Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

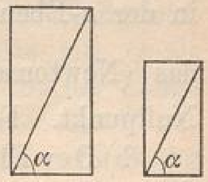
Leipzig, 1897

Anwendung auf die Berechnung von Trägheitsmomenten, Flächen, Potentialwerten, Kurvenlängen und Polarmomenten erster Ordnung.

dafs auch die kleinen „Dreiecke“ AKB beider Ebenen einander ähnlich sind.

224) Bei ähnlichen „Rechtecken“ stimmen die Diagonalwinkel ebenfalls überein, und so schliefst man überhaupt, dafs einander entsprechende Winkel (mit Schenkeln von unendlich kleiner Länge) beider Ebenen übereinstimmen, so dafs die Beziehung eine winkeltreue oder isogonale ist, und dafs unendlich kleinen Dreiecken der einen Ebene unendlich kleine und ähnliche der andern entsprechen, kleinen geometrischen Gebilden ähnliche Gebilde der andern entsprechen. Man sagt, beide Ebenen seien in den kleinsten Teilen ähnlich, die Abbildung der einen auf die andere sei eine konforme.

Fig. 166.



Wie man nun ein Gemälde mit Hülfe eines Quadratnetzes vergröfsert oder verkleinert wiedergeben kann, so kann man mit Hülfe der hier besprochenen Quadratnetze zu den Gebilden der einen Ebene mit beliebiger Genauigkeit die entsprechenden der andern Ebene konstruieren.

Das Vergröfserungsverhältnis ist, wie oben gezeigt wurde, für jede Stelle $2\varrho : 1$, wo ϱ den Abstand des kleinen Gebildes der z-Ebene vom Nullpunkte bedeutet. In der Umgebung des Nullpunktes wird es zu $0 : 1$, im unendlichen Bereiche zu $\infty : 1$, so dafs beide Bereiche Ausnahmestellung einnehmen. Im Nullpunkte hört auch die „Ähnlichkeit“ auf, da dort 2γ und γ einander entsprechen.

225) In technischer und mechanischer Hinsicht ist nun Folgendes von Wichtigkeit:

Jedem Flächenelemente f der z-Ebene, welches die Entfernung ϱ vom Nullpunkte hat, entspricht in der Z-Ebene ein solches von der Gröfse $4\varrho^2 f$, jeder Fläche $F = \sum f$ der ersteren entspricht also in der letzteren eine Fläche vom Inhalte $F_1 = \sum 4\varrho^2 f = 4\sum f\varrho^2$. Letzterer Ausdruck ist aber das vierfache polare Trägheitsmoment des Flächenstücks F in Bezug auf den Nullpunkt. Folglich gilt der wichtige Satz:

a) Der Flächeninhalt jedes Gebildes der Z-Ebene ist viermal so grofs, wie das Trägheitsmoment des entsprechenden Gebildes der z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt.

226) Jedem Flächenstück f_1 der Z-Ebene entspricht ein solches von der Gröfse $f = \frac{f_1}{4\varrho^2} = \frac{f_1}{4\varrho_1}$ in der z-Ebene, wo ϱ_1 der Abstand

des ersteren Gebildes vom Nullpunkte ist. Jeder Fläche $F_1 = \sum f_1$ der Z-Ebene entspricht also eine solche von der Gröfse

$$F = \sum \frac{f_1}{4\,\varrho_1} = \frac{1}{4} \sum \frac{f_1}{\varrho_1}$$

in der z-Ebene. Den Ausdruck $\sum \frac{f_1}{\varrho_1}$ deutet aber die Mechanik als das (Newtonsche) Potential der Fläche $\sum f_1$ in Bezug auf den Nullpunkt. Folglich gilt der Satz:

b) Der Flächeninhalt jedes Gebildes der z-Ebene ist gleich dem vierten Teile des (Newtonschen) Potentials der entsprechenden Fläche der Z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt.

227) Jedem Kurvenelemente s der z-Ebene entspricht in der Z-Ebene ein solches von der Länge $2\,\varrho s$, der Kurve von der Länge $\sum s$ also eine solche von der Länge $\sum 2\,\varrho s = 2 \sum \varrho s$ in der Z-Ebene. Der Ausdruck $\sum \varrho s$ ist aber das Polarmoment erster Ordnung der Kurve $\sum s$ in Bezug auf den Nullpunkt. Folglich:

c) Die Länge jeder Kurve der Z-Ebene ist gleich dem doppelten Polarmomente erster Ordnung der entsprechenden Kurve der z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt.

228) Ebenso entspricht jedem Kurvenelemente s_1 der Z-Ebene in der z-Ebene ein solches von der Länge $\frac{s_1}{2\,\varrho} = \frac{s_1}{2\sqrt{\varrho_1}}$, so dafs $\sum s_1$ übergeht in $\frac{1}{2} \sum \frac{s_1}{\sqrt{\varrho_1}}$. Auch dieser Ausdruck hat eine Potentialbedeutung für ein gewisses anderes Anziehungsgesetz (als das Newtonsche), soll aber hier nicht untersucht werden.

Ebenso soll die unter b) genannte Potentialbeziehung erst im nächsten Bande bei den Potentialbetrachtungen zur Sprache kommen.

Aus diesen Beziehungen ergiebt sich eine Fülle der interessantesten Resultate, sobald man weifs, welche Kurven beider Ebenen einander entsprechen, denn es werden sich noch zahlreiche andere Anwendungen für die Wärmetheorie, Elektrizitätslehre, Hydrodynamik, Kartographie und Kinematik anschliefsen.

229) **Beispiel zu a.** Der Halbkreisfläche mit Radius r und Mittelpunkt O der z-Ebene entspricht in der Z-Ebene ein ganzer Kreis vom Radius r^2 und vom Inhalte $r^4\pi$, folglich ist der vierte

Teil davon oder $\frac{r^4\pi}{4}$ das Trägheitsmoment des Halbkreises in Bezug auf den Nullpunkt.

Beispiel zu b. Der Kreisfläche mit Radius r_1 und Mittelpunkt O in der Z-Ebene entspricht in der z-Ebene ein Halbkreis vom Radius $\sqrt{r_1}$ und vom Inhalte $\frac{1}{2}(\sqrt{r_1})^2\pi = \frac{r_1\pi}{2}$. Das Vierfache, also $2r_1\pi$, ist demnach das Potential jener Kreisfläche in Bezug auf den Nullpunkt.

Beispiel zu c. Der Halbkreislinie $r\pi$ der z-Ebene mit O als Mittelpunkt entspricht in der Z-Ebene eine Kreislinie von der Länge $2(r^2)\pi = 2r^2\pi$. Demnach ist die Hälfte davon, oder $r^2\pi$, das Polarmoment erster Ordnung der Halbkreislinie vom Radius r in Bezug auf den Nullpunkt.

Jetzt einige Aufgaben über das gegenseitige Entsprechen von Kurven.

230) **Aufgabe.** In der Z-Ebene sei das von horizontalen und vertikalen Geraden gebildete Quadratnetz gezeichnet. Welches Quadratnetz entspricht diesem in der z-Ebene?

Auflösung. Der Geraden $X = a$ oder $R\cos\Phi = a$ entspricht die Kurve $r^2\cos 2\varphi = a$ oder $r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = a$ oder $x^2 - y^2 = a$, oder

$$\frac{x^2}{(\sqrt{a})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{a})^2} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, die durch die Punkte $\pm\sqrt{a}$ der x-Achse geht.

Der Geraden $Y = b$ oder $R\sin\Phi = b$ entspricht die Kurve $r^2\sin 2\varphi = b$ oder $2r\sin\varphi\, r\cos\varphi = b$ oder $2xy = b$, wofür man schreiben kann

$$xy = \frac{b}{2}.$$

Dies ist eine gleichseitige Hyperbel mit dem konstanten Asymptotenrechteck $\frac{b}{2}$, deren Asymptoten in die x- und y-Achse fallen.

Sind die Geraden der Z-Ebene der Reihe nach

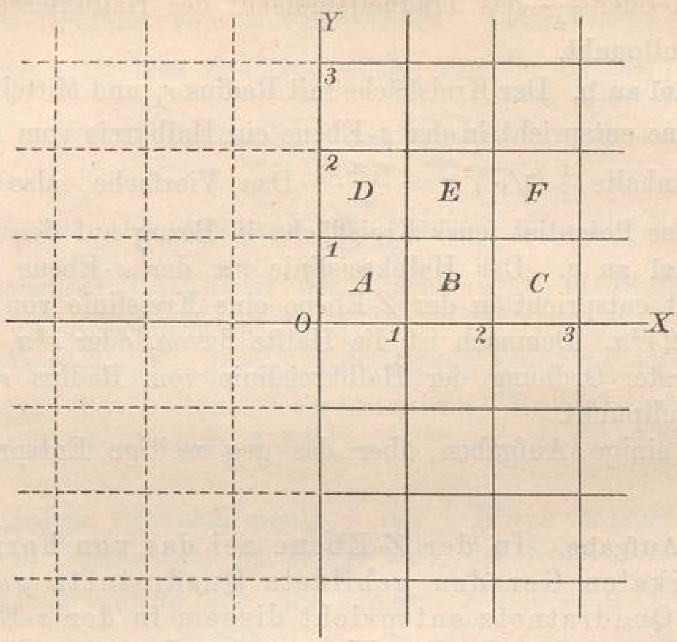
$$X = 0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ 4a, \cdots$$
$$Y = 0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ 4a, \cdots,$$

so gehen die Hyperbeln auf der X-Achse bezw. der Geraden von der Neigung 45° durch Punkte, die von O die Abstände

$$0,\ \sqrt{a},\ \sqrt{2a},\ \sqrt{3a},\ \sqrt{4a}, \cdots$$

haben, und es entsteht ein quadratisches Netz.

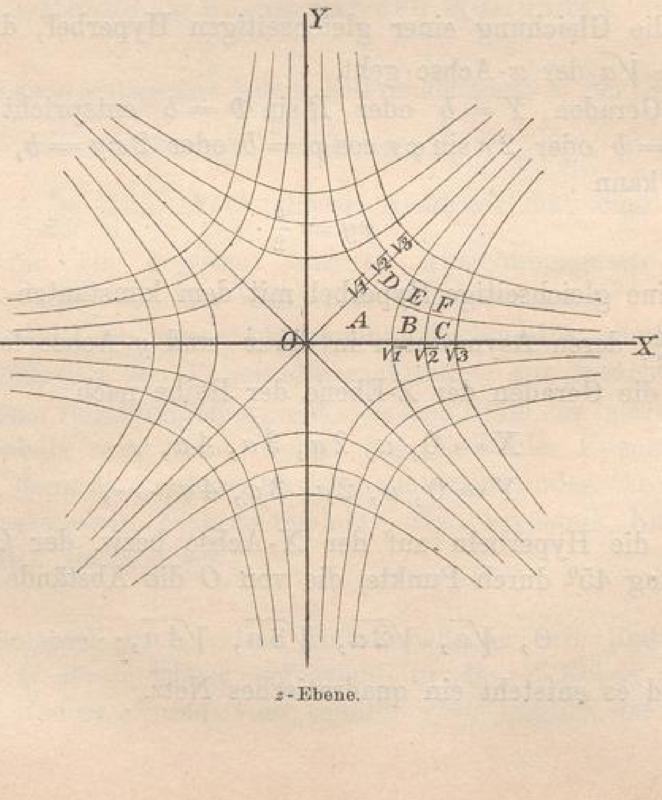
Fig. 167.



Z-Ebene.

231) Für $a = 1$ ist dieses gegenseitige Entsprechen in den Figuren 167 und 168 dargestellt. Dort hat jedes Quadrat den Inhalt 1, folglich:

Fig. 168.



z-Ebene.