cos\alpha = \frac{L}{2\lambda}$; durch Einſetzung dieſer Werthe wird

$$X_m = -\frac{P\lambda(2n-m)}{2e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 308.$$

Für die m-te Stange GH der unteren Gurtung iſt E der Momentenpunkt, mithin

$$0 = D_0(m-1)a - P(m-2)\frac{(m-1)a}{2} - Z_m z_m,$$

woraus

$$Z_m = \frac{\frac{(2n-1)}{2} P(m-1)a - P(m-2)(m-1)\frac{a}{2}}{z_m}.$$

Nun iſt $z_m = \overline{AE}\sin(\alpha-\beta)$ und $\overline{AE} = \frac{(m-1)a}{\cos\alpha}$, demnach

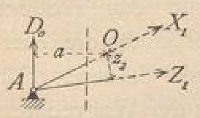
$$Z_m = \frac{P(2n-m+1)}{2\cos\beta\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 309.$$

Da $\cos\beta = \frac{L}{2\lambda_1}$ iſt und $\operatorname{tg}\alpha$, ſo wie $\operatorname{tg}\beta$ die oben angegebenen Werthe haben, ſo wird auch

$$Z_m = \frac{P\lambda_1(2n-m+1)}{2e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 310.$$

Die Gleichungen 309 u. 310 gelten nicht für die erſte Stange der unteren Gurtung am Auflager; denn die Formel iſt unter der Annahme entwickelt, daſs als Drehpunkt für die Gleichung der ſtatiſchen Momente derjenige Punkt der oberen Gurtung gewählt wird, welcher in die $(m-1)$-te Verticale fällt; dies würde für $m = 1$ der Punkt A ſein, und für dieſen Fall wäre die Gleichung der ſtatiſchen Momente für A als Drehpunkt nicht verwendbar, weil alle Kräfte am Bruchſtück dann durch A gehen, alſo das ſtatiſche Moment Null haben. Man erhält Z_1 durch Aufſtellung der Gleichung der ſtatiſchen Momente für irgend einen beliebigen Punkt, etwa O (Fig. 283). Es wird, wenn der Hebelsarm von Z_1 in Bezug auf den Drehpunkt O gleich z_2 iſt,

Fig. 283.



$$Z_1 = \frac{D_0 a}{z_2} = \frac{(2n-1)Pa}{2a\cos\beta\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)} = \frac{(2n-1)P\lambda_1}{2e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 311.$$

Derſelbe Werth ergiebt ſich für $m = 2$, d. h. für den zweiten Stab der unteren Gurtung.

218. Spannungen in den Diagonalen.

Für die m-te Diagonale EH, wie für alle Diagonalen der linken Dachhälfte ift A der Momentenpunkt, mithin

$$0 = Y_m y_m + (m-1)\frac{Pma}{2}, \text{ woraus } Y_m = -\frac{Pma(m-1)}{2y_m}.$$

Da nun $y_m = \dfrac{ma \sin\gamma_m}{\cos\beta}$ ift, wird $Y_m = -\dfrac{P}{2}(m-1)\dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma_m}$.

Durch einfache Umformungen erhält man

$$Y_m = -\frac{P\sqrt{1+[(m-1)\,\mathrm{tg}\,\alpha - m\,\mathrm{tg}\,\beta]^2}}{2(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta)} \quad \ldots\ldots \quad 312.$$

und durch Fortfchaffung der Winkelwerthe

$$Y_m = -\frac{P}{4e}\sqrt{L^2 + 4(me-h)^2} \quad \ldots\ldots \quad 313.$$

219. Spannungen in den Pfoften.

Für den m-ten Pfoften FH ift der Schnitt fchräg zu legen; als Momentenpunkt ergiebt fich A; mithin heifst die Gleichung der ftatifchen Momente für A als Drehpunkt

$$0 = V_m ma - (m-1)\frac{Pma}{2}, \text{ woraus } V_m = \frac{P(m-1)}{2} \quad \ldots \quad 314.$$

Für $m = 1$ ergiebt diefe Gleichung $V_m = 0$; der erfte Pfoften ift alfo überflüffig und kann fortbleiben.

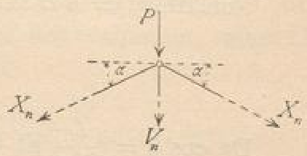
Die Gleichung gilt nicht für den mittelften Pfoften; denn wenn bei diefem der Schnitt eben fo gelegt wird, wie bei den anderen Pfoften, fo werden vier Stäbe getroffen; A ift alfo hier nicht der conjugirte Punkt. Man beftimmt die Spannung in diefem Mittelpfoften durch Aufftellung der Gleichgewichtsbedingungen für den Firftknotenpunkt (Fig. 284). Für diefen ift, wenn die Summe der lothrechten Kräfte gleich Null gefetzt wird,

$$0 = V_n + P + 2X_n \sin\alpha, \text{ woraus } V_n = -P - 2X_n \sin\alpha,$$

und da nach Gleichung 307: $X_n = -\dfrac{Pn}{2\cos\alpha(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta)}$ ift, fo wird

$$V_n = P\left(\frac{n\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta} - 1\right) \quad \ldots\ldots \quad 315.$$

Fig. 284.



Die Gleichungen 307 bis 314 gelten für die Stäbe links von der Mitte; die zur Mitte fymmetrifch liegenden Stäbe der anderen Dachhälfte werden in genau gleicher Weife beanfprucht; die Gleichungen können fofort auch für die rechte Dachhälfte angewendet werden, wenn die m von B aus gerechnet werden.

Die Betrachtung der Gleichungen 307 bis 314 ergiebt Folgendes:

a) Durch das Eigengewicht, bezw. durch gleichmäfsige Belaftung des ganzen Dachbinders erhalten alle Stäbe der oberen Gurtung Druck, alle Stäbe der unteren Gurtung Zug. Wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fallen, erhalten diefelben bei der erwähnten Belaftung Druck, die Pfoften Zug. Man fieht leicht, dafs, wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fteigen, diefelben bei der gleichen Belaftung gezogen, die Pfoften gedrückt werden.

b) Je gröfser β wird, defto kleiner wird $(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta)$ und das Product $\cos\beta(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta)$; defto gröfser werden daher fowohl X_m, wie Z_m, da die Ausdrücke, fowohl für X, wie für Z die erwähnten Werthe im Nenner haben. Für negative Werthe von β, d. h. wenn die Zuggurtung nach unten von der Wagrechten abweicht, wird

$$X'_m = -\frac{P(2n-m)}{2\cos\alpha(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta)} \text{ und } Z'_m = \frac{P(2n-m+1)}{2\cos\beta(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta)} \quad . \quad 316.$$

Je gröfser (abfolut genommen) die negativen Werthe von β werden, defto gröfser werden die Nenner in den beiden Gleichungen 316, defto kleiner alfo X'_m und Z'_m. Für den Materialaufwand zu den Gurtungen ift es alfo günftig, das pofitive β möglichft klein, das negative β möglichft grofs zu nehmen.

c) Für $\beta = 0$, d. h. wenn die untere Gurtung eine gerade Linie bildet, ift

$$X_m = -\frac{P(2n - m)}{2 \sin \alpha} \quad \text{und} \quad Z_m = \frac{P(2n - m + 1)}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad 317.$$

$$Y_m = -\frac{P\sqrt{1 + (m-1)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{2 \operatorname{tg} \alpha}, \quad V_m = \frac{P(m-1)}{2} \quad \text{und} \quad V_n = P(n-1) \quad 318.$$

β) Ungünftigfte lothrechte Belaftung. — a) Gurtungsftäbe. Jede loth- 220. Ungünftigfte Belaftung.
rechte Belaftung des Trägers erzeugt (nach Art. 156, S. 150) ein pofitives Moment in allen Querfchnitten. Sind nun (Fig. 282) die in den Stäben EF, bezw. GH durch eine beliebige lothrechte Belaftung erzeugten Spannungen X_m, bezw. Z_m und die Momente für die bezüglichen Momentenpunkte H und E gleich M_m und M_{m-1}, fo wird

$$X_m = -\frac{M_m}{r_m} \quad \text{und} \quad Z_m = \frac{M_{m-1}}{z_m}.$$

X_m und Z_m erreichen ihre Gröfstwerthe gleichzeitig mit M_m, bezw. M_{m-1}, d. h. bei voller Belaftung des Trägers. Die Belaftung des ganzen Daches durch Schneedruck wird alfo für die Gurtungsftäbe die ungünftigfte fein. Die dann fich ergebenden Spannungen folgen aus den Gleichungen 307 bis 311, indem dort ftatt P die Knotenpunktsbelaftung durch Schnee- und Eigengewicht eingefetzt wird.

Man erhält, wenn b der Binderabftand ift und q' die Bedeutung, wie in Art. 204 (S. 206) hat,

$$P = G + S = ab(q' + 75) \text{ Kilogr.}$$

und daraus leicht X_m und Z_m.

b) Diagonalen. Wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fallen, fo erzeugt eine Laft P rechts von dem durch die Diagonale gelegten lothrechten Schnitte II

Fig. 285.

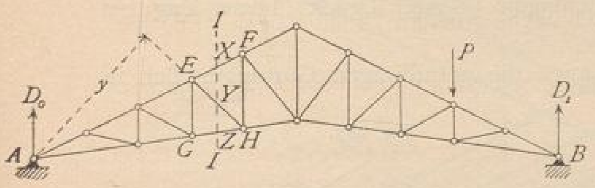
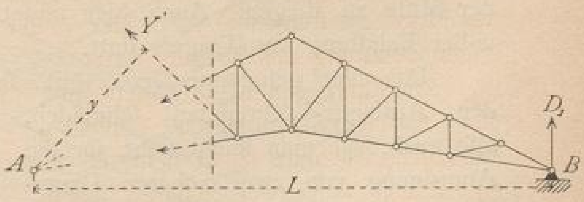


Fig. 286.



(Fig. 285) in A den Auflagerdruck D_0. Auf das Bruchftück links vom Schnitt wirken jetzt D_0 und die drei Stabfpannungen X, Y und Z. Für Y ift A der Momentenpunkt, und die Gleichung der ftatifchen Momente für A als Drehpunkt lautet $0 = Yy$, d. h. $Y = 0$.

Liegt eine Laft P links vom Schnitte II und betrachtet man das Bruchftück rechts vom Schnitte (Fig. 286), fo heifst die Gleichung der ftatifchen Momente in Bezug auf den Punkt A als Drehpunkt

$$0 = Y'y + D_1 L, \quad \text{woraus} \quad Y' = -\frac{D_1 L}{y}.$$

Steigen die Diagonalen nach der Mitte zu, fo ergiebt fich, wenn die Laft rechts vom Schnitte liegt, genau wie vorhin, dafs in den Diagonalen die Spannung Null entfteht. Liegt dagegen die Laft links vom Schnitt, fo folgt

$$Y'_1 = + \frac{D_1 L}{y'}.$$

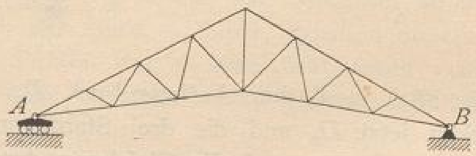
Die für die Diagonalen gefundenen Ergebniffe gelten, fo lange A der Momentenpunkt der Diagonalen ift, d. h. für alle Diagonalen links der Mitte. Für die Diagonalen rechts der Mitte ift B der Momentenpunkt, und es ergiebt fich in gleicher Weife, wie eben gezeigt, dafs in diefen jede Belaftung rechts vom Schnitte durch die betreffende Diagonale eine Druck-, bezw. Zugfpannung erzeugt, je nachdem fie nach der Mitte zu fallen oder fteigen; jede Belaftung links vom Schnitte ruft dagegen in denfelben die Spannung Null hervor.

Allgemein folgt hieraus: Jede Belaftung zwifchen dem durch die Diagonale gelegten lothrechten Schnitte und demjenigen Auflager, welches für die Diagonale nicht den Momentenpunkt bildet, hat auf die Spannung in der Diagonalen gar keinen Einflufs. Jede Belaftung zwifchen dem lothrechten Schnitt und dem Auflager, welches für die Diagonale den Momentenpunkt bildet, erzeugt in den nach der Mitte zu fallenden Diagonalen Druck, in den nach der Mitte zu fteigenden Diagonalen Zug. Die ungünftigften Belaftungsarten würden alfo diejenigen fein, bei denen die ganze Zug-, bezw. Druckabtheilung belaftet wäre. Da aber die Belaftung des übrigen Trägertheiles ohne Einflufs auf die Diagonalfpannung ift, fo kann man auch fagen: Die ungünftigfte Beanfpruchung aller Diagonalen durch lothrechte Laften findet bei voller Belaftung ftatt, und zwar werden die nach der Mitte zu fteigenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gedrückt.

c) Pfoften. Für die ungünftigfte Belaftung der Pfoften ergiebt fich durch die gleiche Beweisführung, wie bei den Diagonalen, wenn die Schnitte fchräg gelegt werden: Jede Belaftung zwifchen dem durch einen Pfoften gelegten fchrägen Schnitt und dem Auflager, welches für den Pfoften nicht den Momentenpunkt bildet, erzeugt im Pfoften die Spannung Null; jede Belaftung zwifchen dem Schnitte und demjenigen Auflager, welches den conjugirten Punkt bildet, erzeugt in den Pfoften Zug, wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fallen, Druck, wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fteigen. Auch hier findet demnach gröfster Druck, bezw. Zug bei voller Belaftung des Trägers ftatt.

Das hier gefundene Gefetz gilt, fo lange die geradlinigen Gurtungen fich in den Auflager-Lothrechten fchneiden, alfo auch, wie man leicht fieht, für die Anordnung von zwei Scharen Diagonalen nach Fig. 287.

Fig. 287.



Demnach kann für alle Stäbe des englifchen Dachftuhles die volle Belaftung durch Schnee und Eigengewicht als ungünftigfte lothrechte Belaftung der Berechnung zu Grunde gelegt werden.

Die bezüglichen Gröfstwerthe find in Art. 217 bis 219 entwickelt.

221. Berechnung der Spannungen durch Winddruck.

γ) Belaftung durch Winddruck. Die fämmtlichen Stabfpannungen find fowohl für den Fall zu ermitteln, dafs der Winddruck jene Seite belaftet, an welcher das bewegliche Auflager liegt, als dafs er diejenige Seite belaftet, an welcher fich das fefte Auflager befindet.

Man ermittelt bei diesen beiden Belastungsarten für jeden Stab den Momentenpunkt, das Biegungsmoment der äusseren Kräfte für diesen Punkt und daraus in bekannter Weise die Stabspannungen. Es empfiehlt sich dabei, für die Auffuchung des Biegungsmomentes jede Knotenpunktsbelastung in eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft zu zerlegen; die Ermittelung der Hebelsarme wird dadurch wesentlich vereinfacht. In Fig. 294 u. 296 sind die wagrechten und lothrechten Seitenkräfte der Winddrücke sowohl für den Fall, dass der Wind von der Seite des beweglichen Auflagers, als auch für den Fall, dass er von der Seite des festen Auflagers kommt, angegeben.

2) Graphische Ermittelung der Spannungen. Hier empfiehlt sich die *Cremona*'sche Methode am meisten, weil für die Spannungen aller Stäbe die gleichen Belastungsarten zu Grunde gelegt werden. 222. Graphische Ermittelung der Spannungen.

α) Belastung durch das Eigengewicht und Schneedruck. Man nimmt entweder die sämmtlichen Eigenlasten in den oberen Knotenpunkten vereinigt an oder berechnet die Eigengewichte, welche in den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen, besonders. In beiden Fällen ist das Verfahren genau wie im Kapitel »Träger« (Art. 176, S. 172) gezeigt ist.

Fig. 288.

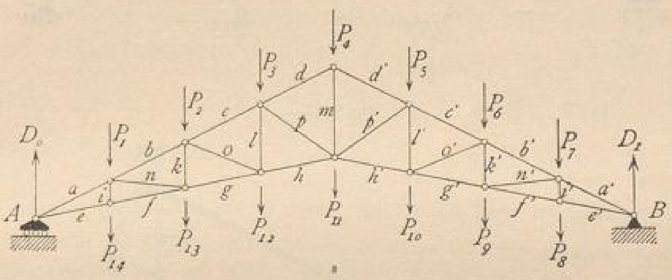
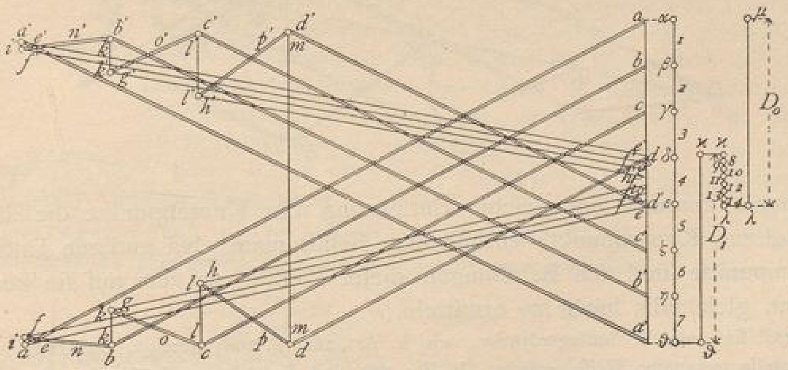


Fig. 289.



Bei der graphischen Ermittelung in Fig. 288 u. 289 ist die zweite Annahme gemacht worden; die Eigengewichte, welche auf die Auflagerpunkte A und B kommen, sind fortgelassen, weil sie unmittelbar von den Auflagern aufgenommen werden, demnach das System nicht belasten. Alsdann sind die am System wirkenden äusseren Kräfte in der Reihenfolge der Knotenpunkte aufgetragen: zuerst die Lasten der oberen Gurtung $1, 2, 3 \ldots 7$; an den Endpunkt von 7 ist D_1 getragen; letzteres fällt mit der Kraftlinie $1, 2, 3 \ldots 7$ zusammen, wie überhaupt alle äusseren Kräfte hier in dieselbe Kraftlinie fallen. Der grösseren Deutlichkeit halber sind aber die Lasten 1 bis 7, D_1, ferner die Lasten der unteren Gurtung und D_0 je etwas seitwärts verschoben aufgetragen. Wir erhalten $D_1 = \vartheta\varkappa$; *8* bis *14* $= \varkappa\lambda$; $D_0 = \lambda\mu$. μ fällt demnach eigentlich auf α, wonach sich also das Kraftpolygon schliesst.

Für die Construction des Kräfteplanes sind selbstverständlich als Grenzpunkte der einzelnen äusseren Kräfte die Punkte auf der Linie $a\,a'$ einzuführen, welche mit den gezeichneten auf gleicher Höhe liegen. Der Kräfteplan ist nun genau, wie früher angegeben, in Fig. 289 construirt, worüber keine weiteren Bemerkungen nöthig sind.

Die Construction der Spannungen durch volle Schneebelastung ist in gleicher Weise vorzunehmen; dabei sind natürlich die Belastungen der unteren Knotenpunkte gleich Null.

β) Belastung durch Winddruck. In Fig. 291 u. 292 sind die Kräftepläne sowohl für den von der Seite des beweglichen, wie für den von der Seite des festen Auflagers kommenden Winddruck construirt. Auf den Auflagerpunkt und

Fig. 290.

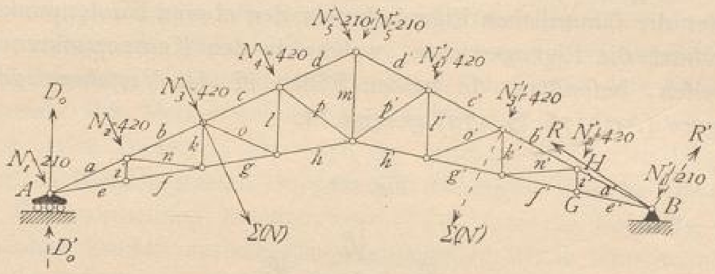
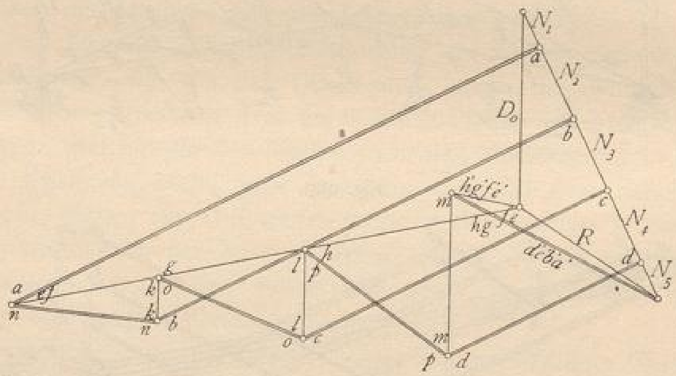


Fig. 291.



den Firstpunkt kommen bei gleicher Entfernung aller Knotenpunkte die Hälften der auf die anderen Knotenpunkte entfallenden Belastungen; bei anderen Entfernungen der Knotenpunkte sind die Belastungen dieser Punkte aus den auf sie kommenden Dachflächen gleichfalls leicht zu ermitteln.

Zunächst sind nun die Auflagerdrücke, wie in Art. 208 (S. 208) gezeigt, construirt, worauf sich der Kräfteplan in bekannter Weise ergiebt. In Fig. 290 sind die äusseren Kräfte für die Belastung der linken Dachhälfte ausgezogen, für die Belastung der rechten Dachhälfte punktirt.

Es möge hier darauf aufmerksam gemacht werden, dass auf der nicht belasteten Seite sämmtliche Diagonalen die Spannung Null, die oberen, so wie die unteren Gurtungsstäbe sämmtlich je gleiche Spannungen erhalten. Die Richtigkeit ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

Wenn sich in einem unbelasteten Knotenpunkte (Fig. 293) drei Stäbe schneiden, von denen zwei in eine gerade Linie fallen, so ist, wenn Gleichgewicht stattfindet, $X - X_1 + Y \cos\varphi = 0$ und $Y \sin\varphi = 0$, d. h. $Y = 0$, also auch $X - X_1 = 0$, d. h. $X = X_1$. Die Spannungen in den beiden in eine gerade Linie fallenden Stäben sind also einander gleich; die Spannung im dritten Stabe ist gleich Null.

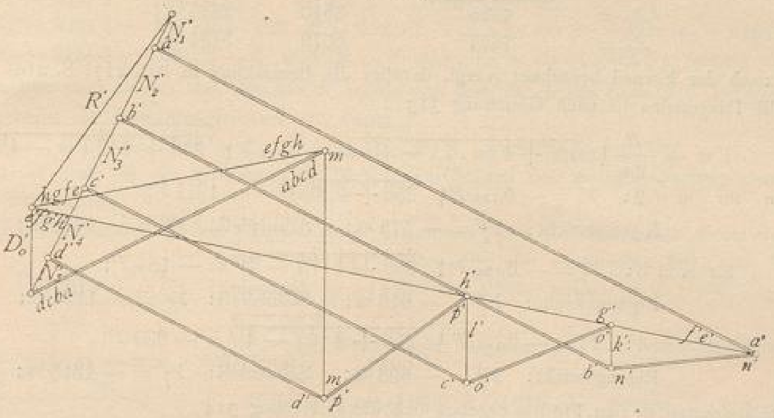


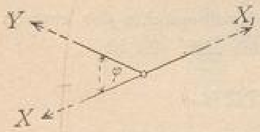
Fig. 292.

Falls der Wind, wie in Fig. 290 durch die ausgezogenen Pfeile angedeutet ift, die linke Seite belaftet, fo wirkt auf den Knotenpunkt G keine äufsere Kraft; mithin wird $e' = f'$ und $i' = 0$. Auch auf H wirkt keine äufsere Kraft; da nun $i' = 0$ ift, alfo als nicht vorhanden zu betrachten ift, fo folgt auch $n' = 0$ und $a' = b'$. Eben fo ergiebt fich weiter $a' = b' = c' = d'$; $e' = f' = g' = h'$; $i' = n' = k' = o' = l' = p' = 0$.

Beifpiel. Berechnung eines englifchen Dachftuhles (Fig. 294) von nachfolgenden Hauptmafsen: Stützweite $L = 16^{m}$; Firfthöhe $h = 4^{m}$; $\frac{h}{L} = \frac{1}{4}$; $a = 2^{m}$; $2n = 8$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{8} = 0{,}5$; 223. Beifpiel.
$h_1 = 1{,}6^{m}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{1{,}6}{8}$ $0{,}2$; $e = h - h_1 = 2{,}4^{m}$; $\lambda = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8{,}94^{m}$; $\lambda_1 = \sqrt{1{,}6^2 + 8^2} = 8{,}16^{m}$; $\sin \alpha = \frac{h}{\lambda} = \frac{4}{8{,}94} = 0{,}447^{m}$; $\cos \alpha = \frac{8}{\lambda} = \frac{8}{8{,}94} = 0{,}895$; $\sin \beta = \frac{h_1}{\lambda_1} = \frac{1{,}6}{8{,}16} = 0{,}196$; $\cos \beta = \frac{8}{\lambda_1} = \frac{8}{8{,}16} = 0{,}98$; die Binderweite ift $4{,}3^{m}$; die Dachdeckung ift Eifenwellblech auf Winkeleifen; das Gitterwerk befteht aus Pfoften und nach der Mitte zu fallenden Diagonalen.

Die Belaftungen ergeben fich wie folgt. Auf einen Knotenpunkt kommt eine Grundfläche von $2 \cdot 4{,}3 = 8{,}6^{qm}$, eine fchräge Dachfläche von $4{,}3 \frac{\lambda}{4} = \frac{4{,}3 \cdot 8{,}94}{4} = 9{,}61^{qm}$. Mithin ift nach der Tabelle auf S. 20 das Eigengewicht für 1^{qm} Grundfläche, ausfchl. des Bindergewichtes, gleich 23^{kg}. Rechnet man das Gewicht des Binders für 1^{qm} Grundfläche mit 17^{kg}, fo wird das Eigengewicht für 1^{qm} Grundfläche $= 23 + 17 = 40^{kg}$. Demnach ift die Knotenpunktsbelaftung durch das Eigengewicht $= 8{,}6 \cdot 40 = 344^{kg}$, durch Schneedruck $= 8{,}6 \cdot 75 = 645^{kg}$, die fenkrechte Knotenpunktsbelaftung durch Winddruck $= 9{,}61 \cdot 72 = 692^{kg}$, wofür abgerundet $N = 700^{kg}$ gefetzt werden foll. Der Firftknotenpunkt und der Auflagerknotenpunkt erhalten nur je 350^{kg} fenkrechte Windbelaftung.

Fig. 293.



α) Spannungen durch die lothrechten Laften. Für die obere Gurtung ergeben fich die Spannungen durch das Eigengewicht, bezw. volle Schneebelaftung aus Gleichung 308 zu

$$X_m = -\frac{P \cdot 8{,}94}{2 \cdot 2{,}4}(8 - m) = -1{,}8625\, P (8 - m).$$

Wir erhalten: für Eigengewicht $P = 344^{kg}$, fonach $X_m^g = -1{,}8625 \cdot 344\,(8 - m) = -640\,(8 - m)$;

für Schneebelaftung $P = 645^{kg}$, mithin $X_m^p = -1{,}8625 \cdot 645\,(8 - m) = -1200\,(8 - m)$.

Für $m =$	1	2	3	4
wird $X^g =$	-4480	-3840	-3200	-2560^{kg};
$X^p =$	-8400	-7200	-6000	-4800^{kg}.

Für die untere Gurtung ift nach Gleichung 310: $Z_m = \frac{P \cdot 8{,}16}{2 \cdot 2{,}4}(9 - m) = 1{,}7\, P (9 - m)$.

Für Eigengewicht ift $Z_m^g = 1{,}7 \cdot 344\,(9 - m) = 585\,(9 - m)$,

für Schneelaft ift $Z_m^p = 1{,}7 \cdot 645\,(9 - m) = 1096{,}5\,(9 - m)$.

Sonach wird für $m = \underbrace{1 \qquad 2}$ $\quad 3 \quad 4$

$Z_g = \quad 4095 \quad 3510 \quad 2925^{kg};$

$Z_p = \quad 7677 \quad 6579 \quad 5481^{kg}.$

Z_1 ist nicht nach der Formel berechnet (vergl. darüber die Bemerkung in Art. 217, S. 219).

Für die Diagonalen ist nach Gleichung 313

$$Y = -\frac{P}{9{,}6}\sqrt{16^2 + 4\,(m \,.\, 2{,}4 - 4)^2} = -\,0{,}104\,P\sqrt{256 + 4\,(2{,}4\,m - 4)^2}.$$

Wir erhalten für $m = 2$: $Y_2 = -\,0{,}104\,P\sqrt{256 + 4\,(0{,}8)^2} = -\,1{,}072\,P$;

Eigengewicht: $Y_2^g = -\,575^{kg}$; Schneelast: $Y_2^p = -\,1079^{kg}$;

für $m = 3$: $Y_3 = -\,0{,}104\,P\sqrt{256 + 4\,(7{,}2 - 4)^2} = -\,1{,}79\,P$;

Eigengewicht: $Y_3^g = -\,616^{kg}$; Schneelast: $Y_3^p = -\,1155^{kg}$;

für $m = 4$: $Y_4 = -\,0{,}104\,P\sqrt{256 + 4\,(9{,}6 - 4)^2} = -\,2{,}01\,P$;

Eigengewicht: $Y_4^g = -\,698^{kg}$; Schneelast: $Y_4^p = -\,1310^{kg}$;

Die Spannungen in den Pfosten ergeben sich aus Gleichung 314

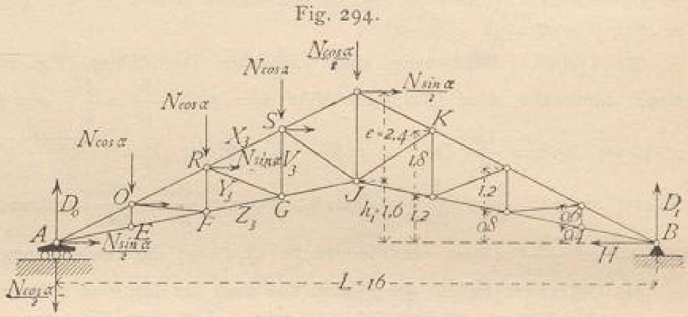
	Eigengewicht:	Schneelast:
für $m = 2$:	$V_2^g = 172^{kg}$;	$V_2^p = 323^{kg}$;
» $m = 3$:	$V_3^g = 344^{kg}$;	$V_3^p = 645^{kg}$.

Die Spannungen im Mittelpfosten (für $m = 4$) sind nach Gleichung 315

$V_4^g = 1950^{kg}$, $V_4^p = 3657^{kg}$.

β) Spannungen durch Windbelastung an der Seite des beweglichen Auflagers (Fig. 294). Die lothrechte Seitenkraft der Knotenpunktsbelastung ist bei den mittleren Knotenpunkten gleich $700 \cos\alpha = 700 \,.\, 0{,}895 = 626^{kg}$, beim First- und Auflagerknotenpunkt je gleich 313^{kg}; die wagrechten Seitenkräfte sind bezw. $700 \sin\alpha = 700 \,.\, 0{,}447 = 312^{kg}$ und 156^{kg}. Die lothrechten Höhen der oberen Gurtungsknotenpunkte über AB sind bezw. 1^m, 2^m, 3^m und 4^m; die Knotenpunkte der unteren Gurtung liegen bezw. um $0{,}4^m$, $0{,}8^m$, $1{,}2^m$ und $1{,}6^m$ über der wagrechten Linie AB. Es ist

Fig. 294.



$$D_0 = \frac{(3 \,.\, 626 + 2 \,.\, 313)\,12 - (3 \,.\, 312 + 2 \,.\, 156)\,2}{16} = 1722^{kg},$$

$$D_1 = \frac{(3 \,.\, 626 + 2 \,.\, 313)\,4 + (3 \,.\, 312 + 2 \,.\, 156)\,2}{16} = 782^{kg},$$

$$H = 3 \,.\, 312 + 2 \,.\, 156 = 1248^{kg}.$$

Für die Stäbe der oberen Gurtung ergeben sich die Gleichungen der statischen Momente: wenn E der Momentenpunkt ist,

$$0 = X_1 \,.\, 0{,}6 \cos\alpha + (D_0 - 313) \,.\, 2 - 156 \,.\, 0{,}4, \quad \text{woraus} \quad X_1 = -\,5132^{kg};$$

für den Momentenpunkt F

$$0 = X_2 \,.\, 1{,}2 \cos\alpha + (D_0 - 313) \,.\, 4 - 156 \,.\, 0{,}8 + 312 \,.\, 0{,}2 - 626 \,.\, 2, \quad \text{woraus} \quad X_2 = -\,4023^{kg};$$

weiters eben so für die Momentenpunkte G und J

$$0 = X_3 \,.\, 1{,}8 \cos\alpha + (D_0 - 313) \,.\, 6 - 156 \,.\, 1{,}2 + 2 \,.\, 312 \,.\, 0{,}3 - 2 \,.\, 626 \,.\, 3, \quad \text{woraus} \quad X_3 = -\,2916^{kg};$$

$$0 = X_4 \,.\, 2{,}4 \cos\alpha + (D_0 - 313) \,.\, 8 - 156 \,.\, 1{,}6 + 3 \,.\, 312 \,.\, 0{,}4 - 3 \,.\, 626 \,.\, 4, \quad \text{woraus} \quad X_4 = -\,1806^{kg}.$$

Die Momentengleichung für den Punkt J heisst, wenn das Bruchstück rechts von dem durch den Stab JK gelegten lothrechten Schnitte betrachtet wird,

$$0 = H \,.\, 1{,}6 - D_1 \,.\, 8 - X_5 \,.\, 2{,}4 \cos\alpha, \quad \text{woraus} \quad X_5 = -\,1982^{kg}.$$

Dieselbe Spannung findet in sämmtlichen Stäben der oberen Gurtung rechts der Mitte statt (vergl Art. 222, S. 224).

In ähnlicher Weise erhält man für die untere Gurtung:

$$0 = (D_0 - 313)\,2 - 156 \cdot 1 - Z_1 \cdot 0{,}6 \cos\beta, \quad \text{woraus} \quad Z_1 = 4527\,\text{kg} = Z_2;$$
$$0 = (D_0 - 313)\,4 - 156 \cdot 2 - 626 \cdot 2 - 312 \cdot 1 - Z_3 \cdot 1{,}2 \cos\beta, \quad \text{woraus} \quad Z_3 = 3197\,\text{kg};$$
$$0 = (D_0 - 313)\,6 - 156 \cdot 3 - 2 \cdot 626 \cdot 3 - 2 \cdot 312 \cdot 1{,}5 - Z_4 \cdot 1{,}8 \cos\beta, \quad \text{woraus} \quad Z_4 = 1857\,\text{kg}.$$

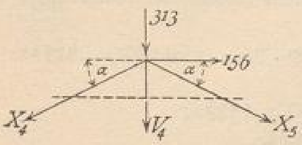
Betrachtet man wieder das Bruchstück rechts von dem durch den Stab *JK* gelegten lothrechten Schnitte, so heisst die Momentengleichung für Punkt *K*

$$0 = H \cdot 3 - D_1 \cdot 6 + Z_5 \cdot 1{,}8 \cos\beta, \quad \text{woraus} \quad Z_5 = 537\,\text{kg}.$$

Eben so gross ist die Spannung in sämmtlichen Stäben der unteren Gurtung rechts der Mitte (vergl. Art. 222, S. 225).

Um die Spannungen in den Diagonalen zu bestimmen, sind die Hebelsarme dieser Spannungen für den Punkt *A*, welcher für alle Diagonalen links der Mitte Momentenpunkt ist, construirt. Man erhält $y_2 = 1{,}17\,\text{m}$, $y_3 = 3{,}3\,\text{m}$ und $y_4 = 5{,}8\,\text{m}$.

Fig. 295.



Die Spannungen ergeben sich aus den Momentengleichungen, wie folgt:

$$0 = Y_2 \cdot 1{,}17 + 626 \cdot 2 + 312 \cdot 1, \quad \text{woraus} \quad Y_2 = -1337\,\text{kg};$$
$$0 = Y_3 \cdot 3{,}3 + 2 \cdot 626 \cdot 3 + 2 \cdot 312 \cdot 1{,}5, \quad \text{woraus} \quad Y_3 = -1422\,\text{kg};$$
$$0 = Y_4 \cdot 5{,}8 + 626 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 312 \cdot 2, \quad \text{woraus} \quad Y_4 = -1618\,\text{kg}.$$

Die Spannungen in den Diagonalen rechts der Mitte sind gleich Null (vergl. Art. 222, S. 225).

Für die Spannungen aller Pfosten links der Mitte ist *A* der Momentenpunkt; man erhält:

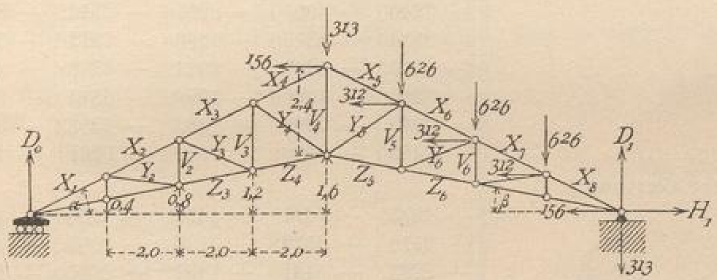
$$0 = 626 \cdot 2 + 312 \cdot 1 - V_2 \cdot 4, \quad \text{woraus} \quad V_2 = +391\,\text{kg};$$
$$0 = 2 \cdot 626 \cdot 3 + 2 \cdot 312 \cdot 1{,}5 - V_3 \cdot 6, \quad \text{woraus} \quad V_3 = +782\,\text{kg}.$$

Für die Ermittelung der Spannung im Mittelpfosten (Fig. 295) ist die Summe der lothrechten Kräfte im Firstknotenpunkt gleich Null zu setzen; sonach

$$0 = V_4 + 313 + (X_4 + X_5) \sin\alpha = V_4 + 313 - (1806 + 1982)\,0{,}447, \quad \text{woraus} \quad V_4 = 1380\,\text{kg}.$$

Die Spannungen in den Pfosten rechts der Mitte sind gleich Null (vergl. Art. 222, S. 225).

Fig. 296.



γ) Spannungen durch Windbelastung von der Seite des festen Auflagers (Fig. 296). Die Belastungen der einzelnen Knotenpunkte der rechten Hälfte sind eben so gross, wie diejenigen der linken Knotenpunkte unter β waren. Wir erhalten

$$D_0 = \frac{(3 \cdot 626 + 2 \cdot 313)\,4 + (3 \cdot 312 + 2 \cdot 156)\,2}{16} = 782\,\text{kg},$$
$$D_1 = \frac{(3 \cdot 626 + 2 \cdot 313)\,12 - (3 \cdot 312 + 2 \cdot 156)\,2}{16} = 1722\,\text{kg},$$
$$H_1 = 3 \cdot 312 + 2 \cdot 156 = 1248\,\text{kg}.$$

In der oberen Gurtung findet man

$$0 = X_1 \cdot 0{,}6 \cos\alpha + D_0 \cdot 2, \quad \text{woraus} \quad X_1 = -\frac{782 \cdot 2}{0{,}537} = -2912\,\text{kg}.$$

Derselbe Werth ergiebt sich nach Art. 222 (S. 225) für X_2, X_3 und X_4. Weiters ist

$$0 = X_5 \cdot 2{,}4 \cos\alpha + D_0 \cdot 8 - 156 \cdot 2{,}4, \quad \text{woraus} \quad X_5 = -2738\,\text{kg};$$
$$0 = X_6 \cdot 1{,}8 \cos\alpha + (D_1 - 313)\,6 + (H_1 - 156)\,1{,}2 + 2 \cdot 312 \cdot 0{,}3 - 2 \cdot 626 \cdot 3, \quad \text{woraus} \quad X_6 = -3845\,\text{kg};$$
$$0 = X_7 \cdot 1{,}2 \cos\alpha + (D_1 - 313)\,4 + (H_1 - 156)\,0{,}8 + 312 \cdot 0{,}2 - 626 \cdot 2, \quad \text{woraus} \quad X_7 = -4953\,\text{kg};$$
$$0 = X_8 \cdot 0{,}6 \cos\alpha + (D_1 - 313)\,2 + (H_1 - 156)\,0{,}4, \quad \text{woraus} \quad X_8 = -6061\,\text{kg}.$$

In der unteren Gurtung ergiebt sich

$$0 = Z_1 \cdot 0{,}6 \cos\beta - D_0 \cdot 2, \quad \text{woraus} \quad Z_1 = 2660\,\text{kg}.$$

Diefelbe Gröfse haben Z_2, Z_3 und Z_4. Weiters findet man

$$0 = (D_1 - 313)\, 6 + (H_1 - 156)\, 3 - 2 \cdot 626 \cdot 3 - 2 \cdot 312 \cdot 1{,}5 - Z_5 \cdot 1{,}8 \cos \beta, \text{ woraus } Z_5 = + 3990 \text{ kg};$$
$$0 = (D_1 - 313)\, 4 + (H_1 - 156)\, 2 - 626 \cdot 2 - 312 \cdot 1 - Z_6 \cdot 1{,}2 \cos \beta, \text{ woraus } Z_6 = + 5320 \text{ kg};$$
$$0 = (D_1 - 313)\, 2 + (H_1 - 156)\, 1 - Z_7 \cdot 0{,}6 \cos \beta, \text{ woraus } Z_7 = + 6650 \text{ kg}.$$

Die Hebelsarme für die Ermittelung der Spannungen in den Diagonalen find oben angegeben; hiernach findet ftatt

$$0 = Y_7 \cdot y_2 + 312 \cdot 1 + 626 \cdot 2, \text{ woraus } Y_7 = - 1337 \text{ kg};$$
$$0 = Y_6 \cdot y_3 + 2 \cdot 312 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 626 \cdot 3, \text{ woraus } Y_6 = - 1422 \text{ kg};$$
$$0 = Y_5 \cdot y_4 + 3 \cdot 312 \cdot 2 + 3 \cdot 626 \cdot 4, \text{ woraus } Y_5 = - 1618 \text{ kg}.$$

Die Spannungen in den übrigen Diagonalen find gleich Null.

In den Pfoften find die Spannungen V_1, V_2 und V_3 gleich Null; V_4 wird durch die Aufftellung der Gleichgewichtsbedingung erhalten, welche befagt, dafs die algebraifche Summe der lothrechten, am Firftknotenpunkte wirkenden Kräfte gleich Null fein mufs, d. h. aus

$$0 = V_4 + 313 + X_4 \sin \alpha + X_5 \sin \alpha = V_4 + 313 - (2912 + 2738) \cdot 0{,}447 \text{ wird } V_4 = 2212 \text{ kg}.$$

Ferner ift

$$0 = V_5 \cdot 6 - 2 \cdot 626 \cdot 3 - 2 \cdot 312 \cdot 1{,}5, \text{ woraus } V_5 = 782 \text{ kg};$$
$$0 = V_6 \cdot 4 - 626 \cdot 2 - 312 \cdot 1, \text{ woraus } V_6 = 391 \text{ kg}.$$

δ) Zufammenftellung der Stabfpannungen. Für die Querfchnittsbeftimmungen find die gefundenen Spannungen in nachftehender Tabelle zufammengeftellt.

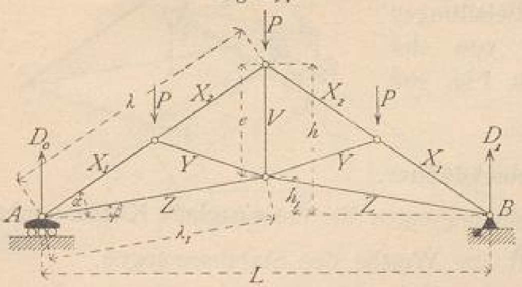
Bezeichnung des Stabes	Spannung durch Eigengewicht	Spannung durch Schneelaft (voll belaftet)	Spannung durch Wind links	Spannung durch Wind rechts	P_0	P_1
Obere Gurtung:						
Stab Nr. 1	— 4480	— 8400	— 5132	— 2912	— 4480	— 13522
» » 2	— 3840	— 7200	— 4023	— 2912	— 3840	— 11223
» » 3	— 3200	— 6000	— 2916	— 2912	— 3200	— 8916
» » 4	— 2560	— 4800	— 1806	— 2912	— 2560	— 7712
» » 5	— 2560	— 4800	— 1982	— 2738	— 2560	— 7538
» » 6	— 3200	— 6000	— 1982	— 3845	— 3200	— 9845
» » 7	— 3840	— 7200	— 1982	— 4953	— 3840	— 12153
» » 8	— 4480	— 8400	— 1982	— 6061	— 4480	— 14461
Untere Gurtung:						
Stab Nr. 1 u. 2	+ 4095	+ 7677	+ 4527	+ 2660	+ 4095	+ 12204
» » 3	+ 3510	+ 6579	+ 3197	+ 2660	+ 3510	+ 9776
» » 4	+ 2925	+ 5481	+ 1857	+ 2660	+ 2925	+ 8141
» » 5	+ 2925	+ 5481	+ 537	+ 3990	+ 2925	+ 9471
» » 6	+ 3510	+ 6579	+ 537	+ 5320	+ 3510	+ 11899
» » 7 u. 8	+ 4095	+ 7677	+ 537	+ 6650	+ 4095	+ 14327
Diagonalen:						
im Felde 2	— 575	— 1079	— 1337	0	— 575	— 2416
» » 3	— 616	— 1155	— 1422	0	— 616	— 2577
» » 4	— 698	— 1310	— 1618	0	— 698	— 2928
» » 5	— 698	— 1310	0	— 1618	— 698	— 2928
» » 6	— 616	— 1155	0	— 1422	— 616	— 2577
» » 7	— 575	— 1079	0	— 1337	— 575	— 2416
Pfoften:						
zwifchen Feld 2 u. 3	+ 172	+ 323	+ 391	0	+ 172	+ 714
» » 3 u. 4	+ 344	+ 645	+ 782	0	+ 344	+ 1427
Mittelpfoften	+ 1950	+ 3657	+ 1380	+ 2212	+ 1950	+ 5869
zwifchen Feld 5 u. 6	+ 344	+ 645	0	+ 782	+ 344	+ 1427
» » 6 u. 7	+ 172	+ 323	0	+ 391	+ 172	+ 714
	Kilogramm					

b) Deutfche Dachftühle.

224. Ermittelung der Spannungen.

Der deutfche Dachftuhl kann als ein englifcher Dachftuhl mit nur einem Knotenpunkt in jeder Dachhälfte aufgefafft werden (Fig. 297); man wird demnach die in demfelben durch Eigenlaft und volle Schneelaft entftehenden Spannungen aus den Formeln für den englifchen Dachftuhl ableiten können.

Fig. 297.



Für die obere Gurtung ift in die Gleichungen 307 u. 308 ftatt $2n$ die Zahl 4 einzufetzen und für m der Reihe nach 1 und 2; alsdann erhält man

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= -\frac{3P}{2\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)} = -\frac{3P\lambda}{2e} \\ X_2 &= -\frac{P}{\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)} = -\frac{P\lambda}{e} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 319.$$

Die allgemeine Gleichung 309, bezw. 310 für die untere Gurtung gilt nicht für $m = 1$ (fiehe Art. 217, S. 219). Für $m = 2$ und $2n = 4$ übergeht Gleichung 309, bezw. 310 in

$$Z = \frac{3P}{2\cos\beta(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)} \quad \text{und} \quad Z = \frac{3P\lambda_1}{2e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 320.$$

Für die Diagonalen giebt die Gleichung 313 für $m = 2$

$$Y = -\frac{P}{4e}\sqrt{L^2 + 4(2e-h)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 321.$$

Für den Pfoften ift Gleichung 315 anzuwenden, und es ergiebt fich für $n = 2$

$$V = P\left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta} - 1\right) = P\left(2\,\frac{2h}{2h-2h_1} - 1\right) = P\,\frac{h+h_1}{e} \quad . \quad 322.$$

Fig. 298.

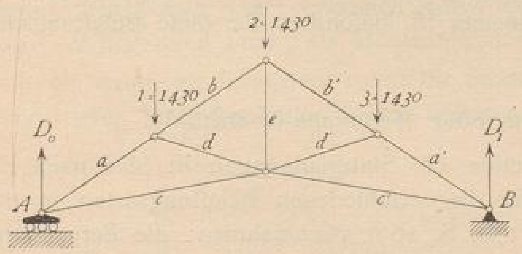


Fig. 299.

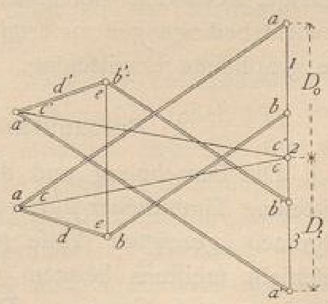


Fig. 300.

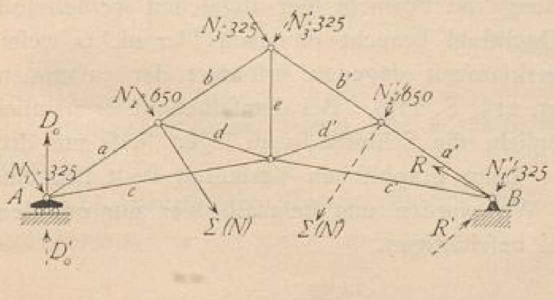
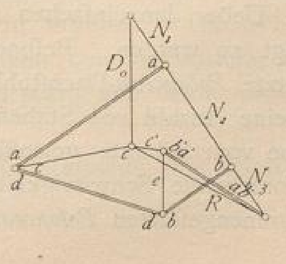


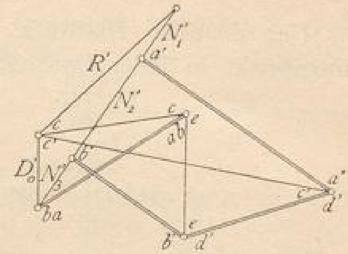
Fig. 301.



Für ſchiefe Belaſtungen durch Winddruck ſind die Spannungen, wie beim engliſchen Dachſtuhl gezeigt, zu ermitteln.

Die graphiſche Ermittelung der Spannungen im deutſchen Dachſtuhl für die Belaſtungen durch Eigengewicht und Winddruck von der einen, bezw. der anderen Seite zeigen Fig. 298 bis 302.

Fig. 302.



c) Dreieckdächer.

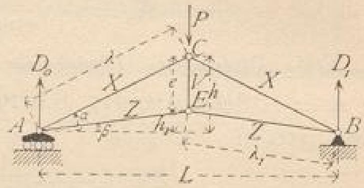
225. Ermittelung der Spannungen.

Die Aufſtellung der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte ergiebt (Fig. 303), da $D_0 = D_1 = \frac{P}{2}$ iſt, die Werthe der Stabſpannungen.

Es iſt $0 = X \cos \alpha + Z \cos \beta$ und $0 = D_0 + X \sin \alpha + Z \sin \beta$, woraus

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{P}{2 \cos \alpha \, (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} = -\frac{P \lambda}{2 e} \\ Z &= +\frac{P}{2 \cos \beta \, (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} = \frac{P \lambda_1}{2 e} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 323.$$

Fig. 303.



Sowohl X, wie Z nehmen mit wachſendem e ab; für den Materialverbrauch iſt alſo ein möglichſt groſses e günſtig.

Ferner iſt $P + V + 2 X \sin \alpha = 0$, woraus

$$V = P \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{P h_1}{h - h_1} = \frac{P h_1}{e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 324.$$

So lange h_1 poſitiv iſt, d. h. E über der Wagrechten AB liegt, iſt auch V poſitiv, d. h. Zug; für $h_1 = 0$ iſt auch $V = 0$, d. h. wenn AEB eine gerade Linie iſt, hat die Stange CE keine Spannung; wird h_1 negativ, d. h. liegt E unter der Linie AB, ſo iſt V negativ, d. h. Druck.

Die Spannungen durch Windbelaſtung ſind, wie beim engliſchen Dachſtuhl gezeigt, vermittels der *Ritter*'ſchen Methode, bezw. durch Aufſtellung der Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln. Bequemer iſt, beſonders für dieſe Belaſtungsart, die graphiſche Ermittelung.

d) Franzöſiſche, *Polonceau-* oder *Wiegmann*-Dachſtühle.

226. Einfacher *Polonceau*-Dachſtuhl.

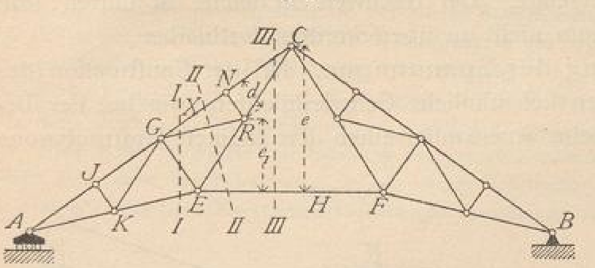
Die Berechnung und die Conſtruction der Stabſpannungen iſt hier nach Ermittelung ſämmtlicher äuſserer Kräfte für die verſchiedenen Belaſtungsarten in der allgemein gezeigten Weiſe (ſiehe Art. 170, S. 169) vorzunehmen; die Berechnung geſchieht meiſtens bequem vermittels der Momentenmethode, die graphiſche Ermittelung nach *Cremona*. Die Formeln für die einzelnen Stabſpannungen werden nicht einfach, ſo daſs von der Aufſtellung von Formeln hier abgeſehen werden ſoll.

227. Zuſammengeſetzter *Polonceau*-Dachſtuhl.

Ueber den einfachen *Polonceau*-Dachſtuhl braucht demnach hier nichts weiter geſagt zu werden. Beſondere Aufmerkſamkeit dagegen erfordert der zuſammengeſetzte *Polonceau*-Dachſtuhl (ſiehe Art. 215, S. 217). Bei demſelben iſt es nämlich für eine Anzahl von Stäben nicht möglich, die Schnitte ſo zu legen, daſs nur drei Stäbe vom Schnitte getroffen werden; beim graphiſchen Verfahren ſtellt ſich eine entſprechende Schwierigkeit heraus. Wir werden uns deſshalb hier nur mit dem zuſammengeſetzten *Polonceau*-Dachſtuhl beſchäftigen.

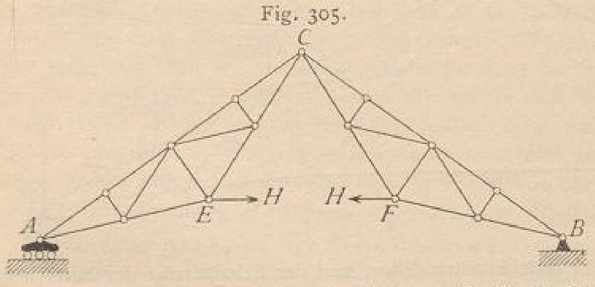
1) Berechnung der Spannungen. Bei der Momentenmethode iſt der Momentenpunkt ſo zu wählen, daſs für denſelben alle unbekannten Kräfte mit Ausnahme einer einzigen das Moment Null haben, mithin nur eine Unbekannte in der Gleichung verbleibt. Iſt es möglich, den Schnitt ſo zu legen, daſs mit Ausnahme einer einzigen ſämmtliche Stabrichtungen ſich in einem Punkte ſchneiden, ſo iſt dieſer Punkt als Momentenpunkt für die Ermittelung der Spannungen in demjenigen Stabe zu wählen, der nicht durch dieſen Punkt geht. Trifft aber der Schnitt vier oder mehr Stäbe, von welchen ſich nicht alle mit Ausnahme eines einzigen in einem Punkte ſchneiden, ſo muſs man eine Reihe von Stabſpannungen vorher beſtimmen, um dieſe nicht mehr als Unbekannte in der Momentengleichung zu haben. Man ermittele alſo zunächſt die Spannungen jener Stäbe, bei denen Schnitte möglich ſind, die nur drei Stäbe treffen; dieſe Spannungen werden dann als Bekannte eingeführt, und in den Momentengleichungen bleiben nur noch die geſuchten Unbekannten. Um z. B. die Spannungen in GN, GR, RE und EF, welche Stäbe durch den Schnitt $II\,II$ getroffen werden, zu finden, ermittele man zunächſt diejenige in EF. Man ſchneide nach $III\,III$; alsdann iſt für EF der Firſtpunkt C der Momentenpunkt und demnach die Spannung H in EF leicht zu finden. Es iſt $H = \frac{M}{e}$, wenn M das Biegungsmoment der äuſseren Kräfte für C iſt. Nun ſind für den Schnitt $II\,II$ nur noch drei Unbekannte vorhanden. Um die Spannung X in GN zu beſtimmen, dient die Momentengleichung für Punkt R, in welcher nur X als Unbekannte verbleibt; für die Spannung in GR iſt C, für diejenige in RE iſt G der conjugirte Punkt. Nachdem dieſe Spannungen ermittelt ſind, iſt für Schnitt $I\,I$ nur noch die Spannung in GE unbekannt, da auch diejenige in KE leicht gefunden wird; man kann demnach einen beliebigen, nicht auf der Richtungslinie von GE liegenden Punkt als Momentenpunkt annehmen.

Fig. 304.



Es empfiehlt ſich, ſtets zuerſt die Spannung H im Stabe EF zu ermitteln und dann dieſen Stab durch die beiden äuſseren Kräfte H in E und F (nach Fig. 305) zu erſetzen. Natürlich ſind für jede geänderte Belaſtung andere Werthe für H auszurechnen und einzuführen; alsdann werden nur noch drei Stäbe mit unbekannten Spannungen getroffen, ſo daſs ſich die Momentenpunkte leicht ergeben. Die Schnitte können beliebig krumm ſein; das allgemeine Geſetz (vergl. Art. 4, S. 6) bleibt dabei giltig und damit auch das Verfahren.

Fig. 305.

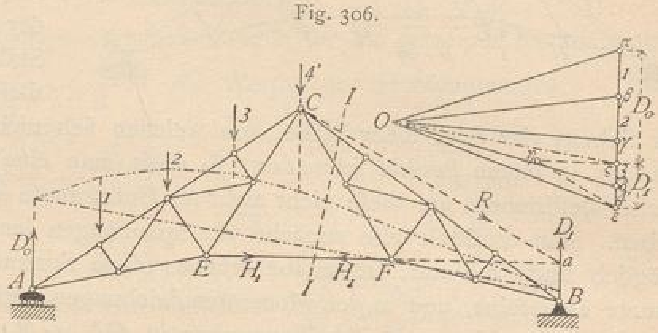


Die vorſtehenden Entwickelungen gelten ſowohl für lothrechte, wie für ſchiefe Belaſtungen.

Bei lothrechten Belaftungen ergeben fich ferner die vollen Belaftungen des ganzen Binders wiederum als die ungünftigften; für die Diagonalen allerdings in demfelben Sinne, wie oben beim englifchen Dache nachgewiefen, nämlich dafs bei voller Belaftung auch diejenigen Punkte belaftet find, deren Belaftuug in den Diagonalen die Spannung Null erzeugt. Der Nachweis ift leicht zu führen, foll aber hier, um den verfügbaren Raum nicht zu überfchreiten, fortbleiben.

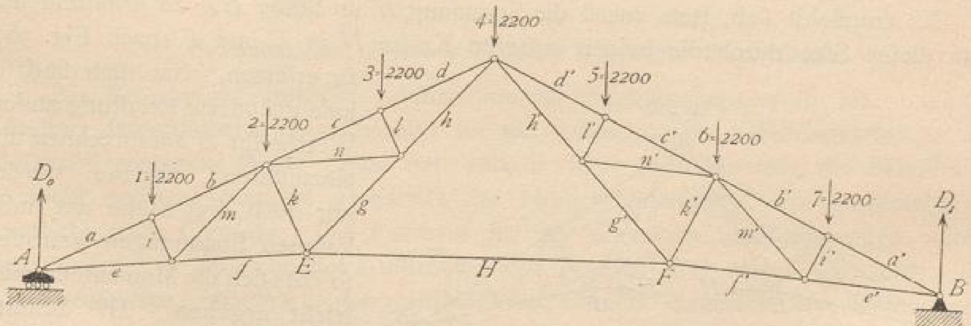
2) Graphifche Ermittelung der Spannungen. Bei der Conftruction des *Cremona*'fchen Kräfteplanes ergeben fich ähnliche Schwierigkeiten, wie bei der Berechnung. Wenn man nämlich beim Aneinanderreihen der kleinen Kraftpolygone bis zum Knotenpunkt *E* (Fig. 306) gekommen ift, fo find an diefem drei Stäbe mit nicht bekannten Spannungen; das Verfahren ift alfo nicht ohne Weiteres anwendbar. Die Schwierigkeit wird, ganz wie oben, dadurch befeitigt, dafs man zuerft die Spannung *H* des Stabes *EF* beftimmt und diefelbe als in *E*, bezw. *F* wirkende äufsere Kraft einführt. Dadurch erreicht man auch, dafs die Stäbe zwifchen *E* und *C*, fo wie zwifchen *C* und *F* zu Randftäben werden. Bevor demnach für den zufammengefetzten *Polonceau*-Dachftuhl der Kräfteplan gezeichnet werden kann, ift *H* zu ermitteln. Diefe Ermittelung erfolgt entweder auf dem Wege der Rechnung, wie foeben gezeigt, oder auch, wenn doch alles Uebrige conftruirt wird, mittels Zeichnung. Wir werden das einzufchlagende Verfahren für die verfchiedenen Belaftungsarten zeigen.

Fig. 306.



α) Belaftung durch das Eigengewicht, bezw. volle Schneelaft. Man kann *H* vermittels der Schnittmethode beftimmen, indem man das Seilpolygon der äufseren Kräfte für einen beliebigen Pol conftruirt, einen Schnitt fo durch den Träger legt, dafs aufser *EF* nur noch zwei Stäbe getroffen werden, den Angriffspunkt der Querkraft für diefen Schnitt fucht und nun, wie oben in Art. 175 (S. 171) gezeigt, zerlegt. Die Kraft *Q* wird dann fehr weit feitwärts fallen, weil der Schnitt nahe der Mitte liegt, und wenn man fich auch durch Hilfsconftructionen helfen kann, fo dürfte doch die folgende Conftruction empfehlenswerther fein.

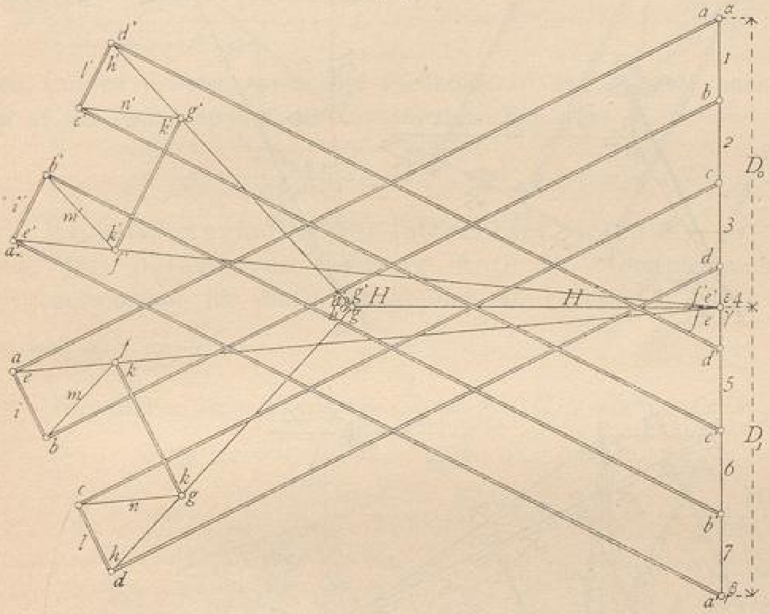
Fig. 307.



Die Spannung *H* im Stabe *EF* (Fig. 306) ift bei voller Belaftung (und der hier vorausgefetzten zur Mitte fymmetrifchen Dachform) offenbar genau doppelt fo grofs, als die Spannung H_1, welche in *EF* bei Belaftung nur der einen Dachhälfte ftattfindet. Die Gröfse diefer Spannung H_1 wird nun folgendermafsen ermittelt. Man legt einen Schnitt II durch das Dach derart, dafs an der einen (hier der rechten) Seite deffelben gar keine Laften liegen; alsdann wirken auf den Theil rechts vom Schnitte nur die Spannungen der drei durchfchnittenen Stäbe und der Auflagerdruck D_1. Zwei von diefen Stäben fchneiden fich im Firftpunkte; die in ihnen wirkenden Spannungen können alfo durch eine Mittelkraft R erfetzt werden, welche durch den Firftpunkt C geht; demnach halten die drei auf das Bruchftück wirkenden Kräfte D_1, H_1 und die Mittelkraft R der beiden Stabfpannungen daffelbe im Gleichgewicht, fchneiden fich alfo in einem Punkte. Durch den Schnittpunkt a von H_1 und D_1 geht alfo auch R; R geht aber auch durch C; die Kraft R hat demnach die Richtung Ca. Nun können wir D_1 nach den beiden bekannten Richtungen von H_1 und R zerlegen; D_1 wird mit Hilfe des Seilpolygons conftruirt und ift (Fig. 306) gleich $\varepsilon \zeta$. Man erhält $H_1 = \zeta \eta$ und $R = \eta \varepsilon$.

Die Kraft H, welche der Belaftung des ganzen Daches entfpricht, ift dann gleich $2 \times \zeta \eta$. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dafs in obiger Conftruction als Belaftung des Firftknotenpunktes nur die Hälfte der anderen Knotenpunktsbelaftungen einzuführen ift. Die Laft im Firftknotenpunkte ift defshalb hier mit 4' bezeichnet.

Fig. 308.



Der Kräfteplan ift nun zu conftruiren, indem ftatt des Stabes EF die äufseren Kräfte H in den Punkten E und F wirkend eingeführt werden. Man trage die Laften *1, 2 . . . 6, 7* an einander (Fig. 308); auf *7* folgt $D_1 = \beta \gamma$, dann die Kraft H im Punkte F gleich $\gamma \delta$ und H im Punkte E gleich $\delta \varepsilon$; ε fällt mit γ zufammen. Endlich ift an ε der Auflagerdruck $D_0 = \gamma \alpha$ anzutragen, womit fich das Kraftpolygon fchliefst. Nun ift der Kräfteplan nach dem in Art. 176 (S. 172) angegebenen Verfahren in Fig. 308 conftruirt, wobei vom Knotenpunkt A ausgegangen ift.

Für die Belaftung nur der einen Dachhälfte mit Schnee ift H_1, wie oben gezeigt, zu ermitteln und alsdann der Kräfteplan ohne Schwierigkeit zu verzeichnen.

Wenn der Dachbinder unfymmetrifch ift, fo kann das gezeigte Verfahren mit geringen Abänderungen gleichfalls Verwendung finden. Die Kraft H im Stabe EF ift die Summe der Spannungen $H_{\rm I}$ und $H_{\rm II}$, welche durch links bezw. rechts vom Schnitte II liegende Laften hervorgerufen werden. Man ermittele zuerft den Theil $H_{\rm I}$, welcher durch die Belaftung nur der Knotenpunkte links vom Schnitt II erzeugt wird, genau wie in Fig. 306 gezeigt ift; nur ift auch im Firftknotenpunkte die volle Belaftung einzufetzen. Dann beftimme man den Theil $H_{\rm II}$, welcher durch die Belaftung nur der Knotenpunkte rechts vom Schnitt hervorgerufen wird; zu diefem Zweck fuche man den durch diefe Belaftung erzeugten Auflagerdruck D_0 auf und zerlege ihn, wie oben D_1, hier alfo in $H_{\rm II}$ und eine durch C gehende Kraft. Die in EF auftretende Spannung H ift gleich $H_{\rm I} + H_{\rm II}$; der Kräfteplan kann nun leicht gezeichnet werden.

β) Windbelaftung von der Seite des beweglichen Auflagers. Die Ermittelung der Auflagerdrücke wird, wie in Art. 208 (S. 208) gezeigt, vorgenommen; die Gröfse der Kraft H (im Stabe EF, Fig. 309) ergiebt fich wieder durch Betrachtung des Trägertheiles an derjenigen Seite des Schnittes II, an welcher die Winddrücke nicht wirken. Nachdem fodann die H als äufsere Kräfte eingeführt find, ift der Kräfteplan in gewöhnlicher Weife zu zeichnen. Die Conftruction ift in Fig. 309 vorgenommen.

γ) Winddruck von der Seite des feften Auflagers. Fig. 310 zeigt die Conftruction des Kräfteplanes für diefen Fall; nach dem Vorftehenden ift er ohne befondere Erklärung verftändlich.

Fig. 309.

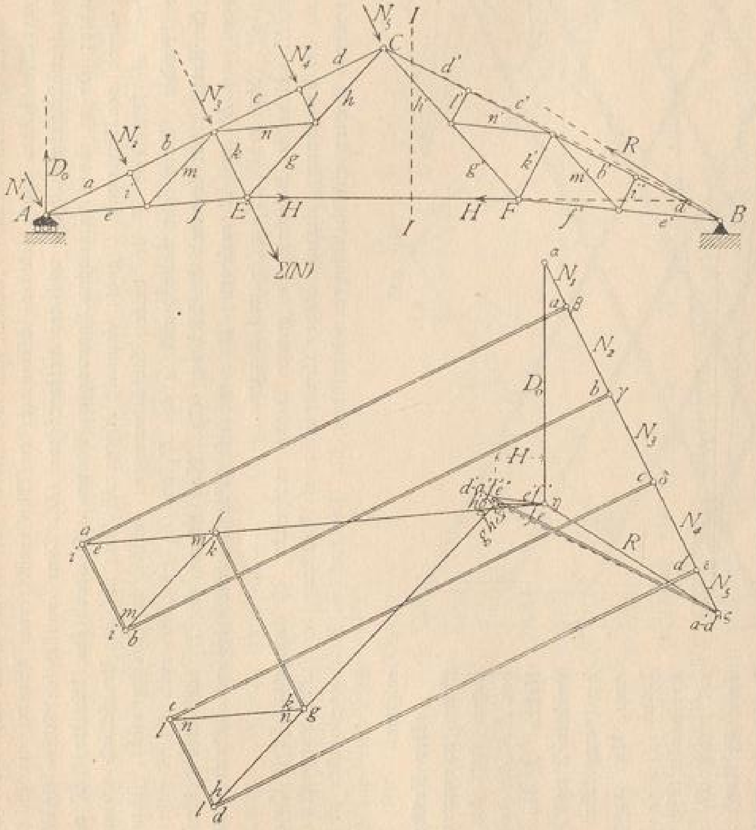
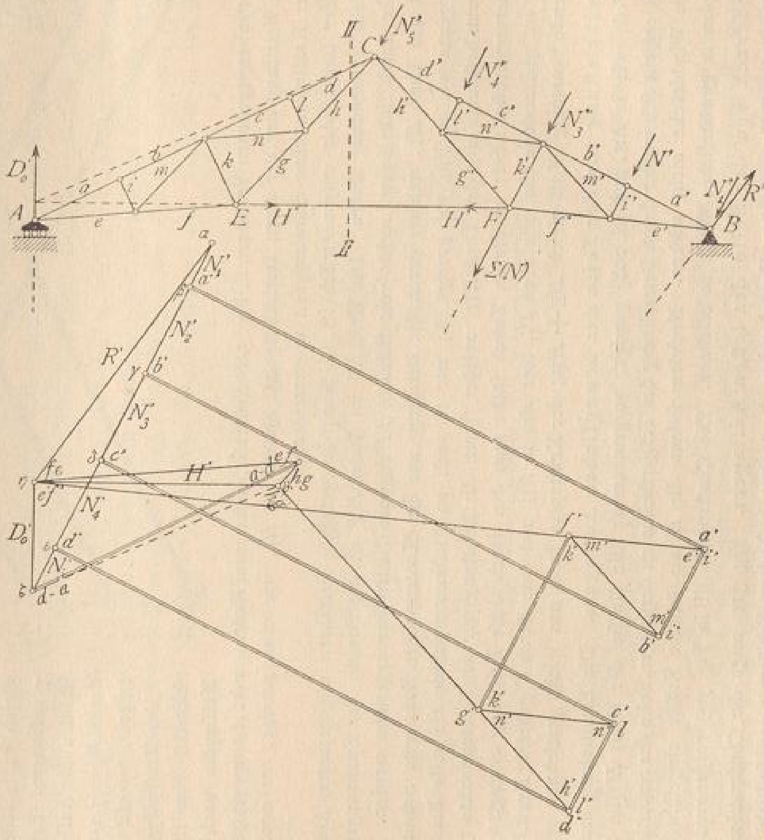


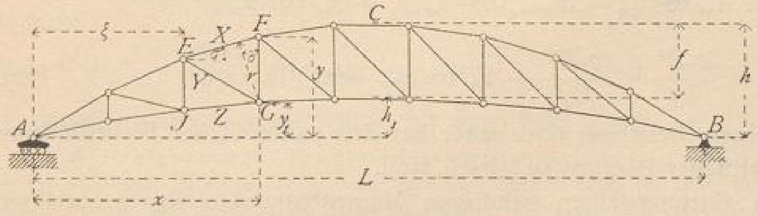
Fig. 310.



e) Sicheldächer.

Die Gurtungen können bei den Sicheldächern nach beliebigen krummen Linien geformt fein; gewöhnlich find beide Gurtungen Vielecke, welche Parabeln oder Kreifen eingefchrieben find. Die Beftimmung der Auflagerdrücke ift im Vorhergehenden gezeigt worden; die Stabfpannungen ergeben fich durch Rechnung oder Conftruction ohne Schwierigkeit. Hier foll nur die Gefetzmäfsigkeit der Spannungsänderungen für das parabolifche Sicheldach und für lothrechte Belaftungen gezeigt werden. 228. Form der Dachbinder.

Fig. 311.



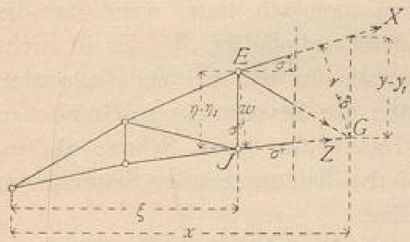
Die Gleichungen der beiden Curven heifsen, wenn die Pfeilhöhen h und h_1 find, nach Art. 189 (S. 191) für A als Anfangspunkt der Coordinaten (Fig. 311)

$$y = \frac{4\,h}{L^2}\,(L\,x - x^2) \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{4\,h_1}{L^2}\,(L\,x - x^2) \quad \ldots \quad 325.$$

1) Stabfpannungen bei lothrechter Belaftung. α) Für den Stab EF (Fig. 311) der oberen Gurtung ift G der Momentenpunkt, und wenn das Biegungsmoment für diefen Punkt mit M_x bezeichnet wird, ift $X\,r + M_x = 0$, woraus $X = -\frac{M_x}{r}$. 229. Ermittelung der Spannungen durch lothrechte Belaftung.

Nun ift $r = (y - y_1)\cos\sigma = \frac{4}{L^2}\,(h - h_1)\,(L\,x - x^2)\cos\sigma = \frac{4}{L^2} f\,(L\,x - x^2)\cos\sigma$;

Fig. 312.



alfo

$$X\cos\sigma = -\frac{M_x\,L^2}{4\,f\,(L\,x - x^2)} \quad . \quad 326.$$

Für den Stab JG der unteren Gurtung (Fig. 312) ift E der Momentenpunkt, und wenn das Biegungsmoment für diefen Punkt mit M_ξ bezeichnet wird, fo ift $Z = \frac{M_\xi}{w}$. Nun ift

$$w = (\eta - \eta_1)\cos\sigma' = \frac{4}{L^2} f\,(L\,\xi - \xi^2)\cos\sigma',$$

d. h.

$$Z\cos\sigma' = \frac{M_\xi\,L^2}{4\,f\,(L\,\xi - \xi^2)} \quad \ldots \quad 327.$$

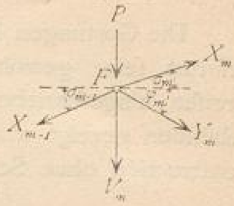
Aus den Gleichungen 326 u. 327 folgt:

a) Für volle, gleichmäfsig über die wagrechte Projection vertheilte Belaftung p auf die Längeneinheit ift $M_x = \frac{p}{2}\,(L\,x - x^2)$ und $M_\xi = \frac{p}{2}\,(L\,\xi - \xi^2)$, alfo

$$X\cos\sigma = -\frac{p\,L^2}{8\,f} \quad \text{und} \quad Z\cos\sigma' = \frac{p\,L^2}{8\,f}, \quad \ldots \quad 328.$$

d. h. die wagrechten Seitenkräfte der Gurtungsfpannungen find bei der angegebenen Belaftungsart in beiden Gurtungen conftant, und zwar gleich dem Gröfstmomente, dividirt durch die Mittenhöhe der Sichel. Bei der Parabel ſind innerhalb der Grenzen, welche bei den Dächern vorkommen, $\cos \sigma$ und $\cos \sigma'$ nahezu conſtant. Das ſoeben gefundene Ergebniſs ſtimmt mit dem in Art. 190 (S. 191) für die Parabelträger ermittelten überein. Durch Aufſtellung der Gleichgewichtsbedingung für einen Knotenpunkt der oberen Gurtung, etwa *F*, ergiebt ſich ferner (Fig. 313)

Fig. 313.



$$0 = X_m \cos \sigma_m - X_{m-1} \cos \sigma_{m-1} + Y_m \cos \varphi_m ,$$

d. h.

$$0 = -\frac{p L^2}{8 f} + \frac{p L^2}{8 f} + Y_m \cos \varphi_m \quad \text{oder} \quad Y_m = 0 \; . \quad . \quad . \quad . \quad 329.$$

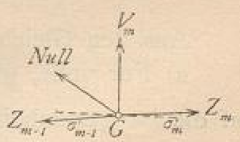
Für die angegebene Belaſtung ſind daher bei den paraboliſchen Sicheldächern die Spannungen ſämmtlicher Diagonalen gleich Null.

b) Alle zu den Gurtungsſtäben gehörigen Momentenpunkte liegen zwiſchen den lothrechten Linien der Auflager *A* und *B* (Fig. 311); für alle dieſe Punkte ſind die Biegungsmomente bei lothrechter Belaſtung poſitiv (ſiehe Art. 156, S. 150); mithin erzeugt jede lothrechte Belaſtung in den Stäben der oberen Gurtung Druck, in denjenigen der unteren Gurtung Zug. Gröſster Druck, bezw. Zug für lothrechte Belaſtung wird demnach in allen Stäben bei voller Belaſtung des ganzen Dachbinders ſtattfinden.

β) Für die Spannungen in den Diagonalen ergiebt ſich nach demſelben Verfahren, welches in Art. 191 (S. 192) angewendet iſt, um die Beanſpruchungsart der Diagonalen des Parabelträgers zu ermitteln: Jede Belaſtung zwiſchen dem durch eine Diagonale gelegten lothrechten Schnitte und jenem Auflager, nach welchem die Diagonale zu fällt, erzeugt Zug in derſelben; jede Belaſtung zwiſchen dem Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem die Diagonale ſteigt, erzeugt in derſelben Druck. Gröſster Druck, bezw. Zug finden demnach ſtatt, wenn nur die Druck-, bezw. Zugabtheilung der betreffenden Diagonalen belaſtet iſt. Es iſt nicht nöthig, bei einem Dache dieſe verſchiedenen, jedenfalls für die meiſten Diagonalen überhaupt wohl nicht vorkommenden Belaſtungsarten der Berechnung zu Grunde zu legen; es genügt eine Belaſtung nur der einen Dachhälfte durch Schnee als ungünſtigſte lothrechte Belaſtung einzuführen. Die hierbei ſich ergebenden Spannungen ſind mittels der *Ritter*'ſchen Methode leicht zu finden.

γ) Bezüglich der Spannungen in den Pfoſten ergiebt ſich, wie oben, folgendes Geſetz: Gröſster Druck, bezw. Zug findet in einem Pfoſten bei der Belaſtung ſtatt, welche in derjenigen Diagonalen den gröſsten Zug, bezw. Druck erzeugt, die mit dem Pfoſten in einem Knotenpunkt der nicht belaſteten Gurtung zuſammentrifft. Auch hier genügt es, als zufällige lothrechte Belaſtungen nur die Belaſtung des ganzen Daches und diejenige der einen Dachhälfte anzunehmen.

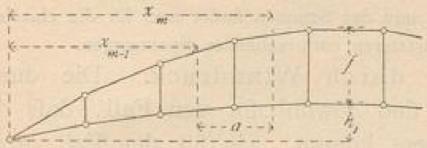
Fig. 314.



Bei Belaſtung des ganzen Dachbinders mit der gleichmäſsig über die wagrechte Projection vertheilten Belaſtung *p* ergiebt ſich die Spannung aller Pfoſten durch Aufſtellung der Gleichgewichtsbedingung für einen Knotenpunkt der unteren Gurtung. Es iſt (Fig. 314), da die Spannung in der Diagonalen alsdann gleich Null iſt,

$$0 = V_m + Z_m \sin \sigma'_m - Z_{m-1} \sin \sigma'_{m-1} \quad \text{und} \quad 0 = V + \frac{p L^2}{8 f} (\operatorname{tg} \sigma'_m - \operatorname{tg} \sigma'_{m-1}).$$

Fig. 315.



Wird (mit geringem Fehler) die Curve als ftetig gekrümmt angefehen und werden die Richtungen der Stäbe als parallel zu den in den Mitten der unteren Gurtungsftäbe an die Parabel gelegten Tangenten eingeführt, fo ift

$$\operatorname{tg} \sigma'_m = \frac{4 h_1}{L^2} (L - 2 x_m) \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \sigma'_{(m-1)} = \frac{4 h_1}{L^2} (L - 2 x_{m-1}),$$

fonach

$$0 = V + \frac{p L^2}{8 f} \frac{4 h_1}{L^2} 2 (x_{m-1} - x_m) = V - \frac{p h_1}{f} a, \text{ woraus } V = \frac{p h_1 a}{f}. \qquad 330.$$

V nimmt ab, wenn h_1 abnimmt; für $h_1 = 0$ ift $V = 0$.

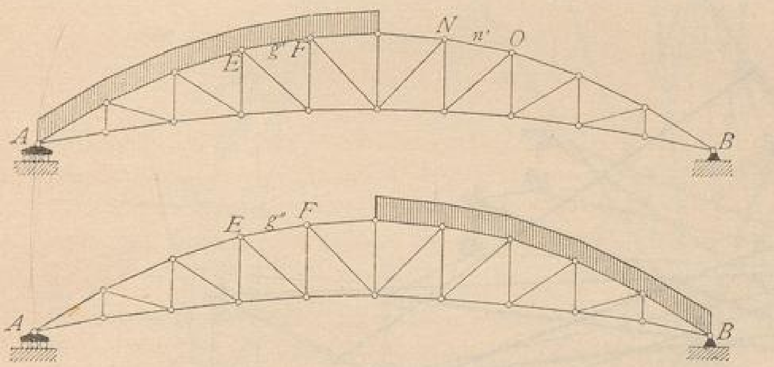
230. Ermittelung der Spannungen durch einfeitige Schneelaft.

2) Stabfpannungen bei einfeitiger Schneebelaftung. Bezüglich der Belaftung durch einfeitige Schneelaft ift Folgendes zu beachten. Man braucht nicht für beide Belaftungsarten, diejenige des ganzen Daches und diejenige der einen Dachhälfte, die Spannungen zu berechnen; vielmehr genügt für fymmetrifch zur mittleren Lothrechten angeordnete Conftruction die Kenntnifs der Spannungen bei einfeitiger Belaftung, um diejenigen zu erhalten, welche bei voller Belaftung ftattfinden, und gleichzeitig zu ermitteln, welche Belaftungsart die gefährlichere ift. Die Belaftung der linken Dachhälfte erzeugt etwa (Fig. 316) im Stabe EF die Spannung g'; die Belaftung der rechten Dachhälfte erzeugt in demfelben Stabe die Spannung g''. Die volle Belaftung hat offenbar im Stabe EF die Spannung $g' + g''$ zur Folge. Liegt nun NO genau fymmetrifch mit EF, fo wird die Spannung n' in NO bei der erfteren Belaftungsart genau fo grofs fein, wie g''. Es ift aber

$$g_{total} = g' + g'' = g' + n'.$$

Die durch die Belaftung des ganzen Daches in einem Stabe entftehende Spannung ift alfo gleich der Summe derjenigen Spannungen, die durch Belaftung der einen Dachhälfte in dem betrachteten Stabe und in dem fymmetrifch zur Mitte liegenden Stabe entftehen. Wenn die fymmetrifch zur Mitte liegenden Stäbe bei der Belaftung einer Dachhälfte in gleichem Sinne beanfprucht werden, alfo beide Zug oder beide Druck erhalten, fo ift die Summe diefer Spannungen gröfser, als jede einzelne, d. h. die volle Belaftung des Daches ift ungünftiger, als die einfeitige. Werden beide Stäbe in entgegengefetztem Sinne beanfprucht, fo ift die Summe beider kleiner, als die gröfsere von beiden, demnach die einfeitige Belaftung als ungünftigere einzuführen. Dabei ift zu beachten, dafs in letzterem Falle beide Stabfpannungen als ungünftige einzuführen find, da nicht nur die Maximal-, fondern auch die Minimalfpannungen von Wichtigkeit find. Wenn ein Mittelfeld mit zwei fich kreuzenden Zugdiagonalen vorhanden ift, fo gilt die vorftehende Entwickelung ebenfalls; jedoch ift ftets nur diejenige Diagonale des Mittelfeldes als vorhanden zu betrachten, welche bei der betreffenden Belaftung Zug erleidet.

Fig. 316.



Was foeben vom Sicheldach angegeben wurde, gilt felbftverftändlich von jedem aus zwei fymmetrifchen Hälften zufammengefetzten Dachftuhl.

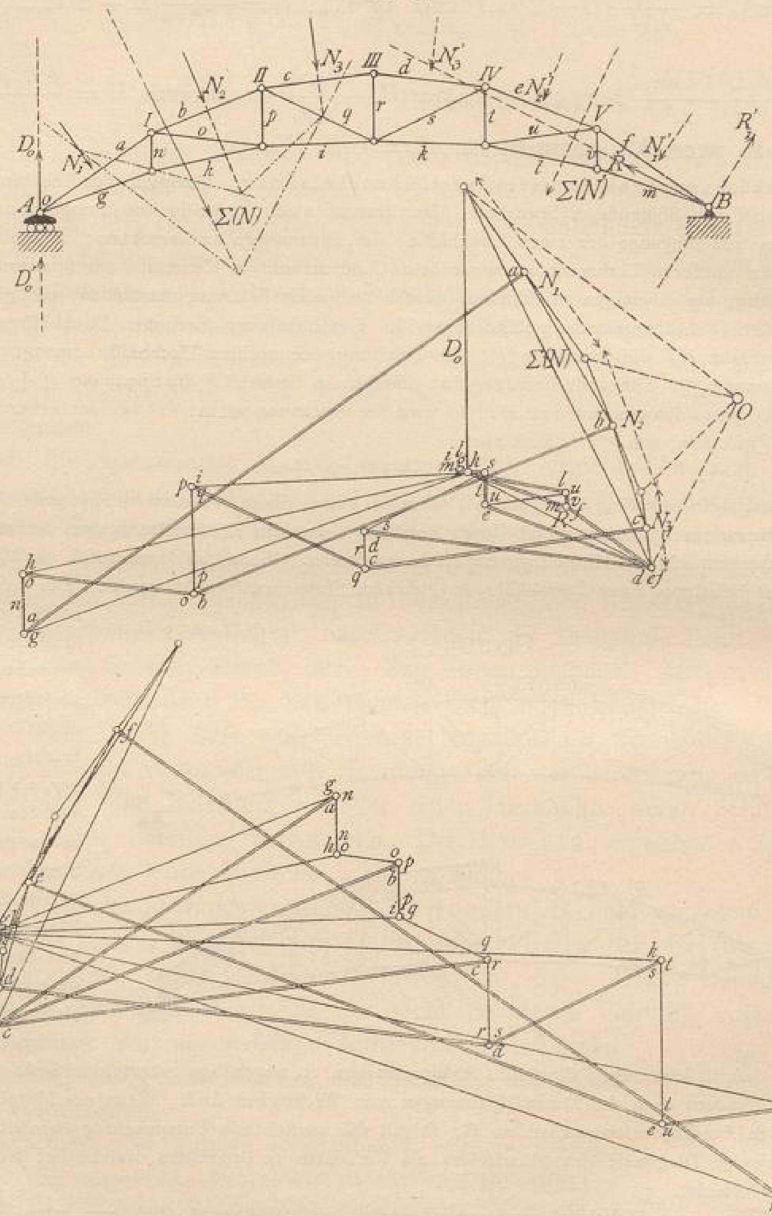
Falls der Binder nicht fymmetrifch zur lothrechten, durch den Firft gelegten Linie angeordnet ift, fo ermittele man nach einander die Spannungen, welche in fämmtlichen Stäben durch einfeitige Schneebelaftung der links vom Firft gelegenen Dachfeite hervorgerufen werden, fodann diejenigen, welche durch einfeitige Schneebelaftung der rechts vom Firft gelegenen Dachfeite erzeugt werden. Die durch volle

Schneebelaftung des ganzen Daches hervorgerufenen Spannungen find gleich den Summen der bezüglichen Einzelfpannungen. Durch Vergleich der Einzelfpannungen und der Summen findet man für die einzelnen Stäbe leicht die ungünftigften Schneebelaftungen und die letzteren entfprechenden Spannungen.

231. Ermittelung der Spannungen durch Winddruck.

3) Stabfpannungen bei Belaftung durch Winddruck. Die durch Windbelaftung entftehenden Stabfpannungen find fowohl für den Fall, dafs der Wind von der Seite des beweglichen Auflagers kommt, wie für den Fall zu er-

Fig. 317.



mitteln, dafs der Wind von der Seite kommt, an welcher das fefte Auflager liegt. Die Berechnung ift nach Früherem leicht durchzuführen.

232. Gegendiagonalen.

4) Gegendiagonalen. Aus dem Belaftungsgefetz für die Diagonalen geht hervor, dafs jede Diagonale fowohl Zug, wie Druck erhalten kann; will man dies

Fig. 318.

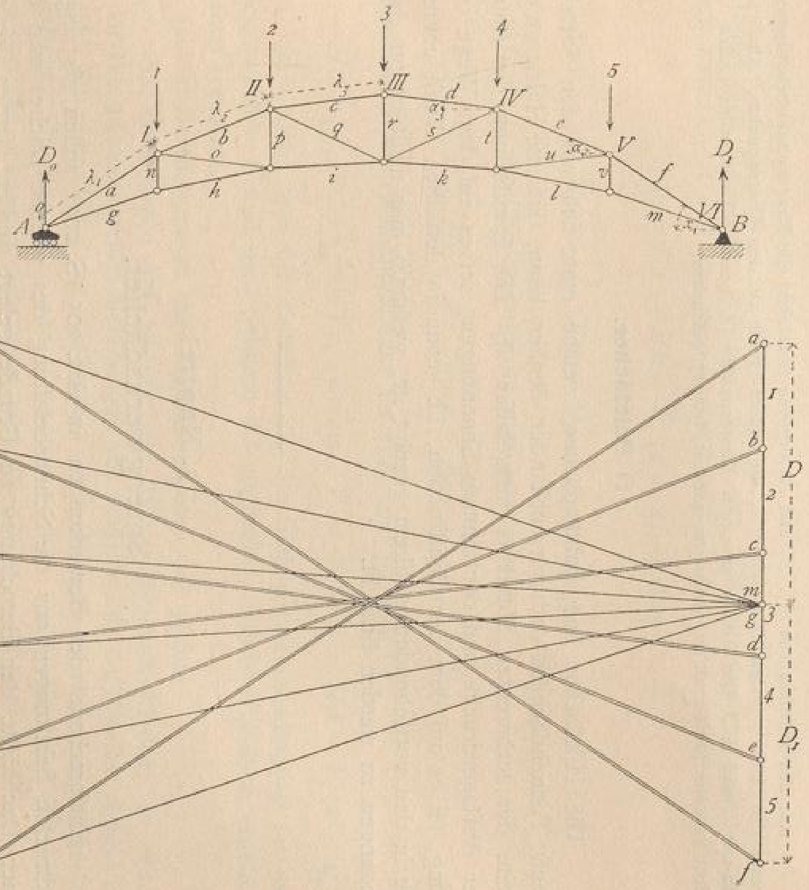
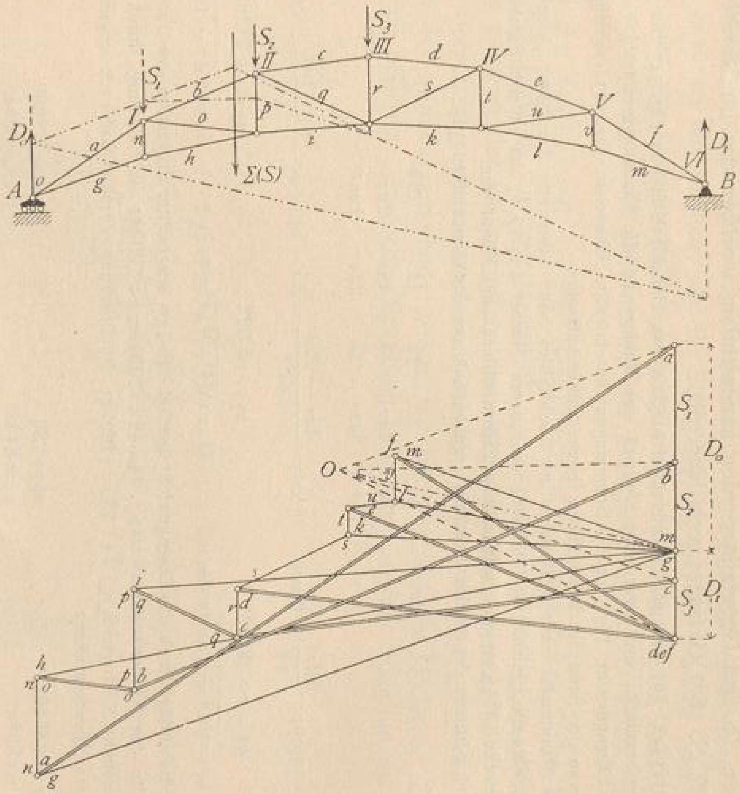


Fig. 319.



vermeiden, so sind Gegendiagonalen anzuwenden, worüber das im Kapitel »Träger« (Art. 186, S. 187) Gesagte auch hier gilt.

233. Beispiel. Beispiel. Für das nachstehend näher beschriebene Sicheldach sind in Fig. 317 bis 319 die Stabspannungen ermittelt, und zwar zeigt Fig. 318 den Binder und die Spannungsermittelung für Belastung durch das Eigengewicht, Fig. 319 die Spannungen für einseitige Schneelast, Fig. 317 diejenigen für Windbelastung von der Seite des beweglichen, bezw. festen Auflagers.

Die Hauptmafse und Belastungen des Dachstuhles sind: Stützweite $L = 24^m$; Anzahl der Felder gleich 6; Feldweite gleich 4^m; Pfeilhöhe der oberen Parabel $h = 4{,}8^m$, der unteren Parabel $h_1 = 2{,}4^m$; die Binderweite ist $4{,}2^m$; die Dachdeckung Eisenwellblech auf Eisenpfetten.

Die Ordinaten der beiden Parabeln ergeben sich aus den Gleichungen 325:

für x =	4	8	12	16	20 m
ist y =	2,67	4,27	4,8	4,27	2,67 m,
y_1 =	1,33	2,13	2,4	2,13	1,33 m.

Ferner ist $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2{,}67}{4} = 0{,}6675$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{4{,}27 - 2{,}67}{4} = 0{,}4$, $\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{4{,}8 - 4{,}27}{4} = 0{,}1325$;

$$\alpha_1 = \backsim 33^\circ 40', \qquad \alpha_2 = \backsim 22^\circ, \qquad \alpha_3 = \backsim 7^\circ 30';$$

$$\lambda_1 = \sqrt{4^2 + 2{,}67^2} = 4{,}81^m, \qquad \lambda_2 = \sqrt{4^2 + 1{,}6^2} = 4{,}31^m, \qquad \lambda_3 = \sqrt{4^2 + 0{,}53^2} = 4{,}04^m.$$

Die Belastung durch das Eigengewicht beträgt für 1^{qm} wagrechter Projection der Dachfläche 42^{kg}, demnach für den Knotenpunkt $G = 4{,}0 \cdot 4{,}2 \cdot 42 = 705{,}6 = \backsim 700^{kg}$; die Belastung durch Schnee für den Knotenpunkt S ist gleich $4 \cdot 4{,}2 \cdot 75 = 1260^{kg}$; die Belastung durch Winddruck ergiebt sich nach Gleichung 7 folgendermafsen:

$$\text{für } \alpha_1 = 33^\circ 40', \qquad \alpha_2 = 22^\circ, \qquad \alpha_3 = 7^\circ 30'$$

$$\nu = 83^{kg}, \qquad \nu = 64^{kg}, \qquad \nu = 36^{kg},$$

$$N = 4{,}2\, \lambda_1 \cdot 83 = \backsim 1680^{kg}, \quad N_2 = 4{,}2\, \lambda_2 \cdot 64 = \backsim 1160^{kg}, \quad N_3 = 4{,}2\, \lambda_3 \cdot 36 = \backsim 610^{kg}.$$

Aus den Werthen von N_1, N_2 und N_3 ergeben sich leicht die Knotenpunktsbelastungen. Von N_1 kommt die Hälfte auf den Knotenpunkt o, die andere Hälfte auf den Knotenpunkt I; ähnlich verhält es sich mit II und III. Die beiden in einem Knotenpunkte (I, bezw. II) wirkenden Lasten sind alsdann leicht zu einer Mittelkraft zu vereinigen, wie in Fig. 317 geschehen.

f) Pultdächer.

234. Spannungen. Die Pultdächer sind Balkendächer, welche man sich aus den Satteldächern, bezw. Tonnendächern dadurch entstanden denken kann, dafs die Hälfte an der einen Seite der lothrechten Mittelaxe fortgelassen ist. Die Ermittelung der Belastungen, der Auflagerdrücke und der inneren Spannungen, sei es auf dem Wege der Rechnung, sei es auf dem der Construction, ist genau in derselben Weise vorzunehmen, die in den vorstehenden Artikeln gezeigt ist, wefshalb hier nicht weiter darauf eingegangen zu werden braucht.

3. Kapitel.

Sprengwerksdächer.

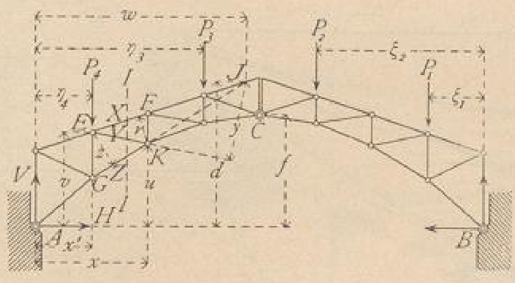
235. Ungünstigste Belastung. Entsprechend den Bemerkungen in Art. 205 (S. 207) sollen als ungünstigste lothrechte Belastungen nur die Schneebelastung des ganzen Daches und diejenige einer Dachhälfte der Berechnung zu Grunde gelegt werden, ferner die einseitige

Windbelaftung als ungünftigfte fchiefe Belaftung. Bei der Schneebelaftung ift fodann für jeden Stab zu unterfuchen, ob die Belaftung des ganzen Daches oder diejenige der einen oder der anderen Hälfte die ungünftigere ift. Zu diefem Zwecke genügt nach Art. 230 (S. 237) die Beftimmung der Stabfpannungen bei einfeitiger Schneebelaftung.

Aus der Gröfse und Art der Beanfpruchungen fämmtlicher Stäbe bei diefer Belaftung find alsdann, wie dort gezeigt ift, die ungünftigften lothrechten Belaftungen, fo wie die Gröfsen der ungünftigften Spannungen leicht zu ermitteln.

Die Berechnung der Spannungen erfolgt, wenn die Auflagerkräfte ermittelt find, nach der Momentenmethode genau, wie bei den anderen Dächern. Es handle fich für eine beliebige lothrechte Belaftung (Fig. 320) um die Spannungen X, Y, Z 236. Berechnung der Spannungen.

Fig. 320.



in den Stäben EF, EK, GK. Für EF ift K der Momentenpunkt, und für das Trägerftück zwifchen A und dem Schnitte II wird

$$0 = Vx - Hu - P_4 (x - \eta_4) + Xr,$$

woraus

$$X = -\frac{1}{r} [Vx - Hu - P_4 (x - \eta_4)].$$

Für GK ift E der Momentenpunkt, und es wird

$$0 = Vx' - Hv - Zz, \quad \text{woraus} \quad Z = \frac{1}{z} (Vx' - Hv).$$

Endlich ift J der Momentenpunkt für EK, und es wird

$$0 = Vw - Hd - P_4 (w - \eta_4) - Yy, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{1}{y} [Vw - Hd - P_4 (w - \eta_4)].$$

Man kann auch, was oft einfacher ift, die Gleichgewichtsbedingung für das Trägerftück zwifchen C und dem Schnitte II aufftellen; felbftverftändlich ergeben fich diefelben Refultate.

Für fchiefe Belaftungen ift das Verfahren genau das gleiche.

Sollen die Spannungen auf graphifchem Wege ermittelt werden, fo wird, nachdem für die angenommenen Belaftungen die Lagerkräfte der Punkte A und B ermittelt find, für jede Hälfte der Kräfteplan nach *Cremona* in mehrfach erörterter Weife conftruirt. In Fig. 321, 322 u. 323 find diefe Kräftepläne für Belaftung durch Eigengewicht, einfeitige Schneelaft und Winddruck conftruirt. 237. Graphifche Ermittelung der Spannungen.

Fig. 321.

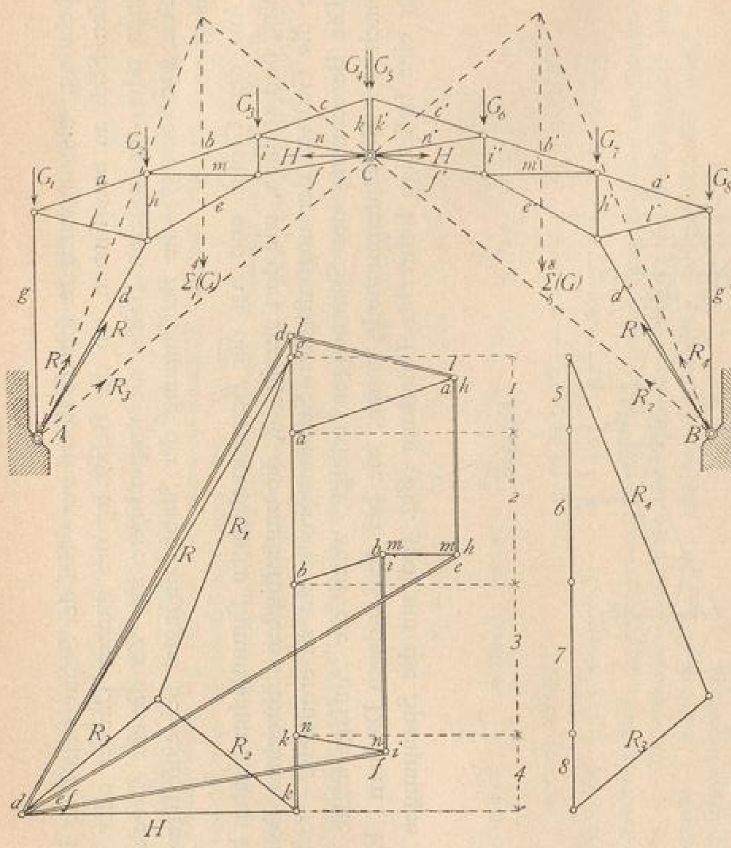
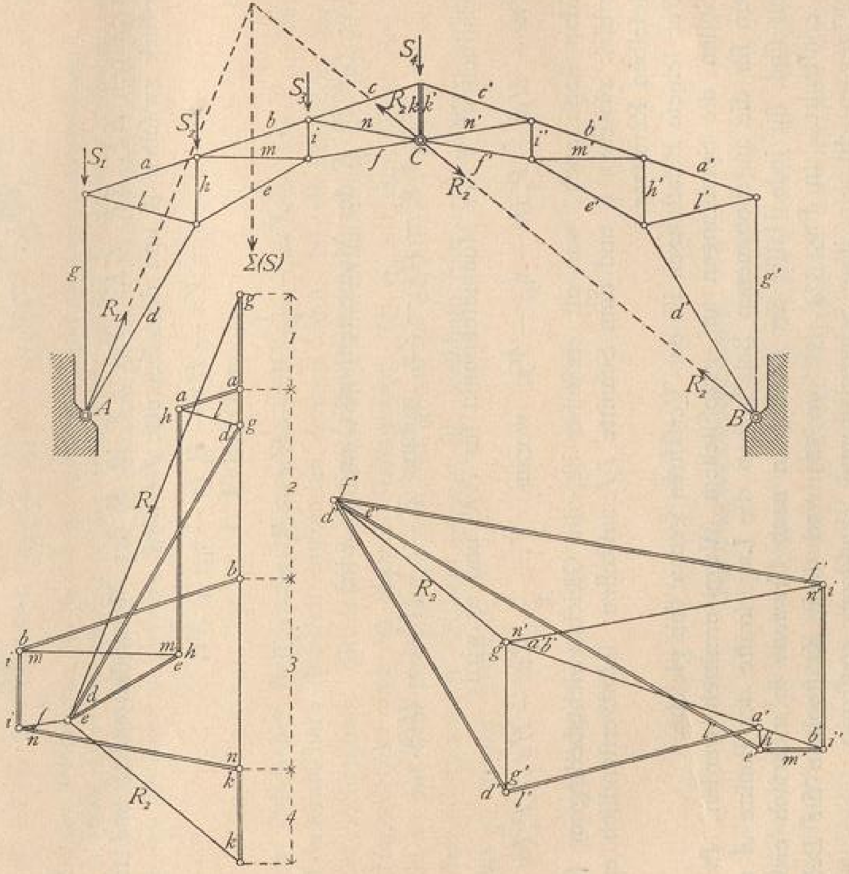
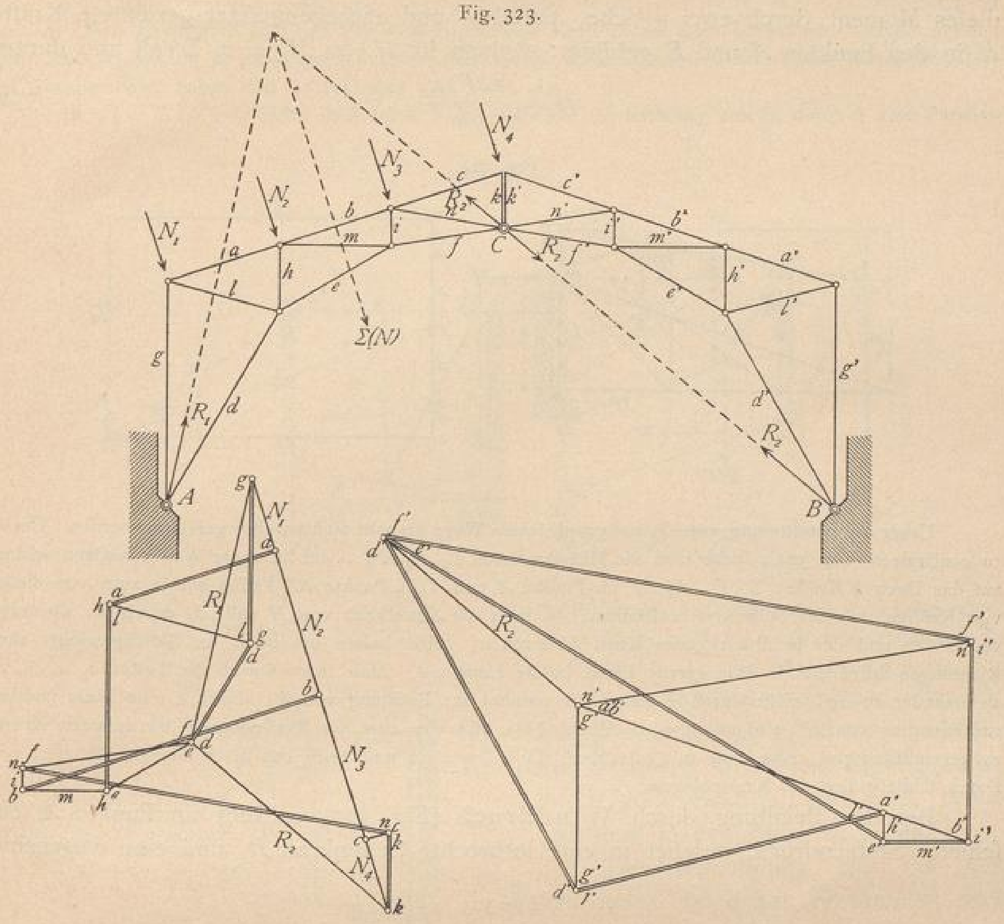


Fig. 322.



Linke Hälfte. Rechte Hälfte.

Fig. 323.



Linke Hälfte. *Rechte Hälfte.*

4. Kapitel.

Ausleger- oder Kragdächer.

Die Ausleger- oder Kragdächer find Dächer, welche, wie die Ausleger- oder Kragträger (fiehe Art. 158 bis 161, S. 151 bis 154), an ihrem einen Ende unterftützt find, am anderen Ende frei fchweben. Demnach mufs auch hier, falls Gleichgewicht ftattfinden foll, Seitens der Wand, an welcher das Auslegerdach befeftigt ift, ein Auflagerdruck und ein Moment geleiftet werden. 238. Auflagerdrücke.

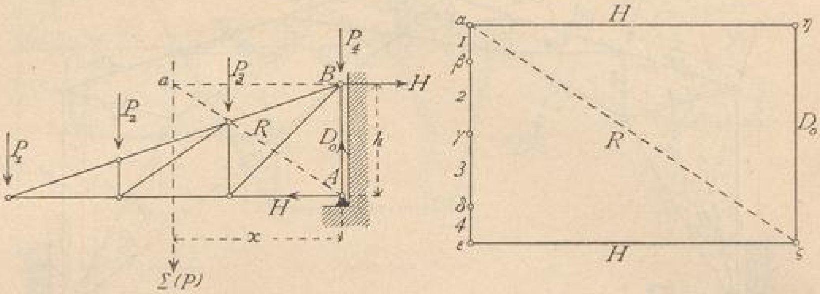
1) Auflagerdrücke. Für lothrechte Belaftungen ift der Auflagerdruck im Punkte A (Fig. 324)

$$D_0 = \Sigma (P) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 331.$$

Das Seitens der Wand zu leiftende Moment mufs dem refultirenden Momente der äufseren Kräfte, d. h. demjenigen von $\Sigma (P)$ und A genau gleich fein und entgegengefetzte Drehrichtung haben. Da $D_0 = \Sigma (P)$ ift und beide Kräfte einander parallel find, fo bilden fie ein Kräftepaar mit dem Momente $M_0 = x \, \Sigma (P)$. Diefelbe Gröfse hat alfo das von der Mauer zu leiftende Moment. Wir denken uns diefes Moment durch zwei gleiche, parallele und entgegengefetzt gerichtete Kräfte H in den Punkten A und B gebildet; alsdann ift $Hh = M_0 = x_0 \, \Sigma(P)$ und daraus

$$H = \frac{\Sigma(P)\, x_0}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 332.$$

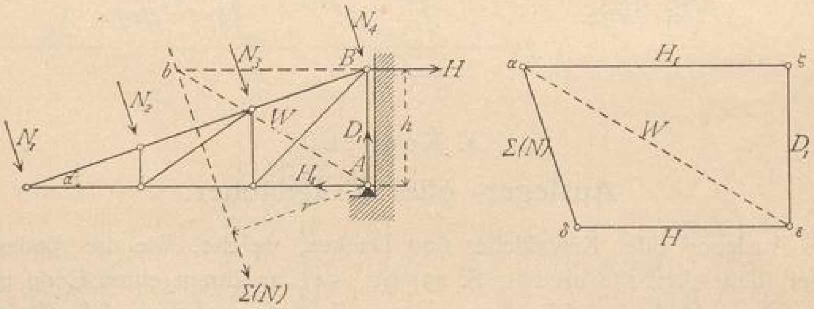
Fig. 324.



Ueber die Ermittelung von D_0 auf graphifchem Wege braucht nichts weiter gefagt zu werden. Um H zu conftruiren (Fig. 324), fuche man die Mittelkraft von P_1, P_2, P_3 ... auf bekannte Weife; alsdann wirken auf das Dach 4 Kräfte: $\Sigma(P)$, D_0, H im Punkte A und H im Punkte B. Faffen wir je zwei von diefen vier Kräften zu einer Mittelkraft zufammen, fo geht die Mittelkraft von H und D_0 durch A, diejenige von $\Sigma(P)$ und der in B wirkenden Kraft H durch a; beide halten das Dach im Gleichgewicht; ihre Richtungen fallen alfo in eine gerade Linie, in die Linie aA. Man trage fonach die Laften *1, 2, 3* ... an einander zu $\alpha\varepsilon$, ziehe durch α eine Linie parallel zur Richtung von R, durch ε eine Linie parallel zur Richtung von H; alsdann ift $\varepsilon\zeta = H$ und $\zeta\alpha = R$. Um nun das Kraftpolygon der äufseren Kräfte zu vervollftändigen, trage man an ζ die Kraft $D_0 = \zeta\eta = \alpha\varepsilon$ und an η das in A angreifende $H = \eta\alpha$. Damit fchliefst fich das Kraftpolygon.

Bei der Belaftung durch Winddruck (Fig. 325) entfteht im Punkte A ein fchiefer Stützendruck, welcher in eine lothrechte Seitenkraft D_1 und eine wagrechte

Fig. 325.



Seitenkraft H_1 zerlegt werden kann. Aufserdem mufs von der Wand ein Moment geleiftet werden, welches in Bezug auf A als Momentenpunkt demjenigen der Windlaften gleich, der Drehrichtung nach entgegengefetzt ift. Um diefes Moment zu erzeugen, bringen wir in B eine Kraft H an, welche fich aus der Bedingung beftimmt

$$\left.\begin{array}{l} 0 = Hh - \Sigma(N)\, r, \quad \text{woraus} \quad H = \dfrac{r}{h}\, \Sigma(N). \\ \quad \text{Ferner wird} \\ D_1 = \Sigma(N) \cos\alpha \quad \text{und} \quad H_1 = H + \Sigma(N) \sin\alpha = \Sigma(N)\left(\dfrac{r}{h} + \sin\alpha\right) \end{array}\right\} \quad . \quad 333.$$

Die Conſtruction der Kräfte H_1, D_1 und H erfolgt in ähnlicher Weiſe, wie bei lothrechter Belaſtung. Man vereinigt $\Sigma\,(N)$ und die in B angreifende Kraft H zu einer Mittelkraft, welche durch b geht, und H_1 mit D_1 zu einer zweiten Mittelkraft, welche durch A geht. Beide Kräfte halten das Dach im Gleichgewicht, haben alſo die Richtung bA, bezw. Ab.

Iſt $\alpha\delta = \Sigma\,(N)$, ſo ziehe man durch δ eine Parallele zur Richtung von H, durch α eine Parallele

Fig. 326.

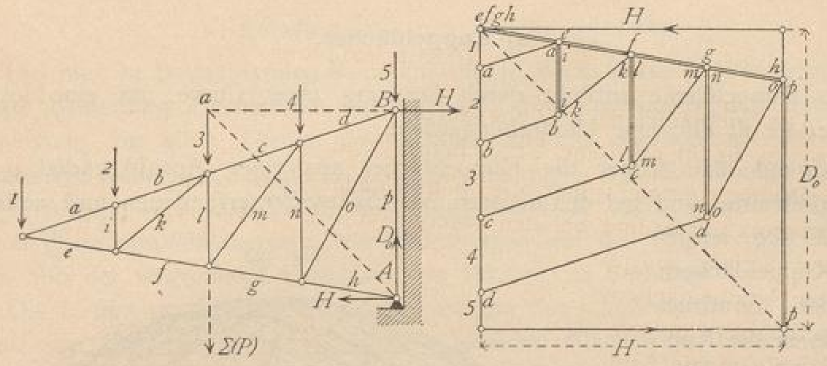
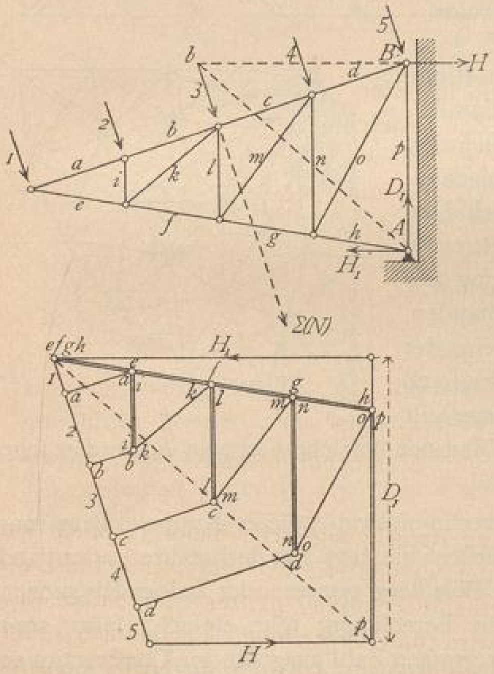


Fig. 327.



zur Richtung von W; man erhält als Schnittpunkt ε, und es iſt $\delta\varepsilon = H$, $\varepsilon\alpha = W$. Nun zerlege man $\varepsilon\alpha$ in D_1 und H_1, ſo wird $\varepsilon\zeta = D_1$, $\zeta\alpha = H_1$.

2) Stabſpannungen. Um die Stabſpannungen zu ermitteln, ſind hier nur Belaſtung durch das Eigengewicht, durch volle Schnee- und volle Windbelaſtung in das Auge zu faſſen. 239. Stab-ſpannungen.

Die Berechnung für die verſchiedenen möglichen Formen iſt nach der Momentenmethode ohne Schwierigkeit durchzuführen, und zwar ſowohl wenn die Laſten lothrecht, als wenn ſie ſenkrecht zur Dachfläche gerichtet ſind; es braucht darauf hier nicht weiter eingegangen zu werden.

Das graphiſche Verfahren iſt in Fig. 326 u. 327 für einen Ausleger-Dachſtuhl, und zwar für Belaſtung durch Eigengewicht und durch Winddruck, durchgeführt. Zuerſt ſind die äuſseren Kräfte, wie oben gezeigt, ermittelt, in der Reihenfolge der Knotenpunkte an einander getragen, und dann iſt der Kräfteplan verzeichnet, der ohne Weiteres verſtändlich iſt.

5. Kapitel.

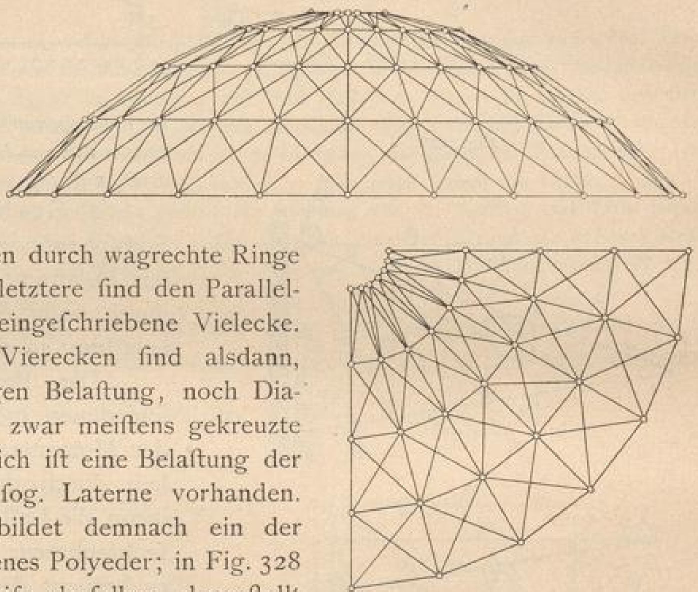
Kuppel-, Zelt- und Thurmdächer.

a) Kuppeldächer.

240. Allgemeines. Die Kuppelfläche entfteht durch Drehung einer Curve um eine lothrechte Mittelaxe; fie ift alfo eine Umdrehungsfläche.

Während man früher die Kuppeldächer aus einer Anzahl radial geftellter Binder conftruirte, find bei den neueren, von *Schwedler* erfundenen und vielfach mit beftem Erfolg ausgeführten Kuppeldächern fämmtliche Conftructionstheile in die Kuppelfläche verlegt. Eine Anzahl von Sparren wird in der Richtung der Meridiane der Kuppelfläche angeordnet und in verfchiedenen Höhen durch wagrechte Ringe mit einander verbunden; letztere find den Parallelkreifen der Kuppelfläche eingefchriebene Vielecke. In den fo entftehenden Vierecken find alsdann, wegen der ungleichmäfsigen Belaftung, noch Diagonalen angeordnet, und zwar meiftens gekreuzte Zugdiagonalen. Gewöhnlich ift eine Belaftung der Kuppelmitte durch eine fog. Laterne vorhanden. Die ganze Conftruction bildet demnach ein der Kuppelfläche eingefchriebenes Polyeder; in Fig. 328 find Anficht und Grundrifs derfelben dargeftellt (letzterer nur für ein Viertel der Kuppel). Man nennt folche Kuppeln *Schwedler*'fche oder Flechtwerkkuppeln.

Fig. 328.



Die von *Schwedler*[35]) angegebene Berechnungsweife diefer Kuppeln kann nur als eine Annäherungsrechnung betrachtet werden: fie legt nur lothrechte Laften und der Hauptfache nach gleichförmig vertheilte Belaftung ganzer oder halber Ringzonen zu Grunde. Bei diefen Annahmen wird die Berechnung fehr einfach, führt aber trotzdem zu Ergebniffen, welche fich in einer grofsen Zahl ausgeführter Conftructionen feit einer längeren Reihe von Jahren vollauf bewährt und allen Kräfteangriffen gewachfen gezeigt haben. Defshalb foll diefe Berechnungsweife, welche in den allermeiften Fällen für die Praxis genügt, nachftehend vorgeführt werden (Art. 241 bis 245).

Eine neuere, auf der Theorie des Raumfachwerkes beruhende Berechnungs-

35) In: Die Conftruction der Kuppeldächer. Zeitfchr. f. Bauw. 1866, S. 7.

weife der Flechtwerkkuppeln, und zwar für ganz beliebige Belaftungen, ift von *Müller-Breslau* [36]) aufgeftellt worden.

Nach Vorführung der *Schwedler*'fchen Berechnungsweife follen in Art. 246 bis 249 die Grundlagen derjenigen von *Müller-Breslau* angegeben werden.

1) Berechnungsweife von *Schwedler*.

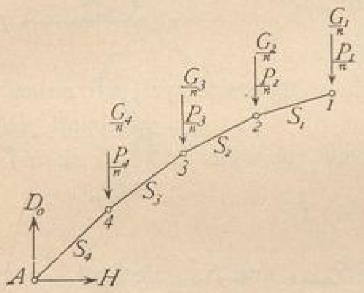
α) Belaftungen und Auflagerdrücke.

Die hier zu betrachtenden Kuppeln find fo flach, dafs der Winddruck nur von geringer Bedeutung ift; derfelbe foll defshalb, unter Zugrundelegung einer mittleren Dachneigung, in allen Theilen der Kuppel conftant angenommen werden. Hier wird nur die lothrechte Seitenkraft $\mathfrak{v}$ (vergl. Art. 30, S. 23) des Winddruckes berückfichtigt; die in die Dachfläche fallende Seitenkraft kann vernachläffigt werden. Endlich ift es empfehlenswerth, alle Belaftungen auf das Quadr.-Meter der Grundfläche, alfo der wagrechten Projection des Daches, zu beziehen. 241. Belaftungen.

Die Laften greifen in den Knotenpunkten der Conftruction an; demnach find die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden Flächen zu berechnen und mit diefen die Belaftungen für die Einheit der Grundfläche zu multipliciren.

Wären keine Ringe angeordnet, fo würden die einzelnen Sparren fchiefe Drücke auf die Auflager ausüben und von diefen erleiden; durch einen Ring, gegen welchen fich fämmtliche Sparrenfüfse fetzen, den fog. Mauerring oder Fufsring, werden die wagrechten Seitenkräfte der in den unterften Sparrenftäben (S_4 in Fig. 329) vorhandenen Spannungen aufgehoben, fo dafs bei den angenommenen Belaftungen als Auflagerdrücke nur lothrechte Kräfte wirken. Entfprechend den im folgenden Artikel vorzuführenden Annahmen braucht die Berechnung der Auflagerdrücke nur für Belaftungen vorgenommen zu werden, bei welchen ganze Ringzonen belaftet find. Wenn der Grundrifs der Kuppel ein regelmäfsiges n-Eck ift, und demnach n Sparren vorhanden find, fo kann angenommen werden, dafs bei den erwähnten Belaftungen alle Sparren gleiche Laften tragen. Die Kuppel trage eine Laterne, deren Gewicht im Eigengewicht der erften Ringzone mit enthalten fei. Die Eigengewichte der ganzen Ringzonen feien bezw. (Fig. 329) $G_1, G_2, G_3, G_4 \ldots$ und die zufälligen Laften der ganzen Ringzonen $P_1, P_2, P_3, P_4 \ldots$; alsdann ift, wenn der Stützendruck auf jeden Sparren D_0 beträgt, für volle Belaftung der ganzen Dachfläche 242. Auflagerdrücke.

Fig. 329.



$$n D_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \ldots + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots = \Sigma(G) + \Sigma(P).$$

Wenn etwa nur die drei oberften Zonen voll belaftet find, fo wird

$$n D_0' = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \ldots + P_1 + P_2 + P_3$$

fein. Auf diefe Art find die Auflagerdrücke leicht zu ermitteln.

---

[36]) In: Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralbl. d. Bauverw. 1892, S. 201. (Auch als Sonderabdruck erfchienen.) — Vergl. auch:

Kofahl. Beitrag zur Theorie der Kuppeldächer. Zeitfchr. d. Ver. deutfch. Ing. 1896, S. 1133; 1898, S. 713.

Hübner. Bemerkungen über das räumliche Fachwerk. Ebendaf. 1897, S. 477, 632, 634.

Müller-Breslau, H. Beitrag zur Theorie der Kuppel- und Thurmdächer etc. Ebendaf. 1898, S. 1205, 1233.

β) Stabſpannungen.

243. Berechnung der Stabſpannungen.

𝔄) Ungünſtigſte Beanſpruchung der einzelnen Stäbe. Es ſollen, nach *Schwedler*, für die Grenzen der Spannungen die folgenden vereinfachenden Annahmen gemacht werden:

a) die Sparren erhalten den gröſsten Druck, wenn die ganze Kuppel voll belaſtet iſt;

b) ein Ring erhält ſeinen gröſsten Zug, wenn der innerhalb deſſelben befindliche Kuppeltheil voll belaſtet, der Ring ſelbſt mit ſeiner Zone aber unbelaſtet iſt; bei der entgegengeſetzten Belaſtungsart treten die entgegengeſetzten Grenzen ein;

c) die Diagonalen zwiſchen zwei Sparren erhalten ihren gröſsten Zug, wenn die halbe Kuppel auf einer Seite des durch die Mitte der Diagonalen gehenden Durchmeſſers voll, die andere halbe Kuppel nur durch das Eigengewicht belaſtet iſt.

𝔅) Spannungen in den Sparren. Wir betrachten nur zwei Belaſtungsarten, nämlich die Belaſtung der ganzen Kuppel durch zufällige Laſt und die Belaſtung der Kuppel durch Eigengewicht. Die zweite Belaſtungsart ergiebt die Minimalſpannungen. Die Maximalſpannungen der Sparren ſind die Summen der bei den beiden angeführten Belaſtungsarten ſich ergebenden Spannungen. Die Formeln für beide Belaſtungsarten unterſcheiden ſich nur durch die Gröſse der Laſten.

Fig. 330.

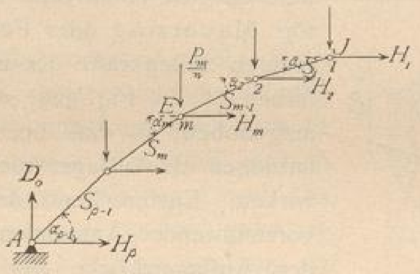
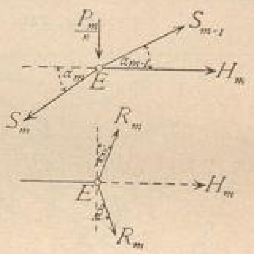


Fig. 331.



Was zunächſt die zufällige Belaſtung betrifft, ſo ſind im m-ten Knotenpunkte (vom Laternenringe an gerechnet) in E (Fig. 330 u. 331) folgende Kräfte im Gleichgewicht: die Spannungen der Sparren S_{m-1} und S_m, die Laſt $\frac{1}{n} P_m$, endlich die beiden Ringſpannungen R_m. Letztere ſind einander, der Symmetrie wegen, gleich und haben in der wagrechten Ebene des m-ten Ringes die Mittelkraft H_m. Die algebraiſche Summe der lothrechten Kräfte für den Punkt E iſt gleich Null; mithin

$$0 = \frac{1}{n} P_m + S_m \sin \alpha_m - S_{m-1} \sin \alpha_{m-1},$$

woraus

$$S_m = \frac{S_{m-1} \sin \alpha_{m-1}}{\sin \alpha_m} - \frac{1}{n} \frac{P_m}{\sin \alpha_m}.$$

Für den erſten Knotenpunkt, den Knotenpunkt am Laternenringe, für J, iſt $S_{m-1} = 0$; mithin folgt der Reihe nach für $m = 1, 2, 3 \ldots$

$$S_1 = -\frac{1}{n} \frac{P_1}{\sin \alpha_1}; \quad S_2 = -\frac{1}{n} \frac{P_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} - \frac{1}{n} \frac{P_2}{\sin \alpha_2} = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2};$$

$$S_3 = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} - \frac{1}{n} \frac{P_3}{\sin \alpha_3} = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3};$$

oder allgemein

$$S_m = -\frac{1}{n \sin \alpha_m} \sum_1^m (P) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 334.$$

Eben ſo ergiebt ſich die Spannung in den Sparren für eine Belaſtung durch das Eigengewicht zu

$$S_1' = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}; \quad S_2' = -\frac{(G_1 + G_2)}{n \sin \alpha_2}; \ldots S_m' = -\frac{\sum_1^m (G)}{n \sin \alpha_m} \quad . \quad 335.$$

𝔈) Spannungen in den Ringen. Die Gleichgewichtsbedingung, nach welcher die algebraiſche Summe der wagrechten Kräfte im Punkte E gleich Null iſt, lautet (Fig. 331):

$$0 = H_m + S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - S_m \cos \alpha_m, \text{ woraus } H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}.$$

Da H_m die Mittelkraft der beiden Ringſpannungen R_m iſt, ſo ergiebt ſich $H_m = 2 R_m \sin \beta$, woraus $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \beta}$. Nun iſt (Fig. 332) $\beta = \frac{360^0}{2n} = \frac{\pi}{n}$,

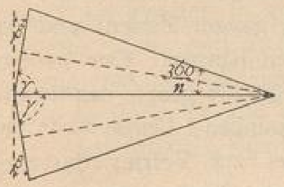


Fig. 332.

ſonach $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$. Wird in dieſe Gleichung der für H_m gefundene Werth eingeſetzt, ſo folgt

$$R_m = \frac{S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad 336.$$

Wir beſtimmen nach Gleichung 336 die Ringſpannung durch das Eigengewicht und die Maximal- und Minimal-Ringſpannung durch zufällige Belaſtung.

Durch das Eigengewicht wird

$$R_m^g = \frac{-\frac{\sum_1^m (G) \cos \alpha_m}{n \sin \alpha_m} + \frac{\sum_1^{m-1} (G) \cos \alpha_{m-1}}{n \sin \alpha_{m-1}}}{2 \sin \frac{\pi}{n}},$$

$$R_m^g = -\frac{\sum_1^m (G) \operatorname{cotg} \alpha_m - \sum_1^{m-1} (G) \operatorname{cotg} \alpha_{m-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 337.$$

Man erhält

$$\left.\begin{array}{l} \text{für den Laternenring } (m = 1){:}\ R_1^g = -\dfrac{G_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \\[2ex] \text{für den Ring 2 } (m = 2){:}\ R_2^g = -\dfrac{(G_1 + G_2) \operatorname{cotg} \alpha_2 - G_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \\[2ex] \text{für den Ring 3 } (m = 3){:}\ R_3^g = -\dfrac{(G_1 + G_2 + G_3) \operatorname{cotg} \alpha_3 - (G_1 + G_2) \operatorname{cotg} \alpha_2}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}, \end{array}\right\} \quad 338.$$

etc.

Für den Mauerring ift S_m, alfo das erfte Glied im Zähler gleich Null; mithin, wenn für den Auflagerpunkt $m = \rho$ ift,

$$R_\rho^g = \frac{\sum_1^{\rho-1} (G) \operatorname{cotg} \alpha_{\rho-1}}{2\, n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{(G_1 + G_2 + \ldots + G_{\rho-1}) \operatorname{cotg} \alpha_{\rho-1}}{2\, n \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad 339.$$

Um die durch zufällige Belaftung erzeugten Ringfpannungen zu ermitteln, fetzen wir in die Gleichung 336 die Werthe für S_m und S_{m-1} ein. Es foll $\mathfrak{S}_1^m (P)$ die zwifchen den Knotenpunkten 1 und m befindlichen zufälligen Laften bezeichnen, wobei $\mathfrak{S}$ ausdrückt, dafs nicht alle Knotenpunkte $1 - m$ belaftet zu fein brauchen; im Gegenfatz dazu foll $\sum_1^m (P)$ andeuten, dafs alle Knotenpunkte von 1 bis m belaftet find. Man erhält demnach allgemein für zufällige Belaftung aus Gleichung 336

$$R_m = - \frac{\mathfrak{S}_1^m (P) \operatorname{cotg} \alpha_m - \mathfrak{S}_1^{m-1} (P) \operatorname{cotg} \alpha_{m-1}}{2\, n \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 340.$$

Diefe Gleichung ermöglicht die Feftftellung der für die einzelnen Ringe ungünftigften Belaftungen (unter Vorausfetzung der Belaftung ganzer Zonen) und die Ermittelung der gröfsten Druck- und Zugfpannungen in den Ringen. Der gröfste Druck wird ftattfinden, wenn im Zähler das erfte Glied möglichft grofs, das zweite Glied möglichft klein ift. Jede Belaftung eines der Knotenpunkte 1 bis $(m - 1)$ hat fowohl ein Wachfen des erften, wie des zweiten Gliedes zur Folge; da aber $\operatorname{cotg} \alpha_{m-1}$ ftets gröfser ift, als $\operatorname{cotg} \alpha_m$, fo wächst das zweite Glied mehr, als das erfte, d. h. jede Belaftung des Knotenpunktes 1 bis $(m - 1)$ verringert den Druck, vergröfsert alfo den Zug. Die Belaftung des Knotenpunktes m vergröfsert nur das erfte Glied, alfo den Druck. Die Belaftung der aufserhalb des m-ten Ringes liegenden Ringe ift nach der Gleichung ohne Einflufs auf die Spannung im m-ten Ringe. Daraus folgt, dafs in den Stäben eines Ringes (des m-ten) der gröfste Druck ftattfindet, wenn die Knotenpunkte 1 bis $(m - 1)$ unbelaftet, die zum Ringe gehörigen Knotenpunkte dagegen belaftet find. Da die Belaftung der äufseren Ringe ohne Einflufs ift, fo kann man fagen: Gröfster Druck findet ftatt, wenn der innere Kuppeltheil unbelaftet, der äufsere Kuppeltheil, einfchliefslich des betrachteten Ringes, belaftet ift. Daraus folgt dann weiter, dafs gröfster Zug in den Stäben des m-ten Ringes auftritt, wenn nur der innere Kuppeltheil, ausfchliefslich der Zone, zu welcher der m-te Ring gehört, belaftet ift. Die hier gefundenen Ergebniffe ftimmen demnach mit den in Art. 243 (S. 248) gemachten Annahmen über die ungünftigften Belaftungen überein.

Man erhält

$$R_m^{p\,min} = - \frac{P_m \operatorname{cotg} \alpha_m}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_m^{p\,max} = \frac{\sum_1^{m-1} (P) (\operatorname{cotg} \alpha_{m-1} - \operatorname{cotg} \alpha_m)}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad 341.$$

Es ergiebt fich

$$\left.\begin{array}{l}
\text{für den Laternenring } (m=1)\colon\; R_1^{p\,min} = -\dfrac{P_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{2\,n \sin \dfrac{\pi}{n}} \text{ und } R_1^{p\,max} = 0; \\
\text{für } m=2\colon\; R_2^{p\,min} = -\dfrac{P_2 \operatorname{cotg} \alpha_2}{2\,n \sin \dfrac{\pi}{n}} \text{ und } R_2^{p\,max} = \dfrac{P_1 (\operatorname{cotg} \alpha_1 - \operatorname{cotg} \alpha_2)}{2\,n \sin \dfrac{\pi}{n}}; \\
\text{für } m=3\colon\; R_3^{p\,min} = -\dfrac{P_3 \operatorname{cotg} \alpha_3}{2\,n \sin \dfrac{\pi}{n}} \text{ und } R_3^{p\,max} = \dfrac{(P_1+P_2)(\operatorname{cotg} \alpha_2 - \operatorname{cotg} \alpha_3)}{2\,n \sin \dfrac{\pi}{n}},
\end{array}\right\} \quad 342.$$

etc.

$$\text{für den Mauerring: } R_\rho^{p\,min} = 0 \text{ und } R_\rho^{p\,max} = \frac{(P_1+P_2+\ldots+P_{\rho-1}) \operatorname{cotg} \alpha_{\rho-1}}{2\,n \sin \dfrac{\pi}{n}}. \quad 343.$$

𝔇) Spannungen in den Diagonalen. Neben dem Durchmesser, welcher für die ungünstigste Diagonalenbelastung die belastete und unbelastete Kuppelhälfte trennt, liegt ein belasteter und ein unbelasteter Sparren. Nehmen wir nun an, dass die Spannung im ersteren so gross ist, als wenn die ganze Kuppel voll belastet wäre, im zweiten so gross, als wenn die ganze Kuppel nur durch das Eigengewicht belastet wäre, und machen wir die im Knotenpunkte anschliessende Diagonale stark genug, um den ganzen Spannungsunterschied zu übertragen, so wird dieselbe jedenfalls zu stark, ist also als ausreichend zu betrachten.

Im obersten Sparrenstück sind die grössten und kleinsten Druckspannungen bezw.

$$S_{1max} = -\frac{P_1 + G_1}{n \sin \alpha_1} \quad \text{und} \quad S_{1min} = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}.$$

Die Differenz beider Spannungen ist $\Delta_1 = -\dfrac{P_1}{n \sin \alpha_1}$. Dieselbe soll durch die Diagonale übertragen werden. Bezeichnet man die wirkliche Länge der Diagonale und des Sparrens bezw. mit d und s, so ist allgemein

$$Y = -\Delta \frac{d}{s};$$

mithin

$$\left.\begin{array}{ll}
Y_1 = \dfrac{P_1}{n \sin \alpha_1} \cdot \dfrac{d_1}{s_1}, & Y_2 = \dfrac{P_1+P_2}{n \sin \alpha_2} \cdot \dfrac{d_2}{s_2}, \\
Y_3 = \dfrac{P_1+P_2+P_3}{n \sin \alpha_3} \cdot \dfrac{d_3}{s_3}, & Y_4 = \dfrac{P_1+P_2+P_3+P_4}{n \sin \alpha_4} \cdot \dfrac{d_4}{s_4},
\end{array}\right\} \quad 344.$$

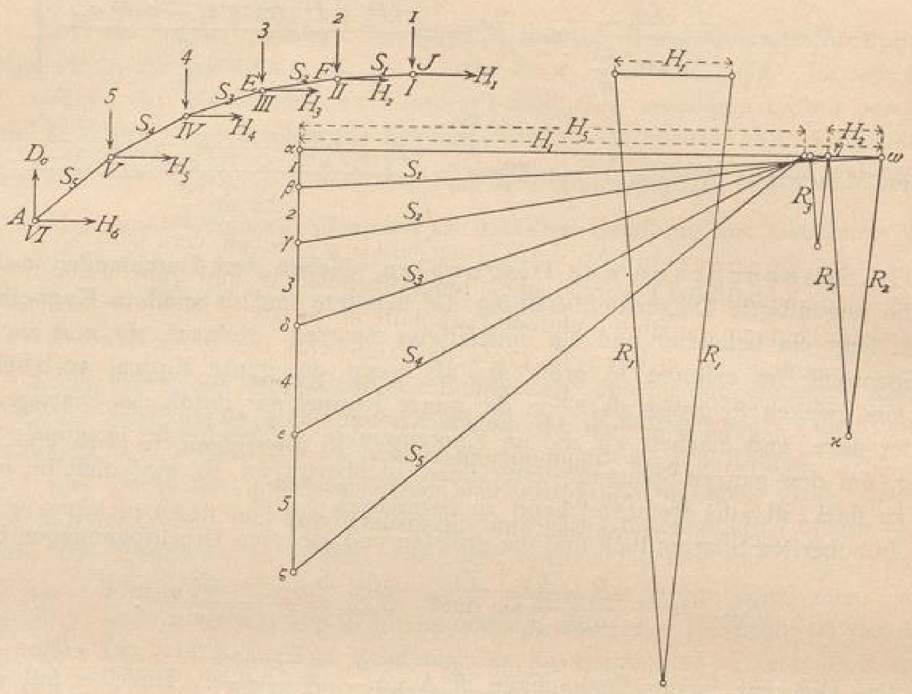
Auf graphischem Wege lassen sich die Spannungen in den einzelnen Stäben einer Kuppel in folgender Weise ermitteln. 244. Graphische Ermittelung der Stabspannungen.

a) Sparrenspannungen durch das Eigengewicht. Die Lasten in den einzelnen Knotenpunkten seien *1, 2, 3, 4, 5* (Fig. 333); man trage dieselben zu einem Kraftpolygon $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ an einander. Im Knotenpunkte *J* wirken *1*, die Sparrenspannung S_1 und die Mittelkraft H_1 der Ringspannungen R_1. Die Zerlegung der Kraft *1* nach den beiden Richtungen von S_1 und H_1 ergiebt $\beta\omega = S_1$, $\omega\alpha = H_1$. Am Knotenpunkt *F* wirken nun *2*, S_1, S_2 und H_2; bekannt sind jetzt *2* und S_1; man erhält $\gamma\eta = S_2$, $\eta\omega = H_2$. Eben so ergeben sich die übrigen Sparrenspannungen.

b) Spannungen in den Sparren durch zufällige Belastung. Die Construction ist in gleicher Weise, wie unter a vorzunehmen, nachdem die in den einzelnen Knotenpunkten wirkenden zufälligen Lasten genau wie oben aufgetragen und behandelt sind.

c) Ringſpannungen durch das Eigengewicht. Die Zerlegung der für dieſe Belaſtung gefundenen Werthe von H ergiebt ohne Schwierigkeit die Werthe für R_1^g, R_2^g ...., wie in Fig. 333 gezeichnet. Die Conſtruction empfiehlt ſich für die vorliegende Ermittelung nicht ſehr, weil ſie der ſpitzen Schnittwinkel wegen nur ungenaue Reſultate giebt, die Schnittpunkte vielfach nicht mehr auf die Zeichenfläche fallen. So iſt H_1 in Fig. 333 im fünffach verkleinerten Maſsſtabe aufgetragen, um R_1 zu conſtruiren.

Fig. 333.



b) Ringſpannungen durch zufällige Belaſtung. Maximalſpannung im Ringe II findet ſtatt, wenn nur die Ringzone I belaſtet iſt. Es ſei (Fig. 334 a) $ab = \frac{P_1}{n}$; alsdann wird $bf = S_1$, $= H_1$.

Im Knotenpunkt F (Fig. 335) ſind S_1, S_2 und H_2 im Gleichgewicht, d. h. das Kräftedreieck für Punkt F wird bgf. Darin iſt $H_2 = gf$ und $gi = if = R_2^p{}_{max}$.

Im Ringe III iſt Maximalſpannung, wenn die Zonen zu den Ringen I und II belaſtet ſind; alsdann wirken in F die Kräfte $S_1 = fb$, $2 = bc = \frac{P_2}{n}$, S_2' und H_2'. Man erhält leicht $H_2' = hf$, $S_2' = ch$. In E ſind dann S_2', S_3 und H_3 im Gleichgewicht und $H_3 = kh$, woraus $R_3^p{}_{max} = kl = lh$. Eben ſo wird $R_4^p{}_{max} = on = mo$ etc.

Minimalſpannung im Ringe I findet bei voller Kuppelbelaſtung ſtatt; alsdann wirkt in J die Kraft $1 = \frac{P_1}{n}$, und es wird, wenn (Fig. 334 b) $ab = 1$ iſt, $ia = H_1$. Die Zerlegung in die beiden Ringſpannungen iſt dann in gleicher Weiſe wie oben vorzunehmen. Für Ring II findet Minimalſpannung bei einer Belaſtung der Zonen II, III, IV ſtatt; I iſt unbelaſtet; mithin iſt S_1 alsdann gleich Null (ſiehe Gleichung 334). Iſt $bc = \frac{P_2}{n} = 2$, ſo wird $hb = H_2$. Eben ſo wird weiter für die Minimalbelaſtungen der einzelnen Ringe $H_3 = kc$, $H_4 = md$, $H_5 = ne$.

e) Die Conſtruction der Spannungen in den Diagonalen iſt ſo einfach, daſs dieſelbe nicht weiter gezeigt zu werden braucht.

Fig. 334.

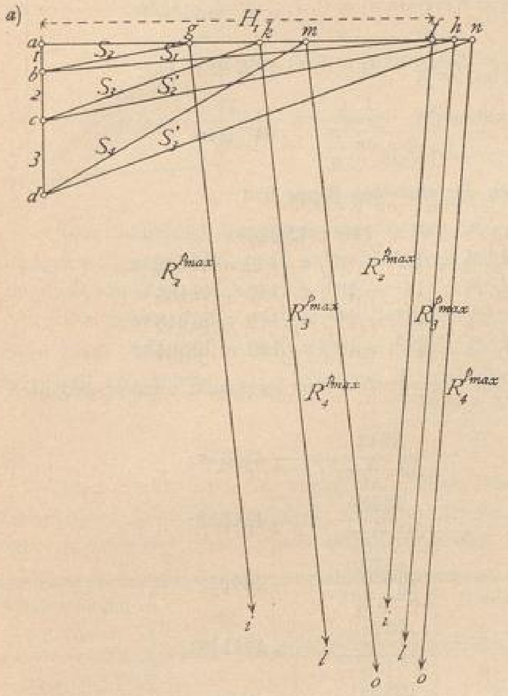
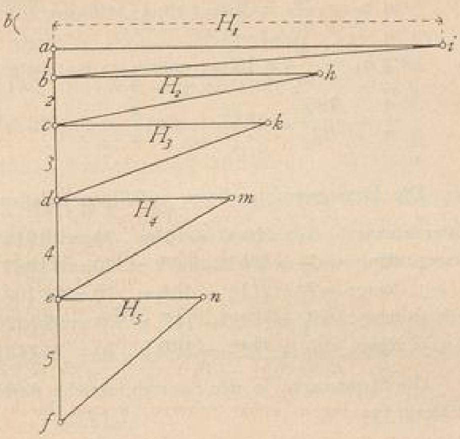
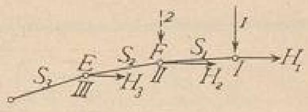
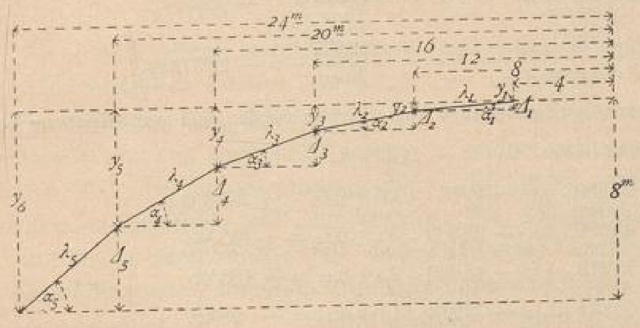



Fig. 335.



Beifpiel. Ein Kuppeldach von nachfolgenden Hauptmafsen und Belaftungen ift zu conftruiren: Durchmeffer des zu überdachenden kreisförmigen Raumes gleich 47 m, demnach der Durchmeffer des dem Mauerring umfchriebenen Parallelkreifes $2\,L = 48^{\mathrm{m}}$; Scheitelhöhe der Kuppel $h = 8^{\mathrm{m}}$; es find 6 Ringe mit den Halbmeffern 4, 8, 12, 16, 20 und 24 m und $n = 32$ Sparren anzuordnen. Das Eigengewicht ift zu 70 kg für 1 qm Grundfläche anzunehmen; als mittlere Dachneigung ift $\frac{h}{2\,L} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$ einzuführen, und es ergiebt fich hieraus nach Art. 28 (S. 21 ff.) als Belaftung durch Schnee für 1 qm Grundfläche 75 kg, als Belaftung durch Winddruck (fiehe Art. 30, S. 23) für 1 qm Grundfläche $\mathfrak{v} = 64$ kg, fo dafs die gefammte zufällige Belaftung für 1 qm Grundfläche abgerundet 140 kg beträgt; die Laterne wiegt 2000 kg. 245. Beifpiel.

Fig. 336.



Die Kuppelfläche fei durch Umdrehung einer cubifchen Parabel der Gleichung

$$y = \frac{h\,x^3}{r^3} = \frac{8}{24^3}\,x^3 = 0{,}00058\,x^3$$

entftanden. Man erhält für die verfchiedenen, durch die Ringe vorgefchriebenen Eckpunkte des Vieleckes (Fig. 336):

$x =$	4	8	12	16	20	24 m
$y =$	0,04	0,30	1,00	2,38	4,64	8,0
$h - y = z =$	7,96	7,70	7,00	5,62	3,36	0

Ferner ift

$$\Delta_1 = y_2 - y_1 = 0{,}26^{\mathrm{m}};\ \Delta_2 = y_3 - y_2 = 0{,}7^{\mathrm{m}};\ \Delta_3 = y_4 - y_3 = 1{,}38^{\mathrm{m}};\ \Delta_4 = y_5 - y_4 = 2{,}26^{\mathrm{m}};$$

$$\Delta_5 = y_6 - y_5 = 3{,}36^{\mathrm{m}}.$$

$\lambda_1 = \sqrt{4^2 + \Delta_1^2} = 4{,}01$ m; $\lambda_2 = 4{,}06$ m; $\lambda_3 = 4{,}23$ m; $\lambda_4 = 4{,}59$ m; $\lambda_5 = 5{,}22$ m.

$\sin\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\lambda_1} = 0{,}0648$; $\sin\alpha_2 = 0{,}1724$; $\sin\alpha_3 = 0{,}32$; $\sin\alpha_4 = 0{,}492$; $\sin\alpha_5 = 0{,}644$.

$\operatorname{cotg}\alpha_1 = \frac{4}{\Delta_1} = 15{,}38$; $\operatorname{cotg}\alpha_2 = 5{,}7$; $\operatorname{cotg}\alpha_3 = 2{,}9$; $\operatorname{cotg}\alpha_4 = 1{,}77$; $\operatorname{cotg}\alpha_5 = 1{,}19$.

$\frac{\pi}{n} = \frac{180}{32} = 5^\circ 37{,}5'$; $\sin\frac{\pi}{n} = \sin 5^\circ 37{,}5' = 0{,}098$; $\frac{1}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{64\,.\,0{,}098} = 0{,}16$.

Die Eigengewichte, bezw. zufälligen Belaftungen der einzelnen Ringe find:

Laternenring: $G_1 = 2000 + 6^2\pi\,.\,70 = 9913$ kg, $P_1 = 6^2\pi\,.\,140 = 15826$ kg;
2. Ring: $G_2 = (10^2 - 6^2)\,\pi\,.\,70 = 14067$ kg, $P_2 = (10^2 - 6^2)\,\pi\,.\,140 = 28122$ kg;
3. Ring: $G_3 = (14^2 - 10^2)\,\pi\,.\,70 = 21100$ kg, $P_3 = (14^2 - 10^2)\,\pi\,.\,140 = 42186$ kg;
4. Ring: $G_4 = (18^2 - 14^2)\,\pi\,.\,70 = 28133$ kg, $P_4 = (18^2 - 14^2)\,\pi\,.\,140 = 56243$ kg;
5. Ring: $G_5 = (22^2 - 18^2)\,\pi\,.\,70 = 35168$ kg, $P_5 = (22^2 - 18^2)\,\pi\,.\,140 = 70304$ kg.

Die Spannungen in den Sparren, welche durch das Eigengewicht hervorgebracht werden, find nach Gleichung 335:

$$S_1^g = -\frac{G_1}{n\sin\alpha_1} = -\frac{9913}{32\,.\,0{,}065} = -4766 \text{ kg};$$

$$S_2^g = -\frac{G_1 + G_2}{n\sin\alpha_2} = -\frac{23980}{32\,.\,0{,}1724} = -4346 \text{ kg};$$

$$S_3^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3}{n\sin\alpha_3} = -\frac{45080}{32\,.\,0{,}32} = -4402 \text{ kg};$$

$$S_4^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}{n\sin\alpha_4} = -\frac{73213}{32\,.\,0{,}492} = -4651 \text{ kg};$$

$$S_5^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5}{n\sin\alpha_5} = -\frac{108381}{32\,.\,0{,}644} = -5258 \text{ kg}.$$

Die durch zufällige Belaftung erzeugten Sparrenfpannungen betragen:

$$S_1^p = -\frac{P_1}{n\sin\alpha_1} = -\frac{15826}{2{,}08} = -7608 \text{ kg};$$

$$S_2^p = -\frac{P_1 + P_2}{n\sin\alpha_2} = -\frac{43948}{5{,}517} = -7966 \text{ kg};$$

$$S_3^p = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n\sin\alpha_3} = -\frac{86130}{10{,}24} = -8400 \text{ kg};$$

$$S_4^p = -\frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n\sin\alpha_4} = -\frac{142373}{15{,}74} = -9045 \text{ kg};$$

$$S_5^p = -\frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5}{n\sin\alpha_5} = -\frac{212677}{20{,}61} = -10319 \text{ kg}.$$

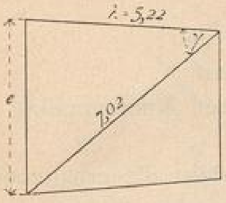
Die Ringfpannungen, welche durch das Eigengewicht hervorgerufen werden, find nach Gleichung 338:

Laternenring: $R_1^g = -9913\,.\,15{,}38\,.\,0{,}16 = -24396$ kg;
2. Ring: $R_2^g = -(23980\,.\,5{,}7 - 9913\,.\,15{,}38)\,0{,}16 = +2524$ kg;
3. Ring: $R_3^g = -(45080\,.\,2{,}9 - 23980\,.\,5{,}7)\,0{,}16 = +953$ kg;
4. Ring: $R_4^g = -(73213\,.\,1{,}77 - 45080\,.\,2{,}9)\,0{,}16 = +183$ kg;
5. Ring: $R_5^g = -(108381\,.\,1{,}19 - 73213\,.\,1{,}77)\,0{,}16 = +98$ kg;
Mauerring: $R_6^g = 108381\,.\,1{,}19\,.\,0{,}16 = 20636$ kg.

Die Maximal- und Minimalfpannungen in den Ringen, durch zufällige Belaftung erzeugt, betragen nach Gleichung 342:

Laternenring: $R_1^p{}_{min} = -15826\,.\,15{,}38\,.\,0{,}16 = -38932$ kg und $R_1^p{}_{max} = 0$;
2. Ring: $R_2^p{}_{min} = -28122\,.\,5{,}7\,.\,0{,}16 = -25647$ kg,
$R_2^p{}_{max} = 15826\,(15{,}38 - 5{,}7)\,.\,0{,}16 = +24514$ kg;

Fig. 337.



3. Ring: $R_2^p min = -42182 \cdot 2{,}_9 \cdot 0{,}_{16} = -19572$ kg,

$R_3^p max = 43948 \cdot 2{,}_8 \cdot 0{,}_{16} = +19689$ kg;

4. Ring: $R_4^p min = -56243 \cdot 1{,}_{77} \cdot 0{,}_{16} = -15926$ kg,

$R_4^p max = 86130 \cdot 1{,}_{13} \cdot 0{,}_{16} = +15589$ kg;

5. Ring: $R_5^p min = -70304 \cdot 1{,}_{19} \cdot 0{,}_{16} = -13386$ kg,

$R_5^p max = 142373 \cdot 0{,}_{58} \cdot 0{,}_{16} = +13212$ kg;

Mauerring: $R_6^p min = 0$ und $R_6^p max = 212677 \cdot 1{,}_{19} \cdot 0{,}_{16} = +40494$ kg.

Was fchliefslich die Spannungen in den Diagonalen betrifft, fo braucht nur die am ftärkften beanfpruchte Diagonale berechnet zu werden, weil felbft diefe noch fehr fchwach wird. Gewöhnlich macht man dann alle Diagonalen gleich ftark.

Die gröfste durch zufällige Belaftung erzeugte Sparrenfpannung ift durch die Diagonale zu übertragen (fiehe Art. 243, S. 251); diefelbe ift $S_5^p = -10319$ kg, und eine Diagonale hat demnach höchftens diefe Kraft aufzunehmen. Die Spannung in den Diagonalen wird daher

$$Y_5 = \frac{10319 \cdot 7{,}_{02}}{5{,}_{22}} = 13877 \text{ kg}$$

fein.

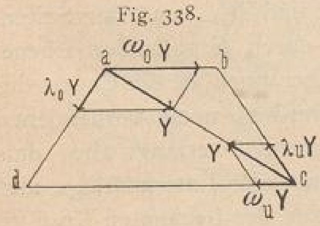
Man könnte noch für einige der oberen Diagonalen die Spannungen auffuchen, was nach dem Vorftehenden keine Schwierigkeit macht. Für die Querfchnittsbeftimmungen kann nun, wie bei den früheren Beifpielen, eine Tabelle aufgeftellt werden.

Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	P_2
Sparren:			Ringe:			
S_1	−4766	−7608	R_1	−24396	−38932	0
S_2	−4346	−7966	R_2	+2524	+24514	−25647
S_3	−4402	−8400	R_3	+953	+19689	−19572
S_4	−4651	−9045	R_4	+183	+15589	−15926
S_5	−5258	−10319	R_5	+98	+13212	−13386
			R_6	+20636	+40494	0
Diagonalen:						
Y	0	13877				
	Kilogramm			Kilogramm		

2) Verfahren von *Müller-Breslau*.

In jedem durch zwei Sparren- und zwei Ringftäbe gebildeten Trapez des Kuppelflechtwerkes fei nur eine Diagonale vorhanden, welche fowohl Zug wie Druck aufnehmen kann. Handelt es fich um eine Conftruction mit gekreuzten Diagonalen, deren jede nur Zug aufnehmen kann, fo nimmt man genau, wie in Art. 186 (S. 187) bei den Trägern mit Gegendiagonalen gezeigt ift, zunächft nur eine, die bei der betreffenden Belaftung auf Zug beanfpruchte, Diagonale als vorhanden an. Ergiebt fich durch die Berechnung, dafs diefe Diagonale Druck erhält, fo tritt an ihre Stelle die Gegendiagonale, und das Ergebnifs kann durch eine Verbefferungsrechnung leicht richtig geftellt werden. 246. Vorbemerkungen.

Fig. 338.



Die in der Diagonale ac auftretende Spannung Y (Fig. 338) wird in der Ebene des betreffenden Feldes in jedem der beiden Knotenpunkte in zwei Seitenkräfte zerlegt, welche bezw. in die Richtung des anfchliefsenden Ringftabes und diejenige des anfchliefsenden Sparrenftabes fallen. Diefe Seitenkräfte ftehen in ganz beftimmtem, durch die Form des Trapezes vorgefchriebenem Verhältnifs zu Y. Im oberen Knotenpunkte a zerlegt fich Y in die Seitenkräfte:

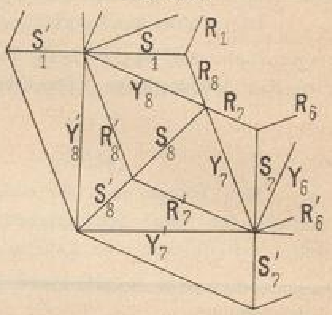
$\omega_0 Y$, welche in die Richtung des Ringftabes ab, und

$\lambda_0 Y$, welche in die Richtung des Sparrenftabes ad

fällt. Eben fo bezeichnen wir die Seitenkräfte von Y am unteren Knotenpunkte c mit $\omega_u Y$, bezw. $\lambda_u Y$.

Verfährt man in diefer Weife mit jeder Diagonale und addirt die erhaltenen Seitenkräfte zu den in den Ring-, bezw. Sparrenftäben wirkenden Spannungen $R_1, R_2 \ldots, S_1, S_2 \ldots$, fo hat man bei den Unterfuchungen, zunächft wenigftens, nur mit Kräften in den Ring- und Sparrenftäben zu thun; die Diagonalen find vorläufig ausgefchaltet. Die Summenfpannungen in den Sparrenftäben follen mit $\mathfrak{S}$, diejenigen in den Ringftäben mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden, wobei die Zeiger die gleichen find, wie bei den mit lateinifchen Buchftaben bezeichneten Spannungen. Demnach ift (Fig. 339)

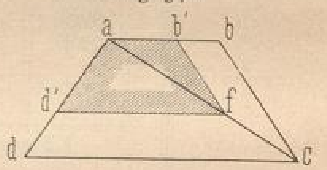
Fig. 339.



$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_8 &= S_8 + \lambda_0 Y_8 + \lambda_0 Y_7 \\ \mathfrak{S}_8' &= S_8' + \lambda_u' Y_8' + \lambda_u' Y_7' \\ \mathfrak{R}_8 &= R_8 + \omega_0 Y_8 \\ \mathfrak{R}_8' &= R_8' + \omega_u Y_8 + \omega_0' Y_8' \end{aligned}\right| \quad \ldots \quad 345.$$

Die Werthe von ω und λ kann man leicht durch Rechnung oder Zeichnung finden; graphifch, indem man das Trapezfeld in wahrer Gröfse aufzeichnet, auf der Diagonale eine beliebige Länge für Y abträgt (etwa $\overline{af}$ in Fig. 340) und das dem Felde ähnliche Trapez $ad'fb'$ mit $\overline{af}$ als Diagonale conftruirt; alsdann find feine Seiten:

Fig. 340.



$$ab' = \omega_u Y, \quad fd' = \omega_0 Y, \quad d'a = \lambda_0 Y$$

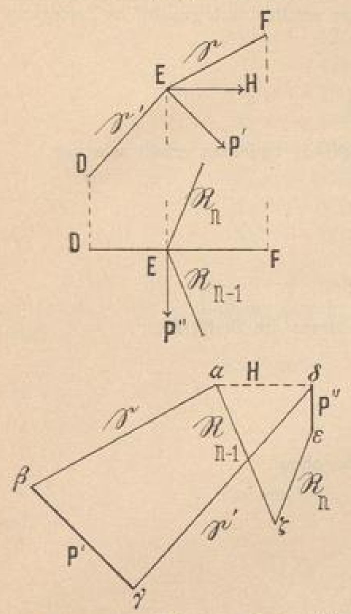
und $$b'f = \lambda_u Y,$$

ω und λ haben in den Feldern der verfchiedenen Zonen und allgemein auch in den Feldern derfelben Zone verfchiedene Werthe; diefem Umftande ift in Gleichung 345 durch die Zeiger Rechnung getragen.

247. Ermittelung der Stabfpannungen.

Im Knotenpunkte E (Fig. 341) wirke eine äufsere Kraft P in beliebiger Richtung. Man zerlegt P in eine Seitenkraft, welche in die lothrechte Ebene des betrachteten Sparrenzuges $DEF \ldots$ fällt, die Kraft P' und in eine zu diefer Ebene fenkrechte Seitenkraft P'' (in Fig. 341 im Grundrifs angegeben). Fig. 341 zeigt den Sparrenzug DEF im Grundrifs und Aufrifs. Die Aufrifsebene ift durch DEF gelegt. Auch weiterhin, insbefondere bei der Berechnung des Beifpieles in Art. 248, foll jeder Sparrenzug vor der graphifchen Zerlegung der Kräfte in die Zeichenebene gedreht werden, wodurch fich die Arbeit wefentlich vereinfacht. Im Punkte E halten einander nunmehr die Kräfte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, P' und H im Gleichgewicht; H ift die Mittelkraft der im Punkte E wirkenden Ringftabfpannungen $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_{n-1}$ und der Seitenkraft P''; diefe drei Kräfte wirken in einer wagrechten, durch E gehenden Ebene, alfo auch ihre Mittelkraft H. Diefe Mittelkraft H mufs aber auch in die Ebene des Sparrenzuges DEF fallen; denn die fämmtlichen aufserdem noch vorhandenen Kräfte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ und P' fallen in diefe Ebene; das Gleichgewicht verlangt alfo, dafs auch die letzte Kraft H in diefe Ebene falle. Geht man nun vom Laternenringe aus, fo ift für den oberften Punkt $\mathfrak{S}$ gleich Null; mithin find aus der bekannten Kraft P'

Fig. 341.

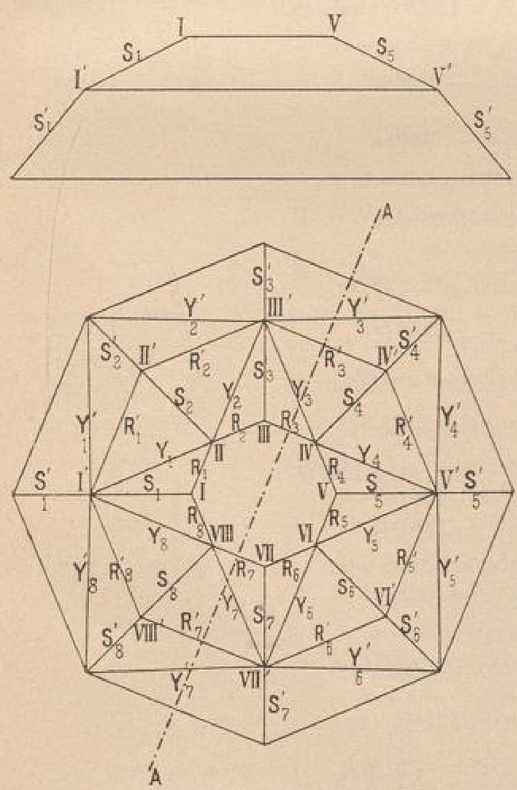


leicht durch Zerlegung H und $\mathfrak{S}'$ zu finden. Im Grundrifs kennt man jetzt H und P''; daher können auch hier die beiden fehlenden Kräfte ($\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_{n-1}$) durch Conftruction eines Kraftpolygons gefunden werden. Bei den weiter unten folgenden Knotenpunkten ift aber $\mathfrak{S}$ nach Vorftehendem bereits ermittelt, und man hat wiederum für jedes Kraftpolygon nur zwei Unbekannte.

In Fig. 341 ift $\overline{\alpha\beta} = \mathfrak{S}$ und $\overline{\beta\gamma} = P'$ durch vorherige Conftruction gefunden, bezw. gegeben; die zu $\mathfrak{S}'$ und H gezogenen Parallelen vervollftändigen das Kraftpolygon. Es ift $\gamma\delta = \mathfrak{S}'$ und $\delta\alpha = H$. An H ift nunmehr in δ die Kraft $P'' = \overline{\delta\varepsilon}$ gelegt und da die Mittelkraft von H und P'' gleich derjenigen von $\mathfrak{R}_{n-1}$ und $\mathfrak{R}_n$ ift, fo geben die durch α und ε gezogenen Parallelen zu $\mathfrak{R}_{n-1}$ und $\mathfrak{R}_n$ die Kräfte $\mathfrak{R}_n = \overline{\varepsilon\zeta}$ und $\mathfrak{R}_{n-1} = \overline{\zeta\alpha}$. Das Kraftpolygon $\overline{\alpha\zeta\varepsilon\delta\alpha}$ gehört zum Grundrifs; man kann aber beide Kraftpolygone, wie in Fig. 341 gefchehen ift, vereinen, wobei man das eine um die Linie $\alpha\delta$ in die Ebene des anderen gedreht denkt.

Aus den Werthen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}$, λ und ω können nun die Werthe S, R und Y ermittelt werden, indem man zunächft für die Knotenpunkte ohne Diagonalen die Werthe für S und R auffucht und fo eine Reihe von bekannten Gröfsen erhält, durch deren Einführung in die Gleichungen 345 alle Unbekannten beftimmbar werden.

Fig. 342.



Das vorgeführte Verfahren foll an einem Beifpiele gezeigt werden.

Beifpiel. Die in Fig. 342 im Grundrifs und Aufrifs dargeftellte Kuppel über achteckiger Grundfläche, bei welcher der Durchmeffer des umfchriebenen Kreifes 20^{m} beträgt, fei links der lothrechten Schnittebene AA nur mit dem Eigengewicht, rechts von der Ebene AA voll belaftet. Die Knotenpunktslaften betragen 248. Beifpiel.

	durch Eigengewicht allein	insgefammt
im Laternenring:	$G_1 = 500^{kg}$,	$G_1 + P_1 = 1500^{kg}$;
im mittleren Ring:	$G_2 = 800^{kg}$,	$G_2 + P_2 = 2500^{kg}$.

Die Laften werden als lothrecht angenommen; die diefer Belaftung entfprechenden Stabfpannungen find zu ermitteln.

Zunächft find nach Fig. 340 die Zahlenwerthe für ω_0, λ_u, ω_u, λ_u der oberen Felder und ω_0', λ_0', ω_u', λ_u' der unteren Felder ermittelt. Man erhält

$$\omega_0 = 0{,}94, \qquad \lambda_0 = 0{,}8,$$
$$\omega_u = 0{,}39, \qquad \lambda_u = 0{,}8,$$
$$\omega_0' = 0{,}96, \qquad \lambda_0' = 6{,}6,$$
$$\omega_u' = 0{,}67, \qquad \lambda_u' = 0{,}6.$$

Stäbe der oberen Felder. In den Knotenpunkten I, III, V, VII des Laternenringes treffen nur je drei Stäbe zufammen; die Zerlegung wird ganz, wie in Art. 247 gezeigt ift, vorgenommen. In jedem der Knotenpunkte *I* und *III* wirkt die Laft $G = 500^{kg}$, und man erhält durch graphifche Zerlegung

$$S_1 = S_3 = -1050^{kg}$$

und

$$R_1 = R_8 = R_2 = R_3 = -1230^{kg}.$$

In den Knotenpunkten *V* und *VII* wirkt die Belaftung $G_1 + P_1 = 1500^{kg}$, und man erhält wie vor

$$S_5 = S_7 = -3150^{kg}$$

und

$$R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = -3700^{kg}.$$

Nunmehr find die Knotenpunkte mit Diagonalen zu betrachten.

Knotenpunkt II. Es wirken: Knotenpunktlaft $G_1 = 500^{kg}$; ferner die Stabkräfte

$$\mathfrak{S}_2 = S_2 + \lambda_0 Y_1 + \lambda_0 Y_2,$$
$$\mathfrak{R}_1 = R_1 + \omega_0 Y_1,$$
$$\mathfrak{R}_2 = R_2 + \omega_0 Y_2.$$

Die graphifche Zerlegung von G_1 in $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ ergiebt wie oben

$$\mathfrak{S}_2 = -1050^{kg}$$

und

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = -1230^{kg}.$$

Hieraus folgt

$$\omega_0 Y_1 = \mathfrak{R}_1 - R_1 = 0, \qquad Y_1 = 0,$$
$$\omega_0 Y_2 = \mathfrak{R}_2 - R_2 = 0, \qquad Y_2 = 0.$$
$$S_2 = \mathfrak{S}_2 = -1050^{kg}.$$

Eben fo ergiebt fich durch Betrachtung des Knotenpunktes VI:

$$Y_6 = Y_5 = 0 \quad \text{und} \quad S_6 = -3150^{kg}.$$

Knotenpunkt IV. Knotenpunktslaft $G_1 + P_1 = 1500^{kg}$; demnach

$$\mathfrak{S}_4 = S_4 + \lambda_0 Y_4 + \lambda_0 Y_3 = -3150^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_3 = R_3 + \omega_0 Y_3 = -3700^{kg}$$

und

$$\mathfrak{R}_4 = R_4 + \omega_0 Y_4 = -3700^{kg}.$$

Oben war gefunden: $R_3 = -1230^{kg}$ und $R_4 = -3700^{kg}$; demnach ift

$$\omega_0 Y_4 = -3700 + 3700 = 0,$$
$$Y_4 = 0;$$
$$\omega_0 Y_3 = -3700 + 1230 = -2470^{kg},$$
$$Y_3 = -\frac{2470}{0{,}94} = -2627^{kg};$$
$$S_4 = -3150 + 0{,}8 \,.\, 2627 = -1050^{kg}.$$

Knotenpunkt VIII. Knotenpunktslaft $G_1 = 500^{kg}$; mithin

$$\mathfrak{S}_8 = S_8 + \lambda_0 Y_8 + \lambda_0 Y_7 = -1050^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_8 = R_8 + \omega_0 Y_8 = -1230^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_7 = R_7 + \omega_0 Y_7 = -1230^{kg}.$$

Oben ift gefunden: $R_8 = -1230^{kg}$ und $R_7 = -3700^{kg}$; daher wird

$$\omega_0 Y_8 = -1230 + 1230 = 0,$$
$$Y_8 = 0;$$
$$\omega_0 Y_7 = -1230 + 3700 = +2470^{kg},$$
$$Y_7 = \frac{2470}{0{,}94} = +2627^{kg};$$
$$S_8 = -1050 - 0{,}8 \,.\, 2627 = -3150^{kg}.$$

Demnach ift in den oberen Feldern

$$
\begin{array}{lll}
R_1 = -1230^{\text{kg}}, & S_1 = -1050^{\text{kg}}, & Y_1 = 0; \\
R_2 = -1230^{\text{kg}}, & S_2 = -1050^{\text{kg}}, & Y_2 = 0; \\
R_3 = -1230^{\text{kg}}, & S_3 = -1050^{\text{kg}}, & Y_3 = -2627^{\text{kg}}; \\
R_4 = -3700^{\text{kg}}, & S_4 = -1050^{\text{kg}}, & Y_4 = 0; \\
R_5 = -3700^{\text{kg}}, & S_5 = -3150^{\text{kg}}, & Y_5 = 0; \\
R_6 = -3700^{\text{kg}}, & S_6 = -3150^{\text{kg}}, & Y_6 = 0; \\
R_7 = -3700^{\text{kg}}, & S_7 = -3150^{\text{kg}}, & Y_7 = +2627^{\text{kg}}; \\
R_8 = -1230^{\text{kg}}, & S_8 = -3150^{\text{kg}}, & Y_8 = 0.
\end{array}
$$

Stäbe der unteren Felder. In den Knotenpunkten *II'*, *IV'*, *VI'*, *VIII'* fetzen keine Diagonalen an. Die graphifche Zerlegung erfolgt hier, genau wie in Art. 247 (S. 256) gezeigt ift. Man erhält

Knotenpunkt II': $S_2 = -1050^{\text{kg}}, \quad G_2 = 800^{\text{kg}}$

und

$$S_2' = -1700^{\text{kg}};$$
$$R_1' = -150^{\text{kg}} \quad \text{und} \quad R_2' = -150^{\text{kg}}.$$

Knotenpunkt VIII': $S_8 = -3150^{\text{kg}}, \quad G_2 = 800^{\text{kg}}$

und

$$S_8' = -2800^{\text{kg}};$$
$$R_7' = +1350^{\text{kg}} \quad \text{und} \quad R_8' = +1350^{\text{kg}}.$$

Knotenpunkt IV': $S_4 = -1050^{\text{kg}}, \quad G_2 + P_2 = 2500^{\text{kg}}$

und

$$S_4' = -3880^{\text{kg}};$$
$$R_3' = -1950^{\text{kg}} \quad \text{und} \quad R_4' = -1950^{\text{kg}}.$$

Knotenpunkt VI': $S_6 = -3150^{\text{kg}}, \quad G_2 + P_2 = 2500^{\text{kg}}$

und

$$S_6' = -5050^{\text{kg}};$$
$$R_5' = -550^{\text{kg}} \quad \text{und} \quad R_6' = -550^{\text{kg}}.$$

In den Knotenpunkten mit Diagonalen ergiebt fich das Folgende.

Knotenpunkt I': $S_1 = -1050^{\text{kg}}, \quad Y_1 = 0, \quad Y_8 = 0$

und

$$G_2 = 800^{\text{kg}};$$
$$\mathfrak{S}_1' = S'_1 + \lambda_0' Y_1' + \lambda_0' Y_8' = -1700^{\text{kg}},$$
$$\mathfrak{R}_1' = R_1' + \omega_0' Y_1' = -150^{\text{kg}},$$
$$\mathfrak{R}_8' = R_8' + \omega_0' R_2' = -150^{\text{kg}}.$$

Oben war gefunden: $R_1' = -150^{\text{kg}}$ und $R_8' = +1350^{\text{kg}}$; demnach ift

$$\omega_0' Y_1' = -150 + 150 = 0$$

und

$$Y_1' = 0;$$
$$\omega_0' Y_8' = -150 - 1350 = -1500^{\text{kg}},$$
$$Y_8' = -\frac{1500}{0{,}96} = -1560^{\text{kg}};$$
$$S_1' = -1700 + 0{,}6 \cdot 1560 = -760^{\text{kg}};$$

daher

$$Y_1' = 0 \quad \text{und} \quad Y_8' = -1560^{\text{kg}}.$$

Knotenpunkt V': $S_5 = -3150^{\text{kg}}, \quad G_2 + P_2 = 2500^{\text{kg}}$

und

$$Y_5 = Y_4 = 0;$$
$$\mathfrak{S}_5' = S_5' + \lambda_0' Y_4' + \lambda_0' Y_5' = -5050^{\text{kg}},$$
$$\mathfrak{R}_4' = R_4' + \omega_0' Y_4' = -550^{\text{kg}},$$
$$\mathfrak{R}_5' = R_5' + \omega_0' Y_5' = -550^{\text{kg}}.$$

Oben war gefunden: $R_5' = -550^{\mathrm{kg}}$; demnach $Y_5' = 0$;

$$R_4' = -1950^{\mathrm{kg}};$$

alſo

$$\omega_0' Y_4' = -550 + 1950 = +1400^{\mathrm{kg}},$$

$$Y_4' = \frac{1400}{0{,}96} = +1460^{\mathrm{kg}};$$

$$S_5' = -5050 - 0{,}6 \cdot 1460 = -5930^{\mathrm{kg}}.$$

Knotenpunkt III': $\mathfrak{S}_3 = -1050^{\mathrm{kg}} + \lambda_u Y_3 = -1050 - 0{,}8 \cdot 2627 = -3150^{\mathrm{kg}}$,

$$G_2 = 800^{\mathrm{kg}},$$

ſomit

$$Y_2 = 0 \text{ und } Y_3 = -2627^{\mathrm{kg}};$$

$$\mathfrak{S}_3' = S_3' + \lambda_0' Y_2' + \lambda_0' Y_3' = -2800^{\mathrm{kg}},$$

$$\mathfrak{R}_2' = R_2' + \omega_u Y_2 + \omega_0' Y_2' = +1350^{\mathrm{kg}},$$

$$\mathfrak{R}_3' = R_3' + \omega_u Y_3 + \omega_0' Y_3' = +1350^{\mathrm{kg}}.$$

Es iſt

$$\omega_u Y_2 = 0$$

und

$$\omega_u Y_3 = -0{,}39 \cdot 2627 = -1025^{\mathrm{kg}}.$$

Oben war gefunden: $R_2' = -150^{\mathrm{kg}}$ und $R_3' = -1950^{\mathrm{kg}}$; daher iſt

$$\omega_0' Y_2' = 1350 + 150 = +1500^{\mathrm{kg}}$$

und

$$Y_2' = \frac{1500}{0{,}96} = +1560^{\mathrm{kg}};$$

$$\omega_0' Y_3' = +1350 + 1950 + 1025 = +4325^{\mathrm{kg}},$$

$$Y_3' = \frac{4325}{0{,}96} = +4510^{\mathrm{kg}};$$

$$S_3' + 0{,}6 \cdot 1560 + 0{,}6 \cdot 4510 = -2800^{\mathrm{kg}},$$

$$S_3' = -6410^{\mathrm{kg}}.$$

Knotenpunkt VII': $Y_6 = 0$, $Y_7 = 2627^{\mathrm{kg}}$

und

$$G_2 + P_2 = 2500^{\mathrm{kg}};$$

demnach

$$\mathfrak{S}_7 = S_7 + \lambda_u Y_6 + \lambda_u Y_7 = -3150 + 0{,}8 \cdot 2627 = -1050^{\mathrm{kg}},$$

$$\mathfrak{S}_7' = S_7' + \lambda_0' Y_7' + \lambda_0' Y_6' = -3880^{\mathrm{kg}},$$

$$\mathfrak{R}_6' = R_6' + \omega_u Y_6 + \omega_0' Y_6' = -1950^{\mathrm{kg}},$$

$$\mathfrak{R}_7' = R_7' + \omega_u Y_7 + \omega_0' Y_7' = -1950^{\mathrm{kg}}.$$

Oben iſt gefunden: $R_6' = -550^{\mathrm{kg}}$, $R_7' = +1350^{\mathrm{kg}}$ und $Y_7 = 2627^{\mathrm{kg}}$; alſo

$$Y_7 = 0{,}39 \cdot 2627 = 1025^{\mathrm{kg}};$$

ſomit wird

$$\omega_0' Y_6' = -1950 + 550 = -1400^{\mathrm{kg}}$$

und

$$Y_6' = -\frac{1400}{0{,}96} = -1460^{\mathrm{kg}};$$

$$1350 + 1025 + \omega_0' Y_7' = -1950^{\mathrm{kg}},$$

$$\omega_0 Y_7' = -1950 - 2375 = -4325^{\mathrm{kg}},$$

$$Y_7' = -\frac{4325}{0{,}96} = -4510^{\mathrm{kg}};$$

$$S_7' = -3880 + 0{,}6\,(4510 + 1460) = -300^{\mathrm{kg}}.$$

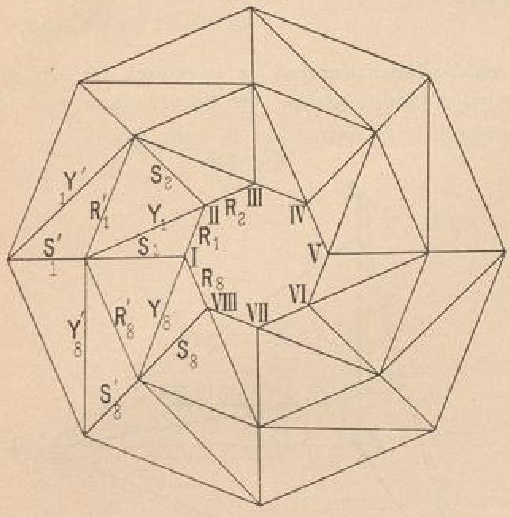
Die Spannungen in den unteren Feldern ſind daher:

$R_1' = -150^{\mathrm{kg}}$,	$S_1' = -760^{\mathrm{kg}}$,	$Y_1' = 0$,
$R_2' = -150^{\mathrm{kg}}$,	$S_2' = -1700^{\mathrm{kg}}$,	$Y_2' = +1560^{\mathrm{kg}}$,
$R_3' = -1950^{\mathrm{kg}}$,	$S_3' = -6410^{\mathrm{kg}}$,	$Y_3' = +4510^{\mathrm{kg}}$,
$R_4' = -1950^{\mathrm{kg}}$,	$S_4' = -3880^{\mathrm{kg}}$,	$Y_4' = +1460^{\mathrm{kg}}$,
$R_5' = -550^{\mathrm{kg}}$,	$S_5' = -5930^{\mathrm{kg}}$,	$Y_5' = 0$,
$R_6' = -550^{\mathrm{kg}}$,	$S_6' = -5050^{\mathrm{kg}}$,	$Y_6' = -1460^{\mathrm{kg}}$,
$R_7' = +1350^{\mathrm{kg}}$,	$S_7' = -300^{\mathrm{kg}}$,	$Y_7' = -4510^{\mathrm{kg}}$,
$R_8' = +1350^{\mathrm{kg}}$,	$S_8' = -2800^{\mathrm{kg}}$,	$Y_8' = -1560^{\mathrm{kg}}$.

Die Spannungen im Fufsring können auf den gefundenen Werthen leicht ermittelt werden. Es wird empfohlen, von den 8 Auflagern eines um das andere als feftes Auflager zu conftruiren.

Wenn kein Knotenpunkt ohne Diagonalen vorhanden ift, wenn z. B. die Anordnung nach Fig. 343 vorliegt, fo ift die Ermittelung der Diagonalen-Spannungen auf gleichem Wege leicht durchführbar. Man zerlege die Knotenlaft im Knotenpunkte I in die Stabkräfte 249. Andere Anordnung der Diagonalen.

Fig. 343.



$$\mathfrak{R}_8 = R_8 + \omega_0 Y_8,$$
$$\mathfrak{S}_1 = S_1 + \lambda_0 Y_8 \quad \text{und} \quad R_1;$$

ferner die im Knotenpunkte II wirkende Belaftung in die Stabkräfte

$$\mathfrak{R}_1 = R_1 + \omega_0 Y_1,$$
$$\mathfrak{S}_2 = S_2 + \lambda_0 Y_1 \quad \text{und} \quad R_2.$$

Man kennt alfo $\mathfrak{R}_1$ aus der Zerlegung am Knotenpunkt II, R_1 aus der Zerlegung am Knotenpunkte I; mithin kann man Y_1 aus der Gleichung

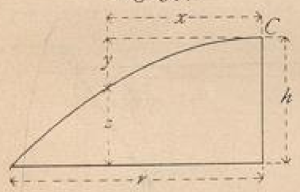
$$\omega_0 Y_1 = \mathfrak{R}_1 - R_1$$

finden. In gleicher Weife ergeben fich alle Diagonalfpannungen.

3) Erzeugende Kuppelcurve.

Die erzeugende Curve ift in den meiften Fällen eine Parabel (Fig. 344) der Gleichung $y = \frac{h x^2}{r^2}$, bei welcher der Anfangspunkt der Coordinaten im Scheitel C liegt, die halbe Spannweite gleich r, die Pfeilhöhe gleich h gefetzt ift, oder eine cubifche Parabel der Gleichung $y = \frac{h x^3}{r^3}$. Letztere Curvenform hat den Vortheil, dafs in den Zwifchenringen bei gleichmäfsig vertheilter Belaftung die Spannung Null herrfcht und dafs die Spannungen in den Sparren nahezu conftant find, was fich folgendermafsen ergiebt. 250. Parabel-Kuppel.

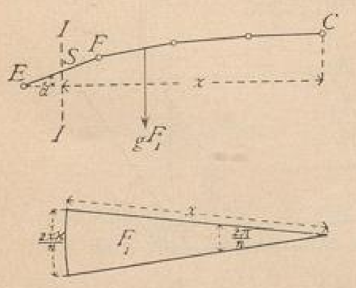
Fig. 344.



Die Spannung im Sparrenftab EF (Fig. 345) ift durch Betrachtung des Theiles zwifchen dem Scheitel C und dem durch die Sparrenmitte gelegten Schnitte II zu ermitteln. Die algebraifche Summe der auf diefes Stück wirkenden lothrechten Kräfte ift gleich Null, daher, wenn die belaftende Grundfläche mit F_1 und die Belaftung für 1 qm der Grundfläche mit g bezeichnet wird, $S \sin \alpha = g F_1$. Nun ift

$$F_1 = \frac{x^2 \pi}{n}, \quad \text{mithin} \quad S \sin \alpha = \frac{g x^2 \pi}{n} = S \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

Fig. 345.



Wird ftatt des Vieleckes die ftetig gekrümmte Curve der Berechnung zu Grunde gelegt, fo ift

$$y = \frac{h x^3}{r^3} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{3 h x^2}{r^3};$$

mithin

$$S \cos \alpha \, \frac{3 h x^2}{r^3} = \frac{g x^2 \pi}{n}, \quad \text{woraus} \quad S \cos \alpha = \frac{g \pi r^3}{3 n h}, \qquad 346.$$

d. h. $S \cos \alpha$ ift conftant. Da aber wegen der flachen Neigung der Kuppel der Winkel α fehr klein ift, fo ändert fich auch $\cos \alpha$ fehr wenig; die Spannung ift daher im ganzen Sparren nahezu conftant.

Betrachtet man nun einen Knotenpunkt E (Fig. 331) und fetzt die algebraifche Summe der in ihm wirkenden wagrechten Kräfte gleich Null, fo wird

$$0 = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - H_m, \text{ woraus } H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} = 0,$$

da nach Gleichung 346 $S \cos \alpha$ conftant ift. Die Ringfpannung ift dann

$$R = \frac{H}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 347.$$

Die obigen Angaben find damit bewiefen.

Noch möge bemerkt werden, dafs der theoretifche Materialaufwand bei einer nach der cubifchen Parabel gekrümmten Kuppel nur $^2/_3$ desjenigen Materialaufwandes beträgt, der fich bei einer nach der gemeinen Parabel gekrümmten Kuppel ergiebt.

4) Winddruck auf die Kuppel.

251. Winddruck auf die Kuppel.

Bei fteilen Kuppeln ift es nicht angängig, nur die lothrechte Componente $\mathfrak{v}$ des Winddruckes (vergl. Art. 30, S. 23) zu berückfichtigen; man mufs in folchen Fällen die wirklich auf die Kuppel übertragenen Windkräfte kennen.

Der Winddruck gegen eine beliebige Ebene (Tangentenebene an die Kuppel) ergiebt fich folgendermafsen (Fig. 346). Durch einen Punkt A im Raume werden drei Coordinatenaxen gelegt, welche fenkrecht zu einander ftehen; die X-Axe fei wagrecht und parallel zu der gleichfalls wagrecht angenommenen Windrichtung gelegt. Im Punkte P der Ebene wird die Normale $\overline{PN}$ errichtet, aufserdem die Linie PW parallel zur Windrichtung gezogen. Die durch $\overline{PN}$ und $\overline{PW}$ gelegte Ebene fchneide die gegebene Ebene in der Linie $\overline{TT}$; der Winkel WPT werde φ genannt. Alsdann ift nach Art. 29 (S. 22) der Winddruck auf die Flächeneinheit der Ebene

$$n = p \sin \varphi = p \cos \psi;$$

n ift normal zur Ebene gerichtet.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der Kuppelfläche feien x, y, z (Fig. 347); die X-Axe liege parallel zur Windrichtung. Der Normalfchnitt mit der Fläche, welcher im Punkte P durch die Normale PN und PW geht, habe den Krümmungshalbmeffer ρ und den Krümmungsmittelpunkt O mit den Coordinaten a, b, c. Die Coordinaten des

Fig. 346.

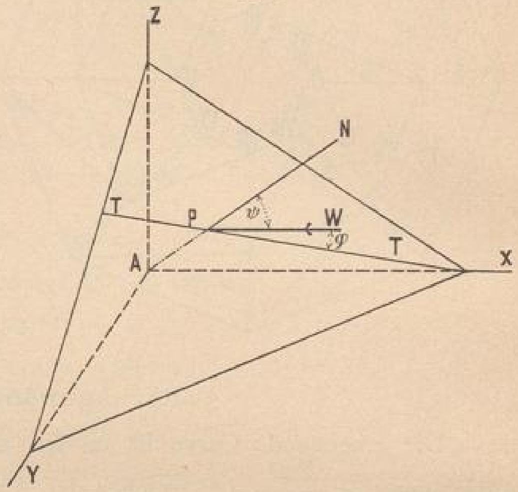
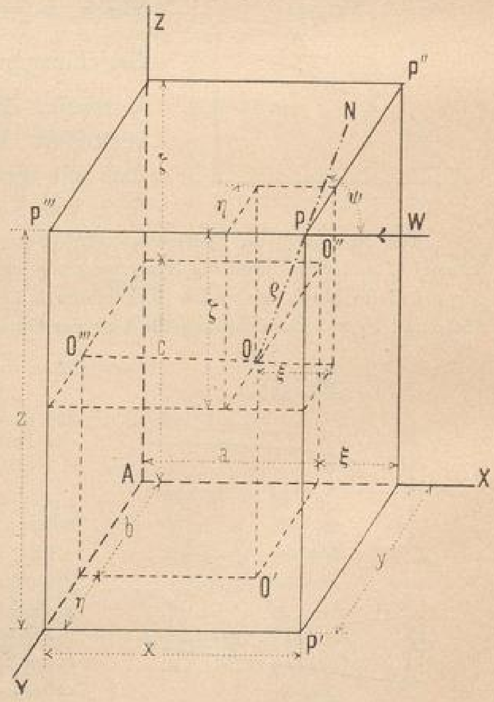


Fig. 347.



Punktes P, bezogen auf den Punkt O, feien ξ, η, ζ; endlich bilde die Normale und der Krümmungshalbmeffer $\overline{OP}$ mit den Coordinaten-Axen die Winkel bezw. α, β, γ. Alsdann ift nach Fig. 347

$$\cos\alpha = \frac{\xi}{\rho}, \qquad \cos\beta = \frac{\eta}{\rho}, \qquad \cos\gamma = \frac{\zeta}{\rho};$$

ferner $\psi = \alpha$, alfo hier

$$n = p \, . \cos\alpha = p \frac{\xi}{\rho}.$$

Zerlegt man n nach den Richtungen der Coordinaten-Axen, fo erhält man als Seitenkräfte von n

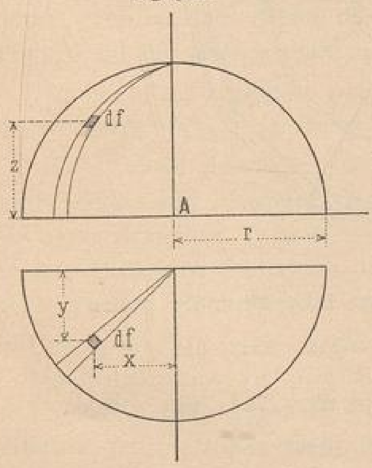
$$\left.\begin{aligned} n_x &= n \cos\alpha = p \frac{\xi^2}{\rho^2} \\ n_y &= n \cos\beta = p \frac{\xi\eta}{\rho^2} \\ n_z &= n \cos\gamma = p \frac{\xi\zeta}{\rho^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 348.$$

und, da $\quad \xi = x - a, \quad \eta = y - b \quad$ und $\quad \zeta = z - c \quad$ ift,

$$\left.\begin{aligned} n_x &= \frac{p}{\rho^2}(x-a)^2 \\ n_y &= \frac{p}{\rho^2}(x-a)(y-b) \\ n_z &= \frac{p}{\rho^2}(x-a)(z-c) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 349.$$

Die Gleichungen 348 u. 349 geben die Seitenkräfte des Winddruckes an einem beliebigen Punkte P der Kuppelfläche, bezogen auf die Flächeneinheit, ausgedrückt in den Coordinaten des Punktes P und des Krümmungsmittelpunktes des in Betracht kommenden Normalfchnittes, fo wie dem betreffenden Krümmungshalbmeffer ρ. Durch Integration können die auftretenden Winddrücke ermittelt werden.

Fig. 348.



Um den auf einen Knotenpunkt des Kuppelfachwerkes entfallenden Winddruck zu ermitteln, genügt es, die Gröfse n deffelben für die Flächeneinheit im Knotenpunkte felbft zu ermitteln und diefes n mit dem Inhalt der Kuppelfläche zu multipliciren, welche diefem Knotenpunkte zugewiefen ift. Ift die Abfciffe des betreffenden Knotenpunktes x, fo ift

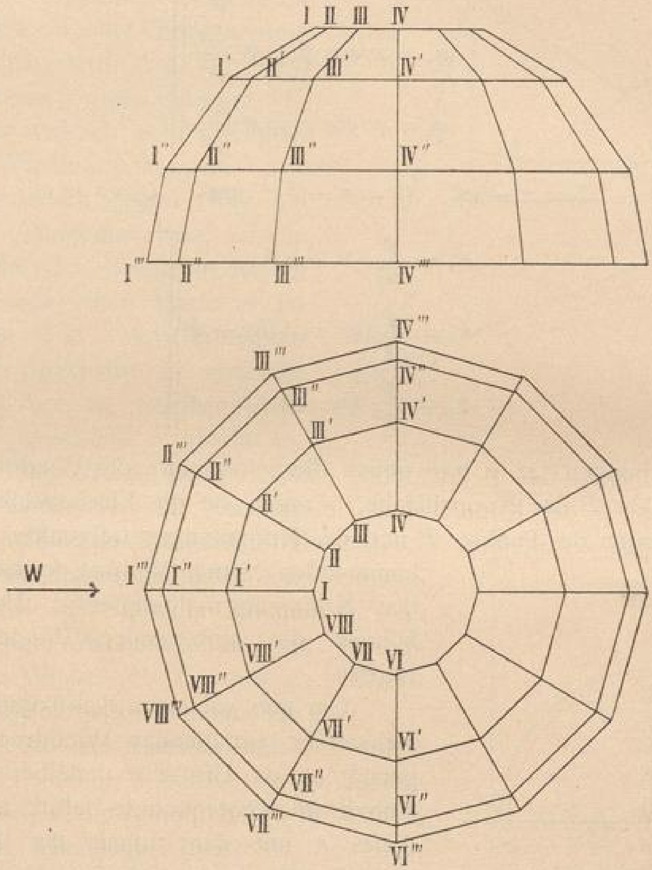
$$n = p \frac{(x-a)}{\rho}$$

Für die Kugelkuppel (Fig. 348) find alle Normalfchnitte gröfste Kreise der Kugel; alle ρ find gleich dem Kugelhalbmeffer r. Wählt man den Mittelpunkt der Kuppel als Anfangspunkt der Coordinatenaxen, fo werden $a = b = c = 0$, und es werden

$$\left.\begin{aligned} n &= p\,\frac{x}{r} \\ n_x &= \frac{p}{r^2}\,x^2 \\ n_y &= \frac{p}{r^2}\,(xy) \\ n_z &= \frac{p}{r^2}\,(xz) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 350.$$

Beifpiel. Für das in Fig. 349 dargeftellte, einer Halbkugelkuppel eingefchriebene Polyeder über einem Zwölfeck fei $r = 10$ m, der Wind komme von links. Dann find die Werthe von n für die bezeichneten Punkte wie in nachftehender Tabelle angegeben (für $p = 120$ kg für 1 qcm):

Fig. 349.



Punkt	I	I'	I''	I'''
$\frac{x}{r} =$	0,32	0,71	0,94	1
$n = \frac{px}{r} =$	38	85	113	120 kg

Punkt	II	II'	II''	II'''
$\frac{x}{r} =$	0,29	0,62	0,82	0,88
$n = \frac{px}{r} =$	35	74	98	106 kg.

Punkt	III	III'	III''	III'''
$\frac{x}{r} =$	0,17	0,36	0,47	0,5
$n = \frac{px}{r} =$	20	43	56	60 kg.

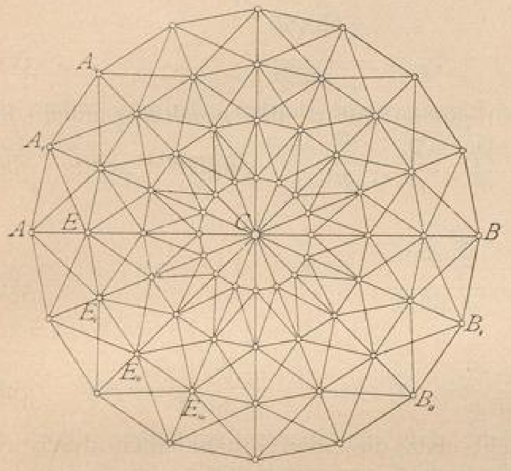
Danach kann man leicht die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden, fenkrecht zur Kuppeloberfläche gerichteten Winddrücke berechnen. Näher ift auf diefen Gegenftand in der unten genannten Abhandlung des Verf.[37]) eingegangen.

b) Flache Zeltdächer.

252. Zeltdächer.

Die Zeltdächer bilden Pyramiden, in den meiften Fällen regelmäfsige Pyramiden. Man kann fie aus einer Anzahl radial geftellter Binder, welche unter die fog. Grate kommen, conftruiren; alsdann wird die Berechnung eines jeden Binders unter Zugrundelegung der auf ihn entfallenden Belaftungen fo vorgenommen, wie bei den Balkendächern gezeigt ift. Neuerdings legt man auch bei den Zeltdächern — zumal den flachen — alle Conftructionstheile in die Dachflächen, wie bei den *Schwedler*'fchen Kuppeln, fo dafs fich eine entfprechende Conftruction ergiebt. In diefem Falle (Fig. 350) werden eine Anzahl Binderfparren $AC, A_,C, A_{,,}C, BC, B_,C, B_{,,}C \ldots$ angeordnet; zwifchen denfelben befinden fich wagrechte Ringe $E, E_,, E_{,,}, E_{,,,} \ldots$ und in den viereckigen Feldern der Dachflächen, wegen der ungleichmäfsigen Belaftungen, Diagonalen. Auch hier wird oft in der Dachmitte eine Laterne angeordnet, welche fich auf einen Laternenring ftützt, gegen den fich die oberen Sparrenenden lehnen. Wir werden hier nur die der Kuppelconftruction entfprechende Anordnung betrachten. Obgleich die gröfsere oder geringere Neigung der Dachflächen keinen grundlegenden Unterfchied bedingt, follen die Zeltdächer dennoch in flache und fteile Zeltdächer eingetheilt werden, weil bei den erfteren die Belaftung durch Schnee, bei den letzteren diejenige durch Wind die mafsgebende zufällige Belaftung ift.

Fig. 350.



Zu den flachen Zeltdächern gehören die Circus- und Theaterdächer, die Dächer über Panoramen, Locomotivfchuppen etc., zu den fteilen hauptfächlich die Thurmdächer.

Die flachen Zeltdächer der vorbefprochenen Anordnung find weiter nichts, als Kuppeldächer mit gleichem Neigungswinkel α in der ganzen Dachfläche. Man erhält alfo unter denfelben Vorausfetzungen für die Belaftungen, wie in Art. 243 (S. 248) die hier geltenden Stabkräfte, indem man in die dort gefundenen Werthe ftatt der veränderlichen Winkelwerthe $\alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_{m+1} \ldots$ den conftanten Winkelwerth α einfetzt.

253. Berechnung der Stabfpannungen.

Spannungen in den Sparren. Wiederum mögen $G_1, G_2 \ldots G_m \ldots$ die Eigengewichte der ganzen Ringzonen, $P_1, P_2 \ldots P_m \ldots$ die zufälligen Belaftungen derfelben fein; alsdann find, falls n Sparren vorhanden find, die Belaftungen der einzelnen Knotenpunkte bezw. $\frac{G_1}{n}, \frac{G_2}{n} \ldots \frac{G_m}{n} \ldots$ und $\frac{P_1}{n}, \frac{P_2}{n} \ldots \frac{P_m}{n} \ldots$

[37]) Winddruck auf Kuppeln. Centralbl. d. Bauverw. 1898, S. 217.

Fig. 351.

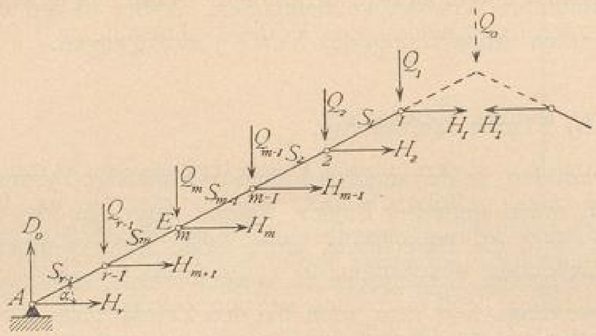
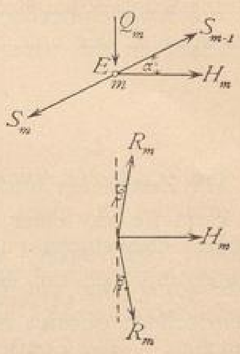
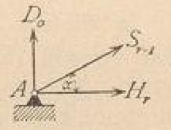


Fig. 352.





Allgemein wirke in einem Knotenpunkte m (Fig. 351) die Laft Q_m; alsdann wird allgemein

$$S_m = -\frac{\sum\limits_1^m (Q)}{\sin\alpha} \quad \ldots \ldots \quad 351.$$

Die Sparrenfpannungen durch das Eigengewicht werden erhalten, indem der Reihe nach für Q_1, Q_2, Q_3 .... bezw. $\frac{G_1}{n}$, $\frac{G_2}{n}$, $\frac{G_3}{n}$ ... eingefetzt wird. Man erhält

$$S_m^g = -\frac{\sum\limits_1^m (G)}{n \sin\alpha} \quad \ldots \ldots \quad 352.$$

Für $m = 1, 2, 3 \ldots$ wird

$$S_1^g = -\frac{G_1}{n\sin\alpha}; \quad S_2^g = -\frac{G_1 + G_2}{n\sin\alpha}; \quad S_3^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3}{n\sin\alpha} \text{ etc.} \quad 353.$$

Aus der Gleichung 340 ergiebt fich, dafs die Sparrenfpannungen durch zufällige Laft am gröfsten bei voller Belaftung find, und zwar wird

$$S_m^{p\,max} = -\frac{\sum\limits_1^m (P)}{n\sin\alpha} \quad \ldots \ldots \quad 354.$$

und für $m = 1, 2, 3 \ldots$

$$S_1^{p\,max} = -\frac{P_1}{n\sin\alpha}; \quad S_2^{p\,max} = -\frac{P_1 + P_2}{n\sin\alpha}; \quad S_3^{p\,max} = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n\sin\alpha} \text{ etc.} \quad 355.$$

Falls keine Laterne vorhanden ift, gelten die Gleichungen 351 bis 354 ebenfalls; nur ift überall in die Summen auch Q_0 aufzunehmen, d. h. der Theil der Firftbelaftung, welcher auf den Sparren entfällt. (Allerdings gilt dies nur für angenäherte Berechnung.)

Spannungen in den Ringen. Die algebraifche Summe der in E (Fig. 352) wirkenden wagrechten Kräfte ift gleich Null; bezeichnet H_m die Mittelkraft der beiden Ringfpannungen R_m, fo ift daher

$$0 = H_m + S_{m-1}\cos\alpha - S_m\cos\alpha,$$

woraus folgt:

$$H_m = (S_m - S_{m-1})\cos\alpha = -\frac{\sum\limits_1^m (Q) - \sum\limits_1^{m-1} (Q)}{\sin\alpha}\cos\alpha = -Q_m \operatorname{cotg}\alpha.$$

Nun ift $H_m = 2\,R_m \sin\beta$ und, da nach Art. 243 (S. 249) $\beta = \frac{\pi}{n}$ ift,

$$R_m = \frac{H_m}{2\sin\frac{\pi}{n}} = -\frac{Q_m \operatorname{cotg}\alpha}{2\sin\frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 356.$$

Die Belaftung durch das Eigengewicht erzeugt demnach eine Spannung

$$R_m^g = -\frac{G_m \operatorname{cotg}\alpha}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 357.$$

Falls ein Laternenring vorhanden ift, fo gilt die Gleichung 357 auch für diefen. Für denfelben ift $m = 1$ und $\sum_1^{m-1}(Q) = 0$, fo wie $\sum_1^{m}(Q) = Q_1$. Wir erhalten demnach für $m = 1, 2, 3 \ldots$

$$R_1^g = -\frac{G_1 \operatorname{cotg}\alpha}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}}; \quad R_1^g = -\frac{G_2 \operatorname{cotg}\alpha}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}} \text{ etc.} \quad . \quad . \quad . \quad 358.$$

Die Gleichungen 357 u. 358 ergeben, dafs in fämmtlichen Ringen durch das Eigengewicht Druck erzeugt wird; die Gleichung 356 gilt aber nicht für den Mauerring. Am Knotenpunkt A (Fig. 351) wirken die Kräfte $D_0 = \Sigma(Q)$, H_r und S_{r-1}; mithin ift $S_{r-1}\cos\alpha + H_r = 0$, woraus $H_r = -S_{r-1}\cos\alpha$. Ferner ift

$D_0 + S_{r-1}\sin\alpha = 0$, woraus $S_{r-1} = -\frac{\sum_1^{r-1}(Q)}{\sin\alpha}$. Daher wird $H_r = \sum_1^{r-1}(Q)\operatorname{cotg}\alpha$ und da $R_r = \frac{H_r}{2\sin\frac{\pi}{n}}$ ift, wird

$$R_r = \frac{\sum_1^{r-1}(Q)\operatorname{cotg}\alpha}{2\sin\frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 359.$$

Der Mauerring erhält alfo Zug.

Das Eigengewicht erzeugt in demfelben die Spannung

$$R_r^g = \frac{(G_1 + G_2 + \ldots + G_{r-1})\operatorname{cotg}\alpha}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 360.$$

Die gröfste durch zufällige Belaftung erzeugte Spannung findet in einem Ringe nach Gleichung 356 ftatt, wenn Q_m feinen gröfsten Werth hat. Da Q, aufser beim Mauerring, nie negativ wird, fo ift die Ringfpannung durch zufällige Belaftung, abgefehen vom Mauerring, ftets Druck. Demnach wird

$$R_1^{p\,min} = -\frac{P_1 \operatorname{cotg}\alpha}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}}; \quad R_2^{p\,min} = -\frac{P_2 \operatorname{cotg}\alpha}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}} \text{ etc.};$$

allgemein

$$R_m^{p\,min} = -\frac{P_m \operatorname{cotg}\alpha}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 361.$$

Weiters ift $R_1^{p\,max} = R_2^{p\,max} = R_m^{p\,max} = 0$. Die gröfste Druckfpannung in einem Ringe findet alfo fchon ftatt, wenn nur die betreffende Zone belaftet ift; die Belaftung der übrigen Zonen ift auf die Ringfpannung ohne Einflufs. Man kann demnach auch fagen, dafs die gröfste Ringfpannung in allen Ringen bei zufälliger Belaftung des ganzen Daches ftattfindet.

Im Mauerring findet der gröfste Zug durch zufällige Belaftung bei voller Belaftung ftatt; derfelbe ift

$$R_r^{p\,max} = \frac{(P_1 + P_2 \ldots + P_{r-1}) \operatorname{cotg} \alpha}{2\,n \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 362.$$

Druck findet in demfelben nicht ftatt.

Spannungen in den Diagonalen. Für diefelbe Belaftungsart, welche bei den Kuppeln zu Grunde gelegt ift, ergiebt fich der Spannungsunterfchied in zwei benachbarten Sparren, zwifchen denen die Belaftungsgrenze liegt, zu

$$\Delta = -\frac{\sum\limits_1^m (P)}{n \sin \alpha}$$

und die Spannung in der Diagonalen, welche diefelbe übertragen foll, zu

$$Y = \frac{\sum\limits_1^m (P)}{n \sin \alpha} \cdot \frac{d}{s},$$

in welchem Ausdruck d, bezw. s die Längen der Diagonale und des Sparrens bezeichnen. Demnach wird

$$Y_1 = \frac{P_1}{n \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{d_1}{s_1}, \quad Y_2 = \frac{P_1 + P_2}{n \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{d_2}{s_2} \text{ etc.} \quad . \quad . \quad . \quad 363.$$

Fig. 353.

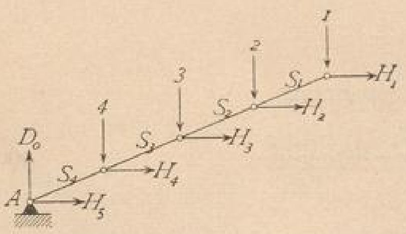
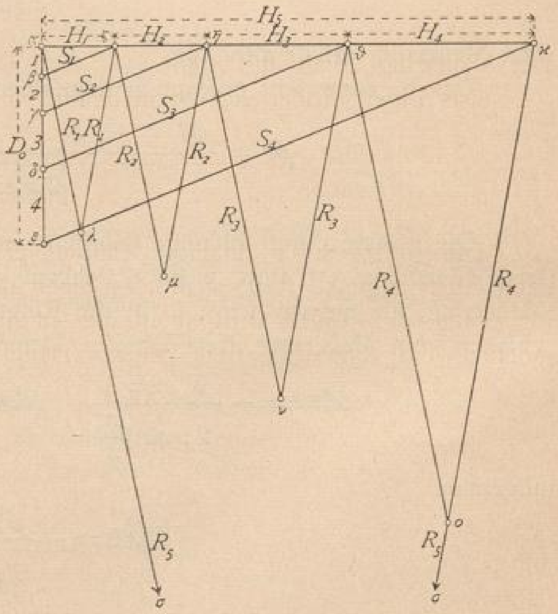


Fig. 354.



Die Berechnung kann auch nach dem Verfahren von *Müller-Breslau* vorgenommen werden, welches in Art. 246 bis 249 (S. 255) für die Kuppelflechtwerke vorgeführt ift.

254.
Graphifche Ermittelung der Stabfpannungen.

Um die Stabfpannungen mittels Zeichnung (Fig. 353 u. 354) zu ermitteln, feien die Belaftungen der einzelnen Knotenpunkte *1*, *2*, *3*, *4*; alsdann ergiebt fich leicht, wenn $\alpha\beta = 1$, $\beta\gamma = 2$, $\gamma\delta = 3$, $\delta\varepsilon = 4$ gemacht wird, $\beta\zeta = S_1$, $\zeta\alpha = H_1$,

$\gamma\eta = S_2$, $\eta\zeta = H_2$, $\delta\vartheta = S_3$, $\vartheta\eta = H_3$, $\varepsilon\varkappa = S_4$, $\varkappa\vartheta = H_4$; ferner $\varepsilon\alpha = D_0$, $\alpha\varkappa = H_5$, $\zeta\lambda = \lambda\alpha = R_1$, $\eta\mu = \mu\zeta = R_2$, $\vartheta\nu = \nu\eta = R_3$, $\varkappa o = o\vartheta = R_4$ und $\alpha\sigma = \sigma\varkappa = R_5$ (= Mauerringfpannung).

Je nachdem nun die Kräfte *1*, *2*, *3*, *4* die Eigengewichte oder die zufälligen Laften bedeuten, erhält man die durch die eine oder andere Belaftung erzeugten Spannungen. Die Spannungen in den Diagonalen find leicht zu conftruiren.

c) Steile Zeltdächer oder Thurmdächer.

Als lothrechte Belaftung ift hier nur das Eigengewicht einzuführen. Eine Belaftung durch Schnee findet nicht ftatt, weil wegen der grofsen Steilheit des Daches der Schnee nicht liegen bleibt. Diefe lothrechte Belaftung erzeugt, da die Conftruction eben fo, wie bei den flachen Zeltdächern, aus Sparren und Ringen zufammengefetzt wird, Spannungen, welche genau, wie dort gezeigt wurde, zu berechnen find. Auf diefe Berechnung foll defshalb hier nicht weiter eingegangen werden. Dagegen fpielt der Winddruck hier eine grofse Rolle, und die durch diefen erzeugten Spannungen follen berechnet werden. Zunächft foll die Berechnung für ein vierfeitiges Pyramidendach, alsdann für ein achtfeitiges Pyramidendach gezeigt werden.

1) Vierfeitiges Pyramidendach.

Der Winddruck auf eine Pyramidenfeite ift am gröfsten, wenn die Windrichtung im Grundrifs fenkrecht zur betreffenden Rechteckfeite fteht. Alsdann ift der Winddruck für 1 qm fchräger Dachfläche (Fig. 355 u. 356) nach Gleichung 7: 255. Belaftung.

$\nu = 120 \sin(\alpha + 10^0)$; die vom Winde getroffene fchräge Dachfläche ift

$$F = \frac{a\lambda}{2} = \frac{a\,h}{2\sin\alpha},$$

mithin der Gefammtdruck gegen eine Pyramidenfeite

$$N = \frac{a\,h\,\nu}{2\sin\alpha} \quad . \qquad 364.$$

Fig. 355.

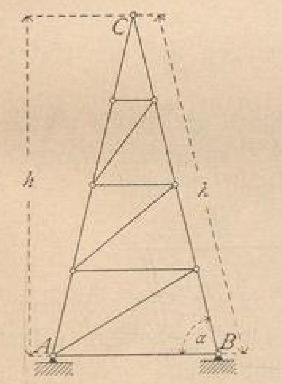


Fig. 356.

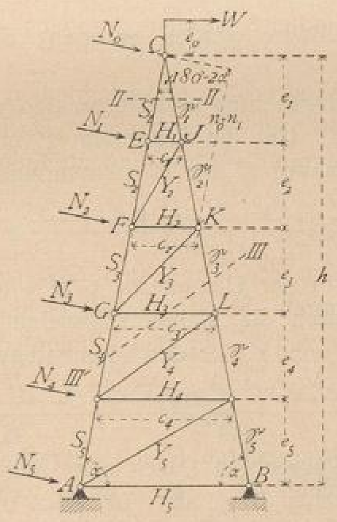
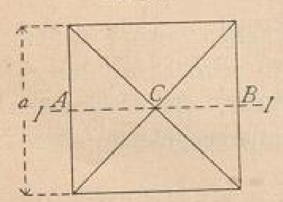


Fig. 357.

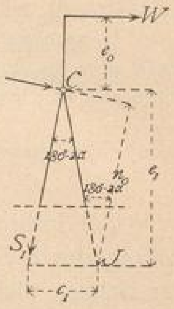


Wir denken uns nun in der Symmetrie-Ebene *I I* einen ideellen Binder *A B C* (Fig. 355) und beftimmen die darin durch den Winddruck entftehenden Spannungen; wir nehmen vorläufig die Wagrechten und Diagonalen, wie in Fig. 356 gezeichnet, an. Auf ein oben befindliches Kreuz wirke ein Winddruck W in der Höhe e_0 über dem Firftpunkt C; aufserdem wirken in den Knotenpunkten C, E, F, G ... die Kräfte N_0, N_1, N_2, N_3 ... fenkrecht zur Dachfläche; die Gröfse diefer Kräfte ift leicht aus den auf die bezüglichen Knotenpunkte entfallenden Dachflächen zu ermitteln.

256. Berechnung der Spannungen im ideellen Binder.

α) Berechnung der Spannungen im ideellen Binder. Um die Sparrenſpannung S_1 (Fig. 356) an der Windſeite zu erhalten, lege man einen beliebigen Schnitt durch CE, etwa nach $II\,II$, und betrachte das Bruchſtück oberhalb des Schnittes. Wählt man $\mathfrak{J}$ als Momentenpunkt, ſo heiſst die Gleichung der ſtatiſchen Momente (Fig. 358):

Fig. 358.



$$0 = S_1\, c_1 \sin\alpha - W(e_0 + e_1) - N_0\, n_0 .$$

Nun iſt

$$\overline{C\mathfrak{J}} = \frac{e_1}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad \cos(180 - 2\,\alpha) = \frac{n_0}{C\mathfrak{J}} = -\cos 2\,\alpha, \quad \text{daher}$$

$$n_0 = -\overline{C\mathfrak{J}}\cos 2\,\alpha = -\frac{e_1}{\sin\alpha}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{e_1(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}{\sin\alpha} .$$

Man erhält hiernach

$$S_1 = \frac{W(e_0 + e_1)}{c_1 \sin\alpha} + \frac{N_0\, e_1(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}{c_1 \sin^2\alpha} .$$

Für irgend einen Sparren FG iſt K der Momentenpunkt, und für S_3 ergiebt ſich der Werth

$$S_3 = \frac{1}{c_2 \sin\alpha}\Big[W(e_0 + e_1 + e_2) + N_0\,(n_0 + n_1) + N_1\, n_1\Big] - N_2 \operatorname{cotg}\alpha .$$

Für irgend einen Sparren KL auf der Unterwindſeite iſt G der Momentenpunkt und

$$\mathfrak{S}_3 = -\frac{1}{c_3 \sin\alpha}\left[W(e_0 + e_1 + e_2 + e_3) + \frac{N_0(e_1 + e_2 + e_3) + N_1(e_2 + e_3) + N_2\, e_3}{\sin\alpha}\right].$$

Eben ſo ergeben ſich leicht alle Sparrenſpannungen, ſowohl auf der Windſeite, wie auf der Unterwindſeite.

Die Sparren auf der Windſeite werden gezogen; diejenigen auf der Unterwindſeite werden gedrückt.

Die Spannungen in den Wagrechten und Diagonalen werden gleichfalls mittels der Momentenmethode ermittelt. Um die Spannung H_3 in GL zu finden, ſchneide man ſchräg nach $III\,III$; alsdann iſt C der Momentenpunkt, und es wird

$$H_3 = -\frac{N_1\, e_1 + N_2(e_1 + e_2) + N_3(e_1 + e_2 + e_3)}{(e_1 + e_2 + e_3)\sin\alpha} + \frac{W e_0}{e_1 + e_2 + e_3} .$$

Die Spannung Y_3 endlich in der Diagonalen GK wird, da für GK wiederum C der conjugirte Punkt iſt, durch die Momentengleichung für C gefunden. Man erhält, wenn y_3 der Hebelsarm von Y_3 für den Momentenpunkt C iſt,

$$Y_3 = \frac{1}{y_3}\,\frac{N_1\, e_1 + N_2(e_1 + e_2)}{\sin\alpha} - \frac{W e_0}{y_3} .$$

Ob die Diagonalen und Wagrechten Druck oder Zug erhalten, hängt weſentlich von der Gröſse des Moments We_0 ab. Iſt $W = 0$, ſo werden bei der gezeichneten Richtung der Diagonalen die Wagrechten gedrückt, die Diagonalen gezogen. Bei der entgegengeſetzten Windrichtung findet entgegengeſetzte Beanſpruchung ſtatt.

257. Graphiſche Ermittelung der Spannungen im ideellen Binder.

β) Graphiſche Ermittelung der Spannungen im ideellen Binder. Wird zunächſt von der Kraft W abgeſehen, ſo ergiebt ſich ohne Schwierigkeit der in Fig. 359 gezeichnete Kräfteplan, worin alle Stabſpannungen, welche durch Winddruck erzeugt werden, enthalten ſind.

Fig. 359.

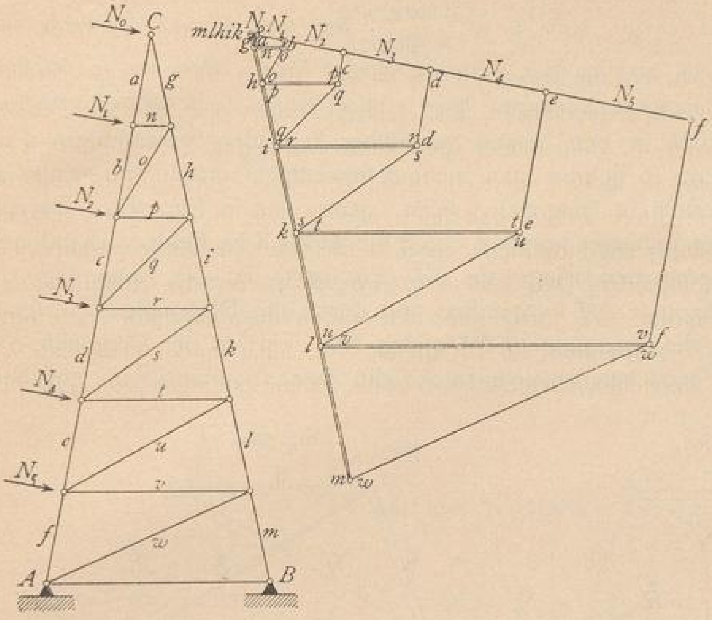
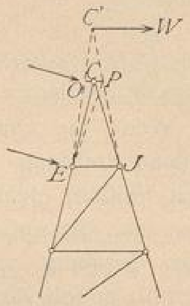


Fig. 360.



Falls noch ein Winddruck W vorhanden ift, fo empfiehlt es fich, für die graphifche Beftimmung der Spannungen ftatt der wirklich vorhandenen Stäbe $E\,C$ und $J\,C$ zwei Stäbe $E\,C'$ und $J\,C'$ einzuführen, wobei C' der Schnittpunkt der Kraft W mit der Mittel-Lothrechten (Fig. 360) ift; die Ermittelung kann dann für den Thurm mit der Spitze $E\,O\,C'\,P\,J$ nach der *Cremona*'fchen Methode erfolgen. Die Spannungen in $E\,C$ und $J\,C$ können mit geringem Fehler denjenigen, welche fich für $E\,O$ und $P\,J$ ergeben haben, gleich gefetzt werden.

258. Wirkliche Stab-fpannungen.

γ) Zurückführung der Spannungen im ideellen Binder auf die wirklichen Stabfpannungen. Die bisher berechneten Spannungen finden im ideellen Binder $A\,C\,B$ (Fig. 361) ftatt. Jede Spannung in einem Stabe des ideellen Binders wird nun durch zwei Stabfpannungen der beiden wirklichen Binder geleiftet, deren Ebenen mit derjenigen des ideellen Binders den Winkel $(90 - \alpha)$ einfchliefsen.

Fig. 361.

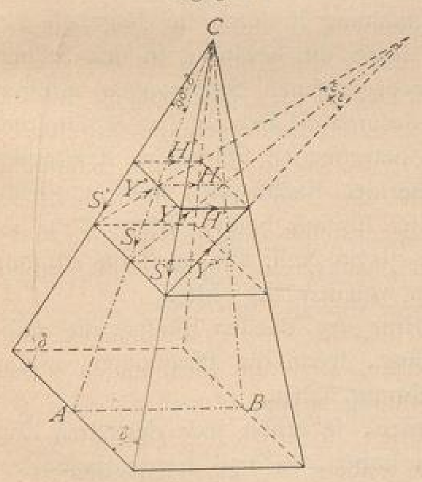
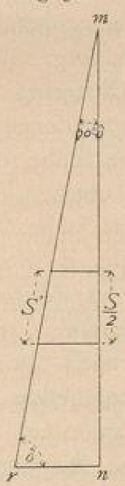


Fig. 362.



Die Spannung S in irgend einem Sparren des ideellen Binders wird durch zwei Spannungen S' erfetzt; demnach ift

$$S = 2\,S' \cos(90 - \delta) = 2\,S' \sin\delta,$$

woraus

$$S' = \frac{S}{2 \sin \delta}; \quad . \quad 365.$$

eben fo

$$\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{S}}{2 \sin \delta} \quad . \quad . \quad 366.$$

Ferner wird $H = 2\,H'$, woraus

$$H' = \frac{H}{2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 367.$$

$$Y = 2\,Y' \cos\varepsilon,$$

woraus

$$Y' = \frac{Y}{2 \cos \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 368.$$

Auch auf graphifchem Wege ift die Zurückführung leicht. Man conftruire (Fig. 362) den Winkel $(90 - \delta)$, bezw. ε. Ift $\sphericalangle r m n = 90 - \delta$, fo ift $\overline{m r} = \frac{\overline{m n}}{\sin \delta}$. Man trage demnach die Werthe für $\frac{S}{2}$ und $\frac{\mathfrak{S}}{2}$ auf der Linie $m n$ ab, projicire diefe Abfchnitte auf $m r$; alsdann erhält man in den Projectionen die gefuchten wirklichen Sparrenfpannungen. Eben fo ift die Divifion durch $\cos \varepsilon$ vorzunehmen.

Wenn die Diagonalen in den beiden gegenüber liegenden Seitenfeldern verfchiedene Richtung haben, fo nehme man nichtsdeftoweniger zunächft an, dafs in beiden Feldern gleich gerichtete Diagonalen feien, genau wie in Fig. 361. Darauf erfetze man die nur vorläufig angenommene durch die wirklich im Felde vorhandene. In der vorläufig angenommenen Diagonale $\overline{b d}$ (Fig. 363) fei die Spannung zu Y' ermittelt; foll die Diagonale $\overline{b d}$ fortgelaffen und durch die Diagonale $\overline{a c}$ erfetzt werden können, fo mufs die Spannung in $\overline{b d}$ gleich Null fein; in der Diagonale $\overline{a c}$ mufs alfo eine Kraft Z herrfchen, welche in $\overline{b d}$ die Zufatzfpannung von gleicher

Fig. 363.

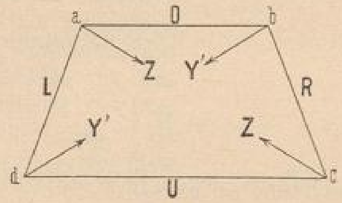
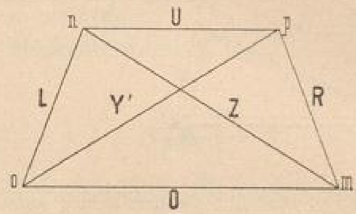


Fig. 364.



Gröfse Y', aber entgegengefetztem Sinne mit der bereits in $\overline{b d}$ herrfchenden Spannung erzeugt. Bringt man in a und c je die Kraft $Z = \overline{m n}$ an (Fig. 364), fo erhält man die Gröfse der in den Stäben des Trapezes wirkenden Spannungen aus dem Kräfteplan. Es ift $L = \overline{o n}$, $O = \overline{m o}$, $U = \overline{n p}$ und $R = \overline{p m}$, und wegen der Gleichheit der Diagonalen des Trapezes ift $Z = Y'$ (abfolut genommen). Erfetzt man alfo die Diagonale $\overline{b d}$ mit der berechneten Spannung Y' durch die Diagonale $a c$, fo herrfcht in letzterer der gleiche Zug. Die durch die Kräfte Z in den Stäben des Trapezes und des übrigen Fachwerkes hervorgerufenen Spannungen addiren fich zu den bereits in denfelben vorhandenen und durch die Berechnung ermittelten. Diefe Zufatzfpannungen find für die Stäbe des betreffenden Feldes im Kräfteplan der Fig. 364 verzeichnet, für alle übrigen Stäbe des Fachwerkes find fie gleich Null. Denn für jeden diefer übrigen Stäbe ift der Einflufs beider Kräfte Z zu berückfichtigen. Die Refultirende beider Z ift aber gleich Null, alfo auch ihr Einflufs auf die Stabfpannungen aufserhalb des Feldes, in welchem fie wirken.

Das vorftehend angegebene Verfahren, mit Hilfe des ideellen Binders die Stabfpannungen zu ermitteln, ift alfo auch anwendbar, wenn die Diagonalen zweier gegenüber liegender Felder entgegengefetzte Richtung haben.

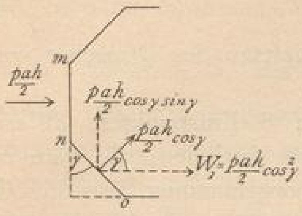
Wenn einfache Diagonalen angeordnet werden, fo erhält jede derfelben Zug und Druck; will man nur gezogene Diagonalen haben, fo find Gegendiagonalen anzuordnen, worüber das Erforderliche bereits mehrfach gefagt ift.

2) Achtfeitiges Pyramidendach.

259. Belaftung.

Wir nehmen hier die Windrichtung, der einfachen Rechnung halber, wagrecht an und berechnen aus demfelben Grunde den Winddruck fo, als wenn die Seitenflächen lothrecht ftänden. Der dabei gemachte Fehler ift gering. Wenn die Wind-

Fig. 365.

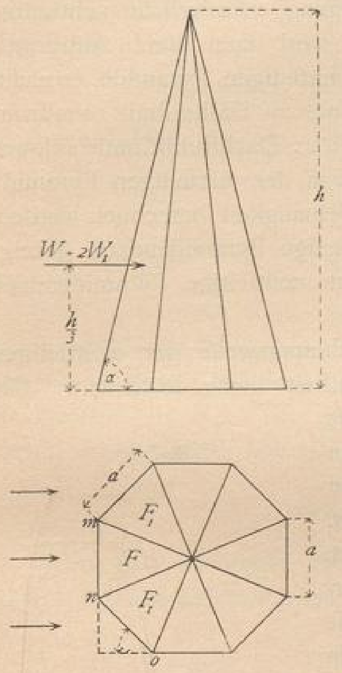


richtung im Grundriſs ſenkrecht zur Seite $m\,n$ (Fig. 365) angenommen wird, die Seitenlänge des regelmäſsigen Achteckes an der Unterkante der Pyramide mit a, die Höhe der Pyramide mit h und der Druck für die Flächeneinheit mit p bezeichnet wird, ſo iſt der Druck gegen die Fläche F demnach

$$W = \frac{p\,a\,h}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 369.$$

Der Winddruck auf die Fläche F_1 (Fig. 366) ergiebt ſich unter obigen vereinfachenden Annahmen folgendermaſsen. Die (lothrecht gedachte) Fläche ſchlieſst mit der angenommenen Windrichtung (Fig. 365) einen Winkel $(90 - \gamma)$ ein; mithin iſt der ſenkrechte Winddruck auf die Fläche für die Flächeneinheit nach Art. 31 (S. 24)

Fig. 366.



$$n = p \sin (90 - \gamma)$$

oder

$$n = p \cos \gamma ,$$

und der Winddruck auf die ganze Fläche

$$\frac{p\,a\,h}{2} \cos \gamma .$$

Dieſe Kraft zerlegt ſich nun in eine Seitenkraft, welche dieſelbe Richtung hat, wie W, und in eine ſenkrecht hierzu ſtehende. Die erſtere iſt (Fig. 365)

$$W_1 = \frac{p\,a\,h \cos^2 \gamma}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 370.$$

Ein genau gleicher Winddruck wirkt (Fig. 366) auf die andere Fläche F_1; mithin iſt der geſammte auf Umkanten der Pyramide wirkende Winddruck

$$W + 2\,W_1 = \frac{p\,a\,h}{2} (1 + 2 \cos^2 45^0)$$

$$= \frac{p\,a\,h}{2} \left(1 + \frac{2}{2}\right) = p\,a\,h . \quad . \quad . \quad 371.$$

Der Angriffspunkt dieſer Kraft liegt in der Höhe $\frac{h}{3}$ über der Grundfläche der Pyramide.

Für irgend einen Pyramidentheil (Fig. 367) von der Höhe z erhält man, wenn die Seite des Achteckes, welches für dieſen Theil die Grundfläche bildet, mit x und die ganze Breite der Grundfläche mit y bezeichnet wird,

$$W_z = p\,x\,z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 372.$$

W_z greift in der Höhe $\frac{z}{3}$ über dieſer Grundfläche an.

Nun iſt $\frac{x}{z} = \frac{a}{h}$, alſo $x = \frac{a}{h} z$ und

$$W_z = p \frac{a}{h} z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 373.$$

Der Zuwachs der Kraft W_z, welcher auf einen Streifen von der Höhe $d\,z$ entfällt, iſt demnach $d\,W_z = 2\,p \frac{a}{h} z\,d\,z$, und die Windbelaſtung für die Höheneinheit wird

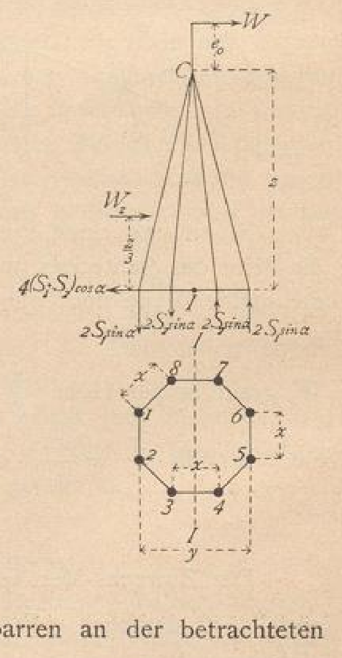
$$\frac{d\,W_z}{d\,z} = 2\,p\,\frac{a}{h}\,z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 374.$$

Daraus folgt, dafs die Laftvertheilung nach dem Gefetze des Dreieckes von der Spitze bis zur Bafis des Thurmes ftattfindet.

260. Thurm-Fachwerk. Das achtfeitige Pyramidendach mit 8 Sparren auf 8 Fufspunkten ift ein ftatifch unbeftimmtes Fachwerk. Könnte man die Spitze fortlaffen, fo wäre es ftatifch beftimmt; die Berechnung würde dann genau fo vorgenommen, wie dies in Art. 246 bis 248 (S. 255 bis 257) für die Kuppel gezeigt ift. Durch das Aufbringen der Spitze mit 8 Sparren wird das Fachwerk fünffach ftatifch unbeftimmt (es erhält 5 überzählige Unbekannte). Diefe vielfache ftatifche Unbeftimmtheit kann man dadurch vermindern, dafs man die Spitze nur aus 4 Sparren conftruirt, indem man alfo im oberften Theile des Thurmes nur immer einen um den anderen Sparren bis zur Spitze reichen läfft. Der oberfte Theil des Thurmfachwerkes bildet dann eine vierfeitige Pyramide. Die für die äufsere Erfcheinung erforderliche achtfeitige Pyramide auch in dem oberften Theile des Thurmes wird dann durch Anbringen entfprechend geformter Holzfutter auf die Ringe der vierfeitigen Pyramide erreicht. Eine folche Conftruction ift bei den Thürmen des Domes zu Halberftadt (conftruirt von *Cramer*) ausgeführt und in Theil III, Band 2, Heft 4: Dachftuhl-Conftructionen (Art. 234, S. 315) diefes »Handbuches« zu finden. Die in der vierfeitigen Pyramide wirkenden Spannungen können dann mit genügender Genauigkeit berechnet werden, wie in Art. 255 bis 258 (S. 269 bis 271) für das vierfeitige Pyramidendach gezeigt ift; diefe Spannungen werden darauf als äufsere, das achtfeitige Pyramidendach belaftende Kräfte eingeführt.

Die in nachftehenden Artikeln vorgeführte Berechnungsweife der achtfeitigen Thurmpyramide nimmt auf die ftatifche Unbeftimmtheit keine Rückficht. Die Sparrenberechnung ift möglich, wenn man annimmt, dafs in einem wagrecht genommenen Querfchnitt durch den Thurm (Fig. 367) in den einzelnen Querfchnittspunkten die Spannungen auf die Flächeneinheit fich verhalten, wie die Abftände der betreffenden Querfchnittspunkte von der Null-Linie des Querfchnittes. Da die Querfchnittsflächen aller 8 Sparren naturgemäfs gleich grofs gemacht werden, fo kann man auch fagen: Es wird die Annahme gemacht, dafs die Sparrenfpannungen fich verhalten, wie die Abftände der Schwerpunkte der Sparrenquerfchnitte von der Null-Linie des ganzen Thurmquerfchnittes.

Fig. 367.



261. Spannungen in den Sparren. Stabfpannungen. Aufser W_z wirke auf das Thurmkreuz (Fig. 367) noch ein Winddruck W in der Höhe e_0 über der Spitze; alsdann ift das Moment des Windes, bezogen auf die wagrechte, in der Grundfläche des betreffenden Thurmftückes gelegene Schwerpunktsaxe II des Querfchnittes (in der Höhe z unter der Spitze)

$$M_z = W_z \frac{z}{3} + W(e_0 + z) \quad . \quad . \quad . \quad 375.$$

Diefes Moment mufs durch die Spannung der Sparren an der betrachteten Stelle aufgehoben werden.

Sind die Spannungen in den vier Sparren *1*, *2*, *5*, *6*, welche um $\frac{y}{2}$ von der Axe II abftehen, S_1, diejenigen in den vier um $\frac{x}{2}$ von der Axe II abftehenden Sparren *3*, *4*, *7*, *8* gleich S_2, fo ift, wenn mit geringem Fehler der Sparrenwinkel gegen die wagrechte Ebene gleich α gefetzt wird, das Moment der Sparrenfpannungen für die Axe II (die Null-Linie des Gefammtquerfchnittes) $2\, S_1\, y \sin\alpha + 2\, S_2\, x \sin\alpha$. Demnach mufs

$$M_z = 2\, S_1\, y \sin\alpha + 2\, S_2\, x \sin\alpha$$

fein. Nach Art. 260 wird angenommen, dafs ftattfindet:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \frac{x}{y}, \quad \text{d. h.} \quad S_2 = S_1 \frac{x}{y};$$

daher wird

$$M_z = 2\, S_1 \sin\alpha \left[y + \frac{x^2}{y} \right] = \frac{2\, S_1 \sin\alpha}{y} (x^2 + y^2)$$

fein, woraus folgt:

$$S_1 = \frac{M_z\, y}{2\,(x^2 + y^2) \sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 376.$$

$$S_2 = \frac{M_z\, x}{2\,(x^2 + y^2) \sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 377.$$

Für M_z find der Reihe nach die Werthe einzuführen, welche fich bei den verfchiedenen Höhen z ergeben. Diefe Spannung kann in jedem Sparren fowohl als Zug, wie als Druck ftattfinden, da der Wind von allen Seiten kommen kann. S_1 ift ftets gröfser als S_2. Die gröfste Spannung, welche durch Winddruck in allen Sparren erzeugt wird, hat alfo den Werth

$$S_{p\,max} = \pm \frac{M_z\, y}{2\,(x^2 + y^2) \sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 378.$$

Wenn die Pyramide über einem regelmäfsigen Achteck errichtet ift, fo ift $y = x + 2\, x \cos 45^0 = x \,.\, 2{,}414$, und es wird dann

$$\left. \begin{aligned} S_{p\,max} &= \pm \frac{M_z \,.\, 0{,}177}{x \sin\alpha} \\ \text{bezw.} \quad S_{p\,max} &= \pm \frac{M_z \,.\, 0{,}427}{y \sin\alpha} \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 379.$$

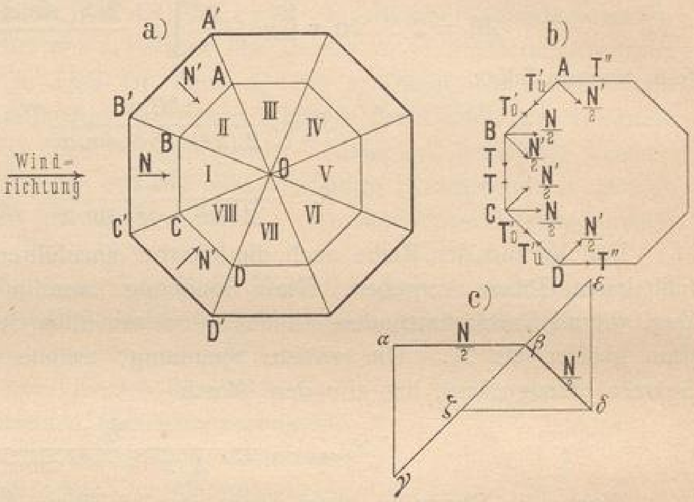
Auf einen beliebigen Theil der vom Winde voll getroffenen Pyramidenfeite $O B' C'$ (Fig. 368*a*) entfalle der Winddruck N; auf die entfprechenden Theile der angrenzenden Seitenfläche $O A' B'$ und $O C' D'$ entfalle je der Winddruck N'. Nach Früherem ift $N' = N \cos 45^0 = \frac{N}{\sqrt{2}}$. In B wirkt dann $\frac{N}{2}$, bezw. $\frac{N'}{2}$, wie in Fig. 368*b* gezeichnet ift; desgleichen in C. 262. Spannungen in den Ringen und Diagonalen.

Die Laften $\frac{N}{2}$ und $\frac{N'}{2}$ zerlegen fich in B, bezw. in C in Seitenkräfte, welche in die Ebenen $O B' A'$, $O B' C'$ und $O C' D'$ fallen. Aus Fig. 368*c* ergiebt fich im Punkte B, wenn $\alpha\beta = \frac{N}{2}$ und $\beta\delta = \frac{N'}{2}$ ift, die Gröfse der Seitenkräfte T, bezw. T' und T'':

$$\left.\begin{aligned}
T_0' &= \overline{\varepsilon\beta} + \overline{\beta\gamma} = \frac{N'}{2} + \frac{N}{2\cos 45^0} = \frac{N}{2\sqrt{2}} + \frac{N\sqrt{2}}{2} = \frac{N}{2\sqrt{2}}\left[1+2\right] = 1{,}06\, N \\
T &= \overline{\gamma\alpha} + \overline{\delta\varepsilon} = \frac{N}{2} + \frac{N'}{2\cos 45^0} = \frac{N}{2} + \frac{N\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = N. \\
&\text{Für Punkt } A \text{ erhält man:} \\
T_u' &= \overline{\zeta\beta} = \frac{N'}{2} = \frac{N}{2\sqrt{2}} = 0{,}354\, N, \\
T'' &= \overline{\delta\zeta} = \frac{N'}{2\cos 45^0} = \frac{N'\sqrt{2}}{2} = \frac{N}{2}.
\end{aligned}\right\} \quad 380.$$

In der Seitenfläche $OB'C'$, welche vom Winde voll getroffen wird, find die Spannungen der Ringftäbe von B und C aus je gleich T. Die Gröfse von T hängt von der Gröfse der Kraft N, d. h. von der Gröfse der auf den betreffenden Stab entfallenden, vom Winde getroffenen Fläche ab. Die Diagonalen in diefer Seitenfläche werden bei diefer Belaftung nicht beanfprucht.

Fig. 368.



In der Seitenfläche $OA'B'$ wirkt von der Seite des Grates OB' (des Windgrates) aus die Belaftung T_0', von der Seite des Grates OA' (des Unterwindgrates) aus die negative Belaftung T_u' auf das Fachwerk. Diefe Belaftungen müffen durch das in der Seitenfläche $OB'A'$ liegende Fachwerk auf die feften Auflagerpunkte $A'B'$ gebracht werden. Das Fachwerk diefer Seitenfläche wirkt dabei wie ein Freiträger (fiehe Art. 158, S. 151[38]). Die Belaftungen, fowohl von der Seite des Grates OB' (des Windgrates), wie des Grates OA' (des Unterwindgrates), nehmen von der Spitze nach dem Auflager entfprechend dem Gefetze des Dreieckes (linear) zu (fiehe Art. 259, S. 273). Der Winddruck gegen die Fläche I von der Spitze bis zu einer Höhe z unter derfelben ift mit den Bezeichnungen in Fig. 367: $N_z = p\,\frac{xz}{2}$ und, da $x = \frac{a}{h}\,z$ ift,

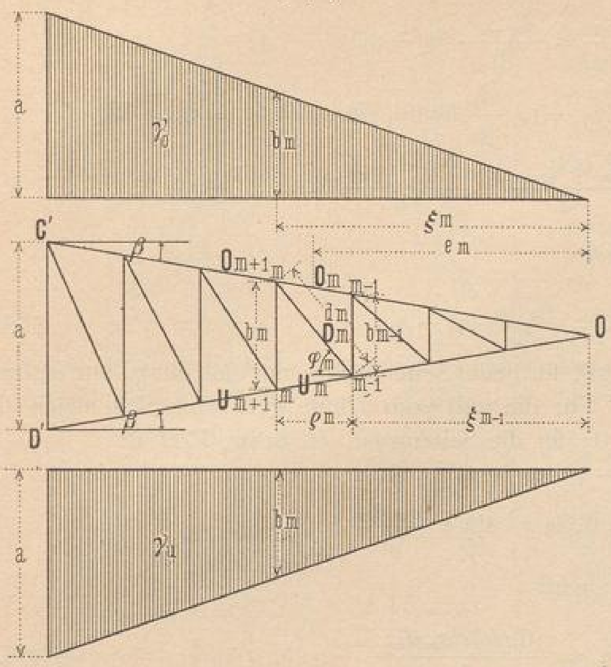
$$N_z = \frac{pa}{2h}\,z^2.$$

Sonach ift die pofitive Belaftung des Fachwerkes in der Seitenfläche II, bezw. $VIII$ auf die Höhe z unter der Spitze mit Rückficht auf Gleichung 380

$$T_{0_z}' = 1{,}06\,\frac{pa}{2h}\,z^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 381.$$

[38]) Siehe bezüglich nachftehender Ableitung: MÜLLER-Breslau, H. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralbl. d. Bauverw. 1892, S. 257. — Auch als Sonderabdruck erfchienen: Berlin 1892.

Fig. 369.



die negative Belaftung deffelben Fachwerkes

$$T_{u_z}{}' = 0{,}354 \, \frac{p\,a}{2\,h} \, z^2 \quad . \quad 382.$$

In Fig. 369 ift das Fachwerk der Seitenfläche *VIII* (*O C' D'*) des leichteren Verftändniffes halber mit wagrechter Axe als Freiträger gezeichnet. Die Belaftungen find nach Gröfse und Vertheilung darüber, bezw. darunter angegeben; dabei ift die auf die Einheit der fchraffirten Flächen entfallende Belaftung (γ_0, bezw. γ_u) fo gewählt, dafs die Abmeffungen b und ξ der Belaftungsdreiecke diefelben find, wie diejenigen des Freiträgers. Die gefammte Belaftung von der Seite des Windgrates folgt aus Gleichung 381 für $z = h$; fie ift $T_{0_h}{}' = 1{,}06 \, \frac{p\,a\,h}{2}$. Die Einheitsbelaftung γ_0 folgt dann aus der Bedingungsgleichung:

$$\gamma_0 \, \frac{a\,h}{2 \sin \alpha} = 1{,}06 \, \frac{p\,a\,h}{2},$$

$$\gamma_0 = 1{,}06 \, p \sin \alpha \, ; \quad \ldots \ldots \ldots \quad 383.$$

eben fo ergiebt fich die Einheitsbelaftung der unteren Fläche zu

$$\gamma_u = 0{,}354 \, p \sin \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad 384.$$

Das Gleichgewicht am m-ten Knotenpunkte der oberen Gurtung bedingt:

$$D_m \cos \varphi_m = O_{m+1} \cos \beta - O_m \cos \beta \, .$$

Bedeuten M_m, bezw. M_{m-1} die Momente der äufseren Kräfte für die Knotenpunkte m, bezw. $m-1$, fo ift nach Fig. 369

$$O_{m+1} \cos \beta = \frac{M_m}{b_m} \quad \text{und} \quad O_m \cos \beta = \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} \, ;$$

mithin

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{b_m} - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} \, .$$

Bezeichnet d_m die Länge der Diagonale, ρ_m die Höhe des betreffenden Feldes in der Dachfchräge gemeffen, fo ift $\cos \varphi_m = \frac{\rho_m}{d_m}$, alfo

$$D_m = \frac{d_m}{\rho_m} \left(\frac{M_m}{b_m} - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} \right) .$$

Ferner ift

$$M_m = \frac{b_m \, \xi_m}{2} \cdot \frac{\xi_m}{3} \, (\gamma_0 - \gamma_u), \quad \text{alfo} \quad \frac{M_m}{b_m} = \frac{\xi_m{}^2}{6} \, (\gamma_0 - \gamma_u),$$

und eben so

$$\frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} = \frac{\xi_{m-1}^2}{6} (\gamma_0 - \gamma_u);$$

mithin $D_m = \frac{(\xi_m^2 - \xi_{m-1}^2)}{6} (\gamma_0 - \gamma_u) \frac{d_m}{\rho_m}$ und, da $\rho_m = \xi_m - \xi_{m-1}$ ist,

$$D_m = \frac{(\xi_m + \xi_{m-1})}{2} \cdot \frac{(\gamma_0 - \gamma_u)}{3} d_m .$$

Mit $e_m = \frac{\xi_m + \xi_{m-1}}{2}$ wird

$$D_m = \frac{e_m d_m}{3} (\gamma_0 - \gamma_u) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 385.$$

Vorstehende Entwickelung gilt für jede Seitenfläche; nur sind für γ_0 und γ_u die bezüglichen Werthe einzusetzen. Für die voll vom Winde getroffene Seitenfläche *I* ist $\gamma_0 - \gamma_u =$ Null, also alle $D = 0$; für die Seitenwand *II*, bezw. *VIII* ist

$$(\gamma_0 - \gamma_u) = 0{,}706\, p \,.\, \sin \alpha;$$

also

$$D_m = 0{,}706\, p \,.\, \sin \alpha \frac{e_m d_m}{3}.$$

Setzt man $e_m = \frac{z_m}{\sin \alpha}$, so wird

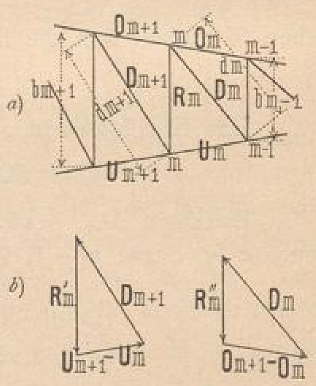
$$D_m = \frac{0{,}706\, p\, z_m d_m}{3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 386.$$

Ringspannungen. Um die Ringspannungen (d. h. die Spannungen der Pfosten im Freiträger der Fig. 369) zu bestimmen, ermittelt man zweckmäfsig getrennt die Beiträge, welche durch die Belastungen γ_0 und diejenigen, welche durch die Lasten γ_u erzeugt werden. Für $\gamma_u = 0$ sei im *m*-ten Ringstabe die Spannung R_m'; das Gleichgewicht am *m*-ten Knotenpunkte der unteren Gurtung führt zum Kraftpolygon in Fig. 370*b*. Es ergiebt sich $-\frac{R_m}{D_{m+1}} = \frac{b_{m+1}}{d_{m+1}}$. Nach Gleichung 385 ist für $\gamma_u = 0$: $D_{m+1} = \frac{e_{m+1} d_{m+1}}{3} \gamma_0$;

also

$$R_m' = - \frac{e_{m+1} b_{m+1} \gamma_0}{3}.$$

Fig. 370.



Für $\gamma_0 = 0$ ergiebt die Betrachtung des *m*-ten Knotenpunktes der oberen Gurtung aus dem Kraftpolygon in Fig. 370*b* $\frac{R_m''}{-D_m} = \frac{b_{m-1}}{d_m}$. Nach Gleichung 385 ist für $\gamma_0 = 0$: $D_m = -\frac{e_m d_m \gamma_u}{3}$; somit

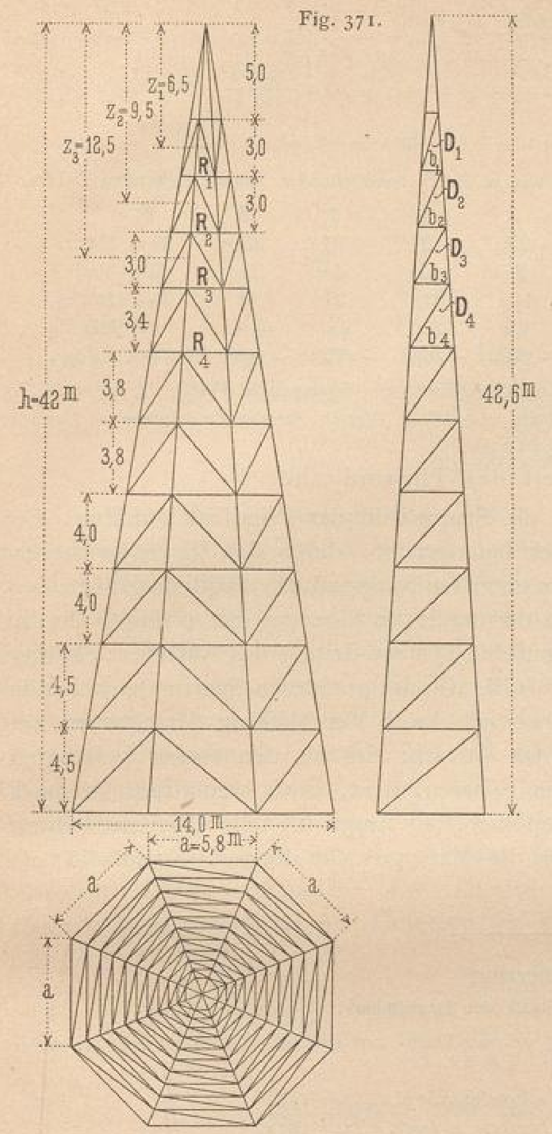
$$R_m'' = \frac{e_m b_{m-1} \gamma_u}{3}.$$

Somit wird die Ringspannung durch die gemeinsame Belastung γ_0 und γ_u

$$R_m = -\frac{1}{3} \left[b_{m+1} e_{m+1} \gamma_0 - e_m b_{m-1} \gamma_u \right] \quad \ldots \ldots \quad 387.$$

Da der Wind von allen Seiten kommen kann, so ist zu untersuchen, in welcher Seitenfläche die Diagonal- und Ringspannungen am gröfsten werden können; die erhaltenen Werthe sind der Construction der Diagonalen und Ringstäbe in allen Seitenflächen zu Grunde zu legen.

Fig. 371.



Zu den vorftehend ermittelten, durch den Wind hervorgerufenen Stabfpannungen kommen noch diejenigen durch das Eigengewicht; diefe find nach Art. 253 u. 254 (S. 265) leicht zu finden.

263. Beifpiel.

Beifpiel. Der in Fig. 371 im Grundrifs und Aufrifs dargeftellte Thurm über einem regelmäfsigen Achteck hat eine Höhe $h = 42$ m; die Seite der achteckigen Grundfläche ift $a = 5,8$ m. Die Spannungen der Sparren, der Ring- und Diagonalftäbe find bei einem Winddruck $p = 120$ kg auf das Quadr.-Meter normal getroffener Fläche zu ermitteln.

α) Sparrenfpannungen. Die Felder werden von der Spitze nach der Grundfläche hin mit *1, 2, 3 … 9, 10* bezeichnet, die zu den einzelnen Feldern gehörigen Werthe z bis zur Mitte der Höhe des betreffenden Feldes gerechnet. Man erhält nach Gleichung 375 die Gröfse des Windmoments, welches die Sparrenfpannungen erzeugt, zu

$$M_z = W_z \frac{z}{3} + W (e_0 + z) .$$

Nach Gleichung 373 ift aber:

$$W_z = \frac{p\, a\, z^2}{h} ;$$

der Winddruck auf das Thurmkreuz wird zu $W = 250$ kg und die Höhe deffelben über der Spitze zu $e_0 = 4,0$ m angenommen. Alsdann ift

$$M_z = \frac{p\, a}{h} \frac{z^3}{3} + 1000 + 250\, z$$

und mit $\frac{p\, a}{3\, h} = \frac{120}{3} \cdot \frac{5,8}{42} = 5,52$

$$M_z = (5,52\, z^3 + 250\, z + 1000) \text{ kgm.}$$

Die Berechnung ergiebt folgende Tabelle:

$z =$	6,5	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	39,75	Met.;
$M_z =$	4140	8100	14900	26300	45500	74800	116400	173200	251700	357620	Kilogr.-Met.;
$x =$	0,90	1,31	1,73	2,17	2,7	3,19	3,73	4,28	4,86	5,5	Met.;
$S =$	828	1113	1548	2178	3032	4212	5616	7284	9320	11700	Kilogr.

Diefe Werthe können fämmtlich fowohl Zug wie Druck bedeuten.

β) Diagonalen. Gröfste Beanfpruchung der Diagonalen findet in den Seitenflächen *II* und *VIII* (Fig. 368) ftatt. Nach Gleichung 386 ift

$$D_m = \frac{0,706\, p}{3} z_m\, d_m = \frac{0,706 \cdot 120}{3} z_m\, d_m ,$$

fomit

$$D_m = \sim 28\, z_m\, d_m .$$

Das Verzeichnen der Seitenfläche ergab folgende Werthe für d_m, woraus dann die ebenfalls in der Tabelle verzeichneten Werthe von D fich ergaben:

$z_m =$	6,5	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	39,75	Met.;
$d_m =$	3,2	3,4	3,5	4,1	4,8	5,0	5,5	5,95	6,2	7,1	Met.;
$D =$	588	912	1230	1815	2610	3240	4190	5200	6170	7960	Kilogr.

Auch diefe Werthe können, falls nicht Gegendiagonalen angeordnet find, Zug und Druck bedeuten.

γ) Ringfpannungen. Nach Gleichung 387 ift $R_m = -\frac{1}{3} (b_{m+1} e_{m+1} \gamma_0 - e_m b_{m-1} \gamma_u)$.

In der Seitenfläche *VIII* ift $\gamma_0 = 1{,}06\, p \sin \alpha$, $\gamma_u = 0{,}354\, p \sin \alpha$, $e_{m+1} = \frac{z_{m+1}}{\sin \alpha}$ und $e_m = \frac{z_m}{\sin \alpha}$; alfo

$$R_m = -\frac{p}{3} (1{,}06\, b_{m+1} z_{m+1} - 0{,}354\, b_{m-1} z_m).$$

Man erhält für die verfchiedenen Werthe von m die in nachftehender Tabelle ftehenden Zahlen:

$m =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$z_{m+1} =$	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	39,75	Met.;
$b_{m+1} =$	1,55	1,95	2,4	3,0	3,5	4,05	4,6	5,2	5,8	Met.;
$z_m =$	6,5	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	Met.;
$b_{m-1} =$	0,72	1,1	1,55	1,95	2,4	3,0	3,5	4,05	4,6	Met.;
$R_m =$	−558	−888	−1327	−2026	−2780	−3666	−4723	−6036	−7484	Kilogr.

Die Ringfpannungen in Fläche *I* find wefentlich kleiner, als diejenigen in Fläche *II*, bezw. *VIII*; mithin find diefe, d. h. die in vorftehender Tabelle ermittelten Werthe für die Berechnung zu Grunde zu legen.

3) Standfeftigkeit der Thurmdächer.

264. Verankerung.

Durch die Windbelaftung werden die Sparren an der Windfeite auf Zug, diejenigen an der Unterwindfeite auf Druck beanfprucht; durch das Eigengewicht erhalten alle Sparren Druck. Wenn der im unterften Sparrenftück mögliche gröfste Zug in Folge des Winddruckes gröfser ift, als der durch das Eigengewicht erzeugte Druck, fo ift Gleichgewicht nur möglich, wenn auf den Sparren Seitens des Auflagers ein Zug ausgeübt wird, welcher wenigftens fo grofs ift, wie der gröfste im Sparren herrfchende Zug. Diefer Zug Seitens des Auflagers wird durch Verankerung der Sparren mit dem Thurmmauerwerk erzeugt, und das Gewicht des an den Anker gehängten Mauerwerkes, welches als Zug auf den Sparren wirkt, mufs wenigftens fo grofs fein, wie der gröfstmögliche Zug in demfelben. Es empfiehlt fich, die Verankerung weiter hinabzuführen, etwa fo weit, dafs das Mauergewicht doppelt fo grofs ift, als der gröfste Zug im Sparren.

Literatur.

Bücher über »Statik der Dachftühle«.

RITTER, A. Elementare Theorie und Berechnung eiferner Dach- und Brücken-Conftructionen. Hannover 1863. — 5. Aufl. 1894.

UNWIN, W. *Wrought-iron bridges and roofs etc.* London 1870.

CORDIER, E. *Equilibre ftabile des charpentes en fer, bois et fonte.* Paris 1872.

FABRÉ, V. *Théorie des charpentes, donnant des règles pratiques pour la conftruction des fermes et autres appareils en bois et en fonte.* Paris 1873.

CARGILL, TH. *The ftrains upon bridge girders and roof truffes etc.* London 1873.

SCHREVE, S. *A treatife on the ftrength of bridges and roofs etc.* New-York 1873.

TETMAJER, L. Die äufseren und inneren Kräfte an ftatifch beftimmten Brücken- und Dachftuhl-Conftructionen. Zürich 1875.

NICOUR, CH. *Calcul d'un comble en fer du fyftème Polonceau.* Paris 1875.

SCHWEDLER, W. Die Conftruction der Kuppeldächer. 2. Aufl. Berlin 1878.

TRÉLAT, E. *La rigidité dans les combles.* Paris 1878.

Deutfche bautechnifche Tafchenbibliothek. Heft 10: Berechnung der Dachwerke. Von W. JEEP. Leipzig 1876.

WEYRAUCH, J. J. Beifpiele und Aufgaben zur Berechnung der ftatifch beftimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1888.

MÜLLER-Breslau, H. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Berlin 1892.

FOEPPL, A. Das Fachwerk im Raume. Leipzig 1892.

5. Abfchnitt.

Gewölbe.

Die Gewölbe find aus einzelnen Theilen mit Hilfe von Verbindungsmaterialien zufammengefetzte Bau-Conftructionen, welche bei lothrechten Belaftungen fchiefe Drücke auf die ftützenden Constructionstheile ausüben. Indem wir die verfchiedenen Gewölbearten[39]) hier als bekannt vorausfetzen, bemerken wir, dafs wir uns im vorliegenden Abfchnitt hauptfächlich mit den Tonnen-, bezw. Kappengewölben, den Kreuzgewölben und den Kuppelgewölben befchäftigen werden, auf welche alle anderen Gewölbearten leicht zurückgeführt werden können. 265. Allgemeines.

Der allgemeinen Unterfuchung foll das Tonnen-, bezw. Kappengewölbe zu Grunde gelegt werden; dabei wird ftets, falls nichts Anderes bemerkt wird, ein Gewölbeftück betrachtet werden, deffen Abmeffung fenkrecht zur Bildfläche gleich der Einheit, alfo gleich 1^m ift. Alsdann fällt die Kraftebene mit der mittleren lothrechten Ebene zufammen. Das Tonnen-, bezw. Kappengewölbe wirkt wie ein krummer Balken, welcher den Gefetzen der Elafticitätslehre unterworfen ift.

1. Kapitel.

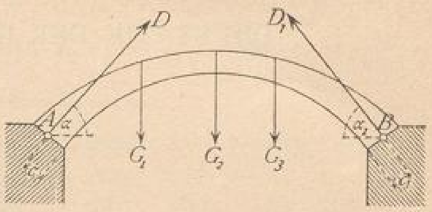
Stützlinie und Mittelkraftslinie.

a) Allgemeines.

Für die Ermittelung der im Gewölbe auftretenden inneren Kräfte ift zunächft — genau wie bei den früher behandelten Bau-Conftructionen — die Kenntnifs der äufseren auf das Gewölbe wirkenden Kräfte nöthig, alfo der Belaftungen und der Auflagerkräfte. Die Belaftungen find in den meiften Fällen gegeben, bezw. aus den Tabellen in Art. 21 bis 27 leicht zu beftimmen. Schwieriger ift die Ermittelung der Auflagerkräfte oder, wie fie hier heifsen, der Kämpferdrücke. Bei den bisherigen Conftructionen genügten zu ihrer Beftimmung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen; hier ift dies nicht der Fall. Wird ein beliebiges Gewölbe (Fig. 372) betrachtet, fo wird bei jedem Auflager — hier Kämpfer genannt — auf das Gewölbe eine Anzahl von Kräften übertragen, deren Mittelkraft eben der gefuchte Kämpferdruck ift; von jedem diefer Kämpferdrücke ift aber weder Gröfse, noch 266. Kämpferdrücke.

39) Siehe hierüber Theil III, Band 2, Heft 3 (Abth. III, Abfchn. 2, B, Kap. 8) diefes »Handbuches«.

Fig. 372.



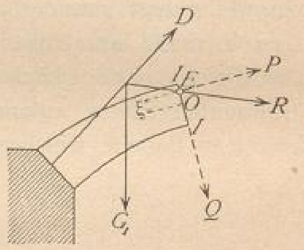
Richtung, noch Angriffspunkt (A, bezw. B) bekannt. Wir haben demnach in den Kämpferdrücken 6 Unbekannte: D, D_1, α, α_1, c, c_1 (wenn c und c_1 die Abftände der Punkte A und B von den inneren Laibungspunkten der Widerlager bezeichnen). Da die Statik vermittels der Gleichgewichtsbedingungen fefter Körper nur 3 Gleichungen zur Verfügung ftellt, fo ift die Ermittelung der Kämpferdrücke auf rein ftatifchem Wege nicht möglich. Die Aufgabe wird gelöst, indem man das Gewölbe als elaftifchen Bogen auffafst und annimmt, dafs bei den durch die Belaftungen erfolgenden Formänderungen die Widerlager und die anfchliefsenden Bogenenden genau unveränderte Lage behalten. Diefe mit der Wirklichkeit nahezu übereinftimmende Annahme giebt weitere 3 Gleichungen, fo dafs jetzt für die 6 Unbekannten 6 Gleichungen vorhanden find.

Für die einfachen Fälle des Hochbaues, bei denen faft ftets eine ruhende Belaftung in Frage kommt, brauchen die Elafticitätsgleichungen nicht aufgeftellt zu werden. Vorläufig werde angenommen, dafs die Kämpferdrücke nach Gröfse, Richtung und Lage auf irgend welche Art gefunden und bekannt feien.

267. Stützlinie.

Ift letzteres der Fall, fo find alle äufseren, auf das Gewölbe wirkenden Kräfte bekannt; demnach können die fämmtlichen äufseren Kräfte, welche an der einen Seite eines beliebigen, fenkrecht zur Bildebene genommenen Querfchnittes II des Gewölbes (Fig. 373) wirken, zu einer Mittelkraft vereinigt werden.

Fig. 373.



Betrachtet man etwa denjenigen Gewölbetheil, welcher links vom Querfchnitte II, alfo zwifchen dem linken Widerlager und dem Querfchnitte II liegt, fo fei R diefe Mittelkraft. Damit Gleichgewicht vorhanden fei, mufs im Querfchnitt II eine Anzahl innerer Kräfte wirken, deren Mittelkraft gleiche Gröfse, gleiche Richtung, gleichen Angriffspunkt und entgegengefetzten Sinn hat, wie die Kraft R. Mit der Kraft R kennt man alfo auch die Refultirende der hier thätigen inneren Kräfte. Zerlegt man R in eine Seitenkraft P, welche parallel ift zu der an die Bogenaxe im betrachteten Querfchnitte gezogenen Tangente, und in eine zu erfterer fenkrechte Seitenkraft Q, fo heifst die erftere die Axialkraft, die zweite die Transverfalkraft oder Querkraft. Die Querkraft ift für die hier zu betrachtenden Fälle von geringer Wichtigkeit; von wefentlicher Bedeutung dagegen ift Gröfse und Lage von P. Die durch die Axialkraft in den einzelnen Punkten des Querfchnittes II erzeugten Druck-, bezw. Zugfpannungen können ohne merkbaren Fehler nach den in Art. 126 (S. 111) für Stützen berechneten Gleichungen beftimmt werden. Man erhält demnach die Spannung σ in einem um z von der Mittellinie entfernten Punkte nach Gleichung 102

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M z}{J} = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F \xi z}{J}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 388.$$

M ift das Moment der äufseren Kräfte für den Punkt O, d. h. für denjenigen Punkt, in welchem die Mittellinie des Gewölbes den Querfchnitt II fchneidet; hier alfo ift $M = P\xi$, da Q in Bezug auf O kein Moment hat. Die pofitiven Werthe für σ find hier Druckbeanfpruchungen; die negativen Werthe bedeuten Zug.

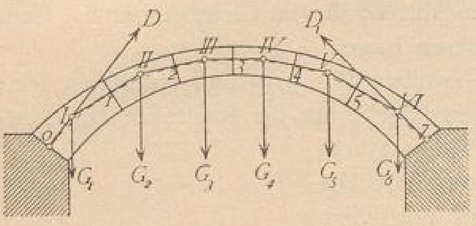
Von hervorragender Bedeutung für den Werth von σ ift die Gröfse von ξ oder, was daffelbe ift, die Lage des Punktes E, des Schnittpunktes der Mittelkraft R mit dem von ihr beanfpruchten Querfchnitte. Man hat defshalb für die Punkte E eine befondere Bezeichnung eingeführt: die Stützlinie. Die Stützlinie ift die Gefammtheit aller derjenigen Punkte, in denen die Gewölbequerfchnitte von den auf fie wirkenden Mittelkräften gefchnitten werden.

Den verfchiedenen Belaftungsarten entfprechen verfchiedene Mittelkräfte für die einzelnen Querfchnitte; daraus folgt, dafs bei demfelben Gewölbe jeder Belaftungsart auch eine befondere Stützlinie entfpricht.

268. Mittelkraftslinie oder Refultanten-Polygon.

Zerlegt man das Gewölbe in eine Anzahl von Theilen (Fig. 374), ermittelt die Kämpferdrücke (D und D_1), fo wie die Belaftungen der einzelnen Theile (G_1, G_2, $G_3 \ldots G_6$) und fetzt zunächft D mit der erften Laft G_1 zu einer Mittelkraft zufammen, diefe letztere mit G_2 und fährt fo bis zum rechten Kämpfer fort, fo erhält man ein Vieleck *o I II III IV V VI 7*, welches man die Mittelkraftslinie oder das Refultanten-Polygon nennt. Aus der Mittelkraftslinie ergeben fich fofort einzelne Punkte der Stützlinie, nämlich die Schnittpunkte der einzelnen Mittelkräfte mit den bezüglichen Querfchnitten, hier die Punkte *0, 1, 2, 3, 4, 5* und *7*. Je kleiner die einzelnen Theile des Gewölbes angenommen werden, defto mehr nähert fich die Mittelkraftslinie einer ftetig verlaufenden Curve, der fog. Seilcurve.

Fig. 374.



269. Ergebniffe der Elafticitätstheorie.

Die Ermittelung der Form und Lage der Stützlinie auf ftatifchem Wege fetzt nach Obigem die Kenntnifs der Kämpferdrücke oder wenigftens dreier von den fechs Unbekannten voraus, welche die Kämpferdrücke nach Gröfse, Richtung und Lage beftimmen; denn alsdann find nur noch drei Unbekannte vorhanden, welche mit Hilfe der Statik ermittelt werden können. Mit Hilfe der Elafticitätstheorie der Gewölbe hat *Winkler* folgenden wichtigen Satz gefunden, den wir hier nur angeben wollen, wegen des Beweifes auf unten ftehende Quellen[40]) verweifend.

Bei conftantem Querfchnitt ift unter allen ftatifch möglichen Stützlinien nahezu diejenige die richtige, welche fich der Bogenaxe durchfchnittlich am meiften nähert, wenn man das Wort »durchfchnittlich« im Sinne der Methode der kleinften Quadratfummen deutet. Somit ift diejenige Stützlinie nahezu die richtige, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Bogenaxe ein Minimum ift. Läfft fich demnach eine Stützlinie conftruiren, welche mit der Mittellinie des Gewölbes zufammenfällt, fo wird diefe die richtige fein.

Conftruirt man alfo die Mittellinie des Bogens derart, dafs fie für die gegebene Belaftung mit der unter gewiffen Annahmen conftruirten (demnach möglichen) Stützlinie übereinftimmt, fo ift diefe Mittellinie die richtige Stützlinie — natürlich nur für die angenommene Belaftung. Da es fich aber im Hochbau meiftens um conftante Belaftungen handelt, fo ift diefe Ermittelung in der Regel genügend.

40) Winkler, F. Beitrag zur Theorie der Bogenträger. Zeitfchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover. 1879, S. 199. Lage der Stützlinie im Gewölbe. Deutfche Bauz. 1879, S. 117 u. 127.

Wir werden weiter unten ſehen, daſs es in vielen Fällen, in denen die Aufſuchung der genauen Stützlinie ſchwierig iſt, genügt, gewiſſe Grenzlagen der Stützlinie zu ermitteln; da aber die Stützlinie leicht aus dem Reſultanten-Polygon conſtruirt werden kann, ſo wird für alle dieſe Fälle zunächſt das Reſultanten-Polygon oder die Mittelkraftslinie aufgeſucht.

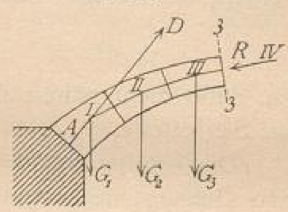
b) Mittelkraftslinie und Seilcurve.

270. Horizontalſchub im Gewölbe.

Jede Verbindungslinie zweier Eckpunkte der Mittelkraftslinie (*I II*, *II III*, *III IV*... in Fig. 374) giebt nach der Erklärung in Art. 268 (S. 283) Lage und Richtung der Mittelkraft aller an der einen Seite der betreffenden Fuge wirkenden äuſseren Kräfte. Es giebt alſo z. B. *III IV* die Richtung und Lage der Mittelkraft aller rechts von der Fuge *3* wirkenden Kräfte, d. h. der Kräfte D_1, G_4, G_5, G_6; da ſämmtliche äuſsere Kräfte einander im Gleichgewichte halten, ſo fällt die Mittelkraft aller links von der Fuge *3* wirkenden Kräfte gleichfalls in die Linie *III IV*; in derſelben halten ſich demnach die beiden Mittelkräfte im Gleichgewichte. Genau eben ſo verhält es ſich auch mit jeder anderen Fuge.

Betrachtet man nun einen Theil des Gewölbes (Fig. 375) und unterſucht ſeinen Gleichgewichtszuſtand, ſo wirken auf denſelben nicht nur die Kräfte D, G_1, G_2, G_3, ſondern auch die Kräfte, welche in der Fuge *3 3* vom anderen Theile des Gewölbes übertragen werden. Die Mittelkraft der letzteren iſt aber nach dem Vorſtehenden gleich der Mittelkraft aller auf den anderen Theil wirkenden äuſseren Kräfte, d. h. hier von D_1, G_4, G_5, G_6. Dieſe fällt in die Linie *III IV* (Fig. 374). Wenn alſo die Mittelkraftslinie bekannt iſt, ſo ſind ſtets auch Lage, Richtung und (wie weiter unten nachgewieſen wird, auch) Gröſse derjenigen Kraft bekannt, bezw. leicht zu finden, welche in der betreffenden Fuge auf das Gewölbe-Bruchſtück übertragen wird. Alles Vorſtehende gilt ſelbſtverſtändlich auch, wenn die einzelnen Gewölbetheile unendlich ſchmal werden und die Mittelkraftslinie zur Seilcurve wird; dann fällt die Mittelkraft an jeder Stelle in die Richtung der Tangente an die Curve.

Fig. 375.



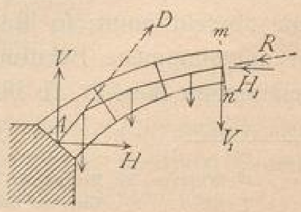
Die Kämpferdrücke D und D_1 haben lothrechte und wagrechte Seitenkräfte; in dieſer Beziehung kann man die Gewölbe als Sprengwerksträger anſehen. Dieſe wagrechten Seitenkräfte, welche auf das Gewölbe nach innen, auf die ſtützenden Seitenmauern nach auſsen, alſo ſchiebend wirken, gefährden das Bauwerk. Wenn die Belaſtungen nur lothrecht wirken, ſo haben dieſe wagrechten Seitenkräfte im ganzen Bogen bei derſelben Belaſtung gleiche Gröſse. Denn das Gleichgewicht eines beliebigen Bruchſtückes (Fig. 376) verlangt, daſs die algebraiſche Summe aller wagrechten Kräfte gleich Null ſei. Die beiden einzigen wagrechten Kräfte am Bruchſtück ſind aber die Seitenkräfte H und H_1 von D und R. Daher muſs ſtattfinden:

$$0 = H - H_1, \quad \text{woraus} \quad H = H_1.$$

Da Schnitt mn beliebig gewählt war, ſo gilt das Vorſtehende ganz allgemein.

Man nennt dieſe wagrechte Seitenkraft den **Horizontalſchub** des Bogens, bezw. des Gewölbes. Die

Fig. 376.

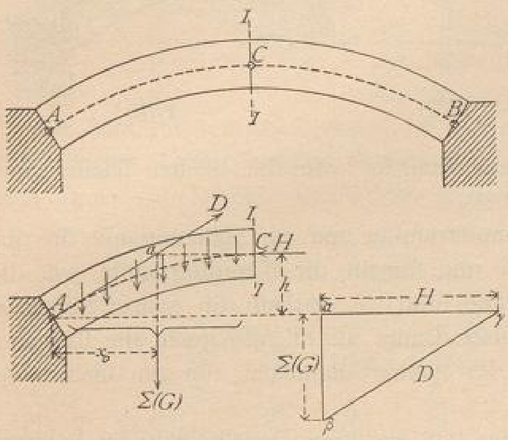


Ermittelung der Gröſse und Lage dieſes Horizontalſchubes iſt bei der Berechnung der Gewölbe die wichtigſte Aufgabe.

Die Gröſse des Horizontalſchubes iſt ſowohl von der Belaſtung, wie auch von der Form und Lage der Mittelkraftslinie, bezw. Seilcurve abhängig. Dieſe Abhängigkeit ſtellt ſich für das ſymmetriſch zur Scheitelfuge geſtaltete und eben ſo belaſtete Gewölbe folgendermaſsen dar.

ACB ſei (Fig. 377) die Seilcurve. Legt man durch denjenigen Punkt derſelben, in welchem die Tangente wagrecht iſt, d. h. durch den Scheitel, einen Schnitt *II* und unterſucht das Gleichgewicht des Gewölbeſtückes an der einen Seite dieſes Schnittes, etwa des Stückes *AC*, ſo muſs, wie eben entwickelt, die Kraft, welche in *II* auf das Bogenſtück übertragen wird, in die Richtung der Tangente fallen, demnach wagrecht ſein. Dieſe Kraft iſt alſo das geſuchte *H*. Da auch *A* ein Punkt der Seilcurve iſt, ſo muſs durch *A* die Mittelkraft aller derjenigen Kräfte gehen, welche rechts von der Kämpferfuge wirken, d. h. die Mittelkraft von $\Sigma(G)$ und *H*; dieſe Mittelkraft muſs demnach für *A* als Drehpunkt das ſtatiſche Moment Null haben. Da nun das ſtatiſche Moment der Mittelkraft ſtets gleich der algebraiſchen Summe der ſtatiſchen Momente der Einzelkräfte iſt, ſo muſs auch ſtattfinden:

Fig. 377.



$$x_0 \, \Sigma(G) - H h = 0,$$

woraus folgt

$$H = \frac{x_0 \, \Sigma(G)}{h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 389.$$

Auch graphiſch ergiebt ſich die Gröſse von *H* leicht.

Man ermittele die Mittelkraft $\Sigma(G)$ aller an der einen Seite des durch den Scheitel gelegten Schnittes *II* wirkenden Laſten (Fig. 377); alsdann wirken auf das Gewölbeſtück drei Kräfte: $\Sigma(G)$, *H* und *D*. Da dieſelben das Gewölbeſtück im Gleichgewicht halten, ſo ſchneiden ſich ihre Richtungslinien in einem Punkte, d. h. *D* muſs durch den Punkt *a* gehen, in welchem ſich die beiden anderen Kräfte, *H* und $\Sigma(G)$ ſchneiden. Da *D* auch durch *A* geht, ſo iſt die Richtung von *D* durch Linie *Aa* beſtimmt. Nun halten ſich in *a* drei Kräfte im Gleichgewicht, deren Richtungen bekannt ſind, von deren einer $[\Sigma(G)]$ auch die Gröſse bekannt iſt. Man trage $\Sigma(G)$ nach beliebigem Maſsſtabe auf $(= \alpha\beta)$ und ziehe durch α und β Parallelen zu bezw. den Richtungen von *H* und *D*; alsdann erhält man

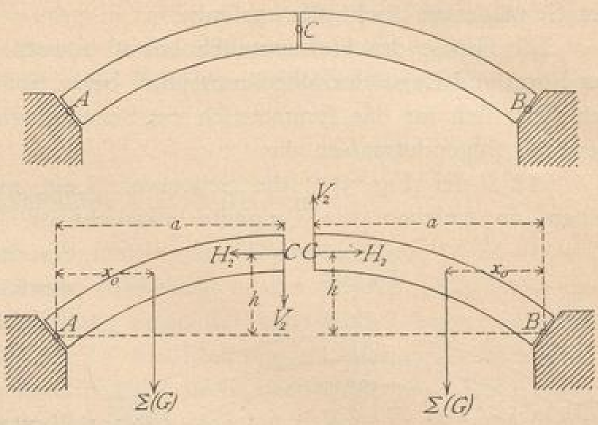
$$H = \gamma\alpha \quad \text{und} \quad D = \beta\gamma.$$

Die Ermittelung von *H* für das unſymmetriſche, bezw. das unſymmetriſch belaſtete Gewölbe wird in Art. 273 u. 275 vorgeführt werden.

271. Seilcurve durch drei gegebene Punkte.

Wie in Art. 266 (S. 281) gezeigt, giebt die Statik feſter Körper für die Ermittelung der unbekannten äuſseren Kräfte und damit auch der Seilcurve nur drei Gleichungen, während ſechs Unbekannte vorhanden ſind. Man kann aber die Seilcurve dadurch feſt legen, daſs man durch die Conſtruction drei Bedingungen ſchafft, welche durch drei Gleichungen ausgedrückt werden und ſo die fehlenden Gleichungen bieten. Am einfachſten geſchieht dies, indem man drei Punkte vorſchreibt, durch welche die Seilcurve gehen muſs, etwa durch Einlegen von Keilen u. ſ. w. in drei

Fig. 378.



Fugen (Fig. 378). Wenn alfo drei Punkte vorgefchrieben find, durch welche die Seilcurve verlaufen mufs, fo ift der ganze Lauf der Seilcurve und damit auch die Gröfse des Horizontalfchubes gegeben. Auch wenn zwei Punkte der Seilcurve und aufserdem in einem diefer Punkte die Richtung beftimmt ift, welche die Tangente an die Curve haben foll, ift Alles bekannt. Wird die Seilcurve in diefer Weife feft gelegt, fo wirken die beiden Theile des Gewölbes auf einander genau eben fo, wie die beiden Theile eines Sprengwerkdaches (fiehe Art. 210, S. 211 [41]).

Wenn bei einem Gewölbe zwei Kämpferpunkte und ein Scheitelpunkt für den Verlauf der Seilcurve vorgefchrieben find und fowohl die Kämpferpunkte wie die Laften fymmetrifch zur Scheitel-Lothrechten find, fo verläuft die ganze Seilcurve, bezw. Mittelkraftslinie fymmetrifch zu diefer Linie, fo ift alfo auch die Tangente an die Seilcurve im Scheitel wagrecht. Es genügt demnach, für ein folches Gewölbe eine Hälfte zu unterfuchen.

Betrachtet man nämlich zunächft (Fig. 378) die linke Gewölbehälfte und nimmt dabei allgemein an, dafs die von der rechten Hälfte im Scheitel übertragene Kraft die Seitenkräfte H_2 und V_2 habe, fo mufs, weil die Mittelkraft von $\Sigma(G)$, H_2 und V_2 durch A verläuft,

$$0 = V_2 a - H_2 h + x_0 \Sigma(G)$$

fein. Wird die rechte Gewölbehälfte betrachtet, fo wirken auf diefelbe im Scheitel H_2 und V_2 in gleicher Gröfse, aber in entgegengefetztem Sinne, wie auf die linke Hälfte; der Symmetrie wegen ift die Belaftung diefer Hälfte ebenfalls $\Sigma(G)$ im Abftande x_0 vom Kämpfer B; mithin findet ftatt:

$$0 = V_2 a + H_2 h - x_0 \Sigma(G).$$

Die Addition beider Gleichungen giebt: $0 = V_2 \,.\, 2a$, woraus

$$V_2 = 0$$

folgt. Demnach ift die Kraft, welche die beiden Gewölbehälften im Scheitel auf einander übertragen, in der That wagrecht, alfo ift auch die Tangente an die Mittelkraftslinie im Scheitel wagrecht.

Man findet die Gröfse von $H_2 = H$ leicht, wie Gleichung 389:

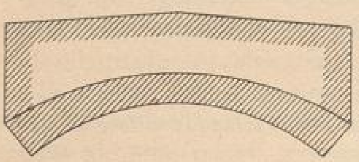
$$H = \frac{x_0 \Sigma(G)}{h}.$$

Wenn für die Seilcurve drei Punkte oder zwei Punkte und eine Richtung vorgefchrieben find, fo ift nach Vorftehendem der Verlauf der Seilcurve beftimmt; alsdann mufs alfo auch eine graphifche Conftruction diefer Linie möglich fein. Es ift

[41]) Neuerdings ift die Anordnung dreier Gelenke, zweier Gelenke an den Kämpfern und eines Gelenkes im Scheitel, bei den grofsen Brückengewölben vielfach ausgeführt worden, insbefondere von *Köpcke* und *Leibbrand*. — Man vergl. hierüber: Fortfchritte der Ingenieurwiffenfchaften. 2. Gruppe, Heft 7: Gewölbte Brücken. Von K. v. LEIBBRAND. Leipzig 1897.

oft wünſchenswerth, den ganzen Verlauf derſelben zu kennen, und deſshalb ſoll nachſtehend gezeigt werden, wie die Seilcurve, bezw. Gleichgewichtslinie conſtruirt wird. Bei allen ſolchen Unterſuchungen iſt es zweckmäſsig, die Laſten durch Flächen darzuſtellen. Man denkt ſich zu dieſem Zwecke die gegebenen Nutzlaſten durch Mauerkörper von demſelben Einheitsgewichte erſetzt, wie dasjenige des Gewölbes iſt. Wenn die Abmeſſung ſenkrecht zur Bildfläche gleich der Einheit (= 1 m) iſt, ſo bedeutet demnach 1 qm in der Anſicht 1 cbm Mauerwerk, alſo ein entſprechendes Gewicht. Dieſe in Mauerwerk verwandelte Nutzlaſt kommt zum Eigengewichte des Gewölbes hinzu, ſo daſs man als Darſtellung der Belaſtung etwa die in Fig. 379 ſchraffirte Fläche erhält.

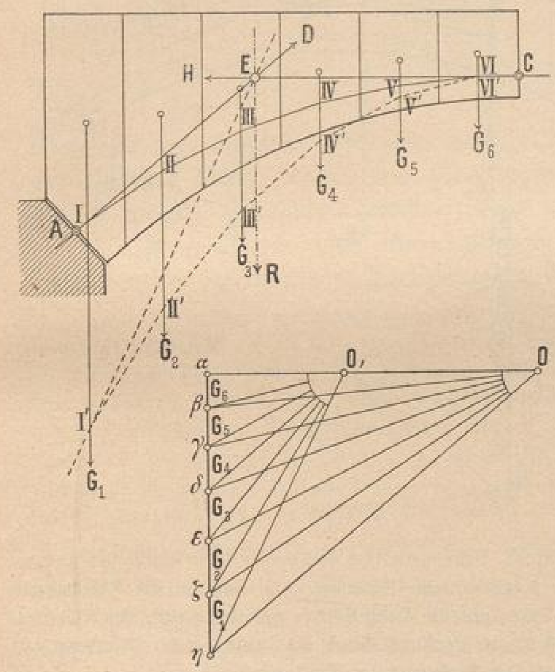
Fig. 379.



272.
Seilcurve für ſymmetriſch zur Scheitel-Lothrechten angeordneten und belaſteten Bogen.

Bei dem zur Scheitel-Lothrechten ſymmetriſch geſtalteten und ſymmetriſch belaſteten Bogen, bezw. Gewölbe iſt nach Art. 271 die Seilcurve ſymmetriſch geſtaltet; mithin iſt es ausreichend, eine Hälfte derſelben zu conſtruiren. Dieſe Conſtruction iſt in Fig. 380 vorgeführt. Die Belaſtungsfläche ſei dargeſtellt, und es ſei vorgeſchrieben, daſs die Mittelkraftslinie durch C und A gehe, auſserdem in C wagrecht ſei.

Fig. 380.



Man zerlege die Belaſtungsfläche in eine Anzahl lothrechter Lamellen, deren Gewichte G_6, G_5, G_4 ... G_1 durch Multiplication der Flächengröſsen der einzelnen Lamellen mit der (ſenkrecht zur Bildfläche gedachten) Einheit und dem Einheitsgewichte der Belaſtung ermittelt werden. Dieſe Gewichte haben ihre Angriffspunkte in den Schwerpunkten der einzelnen Lamellen. Die Gewichte G_6, G_5, G_4 ... G_1 werden nun zu einem Kraftpolygon $\alpha\beta\gamma\ldots\eta$ an einander getragen, und ihre Mittelkraft wird nach Gröſse und Lage geſucht. Die Gröſse derſelben iſt $\overline{\alpha\eta}$. Um die Lage derſelben zu erhalten, conſtruire man mit einem beliebigen Pol O_1 ein Seilpolygon; die Mittelkraft geht dann durch den Schnittpunkt der äuſserſten Seilpolygonſeiten, d. h. derjenigen, welche vor G_6 vorhergeht und derjenigen, welche auf G_1 folgt. Es empfiehlt ſich, den Pol auf der durch α gehenden Wagrechten zu wählen (hier iſt O_1 als Pol genommen) und die erſte Seilpolygonſeite durch C zu legen. Das Seilpolygon in Fig. 380 für Pol O_1 iſt $C, VI', V', IV', III', II', I'$; die Mittelkraft $\sum_1^6 (G)$ muſs durch den Punkt E gehen und lothrecht ſein. Nachdem nunmehr die auf die Hälfte des Gewölbes wirkenden Einzellaſten durch ihre Mittelkraft R erſetzt ſind, wirken auf dieſen Gewölbtheil nur noch drei Kräfte: R, die Kraft im Scheitel C und der Kämpferdruck D im Punkte A. Des Gleichgewichtes wegen müſſen ſie ſich in einem Punkte ſchneiden; die Scheitelkraft geht durch C und iſt bei der vorgeſehenen Belaſtung und Conſtruction wagrecht, ſchneidet ſich alſo mit R im Punkte E; durch dieſen Punkt muſs alſo auch die Kämpferkraft gehen; da dieſe aber auch durch A geht, ſo iſt ihre Richtung durch die Punkte A und E beſtimmt. R zerlegt ſich alſo im Punkte E in die beiden Kräfte H und D. Die Gröſsen von H und D werden erhalten, indem man durch α die Parallele zu H, durch η die Parallele zu AE zieht; dann wird $\overline{\eta O} = D$ und $\overline{O\alpha} = H$.

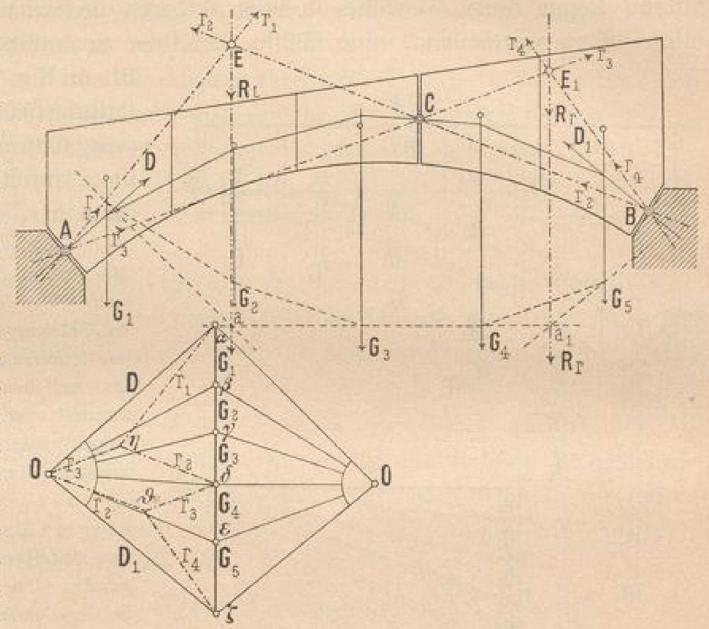
Man erhält nun die Mittelkraftslinie, indem man die in C angreifende Kraft H zunächſt im Schnittpunkte VI mit G_6 zu einer Reſultirenden zuſammenſetzt; Gröſse und Richtung derſelben ſind durch $O\beta$ im Kraftpolygon gegeben; die durch VI parallel zu $O\beta$ gezogene Linie giebt ihre Lage. Wo die Mittelkraft ſich mit G_5 ſchneidet, d. h. in Punkt V, ſetzt man ſie mit dieſer Kraft zuſammen. Gröſse und Richtung dieſer neuen Mittelkraft giebt $\overline{O\gamma}$ im Kraftpolygon; die Lage wird erhalten, indem man durch V die Parallele zu $\overline{O\gamma}$ zieht. Indem man ſo weiter conſtruirt, erhält man im Kraftpolygon Gröſse und Richtung aller Mittelkräfte, im Seilpolygon $C, VI, V, IV, III, II, I, A$ die Mittelkraftslinie. Als Controle dient, daſs die Mittelkraftslinie durch A geht.

273. Mittelkraftslinie für unſymmetriſche Bogen.

Bei einem beliebig geſtalteten Bogen mit beliebiger Belaſtung (Fig. 381) ergiebt ſich die durch drei vorgeſchriebene Punkte A, C, B verlaufende Mittelkraftslinie, wie folgt.

Man kann die Conſtruction als aus zwei ungleichen Hälften beſtehend auffaſſen, welche einander im Scheitelpunkte C ſtützen. Der Kämpferdruck in A beſteht aus zwei Theilen: demjenigen, welcher durch die Belaſtung nur der linken Hälfte erzeugt wird, und demjenigen, welcher durch die Belaſtung nur der rechten Hälfte hervorgerufen wird. Eben ſo verhält es ſich mit dem Kämpferdruck in B. Nimmt man zunächſt nur die linke Hälfte belaſtet, alſo die rechte Hälfte gewichtslos an, ſo hat wie beim Dreigelenkdach (ſiehe Art. 210, S. 211) der Kämpferdruck von B die Richtung BC. Eine gleich groſse und gleich gerichtete Kraft wird von der rechts liegenden Hälfte in C auf die linke Hälfte übertragen; auf dieſe Hälfte wirken auſserdem noch die Reſultirende der Laſten G_1, G_2, G_3 und der Kämpferdruck von A. Die Gröſse und Lage der Reſultirenden von G_1, G_2 und G_3 findet man leicht durch Auftragen der Laſten zu einem Kraftpolygon und Verzeichnen eines Seilpolygons für einen beliebigen Pol. Der Schnittpunkt a der vor G_1 vorhergehenden und der auf G_3 folgenden Seilpolygonſeite giebt einen Punkt der Reſultirenden R_l. Da letztere lothrecht iſt, ziehe man eine lothrechte Linie durch a; alsdann iſt dieſe die Reſultirende R_l. Die in C wirkende Kraft mit der Richtung BC ſchneidet die Reſultirende in Punkt E; durch dieſen Punkt muſs auch die dritte auf die linke Hälfte wirkende Kraft, der Kämpferdruck von A gehen. Man ziehe $\overline{AE}$; alsdann wird R_l im Punkt E durch die beiden dieſer Belaſtung entſprechenden Kämpferdrücke r_1 und r_2 aufgehoben. Die Zerlegung im Kraftpolygon ergiebt $r_1 = \overline{\eta\alpha}$ und $r_2 = \overline{\delta\eta}$.

Fig. 381.



In gleicher Weiſe beſtimmt man weiter die Kämpferdrücke r_3 und r_4, welche in A, bezw. B durch die Belaſtung nur der rechten Hälfte erzeugt werden. Da für dieſe Belaſtungsweiſe die linke Hälfte gewichtslos iſt, ſo fällt r_3 in die Linie $\overline{AC}$; R_r geht durch a_1; r_3 ſchneidet ſich mit R_r in E_1, und durch E_1 muſs auch die dritte auf die rechte Hälfte wirkende Kraft, der Kämpferdruck r_4 von B gehen. Es iſt $\overline{\delta\zeta} = R_r$, und die Zerlegung von R_r ergiebt $\overline{\zeta\vartheta} = r_4$ und $\overline{\vartheta\delta} = r_3$. In Wirklichkeit ſind beide Hälften belaſtet; demnach wirken im linken Kämpferpunkt A ſowohl r_1 wie r_3, im rechten Kämpferpunkt B ſowohl r_2 wie r_4. Die Zuſammenſetzung von r_3 und r_1 giebt als Kämpferdruck bei A die Kraft $A_1 = \overline{O\alpha}$, diejenige von r_2 und r_4 als Kämpferdruck bei B die Kraft $B_1 = \overline{\zeta O}$. Um eine einfache Figur zu erhalten, iſt an η: $\overline{O\eta} = r_3$ und an ϑ: $\overline{\vartheta O} = r_2$ gelegt und ſo das Parallelogramm $O\eta\delta\vartheta$ gezeichnet. Die Mittelkraftslinie ergiebt ſich nun leicht, indem man der Reihe nach A_1 mit G_1, G_2 ... eben ſo zufammenfetzt, wie für das fymmetrifche Gewölbe in Art. 272 (S. 287) gezeigt worden ift. Die Mittelkraftslinie ift das Seilpolygon für den Pol O. Als Controle diene, dafs die Mittelkraftslinie durch C und B verlaufen mufs.

Beim Verzeichnen der Mittelkraftslinie handelt es fich meiftens darum, aus diefer Linie die Stützlinie zu conftruiren, d. h. die Punkte zu finden, in denen die einzelnen Gewölbequerfchnitte von den auf fie wirkenden Mittelkräften gefchnitten werden (fiehe Art. 268, S. 283). Da aber die Gewölbequerfchnitte nicht, wie in Fig. 380 u. 381 angenommen war, lothrecht find, fondern radial verlaufen, fo ift eine Verbefferung nöthig. Man kann zunächft auf die wirkliche Querfchnittslage dadurch leicht Rückficht nehmen, dafs man die Lamellengrenzen entfprechend der 274. Verbefferungen.

Fig. 382.

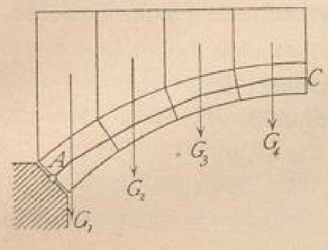


Fig. 383.

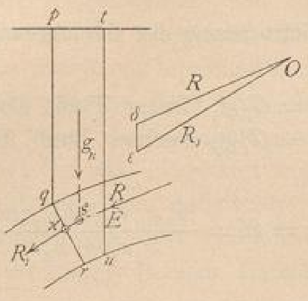
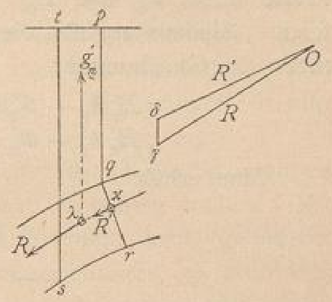


Fig. 384.



Lage der Querfchnitte wählt (Fig. 382). Das Verfahren zur Ermittelung der Gleichgewichtslinie bleibt genau, wie oben gezeigt; nur ift die Ermittelung der Schwerpunkte für die einzelnen Lamellen etwas umftändlicher als dort.

Es können aber auch die Conftructionen in Fig. 380 u. 381 benutzt werden, wenn nur die nachftehend befchriebenen Verbefferungen vorgenommen werden.

Die der richtigen Querfchnittslage entfprechende Lamellengrenze fei pqr (Fig. 383); bei der lothrechten Theilung fei tu als Grenze angenommen und dabei fei die Kraft R, welche tu in E fchneidet, als Mittelkraft aller rechts von tu wirkenden äufseren Kräfte gefunden. Um nun den Punkt der Stützlinie zu finden, welcher in qr liegt, braucht man nur die Mittelkraft aller rechts von qr wirkenden Kräfte aufzufuchen und ihren Schnittpunkt mit qr zu ermitteln. Diefe gefuchte Kraft ift offenbar die Mittelkraft von R und dem Gewichte g_n des Gewölbetheiles $pqrut$. Es fei $R = O\delta$ und $g_n = \delta\varepsilon$; alsdann ift die gefuchte Mittelkraft $R_1 = O\varepsilon$, geht durch ρ und ift parallel zu $O\varepsilon$. Diefe Kraft R_1 ift in Fig. 383 gezeichnet; fie fchneidet die Fuge qr in $\varkappa$; fonach ift $\varkappa$ ein Punkt der richtigen Stützlinie.

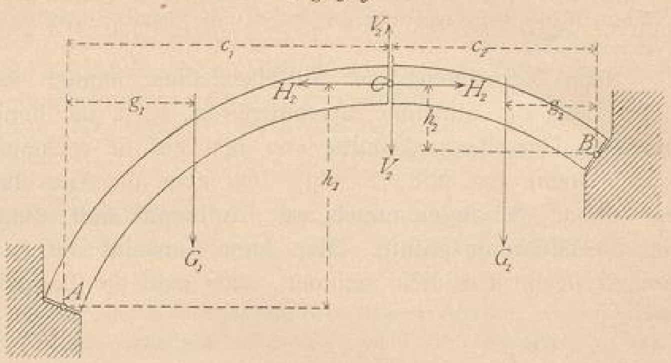
Ganz ähnlich ift zu verfahren, wenn die lothrechte Lamellengrenze an der anderen Seite der wirklichen Fuge liegt (Fig. 384).

Die Mittelkraft aller an der einen Seite von ts wirkenden Kräfte, R, enthält das Gewicht des Stückes $tsrqp$ bereits; um alfo die Mittelkraft R', welche auf die Fuge qr wirkt, zu erhalten, mufs man R mit dem negativ genommenen, alfo nach oben gerichteten Gewichte g_n' zufammenfetzen. Es fei $R = O\gamma$ und $g_n' = \gamma\delta$; alsdann wird $R' = O\delta$, geht durch den Punkt λ, in welchem fich R und g_n' fchneiden, und ift parallel zu $O\delta$. Der richtige Punkt der Stützlinie ift $\varkappa$.

In Art. 270 (S. 285) ift gezeigt worden, wie der Horizontalfchub in einem fymmetrifch zur Scheitelfuge geformten und belafteten Gewölbe durch Rechnung gefunden werden kann. Auch beim unfymmetrifchen Gewölbe macht, wenn drei Punkte für den Verlauf der Mittelkraftslinie vorgefchrieben find, die Berechnung des Horizontalfchubes keine Schwierigkeit. Das Verfahren entfpricht genau demjenigen, welches für die Ermittelung der Auflagerdrücke beim Sprengwerksdach mit drei Gelenken in Art. 210 (S. 211) vorgeführt worden ift. 275. Horizontalfchub im unfymmetrifchen Gewölbe.

Die Mittelkräfte der Laften auf dem linken, bezw. rechten Gewölbetheile feien G_1, bezw. G_2; die Entfernungen diefer Laften von den Kämpferpunkten feien bezw. g_1 und g_2 (Fig. 385). Die beiden Theile übertragen im Punkte C auf einander eine Kraft, deren Seitenkräfte bezw. V_2 und H_2 feien. Alsdann ergiebt die Betrachtung der Gleichgewichtszuftände beider Gewölbetheile die Gleichungen:

Fig. 385.



$$H_2 h_1 + V_2 c_1 = G_1 g_1 \text{ (linker Theil, Drehpunkt } A);$$
$$H_2 h_2 - V_2 c_2 = G_2 g_2 \text{ (rechter Theil, Drehpunkt } B).$$

Man erhält

$$H_2 = H = \frac{G_1 g_1 c_2 + G_2 g_2 c_1}{h_1 c_2 + h_2 c_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 390.$$

2. Kapitel.

Tonnen- und Kappengewölbe.

276. Stabilität.

Die Zerftörung des Gewölbes kann erfolgen:

1) durch Umkanten eines Gewölbetheiles um eine innere oder äufsere Kante,
2) durch Gleiten einzelner Gewölbetheile längs der Fugen und
3) durch Zerdrücken der Wölbfteine.

Wenn die Lage der Stützlinie bekannt ift, fo können alle auf die Standficherheit des Gewölbes bezügliche Fragen leicht beantwortet werden. Dabei ift zu beachten, dafs, falls für den Verlauf der Mittelkraftslinie drei Punkte vorgefchrieben find, welche in Fugen liegen, diefelben entfprechend der für die Stützlinie gegebenen Erklärung auch Punkte der Stützlinie find.

Im Hochbau handelt es fich faft ftets nur um die Ermittelung des im Gewölbe wirkenden Horizontalfchubes, weil diefe Kraft hauptfächlich die Mauern, welche das Gewölbe, bezw. den Bogen ftützen, gefährdet. Wäre die Stützlinie bekannt, fo wäre auch der Horizontalfchub bekannt. Die Ermittelung der genauen Lage derfelben ift aber nach Art. 266 (S. 281) nur mittels der Elafticitäts-Theorie der Gewölbe möglich, und diefe Ermittelung ift fehr umftändlich. Es ift aber auch ausreichend, gewiffe Grenzlagen für die Stützlinie und damit gewiffe Grenzwerthe für den Horizontalfchub feft zu legen.

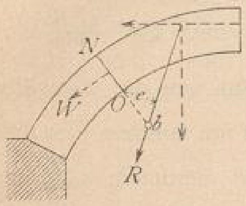
277. Stabilität gegen Kanten.

Soll das Gewölbe ftabil fein, fo mufs die Stützlinie ganz im Gewölbe liegen.

Wenn die Refultirende R aller an der einen Seite des Querfchnittes NO wirkenden Kräfte (Fig. 386) die Verlängerung des Querfchnittes etwa im Punkte b fchneidet, fo hat diefe Kraft in Bezug auf O ein Moment $M = Re$, welches eine

Drehung des oberhalb NO liegenden Gewölbetheiles um O erstrebt. Diese Drehung kann nur durch eine andere, entgegengesetzt drehende Kraft W (in Fig. 386 punktirt) aufgehoben werden, d. h. durch einen Zugwiderstand der Gewölbefasern. Die Wölbsteine können aber einen solchen, wenn von der Zugfestigkeit des Mörtels abgesehen wird, nicht leisten, so dass also keine Kraft vorhanden ist, welche das Gleichgewicht herstellen könnte. Der oberhalb der Fuge befindliche Gewölbetheil würde demnach um O kanten und einstürzen. Eine Aufhebung der Kraft R ist erst möglich, wenn dieselbe den Querschnitt NO schneidet; alsdann erzeugt sie in einzelnen Theilen des Querschnittes Druckspannungen, welche R aufheben. Soll also das Gewölbe nicht um O kanten, so muss der Schnittpunkt der Mittelkraft R mit dem Querschnitte, d. h. der Schnittpunkt der Stützlinie mit dem Querschnitte, in das Gewölbe fallen. Was aber vom Querschnitt NO gilt, gilt von allen Querschnitten. Das Gewölbe ist also nur dann gegen Kanten stabil, wenn die Stützlinie ganz im Gewölbe liegt.

Fig. 386.



In Art. 126 bis 132 (S. 111 bis 120) ist gezeigt worden, wie sich die Spannungen für Stützen ergeben, falls auf dieselben Axialkräfte und Momente wirken. Mit hinreichender Genauigkeit können die dort gefundenen Formeln auch gebraucht werden, um die Spannungsvertheilung in den Gewölbequerschnitten zu ermitteln. Die Spannung in einem Punkte, welcher um z von der senkrecht zur Bildebene errichteten Schwerpunktsaxe des Querschnittes absteht, ist demnach nach Gleichung 102 278. Stabilität gegen Zerdrücken.

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F \xi z}{\mathcal{J}}\right).$$

Hier handelt es sich nur um rechteckige Querschnitte von der Höhe d und der Breite 1 (senkrecht zur Bildebene); mithin ist $F = d \, . \, 1$ und $\mathcal{J} = \frac{d^3}{12}$; daher

$$\sigma = \frac{P}{d}\left(1 + \frac{12 \xi z}{d^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 391.$$

Da P hier stets Druck ist und wir P als positiv einführen, so bedeuten die positiven Werthe von σ Druck, die negativen Werthe Zug. Der größte Druck σ_{max} findet für die in Fig. 387 gezeichnete Lage der Kraft P in den Punkten U statt, für welche z seinen größten Werth $\frac{d}{2}$ hat; der kleinste Druck σ_{min} in den Punkten V, für welche z seinen kleinsten Werth $-\frac{d}{2}$ hat; demnach wird

Fig. 387.

$$\sigma_{max} = \frac{P}{d}\left(1 + \frac{12 \xi d}{2 d^2}\right) = \frac{P}{d}\left(1 + \frac{6 \xi}{d}\right) \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = \frac{P}{d}\left(1 - \frac{6 \xi}{d}\right) \quad . \quad . \quad 392.$$

σ_{min} wird zu Null, wenn $1 - \frac{6 \xi}{d} = 0$, d. h. wenn $\xi = \frac{d}{6}$ ist.

In den am wenigsten gedrückten Punkten V findet also die Spannung Null statt, wenn die Mittelkraft den Querschnitt in der Höhe $\frac{d}{6}$ über der Mittellinie des Gewölbes schneidet. Schneidet die Kraft P, also die Stützlinie, den Querschnitt unterhalb O, so ergiebt sich leicht aus Gleichung 391 (indem man $-\xi$ statt $+\xi$ einführt), dass der größte Druck in den Punkten V, der größte Zug in den Punkten U

ſtattfindet. In U findet demnach die Spannung Null ſtatt, wenn die Stützlinie den Querſchnitt in dem Abſtande $\frac{d}{6}$ unterhalb der Schwerpunktsaxe ſchneidet.

σ_{max} und σ_{min} haben gleiches Vorzeichen für diejenigen Werthe von ξ, für welche gleichzeitig ſtattfindet

$$1 + \frac{6\,\xi}{d} > 0 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{6\,\xi}{d} > 0, \text{ d. h. für } \xi > -\frac{d}{6} \quad \text{und} \quad \xi < +\frac{d}{6}.$$

So lange alſo der Schnittpunkt der Mittelkraft nicht weiter von der Gewölbemittellinie entfernt iſt, als $\frac{d}{6}$, d. h. ſo lange der Schnittpunkt im inneren Gewölbedrittel liegt, haben σ_{max} und σ_{min} gleiches Vorzeichen, ſind demnach σ_{max} und σ_{min} Druck; dann findet aber im ganzen Querſchnitte nur Druck ſtatt. (Vergl. Art. 128, S. 114.)

Iſt dagegen ξ gröſser als $\frac{d}{6}$, ſo findet in der am meiſten gezogenen Faſer Zugbeanſpruchung ſtatt; dann gilt die Gleichung 391 für die Druckvertheilung nicht mehr, weil dieſe unter der Annahme einer Beanſpruchung aller Querſchnittspunkte entwickelt worden iſt; falls aber hier einzelne Punkte des Querſchnittes auf Zug beanſprucht werden, ſo kann man auf Beanſpruchung aller Querſchnittspunkte nicht mit Sicherheit rechnen. Die dann geltenden Gleichungen ſind in Art. 129 (S. 116) entwickelt. Falls ξ gröſser als $\frac{d}{6}$ iſt, mit anderen Worten, falls die Stützlinie einen Querſchnitt auſserhalb des inneren Drittels ſchneidet, etwa im Abſtande c von den zunächſt gelegenen äuſseren Punkten, ſo vertheilt ſich nach Gleichung 110 (S. 117) der Druck P auf eine Breite $3\,c$, wobei der Maximaldruck doppelt ſo groſs iſt, als wenn ſich der Druck über die gedrückte Fläche gleichmäſsig vertheilte. Wir erhalten alſo (Alles auf Centimeter bezogen)

$$\sigma_{max} = \frac{2\,P}{3 \,.\, 100 \,.\, c} \quad \cdots\cdots \quad 393.$$

Wird die gröſste, im Wölbmaterial zuläſſige Druckbeanſpruchung für die Flächeneinheit mit K bezeichnet, ſo kann Gleichung 393 benutzt werden, um zu ermitteln, wie weit ſich die Stützlinie der inneren oder äuſseren Gewölbelaibung nähern darf. Man erhält als Bedingungsgleichung:

$$K = \frac{2\,P}{300\,c}, \quad \text{woraus} \quad c = \frac{2\,P}{300\,K} \quad \cdots\cdots \quad 394.$$

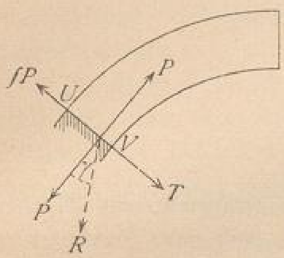
Damit iſt als Bedingung für die Stabilität des Gewölbes gegen Druck gefunden: Soll das Gewölbe genügende Sicherheit gegen Druck bieten, ſo darf der Abſtand der Stützlinie von den Gewölbelaibungen an keiner Stelle kleiner werden, als $\frac{2\,P}{300\,K}$.

Da P für die verſchiedenen Gewölbeſtellen verſchiedene Werthe hat, ſo ergeben ſich für dieſelben auch verſchiedene Gröſsen von c. Meiſtens wird es jedoch genügen, den Gröſstwerth von P, der ſich an den Kämpfern ergiebt, einzuſetzen und dann den für c erhaltenen Werth im ganzen Gewölbe gleich groſs anzunehmen. Man kann in dieſer Weiſe leicht die beiden Linien conſtruiren, zwiſchen denen die Stützlinie verlaufen ſoll.

Die Forderung, daſs in allen Punkten ſämmtlicher Querſchnitte nur Druckbeanfpruchung ftattfinden foll, ift erfüllt, wenn fämmtliche Querfchnitte von ihren zugehörigen Mittelkräften im inneren Gewölbedrittel gefchnitten werden, d. h. wenn die ganze Stützlinie im inneren Drittel verläuft.

Der Einfturz des Gewölbes kann endlich auch dadurch verurfacht werden, dafs ein Theil deffelben längs des anderen gleitet. Die Mittelkraft aller auf den Gewölbetheil oberhalb der Fuge UV (Fig. 388) wirkenden Kräfte fei gleich R; alsdann ift Gleichgewicht nur möglich, wenn Seitens der Fuge eine genau gleich grofse und gleich gerichtete Kraft mit entgegengefetztem Sinne auf den betreffenden Gewölbetheil wirkt. Wir zerlegen R in eine Axialkraft $P = R \cos \gamma$ und eine Querkraft $T = R \sin \gamma$. Die Axialkraft P wird, wenn ihr Schnittpunkt mit der Fuge nicht zu nahe an die Laibungen fällt, durch die fenkrecht zum Querfchnitt gerichteten axialen Spannungen, die Querkraft T wird durch den Reibungswiderftand an der Berührungsfläche UV aufgehoben. Nennt man den Reibungs-Coefficienten f, fo ift der Reibungswiderftand $W = fP = fR \cos \gamma$. Gröfser kann W nicht werden; Gleichgewicht gegen Verfchieben ift alfo nur möglich, wenn ftattfindet: $T \leq fR \cos \gamma$, d. h. $R \sin \gamma \leq fR \cos \gamma$ und $\operatorname{tg} \gamma \leq f$. 279. Stabilität gegen Gleiten.

Fig. 388.



Wird der Reibungswinkel mit φ bezeichnet, fo ift $f = \operatorname{tg} \varphi$, und alsdann heifst die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht:

$$\operatorname{tg} \gamma \leq \operatorname{tg} \varphi \quad \text{oder} \quad \gamma \leq \varphi \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 395.$$

Sobald γ gröfser wird, als der Reibungswinkel, kann T nicht aufgehoben werden, und dann findet ein Abgleiten des betrachteten Gewölbetheiles ftatt.

Diefelbe Schlufsfolgerung gilt auch, falls R nach oben um den Winkel γ von der Senkrechten zur Fuge abweicht; nur ift dann das Beftreben vorhanden, den oberen Gewölbetheil nach aufsen zu verfchieben. Was für die Fuge UV gilt, gilt für alle Fugen, fo dafs folgendes Gefetz ermittelt ift: Soll das Gewölbe gegen Gleiten ftabil fein, fo darf an keiner Stelle der Winkel, welchen die Mittelkraftslinie mit der betreffenden Fugenfenkrechten bildet, gröfser fein, als der Reibungswinkel für die betreffenden Materialien.

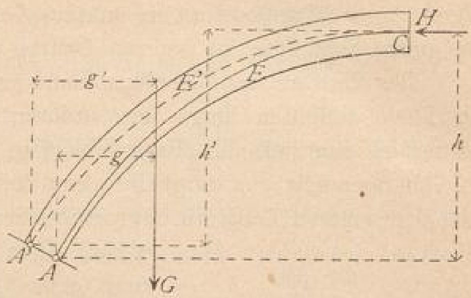
In den meiften Fällen kann man ohne grofsen Fehler ftatt der Mittelkraftslinie die Stützlinie einführen und als Bedingung für die Stabilität des Gewölbes angeben, dafs die Tangente an die Stützlinie nirgends einen Winkel mit der Fugenfenkrechten einfchliefst, welcher gröfser ift, als der Reibungswinkel.

Man kann den Reibungs-Coefficienten f zwifchen $0{,}6$ und $0{,}75$ liegend annehmen, welchen Werthen die Winkel $\varphi = 31$ bis 37 Grad entfprechen. Bei frifchem Mörtel kann der Winkel φ bis auf 27 Grad hinabgehen (f bis auf $0{,}51$). Die Tangenten an die Stützlinie bilden aber nur felten fo grofse Winkel mit den Fugenfenkrechten, fo dafs, wenigftens im eigentlichen Gewölbe, die Stabilität gegen Gleiten felten in Frage kommt.

Betrachtet man die eine Hälfte eines fymmetrifch geftalteten und fymmetrifch belafteten Gewölbes (Fig. 389), auf welche aufser der Belaftung G noch der Horizontalfchub H im Scheitel wirkt, nimmt zunächft als Angriffspunkt von H den Punkt C beliebig und aufserdem an, dafs die Stützlinie die Kämpferfuge in A fchneide, fo geht die Mittelkraft von G und H durch A, und nach Art. 270 (S. 285) ift 280. Grenzlagen der Stützlinie und Grenzwerthe des Horizontalfchubes.

$$H = \frac{G g}{h}.$$

Fig. 389.



Diefen Annahmen, bezw. diefem Werthe des Horizontalfchubes entfpricht eine ganz beftimmte Stützlinie, etwa $C E A$, die in Fig. 389 voll ausgezogen ift.

Conftruirt man ein zweites Mal unter Beibehaltung des Punkes C die Stützlinie für einen anderen Kämpferpunkt, etwa A', fo ergiebt fich etwa die punktirte Stützlinie $C E' A'$, und der zugehörige Horizontalfchub wird

$$H' = G \frac{g'}{h'}.$$

Da $\frac{g'}{h'} > \frac{g}{h}$, fo ift auch $H' > H$.

Man fieht, einer Vergröfserung des Horizontalfchubes entfpricht ein Flacherwerden der Stützlinie, und es ergiebt fich in gleicher Weife, dafs einer Verringerung von H ein Steilerwerden der Stützlinie entfpricht. Offenbar find nun fehr viele Stützlinien möglich, welche fämmtlich durch C gehen und ganz im Gewölbe verlaufen, demnach mit der Stabilität deffelben vereinbar find. Dem kleinften Werthe

Fig. 390.

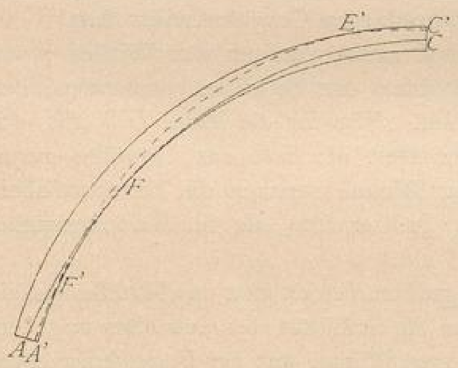
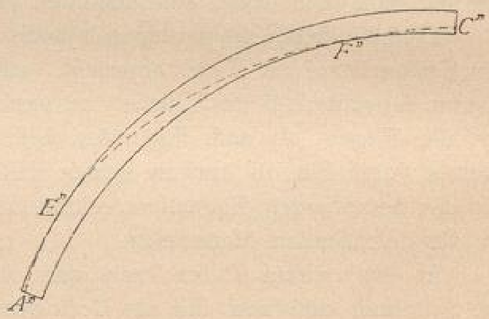


Fig. 391.



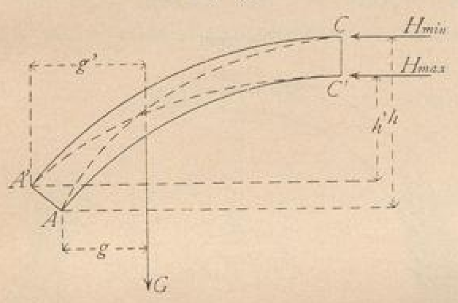
von H mit dem Angriffspunkt C entfpricht diejenige diefer Stützlinien, welche an irgend einer Stelle die innere Gewölbelaibung berührt ($C F A$ in Fig. 390); denn eine weitere Verringerung von H würde zur Folge haben, dafs die Stützlinie bei F aus dem Gewölbe nach innen herausfiele. Nun kann aber jeder Punkt der Scheitelfuge Angriffspunkt der Kraft H fein; es fteht alfo nichts im Wege, einen anderen, höheren Punkt der Scheitelfuge als Angriffspunkt von H anzunehmen, mithin die ganze Stützlinie um das entfprechende Stück parallel fich felbft nach oben zu verfchieben. Jetzt kann der Horizontalfchub weiter verringert werden, und man kann damit fo weit fortfahren, bis die Stützlinie gleichzeitig die äufsere und die innere Laibung berührt. Diefe Stützlinie fei (Fig. 390) etwa $C' E' F' A'$. Eine weitere Verringerung von H hat die Folge, dafs die Stützlinie bei F' das Gewölbe verläfft; ein weiteres Hinauffchieben der Stützlinie ift auch nicht möglich, weil bei einem folchen — follte es fo weit fortgefetzt werden, dafs bei F' die Stützlinie wieder in das Gewölbe fällt — bereits vorher die Stützlinie bei E' aufserhalb des Gewölbes gefallen wäre.

Die gezeichnete Stützlinie $C' E' F' A'$ entfpricht alfo dem Minimum von H und heifst defshalb die Minimalftützlinie. Es ergiebt fich demnach: Die Minimalftützlinie hat jederfeits mit den Gewölbelaibungen zwei Punkte gemeinfam, und zwar liegen die Berührungspunkte mit der äufseren Laibung über denjenigen mit der inneren Laibung.

Bei flachen Bogen fällt gewöhnlich der Berührungspunkt mit der äufseren Laibung in die Scheitelfuge, derjenige mit der inneren Laibung jederfeits in die Kämpferfuge; die beiden Berührungspunkte E' mit der äufseren Laibung können zufammenfallen.

In gleicher Weife erhält man die Stützlinie, welche dem Maximum von H entfpricht, die Maximalftützlinie ($C'' F'' E'' A''$ in Fig. 391). Die Maximalftützlinie hat jederfeits des Scheitels mit den Gewölbelaibungen zwei Punkte gemeinfam, und zwar liegen die Berührungspunkte mit der inneren Laibung über denjenigen mit der äufseren Laibung; die beiden erfteren können zufammenfallen.

Fig. 392.



Bei flachen Bogen fallen die beiden Berührungspunkte mit der inneren Laibung in die Scheitelfuge, die Berührungspunkte mit der äufseren Laibung in die Kämpferfugen.

In Fig. 392 ift CA die Minimal- und $C'A'$ die Maximalftützlinie. Die entfprechenden Werthe von H find

$$H_{min} = \frac{G g}{h} \quad \text{und} \quad H_{max} = \frac{G g'}{h'} \quad . \quad 396.$$

Wenn wir demnach auch die wirkliche Lage der Stützlinie und die wirkliche Gröfse von H durch die Gleichgewichtsbedingungen allein nicht ermitteln können, fo haben wir doch jetzt Grenzen fowohl für die Lage der Stützlinie, als auch für die Gröfse des Horizontalfchubes gefunden. Der Horizontalfchub kann nicht gröfser fein, als H_{max}, und nicht kleiner, als H_{min}.

Fallen Maximal- und Minimalftützlinie nicht zufammen, fo ift eine Anzahl von Stützlinien möglich, welche folchen Werthen des Horizontalfchubes entfprechen, die zwifchen H_{max} und H_{min} liegen. Je gröfser der Unterfchied diefer beiden Werthe ift, defto mehr Stützlinien find möglich, defto gröfsere Aenderung darf H erleiden, ehe das Gewölbe einftürzt, defto ftabiler ift alfo das Gewölbe. Man kann demnach fchliefsen: Ein Gewölbe ift ftabil, wenn eine Maximal- und eine Minimalftützlinie möglich ift und beide nicht zufammenfallen. Die Stabilität ift um fo gröfser, je gröfser die Unterfchiede diefer beiden Stützlinien find, bezw. je gröfser der Unterfchied $H_{max} - H_{min}$ ift.

Im vorhergehenden Artikel war abfolut feftes Material angenommen, und es konnte defshalb eine Berührung der Stützlinie und der Gewölbelaibung als möglich vorausgefetzt werden. In Wirklichkeit darf nach Art. 278 (S. 291) die Stützlinie nicht näher an die Laibungen treten, als dafs der Abftand noch $c = \frac{2P}{300 K}$ ift. Bei einer Berührung der Laibung durch die Stützlinie würde an diefer Stelle $c = 0$, und da nach Gleichung 393: $\sigma_{max} = \frac{2P}{300 c}$ ift, hier $\sigma_{max} = \frac{2P}{0} = \infty$ fein. 281. Praktifche Grenzlagen der Stützlinie.

Man ftellt defshalb die Bedingung, dafs eine Maximal- und eine Minimalftützlinie möglich ſei, welche wenigſtens um $\frac{2\,P}{300\,K}$ von den Gewölbelaibungen abſtehen, und daſs beide nicht zuſammenfallen.

Wenn im inneren Drittel des Gewölbes, in der ſog. Kernfläche, eine Maximal- und eine Minimalſtützlinie möglich iſt und beide nicht zuſammenfallen, ſo iſt dies noch günſtiger.

Die Stabilität gegen Gleiten erfordert, daſs die Tangente an die Stützlinie an keiner Stelle einer gröſseren, als den Reibungswinkel mit der Fugen-Senkrechten mache. Dieſer Bedingung müſſen alſo auch die Maximal- und Minimalſtützlinie genügen.

282. Horizontalſchub für verſchiedene Bogenformen.

Für einige häufig vorkommende Bogenformen ergeben ſich die Horizontalſchübe unter Annahme ſymmetriſcher Form und Belaſtung, ſo wie unter der weiteren Annahme einer mittleren Stützlinie folgendermaſsen.

1) Flachbogen (Fig. 393 *a*). Nach Früherem iſt $H = \frac{G\,g}{h}$.

2) Scheitrechter Bogen. Man kann die Tragfähigkeit des ſcheitrechten Bogens als eben ſo groſs annehmen, wie diejenige eines Flachbogens, deſſen Mittel-

Fig. 393.

a)

b)

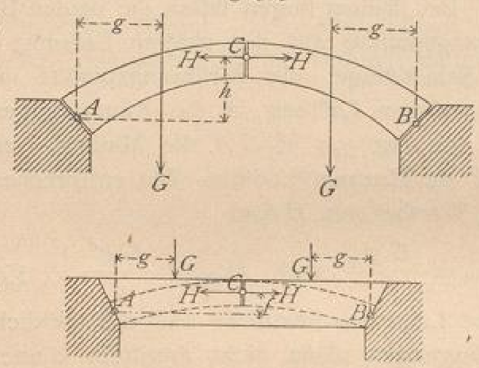
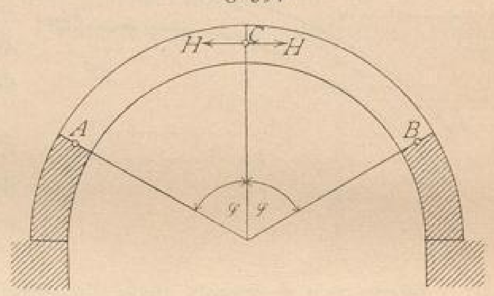


Fig. 394.



punkt auf der Lothrechten der Scheitelfuge liegt und deſſen innere Laibung durch die unteren Punkte der Kämpferfugen, deſſen äuſsere Laibung durch den oberſten Punkt der Scheitelfuge geht. Dann wird nach Fig. 393 *b*

$$H = \frac{G\,g}{f}.$$

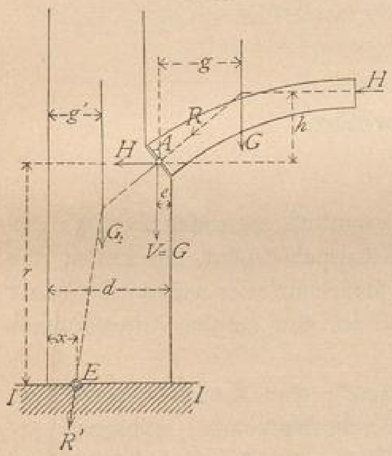
3) Halbkreisbogen. Eine halbkreisförmige Mittelkraftslinie für lothrechte (hier nur in Betracht kommende) Belaſtung giebt es nicht; denn bei derſelben müſste die Tangente an jedem Kämpfer, alſo auch die Mittelkraft an dieſer Stelle, lothrecht ſein. Da aber die Mittelkraft ſtets eine wagrechte Seitenkraft (den Horizontalſchub) hat, ſo kann ſie nie lothrecht ſein. Deſshalb kann die Mittelkraftslinie nicht einen vollen Halbkreis vorſtellen. Man muſs daher die unteren Theile des Bogens als zum Widerlager gehörig betrachten und berechnet den Horizontalſchub H für den zwiſchengeſpannten Flachbogen (Fig. 394). Der Winkel φ wird zweckmäſsig etwa gleich 60 Grad gewählt; H ergiebt ſich dann, wie unter 1.

283. Stabilität der Widerlager und Pfeiler.

Bei den Widerlagern, bezw. Mittelpfeilern der Gewölbe kann man, genau wie bei den Gewölben ſelbſt, von einer Stützlinie ſprechen, wenn man dieſelbe als Geſammtheit der Punkte erklärt, in welchen die einzelnen Querſchnitte der Widerlager, bezw. Pfeiler von den auf fie wirkenden Mittelkräften gefchnitten werden. Alsdann gelten die in Art. 276 bis 279 (S. 290 bis 293) aufgeftellten Sätze auch hier und können folgendermafsen ausgefprochen werden: Soll das Widerlager, bezw. der Pfeiler gegen Kanten, Zerdrücken und Gleiten ftabil fein, fo mufs die Stützlinie ganz im Widerlager, bezw. Pfeiler liegen, darf die Mittelkraft an keiner Querfchnittsftelle eine gröfsere Druckbeanfpruchung erzeugen, als der Bauftoff geftattet, und darf endlich der Winkel der Mittelkraft mit der Senkrechten zur Fuge an keiner Stelle gröfser fein, als der Reibungswinkel.

1) Widerlager. Die vom Gewölbe auf ein Widerlager ausgeübte Kraft R ift nach Gröfse und Richtung gleich dem Kämpferdruck, welcher auf das Gewölbe wirkt, dem Sinne nach demfelben entgegengefetzt. Wenn R bekannt oder angenommen ift, fo kann die entfprechende Widerlager-Stützlinie leicht durch Zufammenfetzung diefer Kraft R mit den Widerlagerlaften conftruirt werden. Für R und H find aber nach Obigem nur gewiffe Grenzen bekannt. Wenn nun das Widerlager für die Grenzwerthe von H ftabil ift, fo offenbar auch für die Mittelwerthe. Ift es alfo möglich, für den Maximal- und Minimalwerth von H je eine Widerlager-Stützlinie zu conftruiren, welche obigen Bedingungen genügt, fo ift das Widerlager ftabil. Da die Maximalwerthe von H nur in Folge künftlicher Vergröfserung des Horizontalfchubes auftreten, fo ift es meiftens ausreichend, den Nachweis unter Zugrundelegung eines mittleren Werthes von H zu führen, d. h. eines folchen Werthes, welcher einer mittleren Gewölbe-Stützlinie entfpricht.

Fig. 395.



Auf dem Wege der Rechnung kann man die Stabilität des Widerlagers folgendermafsen unterfuchen. Man fucht die Punkte, in welchen die Stützlinie die einzelnen Fugen fchneidet, und ermittelt die in denfelben hervorgerufenen Druckfpannungen. Die Unterfuchung foll für die Fuge II (Fig. 395) gezeigt werden. Die Mittelkraft aller oberhalb von II wirkenden Kräfte fchneide die Fuge im Punkte E; dann ift E ein Punkt der Stützlinie. Die Lage von E ift bekannt, wenn x, der Abftand von der äufseren Mauerkante, bekannt ift. Auf das Widerlager wirken in A: der Kämpferdruck R, deffen wagrechte, bezw. lothrechte Seitenkraft H, bezw. V ift. Es ift $H = \frac{G g}{h}$ und $V = G$. Aufser diefen Kräften wirkt als belaftend auf die Fuge II noch das Gewicht der Mauer, fo weit fie oberhalb II liegt, d. h. G_1. Die Mittelkraft von H, $V (= G)$ und G_1 ift R', und diefe Kraft geht durch E, hat alfo für den Drehpunkt E das ftatifche Moment Null. Demnach ift auch die algebraifche Summe der ftatifchen Momente der Einzelkräfte für E als Drehpunkt gleich Null, alfo

$$0 = G_1 (g' - x) + G (d - e - x) - H r ,$$

woraus

$$x = \frac{G_1 g' + G (d - e) - H r}{G + G_1}$$

folgt. Wenn fich für x ein negativer Werth ergiebt, fo bedeutet dies, dafs die

Kraft R' den Querfchnitt links von der Aufsenkante der Mauer fchneidet, dafs alfo Kanten eintreten mufs.

Die lothrechte Seitenkraft der Mittelkraft R' ift offenbar $P = G_1 + G$. Nachdem in E der Schnittpunkt der Mittelkraft mit der Fuge gefunden ift, kann man die gröfste in der Fuge durch diefe Belaftung erzeugte Druckfpannung ermitteln, wie in Art. 127 bis 130 (S. 112 bis 117) für verfchiedene Querfchnittsformen gezeigt ift. Wenn der Querfchnitt ein Rechteck von der Länge b (fenkrecht zur Bildfläche gemeffen) ift und die Kraftebene denfelben in der Hauptaxe fchneidet, fo ift für $x < \frac{d}{3}$

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{3xb}.$$

x und b find in Centimetern, P in Kilogramm einzufetzen; alsdann erhält man σ_{max} in Kilogramm für das Quadr.-Centimeter. In ganz derfelben Weife kann man die Unterfuchung für eine Anzahl von Fugen führen.

2) Pfeiler. Die Stabilitätsunterfuchung eines zwifchen zwei Gewölben befindlichen Mittelpfeilers wird entfprechend vorgenommen.

Die Punkte E können auch leicht graphifch ermittelt werden, indem man R mit G_1 zu R' zufammenfetzt und in gleicher Weife weiter für die verfchiedenen Fugen verfährt.

---

3. Kapitel.

Kreuz- und Kuppelgewölbe.

a) Kreuzgewölbe.

284. Lagerfugen.

Die Einwölbung erfolgt beim Kreuzgewölbe bekanntlich entweder fo, dafs die Lagerfugen parallel zu den Längsaxen der einzelnen Kappen laufen, aus denen das Kreuzgewölbe befteht, oder fo, dafs fie im Grundrifs fenkrecht oder nahezu fenkrecht zu den Graten verlaufen. Das ftatifche Verhalten ift bei den beiden Anordnungen verfchieden.

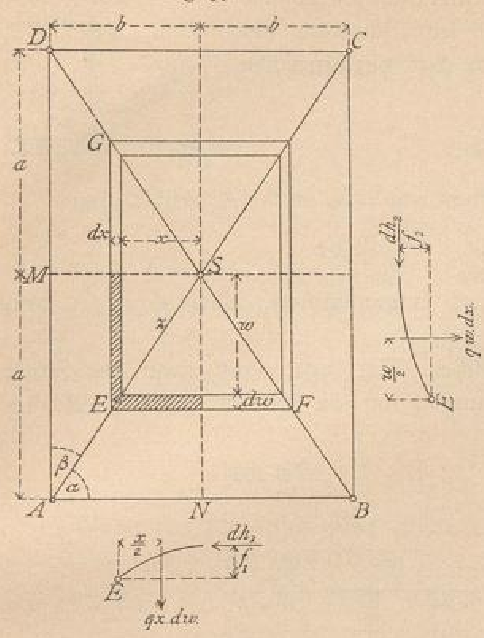
285. Lagerfugen parallel zur Axe der Kappen.

1) Die Lagerfugen laufen zu den Längsaxen der Kappen parallel. Bei den hier vorzunehmenden Berechnungen foll die vereinfachende, genügend genaue Annahme einer über die Grundfläche gleichmäfsig vertheilten Belaftung q auf die Flächeneinheit gemacht werden. Für die Ermittelung der Seilcurve und damit auch des Horizontalfchubes werden ftets drei Punkte angenommen werden.

Der nachfolgenden Unterfuchung foll ein Kreuzgewölbe über rechteckigem Raume zu Grunde gelegt werden; die Anwendung für ein folches mit quadratifchem Grundriffe ift dann leicht.

Zerlegt man jede Kappe durch fenkrecht zur Längsaxe gelegte, lothrechte Ebenen in einzelne Streifen, welche im Grundrifs Paralleltrapeze bilden (Fig. 396), und betrachtet man zwei folche Streifen GE und EF, die fich im Punkte E des Grates treffen, fo ergeben fich die auf diefe Streifen in ihren Scheiteln übertragenen Horizontalfchübe folgendermafsen. Bezeichnet man die Pfeilhöhen der Seilcurven in den Streifen bezw. mit f_1 und f_2, die Horizontalfchübe mit bezw. dh_1 und dh_2, fo erhält man nach Fig. 396

Fig. 396.



$$d h_1 = \frac{q x^2 d w}{2 f_1} \text{ und } d h_2 = \frac{q w^2 d x}{2 f_2} \qquad 397.$$

Der Punkt E ift der gemeinfame Kämpferpunkt für die beiden Bogen GE und EF; die in diefem Punkte auf den Gratbogen von den beiden Bogen übertragenen Kräfte haben je eine wagrechte Seitenkraft, welche $d h_1$, bezw. $d h_2$ ift, und eine lothrechte Seitenkraft, deren Gröfsen

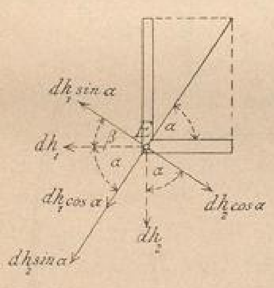
$$d v_1 = q x d w \quad \text{und} \quad d v_2 = q w d x$$

find. Die lothrechten Seitenkräfte addiren fich einfach in E zu einer abwärts wirkenden Kraft:

$$\mathfrak{v} = q\,(x\,d w + w\,d x).$$

$\mathfrak{v}$ ift alfo gleich dem halben Gewichte der anfchliefsenden Streifen (gleich dem Gewichte der in Fig. 396 fchraffirten Fläche). Die beiden wagrechten Kräfte zerlegen fich (Fig. 397) in je eine Seitenkraft, welche in die Richtung der Diagonalen AC fällt, und in eine Seitenkraft fenkrecht zur erfteren. Soll die Mittelkraft von $d h_1$ und $d h_2$ in die lothrechte, durch die Diagonale gelegte Ebene fallen, fo müffen fich die zuletzt genannten Seitenkräfte $d h_1 \sin \alpha$ und $d h_2 \cos \alpha$ aufheben; fomit mufs

Fig. 397.



$$d h_1 \sin \alpha = d h_2 \cos \alpha$$

fein, daraus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d h_2}{d h_1} = \frac{w^2 d x \,.\, f_1}{x^2 d w \,.\, f_2}.$$

Nun ift

$$w = x \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und} \quad d w = \operatorname{tg} \alpha \, d x,$$

daher

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \,.\, d x \,.\, f_1}{x^2 \operatorname{tg} \alpha \,.\, d x \,.\, f_2} = \operatorname{tg} \alpha \, \frac{f_1}{f_2}.$$

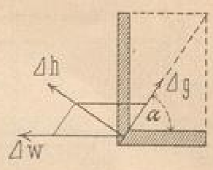
Damit obige Bedingung erfüllt fei, mufs daher

$$\frac{f_1}{f_2} = 1, \quad \text{d. h.} \quad f_1 = f_2$$

fein. Soll alfo die Mittelkraft beider Horizontalkräfte im Grundrifs in die Richtung der Diagonalen fallen, fo find für die Seilcurven der beiden zufammengehörigen Streifen gleiche Pfeilhöhen einzuführen.

Damit diefe günftige Kräftewirkung möglich fei, müffen die zufammengehörigen Streifen annähernd gleiche Scheitelhöhen haben. Wenn die Scheitellinien $\overline{MS}$ und $\overline{SN}$ der Kappen (Fig. 396) wagrecht find, fo kann $f_1 = f_2$ fein; aber auch wenn $\overline{MS}$ nach einer geraden oder gekrümmten Linie anfteigt, ift es möglich und zweckmäfsig, der Linie $\overline{SN}$ die entfprechende Form zu geben, bei welcher die Werthe f_1 der einzelnen Streifen den Werthen f_2 nahezu gleich find. Wenn die Bedingung $f_1 = f_2$ nicht erfüllt ift, wenn beifpielsweife $d h_1 \sin \alpha > d h_2 \cos \alpha$ ift, fo wirkt der Ueberfchufs $\Delta h = d h_1 \sin \alpha - d h_2 \cos \alpha$ wie in Fig. 398 gezeichnet ift. Δh zerlegt sich in eine Seitenkraft Δg in der lothrechten Gratebene und eine Seitenkraft Δw, welche parallel der Längsaxe der Kappe ASD (Fig. 396) wirkt. Die Kräfte Δw beanspruchen den Schildbogen AMD. Man erhält

Fig. 398.



$$\Delta w = \frac{\Delta h}{\sin \alpha} = d h_1 - \frac{d h_2}{\operatorname{tg} \alpha} .$$

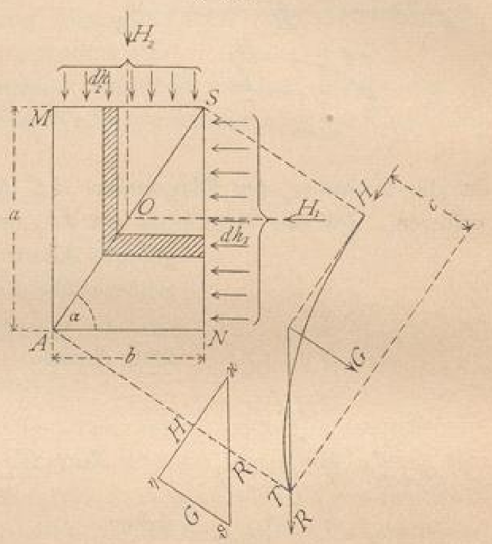
Mit den in Gleichung 397 gefundenen Werthen von $d h_1$ und $d h_2$ erhält man

$$\Delta w = \frac{q x^2}{2} \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} \right) d x .$$

Für die weiteren Untersuchungen wird angenommen, dafs $f_1 = f_2$, alfo $\Delta w = 0$ fei.

Betrachtet man ein Viertel des Gewölbes (Fig. 399), und zwar das Stück $MSNA$, fo wirken auf daffelbe die Belaftung q für die Einheit der Grundfläche, alfo im Ganzen $G = q a b$ im Schwerpunkt O des Rechteckes $MSNA$; aufserdem wirken in den Scheiteln der einzelnen Gewölbeftreifen die Kräfte $d h_1$, bezw. $d h_2$, endlich der Kämpferdruck auf den Gratbogen in A. Diefe Kräfte müffen den Gewölbetheil im Gleichgewicht halten. Die den einzelnen Streifen entfprechenden Seilcurven find, weil die Belaftungen gleichmäfsig über die wagrechte Projection vertheilt find, Parabeln, und man kann annehmen, dafs fich in allen Streifen desfelben Gewölbetheiles (ASB, bezw. ASD in Fig. 396) diefelbe Seilcurve bildet. Dann ift, wenn C_1 und C_2 noch zu beftimmende Feftwerthe find, bezw.

Fig. 399.



$$x^2 = C_1 f_1 \quad \text{und} \quad w^2 = C_2 f_2 .$$

Werden diefe Werthe in die Gleichung 397 eingeführt, fo ergiebt fich

$$d h_1 = \frac{q\, C_1\, d w}{2} \quad \text{und} \quad d h_2 = \frac{q\, C_2\, d x}{2} \quad \ldots\ldots \quad 398.$$

Die in den Scheiteln der Gewölbeftreifen wirkenden Horizontalkräfte haben alfo auf die ganze Länge des Gewölbes für die Längeneinheit die gleiche Gröfse (find conftant). Man erhält demnach die auf die gefammten Scheitelftrecken SN, bezw. SM ausgeübten Horizontalkräfte zu

$$H_1 = \frac{q\, C_1\, a}{2} \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{q\, C_2\, b}{2} \quad \ldots\ldots \quad 399.$$

Diefe Mittelkräfte liegen in den Mitten der bezüglichen Scheitelftrecken, weil alle Einzelkräfte gleich grofs find. Beide Kräfte H_1 und H_2 fchneiden fich in der Mitte der Diagonale AS, d. h. in der Lothrechten des Punktes O. Wird die Pfeilhöhe der Seilcurve im äufserften Gewölbeftreifen (AB, bezw. AD) mit c bezeichnet, fo ift $b^2 = C_1 c$ und $a^2 = C_2 c$; hiernach wird

$$H_1 = \frac{q}{2}\, a\, \frac{b^2}{c} \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{q}{2}\, b\, \frac{a^2}{c} .$$

H_1 und H_2 fetzen fich in ihrem Schnittpunkte zu einer Mittelkraft H zufammen, welche im Grundrifs in die Richtung der Diagonalen AS fällt; diefelbe ift

$$H = H_1 \cos\alpha + H_2 \sin\alpha = \frac{q}{2c} a b (b \cos\alpha + a \sin\alpha).$$

Nun ift $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; mithin wird

$$H = \frac{q a b (b^2 + a^2)}{2c\sqrt{a^2+a^2}} = \frac{q a b}{2c}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Diefe Kraft H vereinigt fich in der Lothrechten des Punktes O mit dem Gewichte $G = q a b$ zu der auf den Kämpfer wirkenden Mittelkraft. Damit ift die auf einen jeden Eckpfeiler des reckteckigen Kreuzgewölbes wirkende Kraft gefunden; fie hat eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft, deren Gröfsen find:

$$H = \frac{q a b}{2c}\sqrt{a^2+b^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 400.$$

$$V = q a b \quad \ldots \ldots \ldots \quad 401.$$

Wenn das Gewölbe quadratifchen Grundrifs hat, fo bleibt alles Vorftehende giltig; nur ift $b = a$ einzuführen, fo dafs man erhält: Beim Kreuzgewölbe über quadratifchem Raume mit einer Seitenlänge $2a$ ift der Horizontalfchub am Grat

$$H = \frac{q a^3}{c\sqrt{2}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 402.$$

und die lothrechte auf jeden Pfeiler übertragene Kraft

$$V = q a^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 403.$$

Die graphifche Ermittelung von H läuft auf die Zerlegung von $G = q a b$ (bezw. $q a^2$) in die beiden Kräfte H und R hinaus. Ift in Fig. 399: $G = \eta\vartheta$, fo ift $\varkappa\eta = H$ und $\vartheta\varkappa = R$.

2) Die Lagerfugen find im Grundrifs fenkrecht zu den Graten. Der Unterfuchung wird wieder ein Gewölbe über rechteckigem Raume zu Grunde gelegt. Daffelbe werde durch lothrechte Ebenen, welche im Grundrifs fenkrecht zu den Graten gerichtet find, in Streifen zerlegt; dann befteht jeder Streifen aus zwei Theilen, welche fich im Grat treffen. Für jeden Theil ftellt der Grat den einen Stützpunkt dar; die anderen Stützpunkte werden bei den innerhalb des Viereckes $LMNO$ (Fig. 400) liegenden Streifen durch die entfprechenden Streifen der benachbarten Gewölbeviertel gebildet, bei den aufserhalb diefes Viereckes liegenden Streifen einerfeits durch die Streifen des benachbarten Gewölbeviertels, andererfeits oder beiderfeits durch die Gurtbogen AB, BC, CD, DA. 286. Lagerfugen fenkrecht zu den Graten.

α) Es werde zuerft ein Streifen FEG aus dem Viereck $LMNO$ betrachtet. Die Belaftung für die Einheit der Grundfläche fei wiederum q; alsdann ift (Fig. 400)

$$d h_1 = \frac{q z_1^2 \, d w}{2 f_1} \quad \text{und} \quad d h_2 = \frac{q z_2^2 \, d w}{2 f_2}, \quad \ldots \ldots \quad 404.$$

wenn f_1 und f_2 die Pfeilhöhen der betreffenden Seilcurven find. Im Punkte E wird auf den Grat nur eine lothrechte Kraft übertragen, falls $d h_1 = d h_2$, d. h. wenn $\dfrac{f_2}{f_1} = \dfrac{z_2^2}{z_1^2}$ ift. Nun ift $z_2 = w \operatorname{tg}\alpha$ und $z_1 = \dfrac{w}{\operatorname{tg}\alpha}$; mithin ift die Bedingung für $d h_1 = d h_2$:

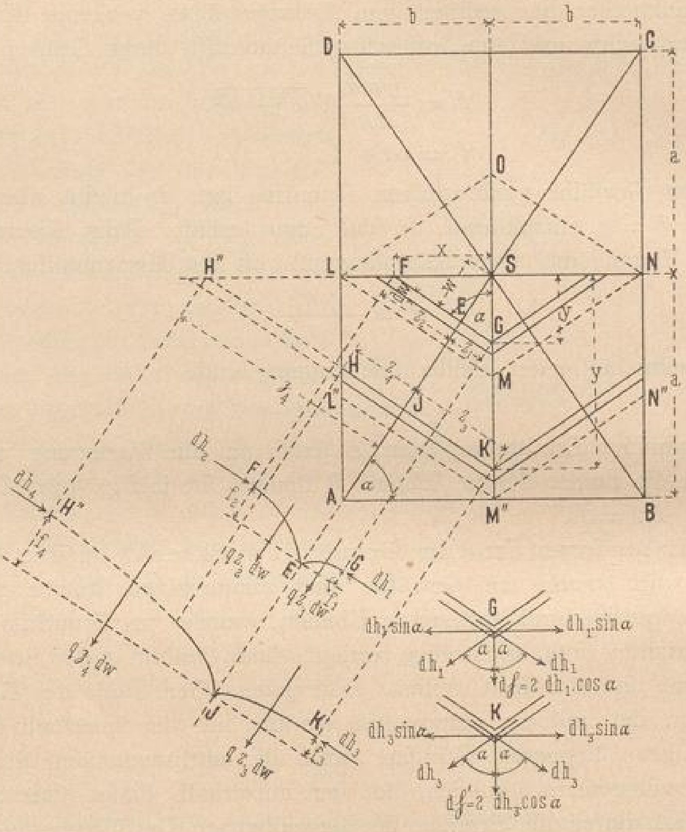
$$\frac{f_2}{f_1} = \operatorname{tg}^4\alpha = \frac{a^4}{b^4}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad 405.$$

alsdann ift die im Punkte E auf den Gratbogen übertragene lothrechte Kraft $d\mathfrak{v}_1 = q\,d\,w\,(z_1 + z_2)$; diefelbe ift gleich dem Gewichte des Streifens FEG. Da aber $z_1 + z_2 = \frac{y}{\cos\alpha}$ ift, fo wird

$$d\mathfrak{v}_1 = \frac{q\,y\,d\,w}{\cos\alpha} = q\,y\,\mathrm{tg}\,\alpha\,d\,y \quad \ldots\ldots\ldots \quad 406.$$

Im Punkte G wirken die beiden wagrechten Kräfte $d\,h_1$ in den Richtungen der anfchliefsenden Streifen; fie zerlegen fich in je zwei Seitenkräfte, welche in der Längsrichtung der Kappe, bezw. fenkrecht zu diefer Richtung wirken. Die beiden

Fig. 400.



letzteren haben je die Gröfse $d\,h_1 \sin\alpha$ und heben einander auf; die beiden erfteren fetzen fich zu einer Kraft $d\mathfrak{h} = 2\,d\,h_1 \cos\alpha$ zufammen. Wird für $d\,h_1$ der obige Werth eingeführt und beachtet, dafs $w = z_1\,\mathrm{tg}\,\alpha$, alfo $d\,w = d\,z_1\,\mathrm{tg}\,\alpha$ ift, fo ergiebt fich

$$d\mathfrak{h} = \frac{q\,z_1{}^2 \sin\alpha\,d\,z_1}{f_1}.$$

Unter gleichen Annahmen, wie in Art. 285 (S. 298), wird $z_1{}^2 = C f_1$ und $d\mathfrak{h} = q\,C \sin\alpha\,d\,z_1$; ferner, weil $z_1 = y\cos\alpha$ und $d\,z_1 = \cos\alpha\,d\,y$ ift,

$$d\mathfrak{h} = q\,C \sin\alpha\,\cos\alpha\,d\,y.$$

Jeder Doppelftreifen EGE' innerhalb der Grenzen $x = 0$ bis $x = b$ übt eine wagrechte Kraft $d\mathfrak{h}$ auf den Scheitel des Gurtbogens aus.

β) Nunmehr werde ein Streifen HJK unterfucht, welcher aufserhalb des Viereckes $LMNO$ liegt, aber an der einen Seite fich gegen den entfprechenden Streifen des benachbarten Gewölbeviereckes lehnt (Fig. 400). Es kann angenommen werden, dafs die Seilcurve im Punkte K eine wagrechte Tangente hat; im Punkte H ift dies nicht der Fall. Wir ergänzen das Stück JH des Streifens durch ein Stück, welches bis zur Verlängerung der Linie LN reicht, und nehmen an, dafs im Punkte H'' diefes Streifens die Seilcurve eine wagrechte Tangente habe. Der Horizontalfchub im Streifen HJ ift eben fo grofs, wie im Streifen $H''J$. Werden die Pfeilhöhen der betreffenden Seilcurven mit f_3 und f_4 bezeichnet, fo ift

$$d h_3 = \frac{q\, d w\, z_3^2}{2 f_3} \quad \text{und} \quad d h_4 = \frac{q\, d w\, \mathfrak{z}_4^2}{2 f_4}.$$

Soll, wie oben, $d h_3 = d h_4$ fein, fo mufs

$$\frac{f_4}{f_3} = \frac{\mathfrak{z}_4^2}{z_3^2} = \operatorname{tg}^4 \alpha = \frac{a^4}{b^4}$$

fein, d. h. die Pfeilhöhen müffen im gleichen Verhältnifs zu einander ftehen, wie oben unter α (Gleichung 405).

Im Punkte J wird auf den Grat eine lothrechte Belaftung übertragen, welche dem Gewichte des ganzen Streifens $H''JK$ gleich ift; denn der im Punkte H vom Gurtbogen auf den Streifen wirkende Gegendruck hat eine nach unten gerichtete lothrechte Seitenkraft, die dem Gewichte des Streifens HH'' gleich ift.

Demnach wirkt in J als Belaftung auf den Grat

$$d \mathfrak{v}_2 = q\, d w\, (z_3 + \mathfrak{z}_4) = q\, w\, d w \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \operatorname{tg} \alpha\right)$$

und, da $w = y \sin \alpha$, alfo $d w = \sin \alpha\, d y$ ift,

$$d \mathfrak{v}_2 = q\, y \operatorname{tg} \alpha\, d y \quad \dots\dots\dots \quad 407.$$

Im Punkte K wirken zwei Kräfte $d h_3$, deren Mittelkraft fich zu

$$d \mathfrak{h}' = 2 d h_3 \cos \alpha = \frac{q\, d w\, z_3^2}{f_3} \cos \alpha$$

ergiebt. Mit $w = z_3 \operatorname{tg} \alpha$, alfo $d w = \operatorname{tg} \alpha\, d z_3$ erhält man

$$d \mathfrak{h}' = \frac{q z_3^2}{f_3} \sin \alpha\, d z_3 .$$

Setzt man wiederum $z_3^2 = C f_3$, fo wird

$$d \mathfrak{h}' = q\, C \sin \alpha\, d z_3$$

und, weil $z_3 = y \cos \alpha$ oder $d z_3 = d y \cos \alpha$ ift,

$$d \mathfrak{h}' = q\, C \sin \alpha \cos \alpha\, d y.$$

Die Summe aller Kräfte $d \mathfrak{h}$ und $d \mathfrak{h}'$, welche von den Streifen bis $L'' M'' N''$ ausgeübt werden, ift demnach

$$\mathfrak{H}_1 = q\, C a \sin \alpha \cos \alpha$$

und, weil $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ und $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ift,

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{q\, a^2 b\, C}{a^2 + b^2} \quad \dots\dots\dots \quad 408.$$

γ) Betrachtet man endlich einen Streifen $F'' E'' G''$, welcher fich beiderfeits gegen die Gurtbogen ftützt, fo hat man hier beiderfeits ergänzende Gewölbeftücke hinzuzufügen, welche bis zu den verlängerten Halbirungslinien des Gewölbes reichen.

Die beiden in E'' auf den Grat übertragenen wagrechten Kräfte ſind, wenn die obigen Bezeichnungen (mit Abänderung der Zeiger) beibehalten werden,

$$d\,h_5 = \frac{q\,d\,w\,\mathfrak{z}_5^{\,2}}{2\,f_5},$$

$$d\,h_6 = \frac{q\,d\,w\,\mathfrak{z}_6^{\,2}}{2\,f_6}.$$

Sollen ſich wiederum die beiden wagrechten Kräfte in E'' aufheben, ſo muſs

$$\frac{f_6}{f_5} = \frac{\mathfrak{z}_6^{\,2}}{\mathfrak{z}_5^{\,2}} = \operatorname{tg}^4\alpha = \frac{a^4}{b^4}$$

ſein. Die in E'' auf den Grat übertragene lothrechte Laſt iſt alsdann (vergl. die Angaben unter β)

$$d\,\mathfrak{v}_3 = q\,d\,w\,(\mathfrak{z}_5 + \mathfrak{z}_6).$$

Nun iſt

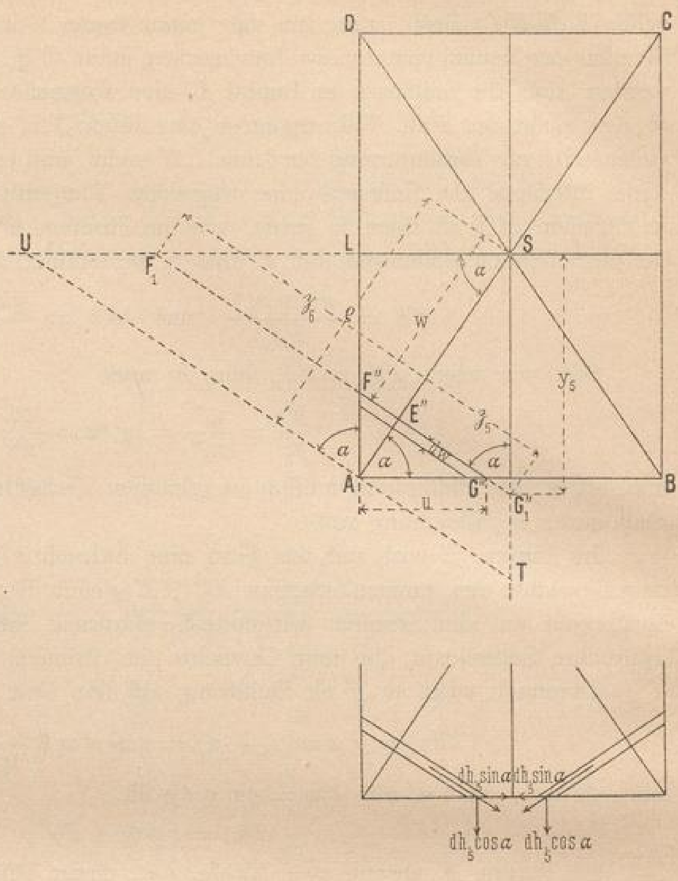
$$(\mathfrak{z}_5 + \mathfrak{z}_6) = \frac{y_5}{\cos\alpha}$$

und $d\,w = \sin\alpha\,d\,y$, alſo

$$d\,\mathfrak{v}_3 = \frac{q\,y_5}{\cos\alpha}\sin\alpha\,d\,y$$

$$= q\,y_5\,d\,y\,.\operatorname{tg}\alpha, \quad . \quad . \quad 409.$$

Fig. 401.



genau wie in den Formeln 406 u. 407.

Die im Punkte G'' auf den Gurtbogen ausgeübte Kraft $d\,h_5$ zerlegt ſich in eine ſenkrecht zum Gurtbogen gerichtete Seitenkraft $d\,h_5 \cos\alpha$ und eine ſolche, welche im Grundriſs in die Richtung des Gurtbogens fällt: $d\,h_5 \sin\alpha$. Letztere wird durch eine gleich groſse, entgegengeſetzt gerichtete Seitenkraft im ſymmetriſch zur Mitte liegenden Punkte aufgehoben; die erſtere iſt

$$d\,h_5 \cos\alpha = \frac{q\,d\,w\,\mathfrak{z}_5^{\,2}}{2\,f_5}\cos\alpha\,.$$

Setzt man wieder $\mathfrak{z}_5^{\,2} = C f_5$, ſo wird

$$d\,h_5 \cos\alpha = \frac{q\,d\,w\,C}{2}\cos\alpha\,.$$

Nach Fig. 401 iſt $\cos\alpha = \dfrac{\rho - w}{u}$, $w = \rho - u\cos\alpha$ und $d\,w = -\cos\alpha\,d\,u$,

alſo

$$d\,h_5 \cos\alpha = -\frac{q\,C}{2}\cos^2\alpha\,d\,u\,.$$

Die auf den Gurtbogen wirkende wagrechte Kraft iſt alſo auf die ganze Grundriſslänge conſtant, und zwar entfällt auf jede Hälfte b der Breite

$$-\int_b^0 \frac{q\,C}{2}\cos^2\alpha\,d\,u = \frac{q\,C}{2}\cos^2\alpha\,b\,.$$

Die gefammte auf den Gurtbogen übertragene, wagrechte Kraft ift demnach in der Axe des Gewölbes ASB (vergl. Gleichung 408)

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{q\,a^2\,b\,C}{a^2 + b^2};$$

gleichmäfsig über die Grundrifslänge $2b$ vertheilt wirkt:

$$\mathfrak{H}_2 = \frac{q\,C\,b^3}{a^2 + b^2}.$$

Diefe Kräfte greifen in verfchiedenen Höhen an; die Lage von $\mathfrak{H}_2$ folgt aus den Höhen der Stellen, an welchen die einzelnen Gewölbeftreifen fich an den Gurtbogen fetzen. An diefen Stellen wirken aufser den wagrechten auch lothrechte Seitenkräfte nach aufwärts; diefelben find gleich den Gewichten der zu ergänzenden Gewölbeftreifen.

Die gefammte, normal gegen den Gurtbogen AB wirkende Horizontalkraft ift

$$\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 = \frac{q\,C\,b}{a^2 + b^2}\,(a^2 + b^2) = q\,C\,b,$$

$$(\mathfrak{H}_I) = q\,C\,b; \quad \dots\dots\dots\dots \quad 410.$$

eben fo erhält man als gefammte Horizontalkraft, welche normal gegen den Gurtbogen AD wirkt,

$$(\mathfrak{H}_{II}) = q\,C\,a. \quad \dots\dots\dots\dots \quad 411.$$

Wird die Pfeilhöhe f_3 der Seilcurve, welche durch M'' gelegt ift, mit e bezeichnet, für welchen Streifen z_3 den Werth $a \cos \alpha$ annimmt, fo ergiebt fich

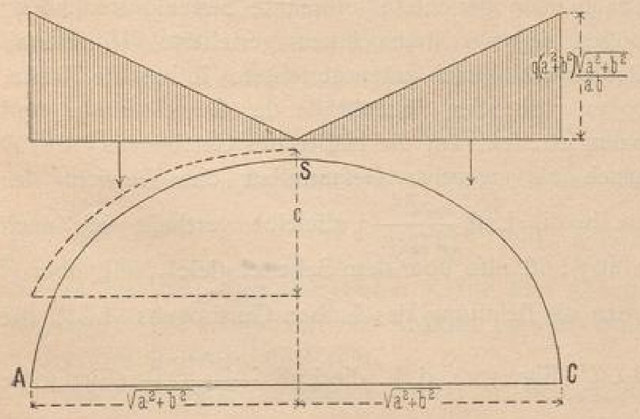
$$a^2 \cos^2\alpha = C\,e, \text{ d. h. } C = \frac{a^2\,b^2}{e\,(a^2 + b^2)}; \text{ fomit}$$

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{H}_I) &= \frac{q\,a^2\,b^3}{e\,(a^2 + b^2)} \\ (\mathfrak{H}_{II}) &= \frac{q\,a^3\,b^2}{e\,(a^2 + b^2)} \end{aligned}\right| \quad \dots\dots\dots\dots \quad 412.$$

Die Kräfte $\mathfrak{H}$ werden entweder durch gleiche, entgegengefetzt gerichtete, vom Nachbargewölbe ausgehende Kräfte aufgehoben, oder fie werden von der Mauer aufgenommen, gegen welche fich das Gewölbe fetzt.

δ) Die Belaftung des Gratbogens ift nach Vorftehendem lothrecht; nach Gleichung 406, 407 u. 409 nimmt fie von der Mitte des Gewölbes von S bis zum Kämpfer des Gratbogens bei A entfprechend den Ordinaten einer Geraden zu. In allen drei oben betrachteten Abtheilungen ift fie auf die Grundrifslänge dw

Fig. 402.



$$d\mathfrak{v} = q\,dw\,\frac{y}{\cos\alpha};$$

demnach ift auf die Längeneinheit des Gratbogens im Grundrifs die Belaftung

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dw} = \frac{q\,y}{\cos\alpha}.$$

y hat feinen gröfsten Werth für den Kämpferpunkt;

für dieſen Punkt iſt $y = \overline{ST} = a + \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} = a + \frac{b\,b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{a}$. An dieſer Stelle iſt die Einheitsbelaſtung $\frac{q\,(a^2 + b^2)}{a \cos \alpha} = \frac{q\,(a^2 + b^2)}{a\,b} \sqrt{a^2 + b^2}$.

Wird die Pfeilhöhe der Seilcurve im Gratbogen gleich c angenommen, ſo iſt der Horizontalſchub im Grat

$$R_h = \frac{q\,(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}}{a\,b\,c} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{3},$$

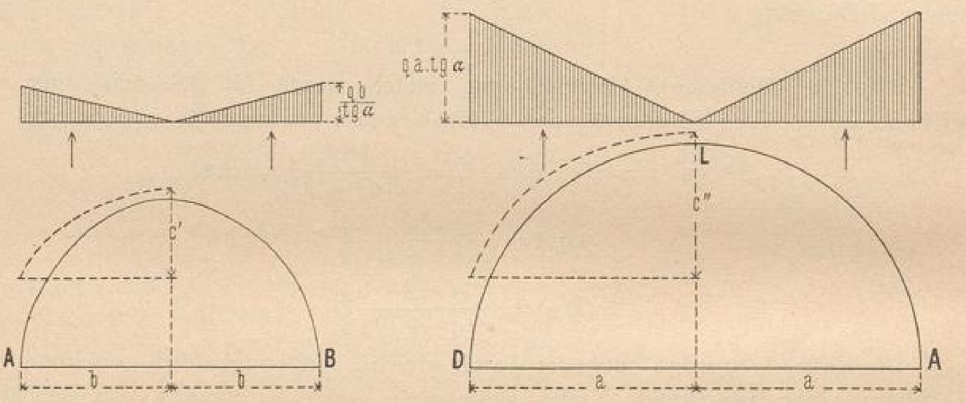
$$R_h = \frac{q\,(a^2 + b^2)^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{6\,a\,b\,c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 413.$$

Die lothrechte Seitenkraft der vom Gratbogen auf den Eckpfeiler ausgeübten Kraft iſt

$$R_v = \frac{q\,(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2}}{2\,a\,b} = \frac{q\,(a^2 + b^2)^2}{2\,a\,b} \quad \ldots \quad 414.$$

ε) Standſicherheit der Eckpfeiler. Für die Unterſuchung der Standſicherheit der Eckpfeiler ſind weiter noch die Kräfte in das Auge zu faſſen, welche

Fig. 403.



von den Gurtbogen auf die Eckpfeiler übertragen werden; dieſelben ſollen nur ſo weit beſprochen werden, als ſie vom Kreuzgewölbe hervorgerufen werden; vom Eigengewicht der Gurtbogen kann hier abgeſehen werden.

Von den einzelnen Gewölbeſtreifen werden nach Vorſtehendem Kräfte auf die Gurtbogen übertragen, welche nach oben gerichtete lothrechte Seitenkräfte haben; dieſe letzteren rufen im Gurtbogen negative (nach innen gerichtete) Horizontalkräfte hervor, auſserdem im Pfeiler negative (nach unten gerichtete) lothrechte Kräfte. Die lothrechten, auf die Gurtbogen wirkenden Seitenkräfte der Gewölbſchübe ſind gleich den Gewichten der Ergänzungsſtreifen; auf die Hälfte des Gurtbogens $A\,M''B$ (Fig. 400 u. 401) wirkt demnach als negative Geſammtlaſt das Gewicht des Ergänzungsdreieckes $A\,M''T$, d. h. die Laſt $\frac{q\,b^2}{2 \operatorname{tg} \alpha}$; dieſelbe vertheilt ſich nach dem Geſetze des Dreieckes (Fig. 403), iſt alſo über dem Scheitel gleich Null, über A gleich $\frac{q\,b}{\operatorname{tg} \alpha}$. Eben ſo erhält man als Belaſtung des halben Gurtbogens $A\,L\,D$ die Laſt des Ergänzungsdreieckes $A\,L\,U$ (Fig. 401), d. h. die Laſt $\frac{q\,a^2 \operatorname{tg} \alpha}{2}$ (Fig. 403);

über A und D ift die Belaftung für die Längeneinheit gleich $q\,a\,\mathrm{tg}\,\alpha$; über L ift die Einheitsbelaftung gleich Null. Fig. 403 zeigt die Belaftung. Demnach entfällt auf den Eckpfeiler A die negative Zufatzlaft $\Delta R_v = -\left(\frac{q\,b^2}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{q\,a^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}\right)$ und mit $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

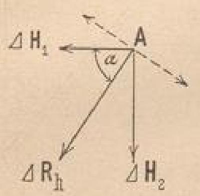
$$\Delta R_v = -\frac{q}{2\,a\,b}(a^4 + b^4) \quad \ldots \quad 415.$$

Die in Fig. 403 angegebenen Belaftungen erzeugen in den Gurtbogen die Horizontalfchübe

$$\Delta H_1 = -\frac{q\,b^2\,b}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.\,3\,c'} \quad \text{und} \quad \Delta H_2 = -\frac{q\,a^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.\,a}{2\,.\,3\,c''},$$

welche fich zu einer in der Richtung des Grates wirkenden Mittelkraft ΔR_h vereinen. Es ift

Fig. 404.



$$\Delta R_h = -(\Delta H_1 \cos\alpha + \Delta H_2 \sin\alpha),$$

$$\Delta R_h = -\frac{q}{6}\left(\frac{b^3 \cos^2\alpha}{c' \sin\alpha} + \frac{a^3 \sin^2\alpha}{c'' \cos\alpha}\right) \quad \ldots \quad 416.$$

Für $c' = c'' = c$ wird

$$\Delta R_h = -\frac{q\,(a^6 + b^6)}{6\,a\,b\,c\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \ldots \quad 417.$$

Vereinigt man die für ΔR_v und ΔR_h gefundenen Werthe mit den Werthen derjenigen Kräfte, welche vom Grat auf den Eckpfeiler übertragen werden, d. h. mit den Ausdrücken der Gleichungen 413 u. 414, fo erhält man, wenn man

$$R_h + \Delta R_h = H \quad \text{und} \quad R_v + \Delta R_v = V$$

fetzt,

$$H = \frac{q\,(a^2 + b^2)^2}{6\,a\,b\,c}\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{q}{6\,a\,b\,c\sqrt{a^2 + b^2}}\left(\frac{b^6}{c'} + \frac{a^6}{c''}\right) \quad . \quad 418.$$

Für $c' = c'' = c$ ergiebt fich

$$H = \frac{q\,a\,b}{2\,c}\sqrt{a^2 + b^2}; \quad \ldots \quad 419.$$

ferner

$$V = \frac{q}{2\,a\,b}(a^2 + b^2)^2 - \frac{q}{2\,a\,b}(a^4 + b^4);$$

mit einfachen Umformungen erhält man

$$V = q\,a\,b \quad \ldots \quad 420.$$

Die auf den Eckpfeiler Seitens des Kreuzgewölbes ausgeübte Kraft hat alfo, falls man $c' = c'' = c$ fetzen kann, als Seitenkräfte

für das Kreuzgewölbe über rechteckigem Raume:

$$H = \frac{q\,a\,b}{2\,c}\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad V = q\,a\,b;$$

für das Kreuzgewölbe über quadratifchem Raume:

$$H = \frac{q\,a^3}{c\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad V = q\,a^2.$$

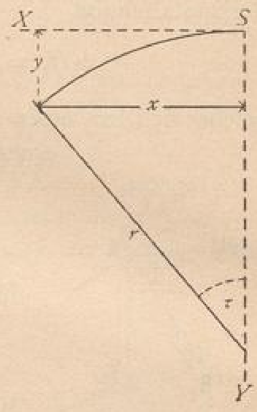
Die auf die Eckpfeiler ausgeübten Kräfte find alfo genau gleich grofs, mögen die Lagerfugen den Längsaxen der Kappen parallel laufen oder im Grundrifs fenkrecht zu den Graten angeordnet fein.

Man nehme H im inneren Drittel der Scheitelfuge des Gratbogens wirkend an.

b) Kuppelgewölbe.

287. Voraus-setzungen. Die Kuppelfläche entfteht durch Drehung einer krummen Linie um eine lothrechte Axe. In den folgenden Unterfuchungen follen die im Inneren des Kuppelgewölbes auftretenden Kräfte unter der Annahme ermittelt werden, dafs die Belaftung eine ruhende und über die einzelnen zwifchen den Parallelkreifen liegenden Ringe fo vertheilt fei, dafs ein jeder Ring entweder voll belaftet oder ganz unbelaftet ift. Weiter wird die Kuppelfläche als die Gleichgewichtsfläche angenommen; demnach werden die auf ein beliebiges Kuppeltheilchen wirkenden inneren Kräfte in die betreffenden Berührungsebenen der Kuppelfläche fallen. Daraus ergeben fich dann die inneren Kräfte oder Spannungen, welche, in der Kuppel wirkend, im Stande find, das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten.

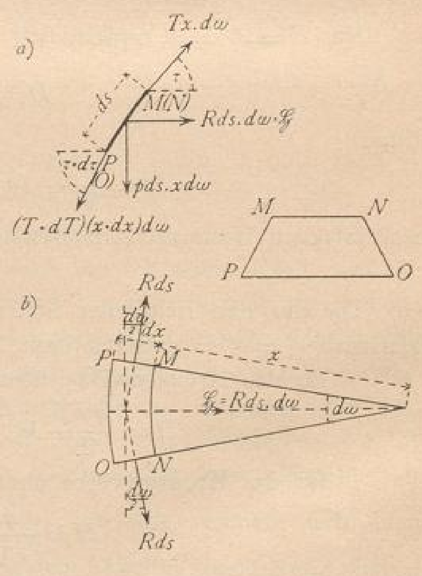
Fig. 405.



288. Allgemeine Gleichgewichts-bedingungen. Der Anfangspunkt der Coordinaten foll in den Scheitel der Kuppel (Fig. 405) gelegt und die lothrechte Axe als *Y*-Axe, eine im Scheitel *S* fenkrecht zu erfterer errichtete Axe als *X*-Axe gewählt werden. Irgend ein Kuppeltheilchen *MNOP* (Fig. 406), welches oben und unten durch Parallelkreife, rechts und links durch Meridiane der Kuppel begrenzt ift, wird auf feinen Gleichgewichtszuftand unterfucht. Das Theilchen *MNOP* ift in Fig. 406*a* in der Anficht, in Fig. 406*b* im Grundrifs, daneben im abgewickelten Zuftande dargeftellt. Auf *MN* wirkt für die Längeneinheit die Tangentialfpannung *T*, und da *MN* (vergl. den Grundrifs in Fig. 406*b*) $x\,d\omega$ Längeneinheiten enthält, fo wirkt auf *MN* die Kraft $T\,x\,d\omega$. Auf *OP* wirkt $(T + d\,T)\,(x + d\,x)\,d\omega$; auf *MP* und *NO* wirken die Ringfpannungen, welche für die Längeneinheit gleich *R* feien, alfo auf ds Längeneinheiten die Gröfse $R\,ds$ haben. Aufserdem wirkt noch die veränderliche Belaftung p für die Flächeneinheit der Kuppelfläche, d. h. auf *MNOP* die Laft $p\,ds\,.\,x\,d\omega$. Um fämmtliche auf das Theilchen wirkende Kräfte in einer Ebene zu erhalten, ermittelt man die Mittelkraft der beiden Ringfpannungen $R\,ds$; fie ift $\mathfrak{H} = 2\,R\,ds\,\sin\frac{d\omega}{2}$, und, da wegen der Kleinheit von $\frac{d\omega}{2}$ die Gröfse $\sin\frac{d\omega}{2} = \frac{d\omega}{2}$, wird

$$\mathfrak{H} = R\,d\,s\,d\omega \quad . \quad . \quad . \quad 421.$$

Fig. 406.



Die Aufftellung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für *MNOP* ergiebt nun

$$0 = T\,x\,d\omega\cos\tau - (T + d\,T)\,(x + d\,x)\,d\omega\cos(\tau + d\,\tau) + R\,d\,s\,d\omega.$$

Führt man die Multiplication durch und läfft die unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung fort, fo bleibt

$$0 = T x \sin \tau \, d\tau - d T x \cos \tau - T \, d x \cos \tau + R \, d s = - d \, (T x \cos \tau) + R \, d s;$$

daher

$$R \, d s = d \, (T x \cos \tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 422.$$

Ferner iſt

$$0 = p \, d s \, x \, d \omega - T x \, d \omega \sin \tau + (T + d T) \, (x + d x) \, d \omega \sin (\tau + d \tau);$$

$$\sin (\tau + d \tau) = \sin \tau + \cos \tau \, d \tau.$$

Durch Ausmultipliciren und Fortlaſſen der unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung erhält man $0 = p x \, d s + d \, (T x \sin \tau)$; daher

$$- p x \, d s = d \, (T x \sin \tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 423.$$

Die beiden Gleichungen 422 u. 423 geben Aufſchluſs über die Gröſse der gleichzeitigen Werthe von T und R, welche irgend welchen Belaſtungen und Gleichgewichtsflächen entſprechen.

Die erzeugende Linie iſt bei der Kugelkuppel ein Kreis. Die bezüglichen Werthe von T und R werden alſo erhalten, wenn in die Gleichungen 422 u. 423 für x und $d s$ die Werthe eingeführt werden, welche dem Kreiſe entſprechen. Nach Fig. 405 iſt $x = r \sin \tau$ und $d s = r \, d \tau$; mithin, wenn noch die Annahme gemacht wird, daſs p für die ganze Kuppel conſtant iſt, 289. Kugelförmige Kuppel.

$$- p r \sin \tau \, . \, r \, d \tau = d \, (T r \sin \tau \sin \tau) \quad \text{und} \quad \int_{\tau_0}^{\tau} d \, (T r \sin^2 \tau) = - p r^2 \int_{\tau_0}^{\tau} \sin \tau \, d \tau.$$

Als untere Grenze iſt der Werth τ_0 von τ einzuführen, welcher dem oberen Endpunkte der Erzeugenden entſpricht; hier iſt dieſer Endpunkt S, und es wird $\tau_0 = 0$; demnach iſt

$$T r \sin^2 \tau = + p r^2 \Big(\cos \tau \Big)_0^{\tau} = - p r^2 \, (1 - \cos \tau),$$

$$T = - \frac{p r \, (1 - \cos \tau)}{\sin^2 \tau} = - \frac{p r \, (1 - \cos \tau)}{1 - \cos^2 \tau} = - \frac{p r}{1 + \cos \tau} \quad . \quad . \quad 424.$$

Wird dieſer Werth in die Gleichung 422 für R eingeſetzt, ſo erhält man

$$R \, d s = R r \, d \tau = d \left(- \frac{p r}{1 + \cos \tau} \, r \sin \tau \cos \tau \right) = - p r^2 \, d \, \frac{\sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau},$$

$$R = - p r \, \frac{\cos 2 \tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 425.$$

Die Werthe der Gleichungen 424 u. 425 gelten für oben geſchloſſene Kugelkuppeln. Die Spannungen im Scheitel werden für $\tau = 0$ erhalten. Für letzteren Werth iſt

$$T_0 = - \frac{p r}{2} \quad \text{und} \quad R_0 = - \frac{p r}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 426.$$

d. h. die Meridianſpannungen und Ringſpannungen ſind für die Längeneinheit im Scheitel gleich groſs; daſelbſt findet ſomit nach allen Richtungen ein gleicher Druck $\frac{p r}{2}$ für die Längeneinheit ſtatt.

Für die Halbkugelkuppel iſt am Aequator $\tau = \frac{\pi}{2}$, daher 290. Halbkugelkuppel.

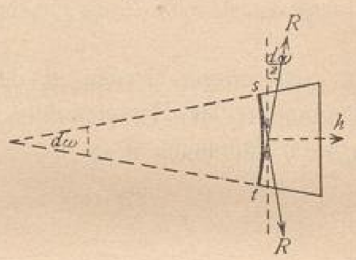
$$T_{\frac{\pi}{2}} = - p r \quad \text{und} \quad R_{\frac{\pi}{2}} = + p r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 427.$$

Die Meridianſpannung nimmt alſo vom Scheitel nach dem Aequator von $\frac{p\,r}{2}$ bis auf $p\,r$ zu, bleibt aber ſtets Druck, da $1 + \cos\tau$ nie negativ werden kann. Am Aequator iſt T lothrecht gerichtet, da T gleiche Richtung mit der Tangente an die Erzeugende hat. Die Summe aller $T_{\frac{\pi}{2}}$ iſt gleich dem Gewichte der ganzen Kuppel, da die $T_{\frac{\pi}{2}}$ die Auflagerdrücke darſtellen. Es iſt $\Sigma\left(T_{\frac{\pi}{2}}\right) = p\,r\,.\,2\,r\,\pi = 2\,p\,r^2\,\pi$, und das ganze Kuppelgewicht iſt gleich $\frac{4\,r^2\pi}{2}\,p = 2\,r^2 p\,\pi$. Die Ringſpannung R geht vom Druck $\frac{p\,r}{2}$ im Scheitel zum Zug $p\,r$ am Aequator über, demnach für irgend einen näher zu beſtimmenden Winkel durch Null. Iſt dieſer Winkel τ_1, ſo iſt $0 = p\,r\,\frac{\cos 2\,\tau_1 + \cos^3\tau_1}{(1+\cos\tau_1)^2}$, woraus ſich ergiebt

$$\cos\tau_1 = 0{,}618 \quad \text{und} \quad \tau_1 = 51^0\,50' \qquad 428.$$

In allen Ringen, deren zugehörige Winkel τ kleiner als τ_1 ſind, findet Druck, in den Ringen, deren Winkel gröſser ſind als τ_1, findet Zug ſtatt. Nimmt man auf die Zugfeſtigkeit des Mörtels keine Rückſicht, ſo können die einzelnen Theile eines Ringes keinen Zug auf einander ausüben. Ohne ſolchen kann aber bei den letzteren Ringen Gleichgewicht nicht ſtattfinden; ohne Hilfsconſtruction iſt daher das Gleichgewicht nicht vorhanden. Solche Hilfsconſtructionen ſind entweder umgelegte eiſerne Ringe oder die Hintermauerung. Letztere leiſtet die auf den Kuppelring wirkenden Ringkräfte R; auf dieſelbe wirken ſonach nach dem Princip von Wirkung und Gegenwirkung die Kräfte R in entgegengeſetztem Sinne; dieſelben ſind bei Berechnung der Hintermauerung zu berückſichtigen. Betrachtet man ein Bogenſtück $s\,t$ (Fig. 407), welches zum Winkel $d\,\omega$ gehört, ſo iſt die Mittelkraft der beiden R die nach auſsen gerichtete Kraft h gleich $2\,R\sin\frac{d\,\omega}{2} = R\,d\,\omega$.

Fig. 407.



Wir führen die abkürzende Bezeichnung

$$\mu = -\frac{\cos 2\,\tau + \cos^3\tau}{(1+\cos\tau)^2} \qquad 429.$$

ein; alsdann wird

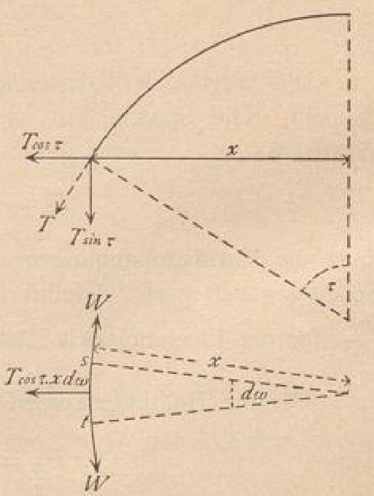
$$R = \mu\,p\,r \quad \text{und} \quad h = \mu\,p\,r\,d\,\omega \qquad 430.$$

Für die Längeneinheit des $x\,d\,\omega$ langen Bogens iſt alſo die nach auſsen auf die Hintermauerung wirkende Horizontalkraft in Folge der Ringſpannungen

$$\mathfrak{h} = \frac{\mu\,p\,r\,d\,\omega}{x\,d\,\omega} = \frac{\mu\,p\,r}{x} \qquad 431.$$

Aus Vorſtehendem folgt noch, daſs bei der Halbkugelkuppel die Hintermauerung wenigſtens bis zu derjenigen Höhe hinaufreichen muſs, welche dem Winkel $\tau_1 = 51^0\,50'$ entſpricht.

Fig. 408.



Auſser den Kräften $\mathfrak{h}$ (nach Gleichung 431) wirken auf die Widerlager noch die Meridianſpannungen T, welche dem gröſsten zur Kuppel gehörigen Winkel τ entſprechen. T hat eine wagrechte Seitenkraft $T\cos\tau$ und eine lothrechte Seitenkraft $T\sin\tau$. Die erſtere wird durch die Widerlager oder durch einen eiſernen Ring aufgehoben. Die Spannung in dieſem Ringe ergiebt ſich dann wie folgt. Auf den Bogen $s\,t$ (Fig. 408) von der Länge $x\,d\,\omega$ wirkt nach aufsen $T \cos \tau\, x\, d\, \omega$, und diefe Kraft foll durch die beiden Ringfpannungen W aufgehoben werden; es ift demnach

$$T \cos \tau\, x\, d\, \omega = 2\, W \sin \frac{d\,\omega}{2} = W\, d\, \omega;$$

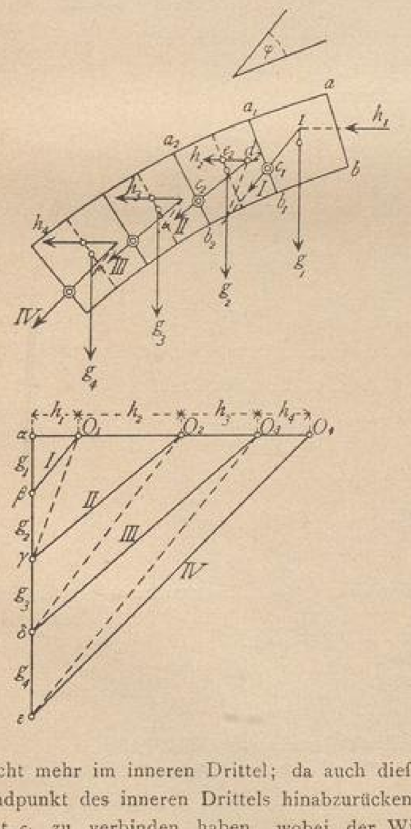
$$W = T x \cos \tau = \frac{p\, r\, r \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} = \frac{p\, r^2 \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} \quad . \quad . \quad . \quad 432.$$

Die vorftehend entwickelten Werthe für T und R entfprechen einer Gleichgewichtsfläche. Man kann diefe Werthe als genügend genaue Mittelwerthe annehmen; immerhin find aber gröfsere und geringere Werthe denkbar, welche anderen in der Kuppel möglichen Gleichgewichtsflächen entfprechen, die nicht mit der Mittelfläche des Kuppelgewölbes zufammenfallen.

Die graphifche Ermittelung der Werthe von T und R an den verfchiedenen Stellen der Kuppel kann nun in ähnlicher Weife durchgeführt werden, wie bei den anderen Gewölbearten gezeigt ift, indem man beftimmte Bedingungen für die Stützlinie vorfchreibt. Man unterfucht zu diefem Zwecke den einem Centriwinkel α entfprechenden Kuppeltheil und geht dabei vom Scheitel, bezw. vom Laternenring aus. 291. Graphifche Ermittelung.

Stellt man die Bedingung, dafs die Stützlinie im inneren Drittel verbleiben foll und kein Gleiten ftattfindet, fo erhält man eine folche, indem man vom oberften Kuppelringe ausgeht, folgendermafsen (Fig. 409). Die Belaftung des oberften, zum angenommenen Centriwinkel gehörigen Kuppeltheiles fei g_1 ($= \alpha\,\beta$); aufser g_1 wirken auf diefen Theil noch die beiden Spannungen $R\,ds$, welche von den Nachbartheilen im Ringe ausgeübt werden. Diefe beiden $R\,ds$ werden genau, wie in Fig. 406, zu einer Mittelkraft vereinigt, welche in derfelben Ebene wie g_1 liegt, d. h. in der Ebene, welche den zum Centriwinkel α gehörigen Kuppeltheil halbirt. Diefe Mittelkraft ift in Fig. 409 mit h_1 bezeichnet; h_1 ift vor der Hand nur der Richtung nach bekannt; Gröfse und Lage von h_1 find unbekannt. Die Mittelkraft von h_1 und g_1 foll die Fuge $a_1 b_1$ im inneren Drittel fchneiden und mit der Senkrechten zu diefer Fuge keinen gröfseren Winkel, als den Reibungswinkel φ einfchliefsen. Man ziehe nun durch c_1, den unterften Punkt des inneren Drittels der Fuge $a_1 b_1$, eine Linie, die den Winkel φ mit der Senkrechten zur Fuge einfchliefst; diefe Linie fchneide die Richtungslinie von g_1 in I; alsdann hat die durch I gelegte Kraft h_1 den kleinften Werth, welcher obigen Bedingungen entfpricht. Rückte nämlich h_1 nach abwärts unter Beibehaltung von c_1, fo würde h_1 (da ja g_1 denfelben Werth behält) gröfser werden; rückte gleichzeitig c_1 hinauf, fo würde h_1 erft recht gröfser. Rückten h_1 und c_1 gleich viel hinauf, fo bliebe h_1 unverändert, behielte alfo den kleinften Werth. Alles dies ergiebt fich ohne Schwierigkeit durch Verzeichnung eines Kraftdreieckes für g_1, h_1 und Kraft I; h_1 kann aber endlich nicht weiter nach oben rücken, wenn nicht auch c_1 nach oben rückt, weil fonft der Winkel von I mit der Senkrechten zur Fuge gröfser als φ wird. — Wenn der Schnittpunkt von h_1 mit der Mittellinie des erften Steines oberhalb des inneren Drittels fiele, fo wären an diefer Stelle auch die Ringfpannungen nicht mehr im inneren Drittel; da auch diefe im Drittel liegen follen, fo würde man h_1 bis zum oberen Endpunkt des inneren Drittels hinabzurücken und den fich dann ergebenden Schnittpunkt von h_1 und g_1 mit c_1 zu verbinden haben, wobei der Winkel der Mittelkraft I gegen die Fugen-Senkrechte kleiner als φ würde.

Fig. 409.



Auf den zweiten Stein wirken nun I und g_2; außerdem die Mittelkraft h_2 der Spannungen R im zweiten Ringe. Die Mittelkraft von I und g_2 ist aus dem Kraftpolygon zu entnehmen ($= O_1 \gamma$); sie geht durch den Schnittpunkt der Schnittlinien dieser beiden Kräfte. Die Resultirende dieser Kraft und der Kraft h_2 soll wiederum im inneren Drittel verbleiben; eben so soll auch der Schnittpunkt von h_2 mit der punktirten Halbirungslinie dieses Steines nicht aus dem Drittel herausfallen. Der kleinste Werth von h_2, welcher diesen Bedingungen entspricht, ist derjenige, bei welchem h_2 durch den oberen Grenzpunkt des inneren Drittels der Steinschwerlinie, d. h. durch e_2, geht, die Gesammtmittelkraft von I, g_2 und h_2 aber die Fuge $a_2 b_2$ im unteren Grenzpunkte c_2 des inneren Drittels schneidet. Die Verbindungslinie von c_2 mit d_2, dem Schnittpunkte der Mittelkraft von I und g_2 mit h_2 ergiebt die Richtung der Gesammtmittelkraft II; die Größe erhält man durch Ziehen einer Linie γO_2 durch γ parallel zur Richtungslinie von II. Der Winkel, welchen II mit der Fugen-Senkrechten zu $a_2 b_2$ einschließt, ist kleiner als φ, also die Construction brauchbar. Wäre der Winkel größer als φ, so wäre h_2 so weit hinabzurücken und zu vergrößern, bis der Winkel höchstens gleich φ ist. In dieser Weise erhält man durch Weiterconstruiren eine mögliche Stützlinie, welche auch mit der Wirklichkeit nahezu übereinstimmen dürfte.

Literatur.

Bücher über »Statik der Gewölbe«.

DIETLEIN, J. F. W. Beitrag zur Statik der Kreuzgewölbe. Halle 1823.

TELLKAMPF, H. Beitrag zur Gewölbetheorie. Frei nach CARVALLO. Hannover 1855.

SCHEFFLER, H. Theorie der Gewölbe, Futtermauern etc. Braunschweig 1857.

FABRE, V. *Théorie des voûtes élastiques et dilatables d'une application spéciale aux arcs métalliques.* Paris 1860.

HAGEN, G. Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen. Berlin 1863.

HÄNEL, v. Zur Theorie der Tonnengewölbe. Stuttgart 1868.

FONTAINE, H. *Stabilité des constructions. Extrait de la notice sur la théorie des voûtes.* Besançon 1870.

ORTMANN, O. Die Statik der Gewölbe mit Rücksicht auf ihre Anwendung. Halle 1876.

FABIAN, W. Ueber Gewölbstheorien mit besonderer Berücksichtigung auf den Brückenbau. Leipzig 1876.

BONNIN, R. *Étude sur la stabilité des voûtes en maçonnerie.* Evreux 1876.

PERRODIL. *Résistance des voûtes et arcs métalliques.* Paris 1879.

GOBERT, J. B. *Nouvelles recherches sur la théorie des voûtes.* Paris 1879.

FOEPPL, A. Theorie der Gewölbe. Leipzig 1880.

DURAND-CLAYE, A. *Vérification de la stabilité des voûtes et des arcs; application aux voûtes sphériques.* Paris 1880.

UNGEWITTER, G. G. Lehrbuch der gotischen Konstruktionen. 3. Aufl. von K. MOHRMANN. Leipzig 1892.

GNUSCHKE, H. Die Theorie der gewölbten Bogen etc. Berlin 1892.

AUTHENRIETH, E. Die statische Berechnung der Kuppelgewölbe. Berlin 1894.

TOLKMITT, G. Leitfaden für das Entwerfen und die Berechnung gewölbter Brücken. Berlin 1895.

Siehe auch Theil III, Band 2, Heft 3 (Abth. III, Abschn. 2, B: Gewölbte Decken) dieses »Handbuches«.

Nachtrag.

Auf S. 5 sind nachstehende Werke nachzutragen:

SMITH, H. *Graphics: or the art of calculation by drawing lines, applied to mechanical engineering.* London 1889—91.

BOVEY, H. T. *Theory of structures and strength of materials.* London 1893.

PILLET, J. *Traité de stabilité des constructions etc.* Paris 1895.

VONDERLINN, J. Statik für Bauhandwerker etc. Stuttgart 1896.

Desgl. auf S. 204:

HEHNE, W. Eiserne Träger und Säulen. Hilfsbuch zur statischen Berechnung. Halle 1890.

COUSINS, R. H. *A theoretical and practice treatise on the strength of beams and columns.* London 1890.