Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Die lemniskatische Abbildung.

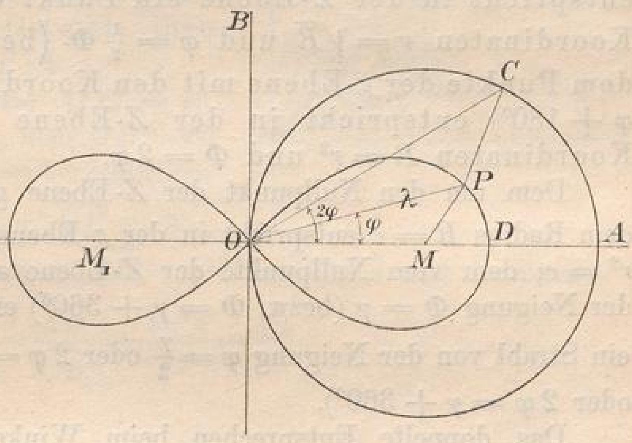
urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

Abschnitt VI.

Anwendung der lemniskatischen Abbildung auf die Bestimmung polarer Trägheitsmomente und polarer Momente erster Ordnung.

218) In Nr. 142 wurde eine Konstruktion besprochen, die einen Kreis in eine Lemniskate verwandelt. Macht man die entsprechende Transformation mit allen Punkten der Ebene, und trägt man, um die Zeichnung nicht zu verwirren, das „Bild" jedes Punktes in einer besonderen Zeichnungsebene ein, so ergeben sich für beide Ebenen interessante gegenseitige Beziehungen, die einen eigentümlichen Einblick in die höhere Mathematik und in die mathematische Physik geben und auch für den Techniker von Wichtigkeit sind.

Fig. 162.



Um das Bild P des Punktes C zu finden, hat man die mittlere Proportionale zwischen $OM = 1$ und OC als Winkelhalbierende einzutragen. Will man umgekehrt das Bild C zu P finden, so setze man auf die Seite OP des Dreiecks OMP das ähnliche Dreieck OPC.

219) Die erste Konstruktion verwandelt den Winkel $COM = \Phi = 2\varphi$ in den Winkel $POD = \varphi = \frac{\Phi}{2}$, den Radius $OC = R = r^2$ in den Radius $OP = \sqrt{OC} = r = \sqrt{R}$.

Die zweite verwandelt den Winkel φ in 2φ, den Radius r in r^2. [Die erste entspricht der Moivreschen Formel

$$\sqrt{R(\cos\Phi + i\sin\Phi)} = \sqrt{R}\,(\cos\tfrac{1}{2}\Phi + i\sin\tfrac{1}{2}\Phi),$$

die zweite der Formel

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

Wegen dieses Zusammenhanges soll die erste Transformation als die Abbildung $z = \sqrt{Z}$, die zweite als die Abbildung $Z = z^2$ bezeichnet werden.

Auf den Zusammenhang mit der Lehre von den komplexen Gröfsen soll hier zu Gunsten der elementaren Darstellung nicht eingegangen werden. Die entsprechende Behandlung findet man in des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften".]

220) Zwischen den Polarkoordinaten aller Punkte beider Ebenen, von denen die eine die Z-Ebene, die andere die z-Ebene heifst, finden jetzt folgende Beziehungen statt:

Dem Punkte mit den Koordinaten R und Φ (bezw. $\Phi + 360^0$) entspricht in der Z-Ebene ein Punkt der z-Ebene mit den Koordinaten $r = \sqrt{R}$ und $\varphi = \frac{1}{2}\Phi$ $\left(\text{bezw. } \varphi = \frac{1}{2}\Phi + 180^0\right)$; dem Punkte der z-Ebene mit den Koordinaten r und φ (bezw. $\varphi + 180^0$) entspricht in der Z-Ebene ein Punkt mit den Koordinaten $R = r^2$ und $\Phi = 2\varphi$.

Dem um den Nullpunkt der Z-Ebene geschlagenen Kreise mit dem Radius $R = c$ entspricht in der z-Ebene der Kreis $r = \sqrt{c}$ oder $r^2 = c$; dem vom Nullpunkte der Z-Ebene ausgehenden Strahle von der Neigung $\Phi = \gamma$ (bezw. $\Phi = \gamma + 360^0$) entspricht in der z-Ebene ein Strahl von der Neigung $\varphi = \frac{\gamma}{2}$ oder $2\varphi = \gamma$ (bezw. $\varphi = \frac{\gamma}{2} + 180^0$ oder $2\varphi = \gamma + 360^0$).

Das doppelte Entsprechen beim Winkel giebt gewissermafsen die beiden Wurzelwerte an.

Umgekehrt geht jeder Kreis der z-Ebene, der mit Radius $r = c$ um den Nullpunkt geschlagen ist, über in einen Kreis $R = c^2$ oder $\sqrt{R} = c$ der Z-Ebene, jeder Strahl, der mit Neigung $\varphi = \gamma$ (bezw. $\gamma + 180^0$) vom Nullpunkte ausgeht, in einen Strahl $\Phi = 2\gamma$ oder $\frac{\Phi}{2} = \gamma$.

Jeder der genannten Kreise der Z-Ebene ist doppelt durchlaufen zu denken, wenn der der z-Ebene einmal durchlaufen wird, denn der Winkel 360^0 entspricht dem Winkel 180^0. Die ganze Z-Ebene wird auf der Halbebene z dargestellt, die zweischichtig mit Punkten zu bedeckende Z-Ebene auf der ganzen einschichtigen z-Ebene.

Auf das zweifache Entsprechen soll nur noch aufmerksam gemacht werden, wenn es besonders nötig erscheint.

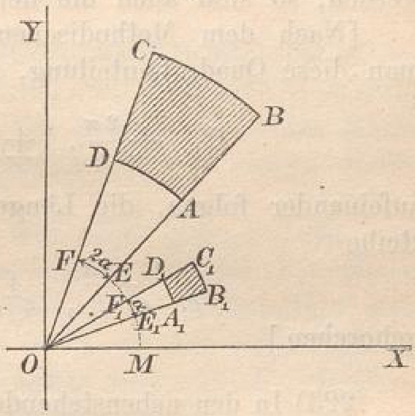
221) Jeder Punktfolge oder Curve der einen Ebene entspricht eine Curve der andern. In Polarkoordinaten entsprechen einander die Curven

$$f(R, \Phi) = 0 \quad \text{und} \quad f[(r^2), (2\varphi)] = 0,$$
$$f\left[(\sqrt{R}), \left(\frac{\Phi}{2}\right)\right] = 0 \quad \text{und} \quad f(r, \varphi) = 0.$$

222) Wichtig ist nun Folgendes:

Jedem rechtwinkligen Flächenstücke $ABCD$ der Z-Ebene, welches von den besprochenen Kreisen und Geraden begrenzt wird, entspricht ein rechtwinkliges Flächenstück $A_1B_1C_1D_1$ der andern Ebene, und zwar wird behauptet, bei hinreichender Kleinheit seien beide „Rechtecke" einander ähnlich, ihre Mafsstäbe verhielten sich wie $2\varrho : 1$, wo $\varrho = OA_1$, also $\varrho^2 = OA$ ist, ihre Flächen also wie $4\varrho^2 : 1$.

Fig. 163.



Beweis. Man setze $OA_1 = \varrho$, also $OA = \varrho^2$, $OB_1 = r$, also $OB = r^2$, den zum Radius $OM = 1$ gehörigen Bogen $\widehat{E_1F_1} = \alpha$, also $\widehat{EF} = 2\alpha$, so dafs Bogen $A_1D_1 = \varrho\alpha$, $\widehat{AD} = \varrho^2 2\alpha = 2\varrho^2\alpha$ und demnach

$$\frac{\widehat{AD}}{\widehat{A_1D_1}} = \frac{2\varrho^2\alpha}{\varrho\alpha} = \frac{2\varrho}{1}$$

wird. Ebenso wird

$$\widehat{B_1C_1} = r\alpha, \ \widehat{BC} = r^2 2\alpha = 2r^2\alpha,$$

folglich

$$\frac{\widehat{BC}}{\widehat{B_1C_1}} = \frac{2r^2\alpha}{r\alpha} = \frac{2r}{1},$$

wofür, wenn die Dimensionen der Rechtecke unendlich klein sind, also für die Grenze $r = \varrho$ zu setzen ist, geschrieben werden kann

$$\frac{\widehat{BC}}{\widehat{B_1C_1}} = \frac{2\varrho}{1}.$$

Für die beiden Bogenpaare ist also das obige Verhältnis als richtig nachgewiesen.