



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Cardioide und Parabel als reciproke Kurven.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

252) **Aufgabe.** Symmetrische Brennstrahlsektoren der Parabel zu berechnen.

Das polare Trägheitsmoment des Dreiecks in Bezug auf O ist

$$\frac{ba}{48} (12a^2 + b^2) = \frac{a \cdot 2a \tan \frac{\alpha}{2}}{48} \left[12a^2 + 4a^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right] = \frac{a^4 \tan \frac{\alpha}{2}}{6} \left[3 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right].$$

Folglich ist die entsprechende Fläche der Parabel das Vierfache, nämlich

$$\frac{2}{3} a^4 \tan \frac{\alpha}{2} \left[3 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right].$$

(Probe: für $\alpha = 90^\circ$ entsteht $\frac{8}{3} a^4$, d. h. $\frac{2}{3}$ des Rechtecks $ABCD$, wo $OA = a^2$, $OD = 2a^2$ ist.)

253) **Bemerkung.** Vergleicht man die Gleichungen der Lemniskate und der gleichseitigen Hyperbel in Polarkoordinaten, so erkennt man, daß die Lemniskate die reciproke Kurve der gleichseitigen Hyperbel ist. Die Transformation der Figur 184, in der Kreis und Gerade AB von O aus gerechnet reciprok sind, mittels der Funktion $Z = \sqrt{z}$, giebt den Beweis dafür, denn dabei verwandeln sich Kreis und Tangente in Lemniskate bzw. Hyperbel.

Transformiert man dieselbe Figur mittels $Z = z^2$, so gehen Kreis und Tangente in Cardioide und Parabel über, und so folgt, daß die Cardioide reciproke Kurve der Parabel in Bezug auf den Brennpunkt ist.

Weil das Inversionsbild eines Kreises stets ein Kreis ist, so ist das Inversionsbild jeder Cassinischen Linie vom Mittelpunkt aus stets eine Cassinische Linie, das einer cardioidischen Kurve in Bezug auf O stets eine cardioidische Kurve. Dem Sonderfalle der Geraden entsprechen die Sonderfälle der gleichseitigen Hyperbel und der Parabel.

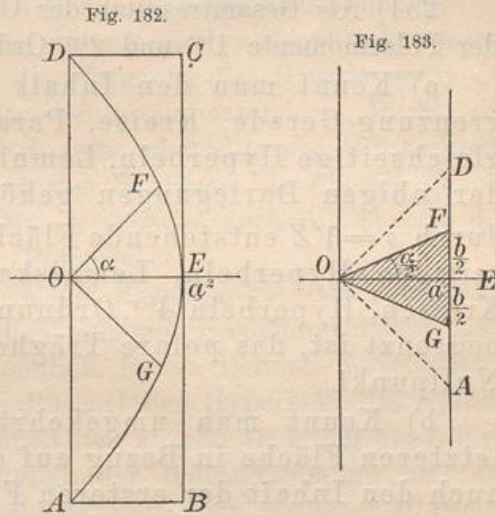
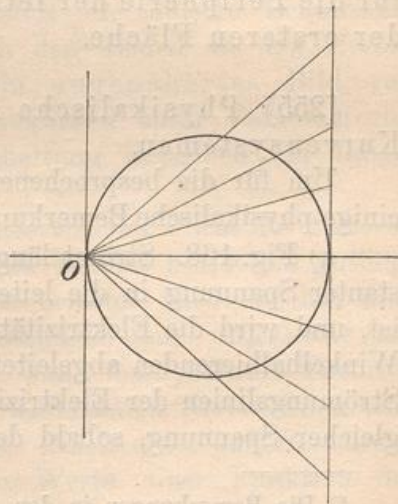


Fig. 184.



Transformiert man das System der confokalen Lemniskaten und der orthogonalen Schar gleichseitiger Hyperbeln noch einmal mittels der Funktion $Z = \sqrt{z}$, so entstehen Lemniskaten 4^{ter} Ordnung von der Gleichung $p_1 p_2 p_3 p_4 = c$ und Hyperbeln 4^{ter} Ordnung von der Gleichung $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 = \gamma$, die ebenfalls für die Festigkeitslehre von Bedeutung sind.

254) Als Gesamtergebnis des Obigen kann man für die Theorie der Polarmomente 1^{ter} und 2^{ter} Ordnung Folgendes hinstellen:

a) Kennt man den Inhalt einer Fläche, zu deren Begrenzung Gerade, Kreise, Parabeln, cardioidische Kurven, gleichseitige Hyperbeln, Lemniskaten 2^{ter} Ordnung im Sinne der obigen Darlegungen gehören, so kennt man für die durch $z = \sqrt{Z}$ entstehende Fläche, die bezüglich von gleichseitigen Hyperbeln, Lemniskaten 2^{ter} Ordnung, Geraden, Kreisen, Hyperbeln 4^{ter} Ordnung, Lemniskaten 4^{ter} Ordnung begrenzt ist, das polare Trägheitsmoment in Bezug auf den Nullpunkt.

b) Kennt man umgekehrt das Trägheitsmoment der letzteren Fläche in Bezug auf den Nullpunkt, so kennt man auch den Inhalt der ersteren Fläche.

c) Kennt man die Peripherie der ersten Fläche, so kennt man das Polarmoment 1^{ter} Ordnung für die Peripherie der zweiten Fläche.

d) Kennt man umgekehrt das Polarmoment 1^{ter} Ordnung für die Peripherie der letzteren, so kennt man die Peripherie der ersteren Fläche.

[255) Physikalische Bemerkungen zu den behandelten Kurvensystemen.

Um für die besprochenen Kurvenscharen zu interessieren, mögen einige physikalische Bemerkungen über dieselben eingeschaltet werden. *)

a) Fig. 168. Strömt längs der Koordinatenachsen Elektrizität konstanter Spannung in die leitende Platte ein, die unbegrenzt zu denken ist, und wird die Elektrizität in unendlich großer Entfernung auf den Winkelhalbierenden abgeleitet, so ist die eine Hyperbelgruppe die der Strömungslinien der Elektrizität, die andere Gruppe ist die der Linien gleicher Spannung, sobald der stationäre Zustand eingetreten ist.

*) Die Bemerkungen in den eingeklammerten Abschnitten sind nur für vorgeschrittene Leser bestimmt. Sie mögen als eine Hindeutung darauf, daß es noch höhere Gebiete giebt, aufgefaßt werden. Dort kommt die höhere Analysis zur Geltung, die im Anfange des Studiums noch entbehrt werden kann.