



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Beispiel des ungleichschenkligen Winkeleisens.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

Diese Ellipse ist namentlich in graphischer Hinsicht von Wichtigkeit, und sie wird hier nur vorläufig erwähnt, um Verwechslungen vorzubeugen. Ist O der Schwerpunkt S , so hat man die Culmannsche Centralellipse.

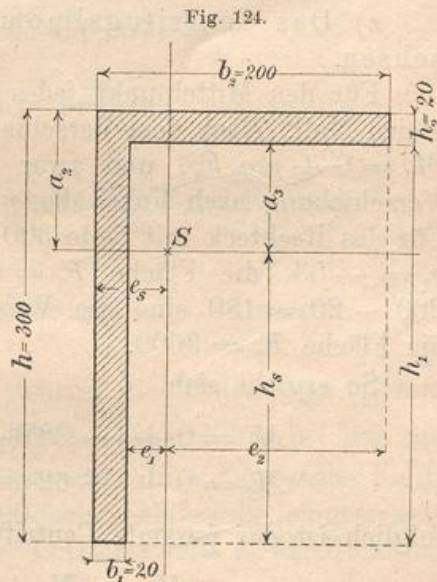
Die Culmannsche Trägheitsellipse ist ähnlich und ähnlich liegend zur ersten Ellipse. Die Mittelpunkte beider fallen zusammen. Die Brennpunkte der Lemniskate des Centrifugalmoments liegen auf der großen Achse beider Ellipsen, die Fixpunkte auf der kleinen. Später soll die zweite Ellipse eingehend behandelt werden.

147) Um zu erkennen, auf was es bei den Berechnungen dieses Kapitels ankommt, muß man einige numerische Beispiele nach jeder Richtung hin durchrechnen. Wird z. B. mit Millimetern gerechnet, so nimmt die Trägheitsellipse erster Art mikroskopisch kleine Dimensionen an, so daß man sie in 1000- bis 10 000-fachem Maßstabe zeichnen muß, um sie zu veranschaulichen. Die Culmannsche Ellipse dagegen erhält brauchbare Dimensionen. Für den Maschinenbau sind solche Berechnungen von geringerer Wichtigkeit, wohl aber für die Eisenkonstruktionen des Hochbau- und Brückenbauwesens. Für die dort auftretenden Querschnitte sind Normalprofile festgestellt. Jedes derselben kann als lehrreiches Übungsbeispiel Verwendung finden. Im nachstehenden Abschnitte ist ein ungleichschenkliges Winkeleisen numerisch behandelt. Ein Normalprofil wurde absichtlich nicht genommen, um gewisse Eigentümlichkeiten schärfer hervortreten zu lassen.

Abgesehen von der rein praktischen Verwertung für die Festigkeitslehre lassen sich aber viele physikalische Betrachtungen über die Theorie der Drehung, der Centrifugalkraft, der Pendelschwingungen, des Stosses, des Wasserdrucks u. dgl. mit jedem solchen Beispiele verbinden.

148) Beispiel des ungleichschenkligen Winkeleisens.

Gegeben sei $h = 300$ mm, $h_2 = 20$ mm $= b_1$, $b_2 = 200$ mm. Die Hauptaufgabe soll darin bestehen, die Lage der Hauptträgheitsachsen für den Schwerpunkt zu bestimmen und daraus gewisse Schlüsse zu ziehen. Der Einfachheit halber sind die Resultate jedesmal auf ganze Millimeter abgerundet. Dadurch treten



Ungenauigkeiten in die Rechnung, die praktisch ohne Belang sind, da der homogene Charakter des Materials doch niemals verbürgt werden kann.

a) Schwerpunktsbestimmung. Die Koordinaten des Schwerpunkts werden nach Nr. 3)

$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)} = \frac{20 \cdot 280^2 + 200 \cdot 20 (560 + 20)}{2(20 \cdot 280 + 200 \cdot 20)}$$

$$= \frac{3\,888\,000}{19\,200} = \sim 203 \text{ mm},$$

$$e_s = \frac{b_1^2 h_1 + b_2 h_2}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)} = \frac{20^2 \cdot 280 + 200^2 \cdot 20}{2(20 \cdot 280 + 200 \cdot 20)} = \frac{912\,000}{19\,200} = \sim 48 \text{ mm}.$$

b) Die Trägheitsmomente T_x und T_y werden nach Nr. 61)

$$T_x = \frac{1}{3} [b_1 h_s^3 + b_2 a_2^3 - b_3 a_3^3]$$

$$= \frac{1}{3} [20 \cdot 203^3 + 200 \cdot 97^3 - 180 \cdot 77^3] = \sim 89\,220\,000.$$

$$T_y = \frac{1}{3} [h e_s^3 - h_1 e_1^3 + h_2 e_2^3]$$

$$= \frac{1}{3} [300 \cdot 48^3 - 280 \cdot 28^3 + 20 \cdot 152^3] = \sim 32\,420\,000.$$

Demnach ist das polare Trägheitsmoment für den Schwerpunkt

$$T_p = 121\,640\,000.$$

c) Das Centrifugalmoment M_{xy} für die Schwerpunktsachsen.

Für den Mittelpunkt jedes Rechtecks ist das Centrifugalmoment gleich Null. Nach dem Verschiebungssatze ist dann $M_1 = 0 + p_1 q_1 F_1$, $M_2 = 0 + p_2 q_2 F_2$, und zwar sind die p positiv einzustellen bei Verschiebung nach links, die q positiv bei Verschiebung nach unten. Für das Rechteck mit Seite 300 sind die Verschiebungen $p_1 = -38$, $q_1 = -53$, die Fläche $F_1 = 6000$. Für das Rechteck mit Seite $200 - 20 = 180$ sind die Verschiebungen $p_2 = +62$, $q_2 = +87$, die Fläche $F_2 = 3600$.

So ergibt sich

$$M_1 = 0 + (-38)(-53)6000 = 12\,080\,000,$$

$$M_2 = 0 + (+62)(+87)3600 = 19\,420\,000,$$

folglich ist das gesamte Centrifugalmoment

$$M_{xy} = M_1 + M_2 = 31\,500\,000.$$

d) Die Lage der Hauptträgheitsachsen.
Nach Nr. 140 ist

$$\tan 2\alpha = \frac{2 M_{xy}}{T_y - T_x} = \frac{63\,000\,000}{-56\,800\,000} = -\frac{630}{568}.$$

$\lg \frac{630}{568} = \lg \tan \xi = 0,04499$, also gehört zum positiven Bruche im ersten Quadranten der Winkel $\xi = 47^{\circ} 58'$, zum negativen Bruche also im zweiten Quadranten der Winkel $2\alpha = 132^{\circ} 2'$, so daß $\alpha = 66^{\circ} 1'$ ist. Folglich:

Die eine Hauptachse der Trägheit ist unter $66^{\circ} 1'$ gegen die positive Richtung der X-Achse geneigt. Die andere steht senkrecht dagegen.

e) Das maximale und das minimale Trägheitsmoment.

Nach Nr. 141) wird für die beiden Grenzmomente

$$\begin{aligned} T &= \frac{T_x + T_y}{2} \pm \frac{T_x - T_y}{2} \sec 2\alpha \\ &= 60\,820\,000 \pm \frac{28\,400\,000}{\cos 132^{\circ} 2'} = 60\,820\,000 \mp 42\,420\,000. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$T_{\max} = 103\,240\,000, \quad T_{\min} = 18\,400\,000.$$

Die Summe beider gibt selbstverständlich wieder T_p .

f) Das maximale Centrifugalmoment für das Strahlenbüschel durch S ist

$$M_{\max} = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{2} = 42\,420\,000.$$

g) Die Grenzwerte der Trägheitsradien.

$$\rho_{\max} = \sqrt{\frac{T_{\max}}{F}} = \sqrt{\frac{103\,240\,000}{9\,600}} = 103,71 \text{ mm} = \sim 104 \text{ mm},$$

$$\rho_{\min} = \sqrt{\frac{T_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{18\,400\,000}{9\,600}} = 43,78 \text{ mm} = \sim 44 \text{ mm}.$$

h) Die erste Centralellipse würde die Halbachsen $\frac{1}{104}$ mm und $\frac{1}{44}$ mm erhalten, so daß ihre graphische Darstellung bei den angenommenen Mafsen nicht praktisch erscheint. In umstehender Figur ist sie im willkürlich gewählten 10 000-fachen Mafsstabe eingetragen, was $b = 96$ mm, $a = 227$ mm giebt. Letzteres fällt in die Richtung KL , ersteres in die Richtung MN .

Hauptachse ist das Verhältnis $104 : 44$ oder $26 : 11$ oder etwa $5 : 2$ für beide Achsen.

Man erkennt für die Festigkeitslehre sofort Folgendes: Bei Strebbeanspruchung giebt das Winkeleisen in der Richtung MN nach, hält aber stand in der Richtung KL . Die Tragfähigkeit im einfachsten Einspannungsfalle ist, wie die Festigkeitslehre zeigt, höchstens

$$P = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{T \cdot E}{l^2},$$

wo P die Tragfähigkeit, E der Elasticitätsmodul des Materials, l die Höhe ist. (Alles auf Kilogramme und Millimeter reduziert.)

Bei Biegungsbeanspruchung durch ein in senkrechter Ebene wirkendes Kräftepaar würde es am günstigsten sein, MN horizontal anzubringen. Im Falle des Freitragers würde die Grenze der Tragfähigkeit sein $P = \frac{SW}{l}$, wo S die zulässige Spannung des Materials,

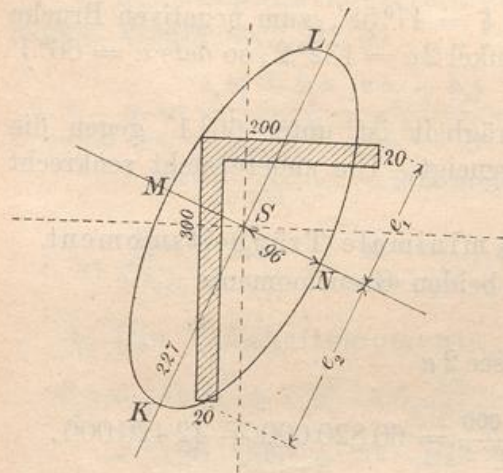
l die Länge des Freitragers, $W = \frac{J}{e_1}$ bzw. $W = \frac{J}{e_2}$ das Widerstandsmoment (auch Querschnittsmodul Z genannt) des Querschnitts bedeutet. MN ist bei dieser Belastungsart neutrale Achse, e_1 und e_2 sind die Entfernungen der äußersten Fasern des Materials, wo die Zug- und Druckspannung am stärksten werden. Welcher von den beiden Moduln zu wählen ist, hängt von den Tragmoduln des Materials für Zug und Druck ab.

Die Festigkeitslehre zeigt ferner Folgendes. Wird der Freitrag in beliebiger Lage eingemauert, z. B. in der gezeichneten, und wirkt das Kräftepaar in senkrechter Ebene, so gilt als neutrale Achse der zu dieser Ebene konjugierte Durchmesser der Ellipse, dessen Richtung sich aus der Tangente im Schnittpunkte ergibt.

Denkt man sich den Querschnitt homogen mit Masse belegt und um eine in seiner Ebene liegende Schwerpunktsachse gedreht, so setzt er der beschleunigten Drehung den größten Widerstand entgegen, wenn MN Drehungsachse ist, den geringsten, wenn KL als solche gewählt wird. Die entsprechende Energie wird im ersten Falle $T \frac{\vartheta^2}{2}$, im andern $T \frac{\vartheta^2}{2}$, wo ϑ die Winkelgeschwindigkeit ist.

Aus der Drehung um eine Achse, die in S auf der Querschnitts-

Fig. 125.



ebene senkrecht steht, wird die Centrifugalkraft gleich Null, die Energie wird $T_p \frac{\dot{\vartheta}^2}{2}$.

i) Die Culmannsche Trägheitsellipse. Ihre lange Hauptachse fällt mit der der ersten Trägheitsellipse zusammen, der sie ähnlich ist. Die Hauptachse $a_1 = 104 \text{ mm}$ fällt in die Richtung MN . Die Brennpunkte F und F_1 liegen in den Entfernungen

$$e = \sqrt{\varrho_{\max}^2 - \varrho_{\min}^2} = \sqrt{104^2 - 44^2} = \sim \pm 94 \text{ mm}$$

von S auf MN .

Trägt man diese Entfernungen von S aus auf KL ab, so findet man die Fixpunkte C und C_1 des Querschnittes. Für diese sind also die Trägheitsellipsen Kreise vom Radius $\varrho = 104 \text{ mm}$. Für

beliebig gerichtete durch C und C_1 gehende Achsen sind die Trägheitsmomente gleich $T = 103\,240\,000$. Man erhält den Trägheitsradius für eine beliebige Achse der Ebene durch die Gleichung

$$\varrho_{\max}^2 = \varrho^2 + p_1 p_2 = 104^2 + p_1 p_2,$$

wo p_1 und p_2 die von den Fixpunkten aus auf die neue Achse gefällten Lote sind.

Für jede durch S gehende Achse findet man den Trägheitsradius, indem man auf die parallele Tangente der zweiten Ellipse ein Lot fällt.

k) Die Lemniskate der Centrifugalmomente für je zwei Schwerpunktsachsen.

Ihre Brennpunkte fallen in die Richtung MN und haben von S die Entfernung $\pm \frac{e}{2} = \pm \frac{94}{2} = \pm 47$. Der größte Halbmesser SG wird gleich $e\sqrt{\frac{1}{2}} = 94\sqrt{\frac{1}{2}} = \sim 66 \text{ mm} = \lambda$.

Da $\lambda^2 F = M_{\max}$ werden muß, so ergibt sich hier eine wichtige Rechnungsprobe. Man erhält in der That den früheren Werth $\lambda^2 \cdot 9600 = 42\,420\,000$.

Einige Punkte der Lemniskate hätte man aus dem Obigen ableiten können. Für die unter 45° geneigte Gerade hätte man als

Ihre lange Haupt-

Fig. 126.

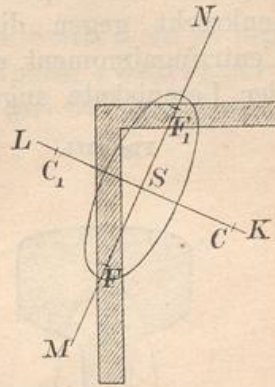
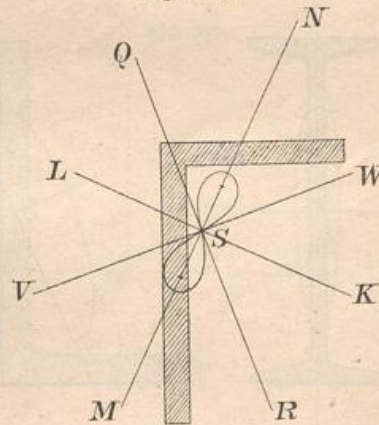


Fig. 127 a.



Radius des Centrifugalmoments gefunden $\lambda_{xy} = \sqrt{\frac{M_{xy}}{F}} = \sqrt{\frac{31\,500\,000}{9600}} = \sim 57 \text{ mm}$. Dies muß mit der Zeichnung übereinstimmen und giebt durch Symmetrie noch drei andere Punkte der Kurve.

1) Bei der Drehung um irgend eine in der Querschnittsebene liegende Schwerpunktsachse entsteht im allgemeinen ein aus zwei senkrecht gegen diese gerichteten Centrifugalkräften zu bildendes Centrifugalmoment, dessen Größe durch den winkelhalbierenden Radius der Lemniskate angegeben wird. Dieser Radius ist gleich Null in

Fig. 127 b.

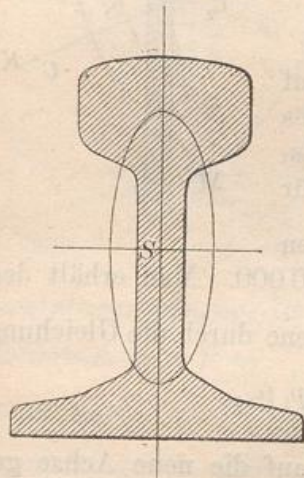
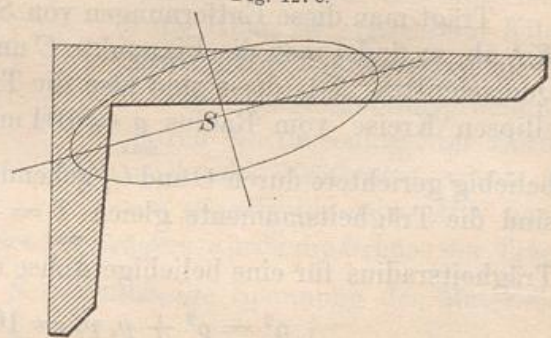


Fig. 127 c.



den Richtungen der Tangente RQ und VW , folglich ist das Centrifugalmoment gleich Null für die Hauptachsen KL und MN . Diese

Fig. 127 d.

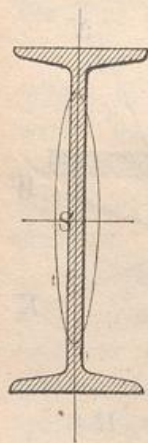


Fig. 127 e.

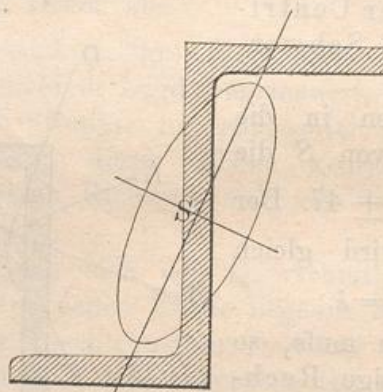
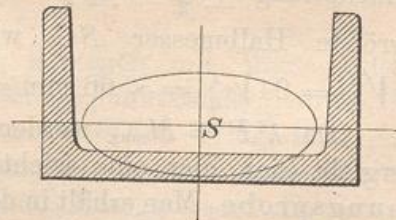


Fig. 127 f.



sind also freie Achsen des Querschnittes. Die dritte freie Achse ist das in S auf der Querschnittsebene errichtete Lot.

m) Auf andere Aufgaben der Mechanik, bei denen es sich um Pendelschwingungen, excentrischen Stofs, um Mittelpunkt des Wasserdrucks und dgl. handelt, sei gelegentlich dieses Übungsbeispiels nur kurz hingedeutet, da sie nur für die Übung im Ansatz, nicht aber für die Praxis Wert haben.

149) Im Anschluss an Culmanns Graphische Statik sind in den nebenstehenden Figuren noch einige Centralellipsen zweiter Art für gewisse Querschnitte skizziert worden, die für Übungsbeispiele brauchbar sind.

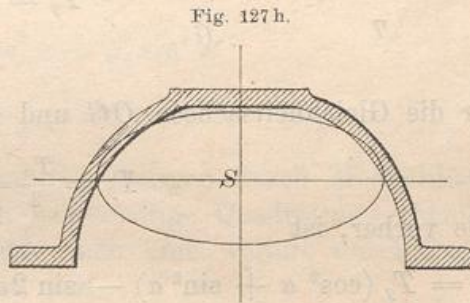
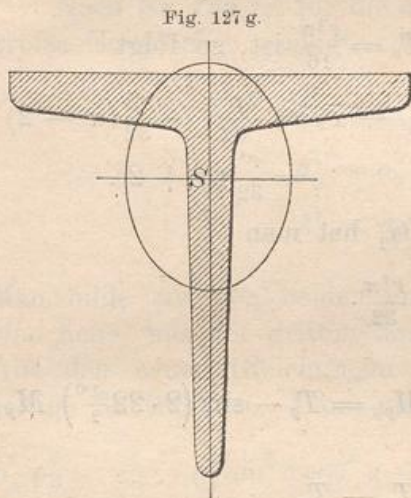


Fig. 127^b stellt den Querschnitt einer Schiene dar, Fig. 127^c ein Winkeleisen, Fig. 127^d ein Γ -Eisen, Fig. 127^e ein Z-Eisen, Fig. 127^f ein U-Eisen, Fig. 127^g ein T-Eisen, Fig. 127^h ein Quadrant-Eisen, auch Zores-Eisen genannt.

150) **Aufgabe.** Die Grenzträgheitsmomente des Viertelkreises für den Mittelpunkt zu berechnen.

Aus $T_x = T_y = \frac{r^4 \pi}{16}$ folgt nach der Gleichung

$$T_\alpha = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha - \sin 2\alpha M_{xy}$$

für den $\sphericalangle \alpha = 45^\circ$

$$T_\xi = T_x (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - \sin 2\alpha M_{xy} = T_x - \sin 2\alpha M_{xy}.$$

Nun ist aber $M_{xy} = \frac{r^4}{8}$, folglich

Fig. 128.

