



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

F. Verallgemeinerte Simpsonsche Regel.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

winkel α der Tangente auf die Reihen an, wozu man Method. Lehrbuch Band 2, Anhang oder Band 3, Algebr. An. VI vergleiche, so findet man sofort als maßgebende Gleichung

$$-2a \cos 2x + 2b \sin 2x = 0$$

oder

$$\tan 2x = \frac{b}{a}$$

zur Bestimmung der betreffenden Stelle. Damit würde eine dritte Lösung dieses wichtigen Problems gegeben sein.]

F. Verallgemeinerte Simpsonsche Regel.

212) Reichen die bisherigen Methoden zur Berechnung von Flächen oder Körpern oder ihrer Momente erster oder zweiter Ordnung nicht aus, so ist man zu Annäherungsversuchen genötigt.

Eine erste Annäherung würde die Trapezformel geben, die darauf beruht, daß man die einzelnen Streifen gleicher Höhe als Trapeze berechnet. Addiert man die Resultate, so ergibt sich z. B. für Fig. 161, wo übrigens $y_0 = 0$ ist,

$$\overset{y_8}{F} = \frac{y_8 - y_0}{2 \cdot 8} [x_0 + x_8 + 2(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_7)].$$

Das Resultat wird einigermassen brauchbar, wenn die Kurve gegen die Y-Achse bald konkav, bald konvex ist. Das Resultat wird aber zu klein, wenn sie überall konkav, zu groß, wenn sie überall konvex ist.

Es ist leicht, die Formel für $\overset{y_8}{F}$ oder $\overset{y_2}{F}$ u. s. w. aufzustellen.

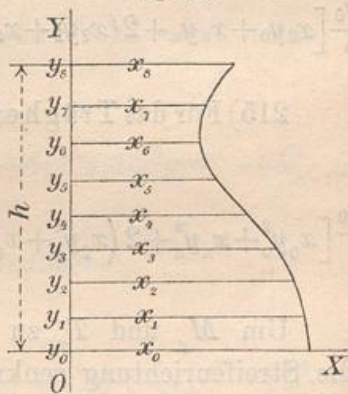
213) Ein weit genaueres Resultat giebt in der Regel die verallgemeinerte Simpsonsche Formel, die darauf beruht, daß man eine gerade Anzahl von Streifen annimmt und auf jeden Doppelstreifen die Simpsonsche Regel anwendet.

Thut man dies, so ergibt sich z. B. für Fig. 161

$$\overset{y_8}{F} = \frac{y_8 - y_0}{6 \cdot 4} [x_0 + x_8 + 2(x_2 + x_4 + x_6) + 4(x_1 + x_3 + x_5 + x_7)],$$

allgemein für n Streifen oder $\frac{n}{2}$ Doppelstreifen

Fig. 161.



$$F = \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[x_0 + x_n + 2(x_2 + x_4 + \dots + x_{n-2}) + 4(x_1 + x_3 + \dots + x_{n-1}) \right].$$

Die Genauigkeit wird deshalb gröfser, weil sich durch je drei aufeinanderfolgende Kurvenpunkte unendlich viele Parabeln gemischter Ordnung vom 3^{ten} Grade legen lassen, für welche die Simpsonsche Formel ein richtiges Resultat giebt. Irgend eine dieser Kurven wird sich in der Regel weit genauer an die wirkliche Kurve anschmiegen, als es die geraden Linien der Trapezformel thun.

214) Die Berechnung der statischen Momente würde nach der Trapezformel sehr ungenau ausfallen.

Die verallgemeineste Simpsonformel dagegen würde für Fig. 161 folgendes Resultat geben

$$M_x = \frac{y_8 - y_0}{6 \cdot 4} \left[x_0 y_0 + x_8 y_8 + 2(x_2 y_2 + x_4 y_4 + x_6 y_6) + 4(x_1 y_1 + x_3 y_3 + x_5 y_5 + x_7 y_7) \right].$$

Allgemein ergibt sich für gerades n

$$M_x = \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[x_0 y_0 + x_n y_n + 2(x_2 y_2 + x_4 y_4 + \dots + x_{n-2} y_{n-2}) + 4(x_1 y_1 + x_3 y_3 + \dots + x_{n-1} y_{n-1}) \right].$$

215) Für das Trägheitsmoment ergibt sich ebenso bei geradem n

$$T_x = \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[x_0 y_0^2 + x_n y_n^2 + 2(x_2 y_2^2 + x_4 y_4^2 + \dots + x_{n-2} y_{n-2}^2) + 4(x_1 y_1^2 + x_3 y_3^2 + \dots + x_{n-1} y_{n-1}^2) \right].$$

Um M_y und T_y zu berechnen, wird man zweckmäßiger Weise die Streifenrichtung senkrecht gegen die vorige wählen.

216) Für die Centrifugalmomente müfste man bei Figur 161 folgendermaßen verfahren: Der erste Doppelstreifen würde nach Nr. 110 geben

$$\frac{y_2 - y_0}{6} \left[\frac{x_0^2}{2} y_0 + \frac{x_2^2}{2} y_2 + 4 \frac{x_1^2}{2} y_1 \right] = \frac{y_2 - y_0}{12} \left[x_0^2 y_0 + x_2^2 y_2 + 4 x_1^2 y_1 \right].$$

Die vollständige Formel würde lauten

$$M_{xy} = \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[x_0^2 y_0 + x_n^2 y_n + 2 \left(\frac{x_2^2}{2} y_2 + \frac{x_4^2}{2} y_4 + \dots + \frac{x_{n-2}^2}{2} y_{n-2} \right) + 4 \left(\frac{x_1^2}{2} y_1 + \frac{x_3^2}{2} y_3 + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{2} y_{n-1} \right) \right]$$

oder

$$M_{xy} = \frac{y_n - y_0}{6n} \left[x_0^2 y_0 + x_n^2 y_n + 2 \left(x_2^2 y_2 + x_4^2 y_4 + \dots + x_{n-2}^2 y_{n-2} \right) + 4 \left(x_1^2 y_1 + x_3^2 y_3 + \dots + x_{n-1}^2 y_{n-1} \right) \right].$$

In der Regel wird die Formel nur für Körper verwendet, obwohl auch die Berechnung der genannten Momente für die Technik ganz brauchbare Resultate gibt. Als Beispiel könnte der in Fig. 28 dargestellte Schienenquerschnitt dienen. Auf die Schwerpunktsberechnung mit Hilfe von $\frac{M}{F}$, auf die mit Hilfe von $\sqrt{\frac{T}{F}}$, $\frac{T}{M}$, $\frac{M_{xy}}{F}$ durchzuführenden Berechnungen und ihre praktischen Anwendungen braucht hier nur hingedeutet zu werden.

217) Der durch Drehung um die Y -Achse aus Fig. 161 entstehende Körper würde folgendermaßen zu berechnen sein:

$$I = \pi \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[x_0^2 + x_n^2 + 2 \left(x_2^2 + x_4^2 + \dots + x_{n-2}^2 \right) + 4 \left(x_1^2 + x_3^2 + \dots + x_{n-1}^2 \right) \right].$$

Sein statisches Moment in Bezug auf die Grundfläche würde sein:

$$M_u = \pi \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[x_0^2 y_0 + x_n^2 y_n + 2 \left(x_2^2 y_2 + x_4^2 y_4 + \dots + x_{n-2}^2 y_{n-2} \right) + 4 \left(x_1^2 y_1 + x_3^2 y_3 + \dots + x_{n-1}^2 y_{n-1} \right) \right].$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundfläche:

$$T_u = \pi \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[x_0^2 y_0^2 + x_n^2 y_n^2 + 2 \left(x_2^2 y_2^2 + x_4^2 y_4^2 + \dots + x_{n-2}^2 y_{n-2}^2 \right) + 4 \left(x_1^2 y_1^2 + x_3^2 y_3^2 + \dots + x_{n-1}^2 y_{n-1}^2 \right) \right].$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Y -Achse würde werden:

$$T_p = \frac{\pi}{2} \frac{y_n - y_0}{6 \cdot \frac{n}{2}} \left[x_0^4 + x_n^4 + 2 \left(x_2^4 + x_4^4 + \dots + x_{n-2}^4 \right) + 4 \left(x_1^4 + x_3^4 + \dots + x_{n-1}^4 \right) \right].$$

Denselben Formeln gehorchen die Körper, die sich nach der Methode von Cavalieri aus dem Drehungskörper ableiten lassen. —

Die Annäherungsformeln geben um so bessere Werte, je mehr Schnitte man zu Hülfe nimmt und je weniger Unregelmäßigkeiten das Profil zeigt. Als Beispiel berechne man das Trägheitsmoment der in Fig. 98 dargestellten Schiene, deren Masse man zu bestimmen hat, indem man z. B. die Querschnitte für 6 Doppelstreifen von gleicher Breite abmisst.

Für rein mathematische Untersuchungen sind die Methoden dieses Abschnitts unbrauchbar, dort müssen sie durch die strengen Methoden der höheren Mathematik ersetzt werden, wenn diese überhaupt der Aufgabe gewachsen ist.