Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Drehungssatz für das Centrifugalmoment.

139) Ausgang von den Gleichheitsachsen.

Für die Gleichheitsachsen ist $T_x = T_y$, wofür der Gleichheit halber T_g geschrieben werden soll. Für die Achse, die um α gegen die x-Achse gedreht ist, gilt jetzt nach Nr. 109 die Gleichung

$$T_\xi = T_g \cos^2 \alpha + T_g \sin^2 \alpha - \sin 2\alpha\, M_{xy}$$
$$= T_g (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - \sin 2\alpha\, M_{xy},$$

folglich

$$T_\xi = T_g - \sin 2\alpha\, M_{xy}.$$

Nimmt man M_{xy} als positiv an, so erhält man für $\alpha = 45^0$ und $\alpha = -45^0$ das Minimal- und Maximalmoment in der Form

$$T_1 = T_g - M_{xy}, \quad T_2 = T_g + M_{xy}.$$

Hieraus folgt durch Subtraktion

$$M_{xy} = \frac{T_2 - T_1}{2}.$$

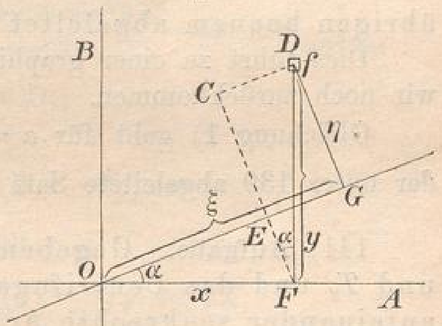
Folglich: Das Centrifugalmoment in Bezug auf die Gleichheitsachsen ist gleich der halben Differenz der beiden Grenzmomente.

Namentlich bei einfach symmetrischen Querschnitten giebt dies mancherlei Rechnungserleichterungen. Für das vorige Beispiel z. B. ergiebt sich für die Gleichheitsachsen (abgesehen vom Vorzeichen)

$$M_{xy} = \frac{T_y - T_x}{2}.$$

140) Drehung der Achse des Centrifugalmomentes.

Fig. 117.



In beistehender Figur ist

$$\xi = OE + CD = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$
$$\eta = FC - FE = y \cos \alpha - x \sin \alpha,$$

also

$$\xi\eta = xy \cos^2 \alpha - xy \sin^2 \alpha$$
$$+ y^2 \sin \alpha \cos \alpha - x^2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

folglich

$$\sum f\xi\eta = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sum fxy + \sin \alpha \cos \alpha \left[\sum fy^2 - \sum fx^2\right],$$

oder

$$1) \qquad M_{\xi\eta} = \cos 2\alpha\, M_{xy} + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha\, (T_x - T_y).$$

Kennt man also das Centrifugalmoment und die beiden Trägheitsmomente in Bezug auf zwei zu einander senkrechte

Achsen, so erhält man durch Gleichung 1) das Centrifugalmoment für die um α gedrehte Achse.

Danach wird $M_{\xi\eta} = 0$ für

$$\tfrac{1}{2} \sin 2\alpha \, (T_y - T_x) = \cos 2\alpha \, M_{xy}$$

oder für

2) $$\tan 2\alpha = \frac{2 M_{xy}}{T_y - T_x},$$

woraus sich die Richtungen für die beiden Hauptachsen ergeben.

Geht man umgekehrt von den Hauptachsen aus, für die $M_{xy} = 0$ ist, so vereinfacht sich Gleichung 1) zu

3) $$M_{\xi\eta} = \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha \, (T_1 - T_2),$$

wo T_1 und T_2 Grenzmomente sind. Den Maximalwert hat man bei den Achsenrichtungen $\alpha = \pm 45^0$, nämlich

4) $$M_{\xi\eta} = \frac{T_1 - T_2}{2},$$

so dafs der Maximalwert des Centrifugalmomentes den Gleichheitsachsen angehört und daher auf einer der Hauptachsen graphisch darzustellen ist.

Geht man von den Gleichheitsachsen aus, so erhält man aus 1) die Gleichung

5) $$M_{\xi\eta} = \cos 2\alpha \, M_{xy},$$

so dafs aus dem maximalen Centrifugalmoment $\frac{T_1 - T_2}{2}$ alle übrigen bequem abgeleitet werden können.

Dies führt zu einer graphischen Darstellung aller Werte, auf die wir noch zurückkommen.

Gleichung 1) geht für $\alpha = 45^0$ über in $M_{\xi\eta} = \frac{T_x - T_y}{2}$, worin der unter 139 abgeleitete Satz als besonderer Fall enthalten ist.

141) **Aufgabe.** Gegeben seien die Trägheitsmomente T_x und T_y und das Centrifugalmoment M_{xy} in Bezug auf zwei aufeinander senkrechte Achsen. Die Hauptträgheitsachsen sollen bestimmt und die Grenzwerte des Trägheitsmomentes sollen berechnet werden.

Auflösung. Man erhält die Hauptachsen, wenn $M_{\xi\eta} = 0$ wird, also nach vorigem Abschnitt für

1) $$\tan 2\alpha = \frac{2 M_{xy}}{T_y - T_x},$$

woraus sich die Winkel α_1 und $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^0$ ergeben.

Diese Werte sind in die Bestimmungsgleichung