Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Stoss gegen Erdkugel.

1) Die Kugel als Pendel. Ist die Entfernung des Aufhängepunktes vom Mittelpunkte gleich e, so ist die Dauer kleiner Schwingungen

$$t = \pi \sqrt{\frac{T}{gM}},$$

wo $T = \frac{2}{5} mr^2 + e^2 m$, $M = em$ ist. Der Schwingungspunkt hat vom Aufhängepunkte die Entfernung

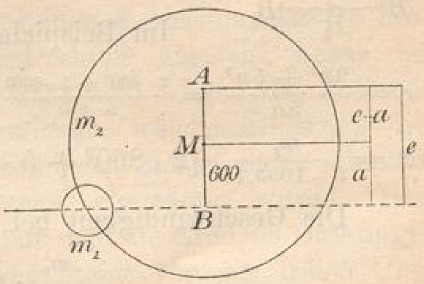
$$l = \frac{T}{M} = \frac{\frac{m}{5}(2r^2 + 5e^2)}{me} = \frac{2r^2 + 5e^2}{5e}.$$

(Reduzierte Pendellänge.)

175) Stofs gegen die Erdkugel.

Eine Kugel von der Gröfse und Masse der Erde werde von einem Weltkörper getroffen, dessen Masse der 1000^{ste} Teil der Erdmasse ist und der mit 100000 m Geschwindigkeit gegen den stillstehend gedachten Erdball trifft, den er in einer Sehne schneiden würde, die vom Mittelpunkt die Entfernung 600 Meilen hat. Der Erdball habe einen Radius von 860 Meilen. Welche Bewegung tritt ein?

Fig. 135.



Auflösung. Nach der Stofstheorie ist die Entfernung der freiwilligen Drehungsachse für den Anfang der Bewegung in der Entfernung $BA = e = \frac{T_B}{M_B}$ zu suchen.

Das Trägheitsmoment der als homogen angenommenen Erdkugel für den Punkt B ist

$$T_B = \frac{2}{5} m_2 r^2 + m_2 a^2,$$

das statische Moment für denselben Punkt

$$M_B = m_2 a;$$

demnach ist, da m_2 sich hebt, die Entfernung

$$BA = e = \frac{2r^2 + 5a^2}{5a}.$$

In B hat man sich eine Hülfsmasse zu denken, die in Bezug auf die Achse A dasselbe Trägheitsmoment hat wie die Kugel. Diese reduzierte Masse bestimmt sich aus der Gleichung

$$x e^2 = T_A$$

als

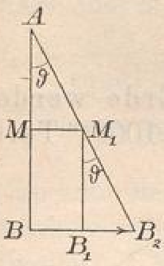
$$x = \frac{\frac{2}{5} m_2 r^2 + m_2 (e - a)^2}{e^2} = \frac{m_2}{5 e^2}[2r^2 + 5(e - a)^2].$$

Jetzt handelt es sich bei B um den unelastischen Stofs zweier Massen m_1 und x mit den Geschwindigkeiten v_1 und $v_2 = 0$, so dafs die gemeinschaftliche Schlufsgeschwindigkeit bei B wird:

$$v_B = \frac{m_1 v_1 + x \cdot 0}{m_1 + x} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + x}.$$

Die Geschwindigkeit bei M wird kleiner im Verhältnis der von A aus gerechneten Abstände, d. h. die Schwerpunktsbewegung wird

Fig. 136.



$$v_s = v_B \frac{e - a}{e}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit ϑ für den Radius 1 wird

$$\vartheta = \frac{B_1 B_2}{M_1 B_1} = \frac{v_B - v_s}{a}.$$

Im Beispiele ergiebt sich

$$e = \frac{2r^2 + 5a^2}{5a} = \frac{2 \cdot 860^2 + 5 \cdot 600^2}{5 \cdot 600} = 1093{,}1 \text{ Meilen; } e - a = 493{,}1 \text{ Meilen;}$$

$$x = \frac{m_2}{5 \cdot 1093{,}1^2} \cdot [2 \cdot 860^2 + 5 \cdot 493{,}1^2] = 0{,}45108\, m_2 \text{ ist die Hülfsmasse.}$$

Die Geschwindigkeit bei B wird

$$v_B = \frac{\frac{m_2}{1000} \cdot v_1}{\frac{m_2}{1000} + x} = \frac{100\,000}{452{,}08} = 221{,}2 \text{ m},$$

demnach erhält der Erdball die fortschreitende Bewegung

$$v_s = 221{,}2 \tfrac{493{,}1}{1093{,}1} = 99{,}785 \text{ m}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit endlich wird

$$\frac{221{,}2 - 96{,}785}{600 \cdot 7500} = 0{,}000269.$$

An der Stelle B ist der Kreisumfang gleich $2 \cdot 600 \cdot 7500 \cdot \pi$ Meter $= 9\,000\,000\,\pi$ Meter. Dies, dividiert durch $v_B - v_s = 121{,}42$ m, giebt eine Umlaufszeit von 232 870 Sek. oder etwa 3 Tagen.

Die verlorene Arbeitswucht (Energie) bei diesem Stofse beträgt $\frac{m_1 x}{m_1 + x} \frac{(v_1 - 0)^2}{2}$ mkg, wo $x = 0{,}45108\, m_2$ und m_2 bei dem spez. Gew. 5,6 der Erde gleich $\frac{\frac{4}{3}(860 \cdot 7500)^3 \pi \cdot 1000 \cdot 5{,}6}{9{,}81}$ ist, so dafs der Verlust an Arbeitswucht

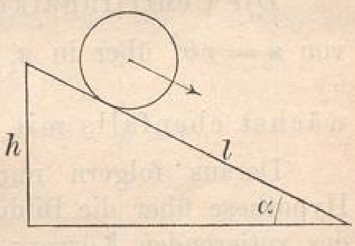
$$\frac{\frac{4}{3}(860 \cdot 7500)^3 \pi \cdot 1000 \cdot 5{,}6}{9{,}81} \cdot \frac{0{,}45108}{452{,}08} \cdot \frac{100000^2}{2} = \frac{m_2 \cdot 0{,}45108 \cdot 10\,000^2}{452{,}08 \cdot 2}$$

ist. Ein Teil dieser Arbeitswucht wird auf Umformung (Zerstörungsarbeit) verwendet, ein Teil in Wärme verwandelt. Angenommen, alles würde in Wärme übergehen, so würde durch $425 \cdot m_2$ zu dividieren sein*), wenn man die Anzahl der Wärmeeinheiten für die Masseneinheit erhalten will, durch $425 \cdot m_2 \cdot 9{,}81$, wenn man die Wärmeeinheiten für jedes Kilogramm finden will. Letzteres ergiebt rund 500 000 W.-E. Irgend ein Bruchteil derselben tritt als Erwärmung, der Rest als Zerstörungsarbeit auf. Um welchen Bruchteil es sich handelt, das hängt zum Teil von den chemischen Verhältnissen des Erdkörpers ab.

Nimmt man an, die Himmelskörper wären durch allmähliches Zusammenstürzen kosmischer Massen entstanden, so würde sich ihre fortschreitende Bewegung nebst der Drehung auf solche Weise ganz zwanglos erklären. Das mehrfach beobachtete plötzliche Aufleuchten neuer Fixsterne, deren Lichtstärke allmählich wieder abnimmt, deutet auf solche mit Wärmeentwickelung verbundene Zusammenstöfse hin.

Hatte der Erdkörper bereits eine Drehung um eine Achse, so würde in bekannter Weise diese einzusetzen sein. Nach der Poinsotschen Drehungstheorie könnte man ermitteln, welche Änderung die Drehungsbewegung unserer Erde durch einen solchen Stofs erhalten und welche neue Lage die Drehungsachse einnehmen würde. Das Problem läfst sich dahin spezialisieren, dafs man die Erde als Drehungsellipsoid annimmt, wobei die neue Achse keine von den freien Umdrehungsachsen zu werden braucht. Dies würde nicht nur auf Schwankungen (Nutation) der neuen Erdachse, sondern auch auf das Bestreben hinführen, ein neues „Geoid“ zu bilden; die Verteilung der Ozeane würde eine andere werden u. s. w. Kurz, eine ganze Reihe weiterer Probleme der Mechanik und Potentialtheorie würde sich aufdrängen.

Fig. 137.



176) **Aufgabe.** Auf einer schiefen Ebene von Neigung α rolle eine Kugel ohne zu gleiten herab. Wie geschieht die Bewegung ohne weitere Berücksichtigung der Reibung?

---

*) Die obige Ausrechnung von m_2 ist unterlassen, weil, wenn man hier durch m_2 statt durch $1{,}001\, m_2$ dividiert, m_2 sich weghebt, so dass es sich nur um den Bruch

$$\frac{0{,}45108 \cdot 10^{10}}{452{,}08 \cdot 2 \cdot 9{,}81}$$

handelt.

Auflösung. Arbeit der Schwerkraft ph gleich der Energie

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{7}{10} mv^2$$

zu setzen, oder

$$mgh = \frac{7}{10} mv^2, \quad v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = \sqrt{2g_1 h} = \sqrt{2g_1 l \sin\alpha},$$

also Beschleunigung $g_1 = \frac{5}{7} g \sin\alpha$.

177) **Aufgabe.** Wie grofs würde die Zunahme der Erddrehung sein, wenn sich die Erde vom Radius r auf den Radius r_1 zusammenzöge?

Auflösung. Das Trägheitsmoment $T = \frac{2}{5} mr^2$ würde übergehen in $T_1 = \frac{2}{5} mr_1^2$, die Winkelgeschwindigkeit ϑ in die zu berechnende ϑ_1. Nimmt man an, die Drehungsenergie bliebe unverändert, was ziemlich wahrscheinlich ist, so hat man zu setzen:

$$\frac{T_1\vartheta_1^2}{2} = \frac{T\vartheta^2}{2}$$

oder

$$\frac{2}{5} mr_1^2 \cdot \frac{\vartheta_1^2}{2} = \frac{2}{5} mr^2 \cdot \frac{\vartheta^2}{2},$$

woraus folgt:

$$\vartheta_1 = \frac{r}{r_1}\vartheta,$$

d. h. die Winkelgeschwindigkeit wächst mit dem Verhältnisse $\frac{r}{r_1}$. Aus $r\vartheta = r_1\vartheta_1$ folgt zugleich, dafs die Äquatorialgeschwindigkeit unverändert bleibt. Dasselbe gilt unter einer einfachen Annahme von jedem Massenteilchen.

Die Centrifugalkraft am Äquator geht für die Masseneinheit von $\varkappa = r\vartheta^2$ über in $\varkappa_1 = r_1\vartheta_1^2 = r_1 \frac{r^2}{r_1^2}\vartheta^2 = \frac{r}{r_1}(r\vartheta^2) = \frac{r}{r_1}\varkappa$, d. h. sie wächst ebenfalls mit dem Verhältnisse $\frac{r}{r_1}$.

Daraus folgern nun zahlreiche Anhänger der Laplaceschen Hypothese über die Bildung des Sonnensystemes, dafs die Abplattung des rotierenden Körpers gleichfalls wachsen müsse. Dies ist aber falsch. Es ist nämlich zu berücksichtigen, dafs gleichzeitig die Schwerkraft auf der Kugelfläche in dem stärkeren Verhältnisse $\frac{r^2}{r_1^2}$ zunimmt, dafs z. B. bei der Erde die Freifallbeschleunigung g in $g\frac{r^2}{r_1^2}$