Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Hauptachsenlage beliebiger Trägheitsellipsen.

Biegungsachse ist, für die andere der Ausdruck T selbst, der hier für alle Achsen derselbe ist. Für Figur 111 z. B. ist $\frac{T}{a}$ in Bezug auf die

Fig. 111.

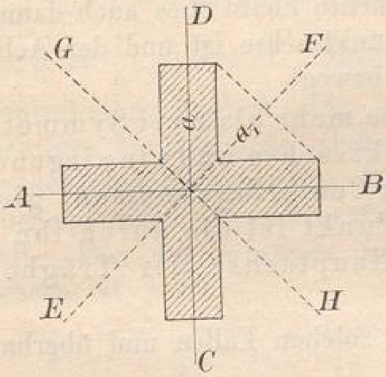
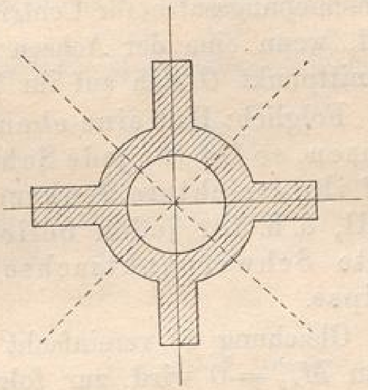


Fig. 112



Achse AB kleiner als $\frac{T}{a_1}$ in Bezug auf die Achse GH, die letztere Biegungsachse ist also für Biegungsbeanspruchung die günstigere. Entsprechendes gilt für Figur 112.

133) Lage der Hauptachsen für beliebige Trägheitsellipsen. Die Gleichung einer Trägheitsellipse einer Fläche für einen beliebigen Punkt ergab sich aus

$$1)\qquad T_\xi = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha - \sin 2\alpha M_{xy}$$

als

$$2)\qquad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 2c^2xy = 1.$$

Hätte in der ersten Gleichung für jedes α der dritte Posten gefehlt, d. h. wäre $M_{xy} = 0$ gewesen, so hätte er auch in der andern Gleichung gefehlt und man hätte die einfachste Gleichung der Ellipse erhalten. Folglich:

Ist für die beiden gewählten Achsen das Centrifugalmoment der Fläche gleich Null, so ist die Gleichung der Trägheitsellipse von der Form

$$3)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wo a und b Hauptachsen der Ellipse sind.

Umgekehrt folgt daraus, dafs das Centrifugalmoment in Bezug auf die Hauptachsen der Trägheitsellipse gleich Null ist.

Dies ist z. B. der Fall für jede Symmetrieachse einer Fläche und eine auf der ersteren senkrecht stehende Achse.

Hat ferner die Fläche mehr als zwei Symmetrieachsen, so ist die Centralellipse ein Kreis und man darf je zwei beliebige auf einander senkrechte Schwerpunktsachsen als Hauptachsen betrachten. Für jedes Paar von Schwerpunktsachsen ist also dann $M_{xy} = 0$. Nach dem Verschiebungssatze für Centrifugalmomente bleibt dies auch dann der Fall, wenn eine der Achsen Schwerpunktsachse ist und der Achsenschnittpunkt O sich auf ihr beliebig bewegt.

Folglich: Hat eine ebene Fläche mehr als zwei Symmetrieachsen, so ist für jede Schwerpunktsachse und eine irgendwo auf ihr errichtete Senkrechte das Centrifugalmoment gleich Null, d. h. für jeden beliebigen Punkt ist die durch ihn gelegte Schwerpunktsachse eine Hauptachse der Trägheitsellipse.

Gleichung 1) vereinfacht sich in solchen Fällen und überhaupt, wenn $M_{xy} = 0$ wird, zur folgenden:

4) $$T_\xi = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha,$$

bezw.

5) $$\varrho^2 = \varrho_1^2 \cos^2 \alpha + \varrho_2^2 \sin^2 \alpha,$$

und dabei sind T_x und T_y Minimal- bezw. Maximalmomente, je nachdem das eine oder das andere das kleinere ist.

134) **Aufgabe.** T_x und T_y seien das minimale und maximale Trägheitsmoment für eine Fläche F und für das Strahlenbüschel eines beliebigen Punktes O. Wie grofs sind die Momente für die Winkelhalbierenden der Hauptachsen?

Auflösung. In Gleichung 4) ist $\alpha = 45^0$ einzuführen. Dies giebt

$$T_\xi = T_x \cos^2 45^0 + T_y \sin^2 45^0 = \frac{T_x + T_y}{2}.$$

Dasselbe gilt für den Winkel -45^0.

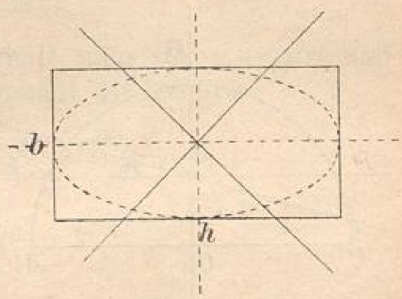
Folglich: Das Trägheitsmoment für die Gleichheitsachsen ist das arithmetische Mittel der beiden Grenzmomente. (Letzterer Ausdruck soll Abkürzung für die Worte Maximal- und Minimalmoment bedeuten.)

Folglich: Das Trägheitsmoment für die Gleichheitsachsen ist gleich der Hälfte des zugehörigen Polarmomentes.

135) **Aufgabe.** Die Centralellipse des Rechtecks zu berechnen und ihr Trägheitsmoment für die entsprechenden Gleichheitsachsen zu entwickeln.

Das Maximalmoment für Figur 113 ist $\frac{bh^3}{12}$, das Minimalmoment $\frac{hb^3}{12}$, die Trägheitsradien sind $\varrho_2 = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$ und $\varrho_1 = \frac{b}{\sqrt{12}}$, die reciproken Werthe sind $a_1 = \frac{\sqrt{12}}{b}$, $b_1 = \frac{\sqrt{12}}{h}$, so daſs $a_1 : b_1 = \frac{1}{b} : \frac{1}{h} = h : b$. Die einbeschriebene Hauptellipse ist also der Centralellipse ähnlich. Um letztere im richtigen Maſsstabe zu erhalten, würde es der Feststellung einer Einheit bedürfen, wovon jetzt abgesehen werden soll. Für die schrägen Gleichheitsachsen ist

Fig. 113.



$$T_\xi = \frac{T_x + T_y}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{hb^3}{12} + \frac{bh^3}{12}\right)$$
$$= \frac{bh}{24}(b^2 + h^2) = \frac{F}{24} d^2,$$

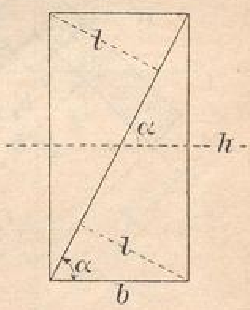
wo F die Fläche des Rechtecks, d seine Diagonale ist.

(Bei Millimetermaſs fallen für die gebräuchlichen Querschnitte die Halbachsen äuſserst klein aus. Wäre z. B. $h = 100$ mm, so würde $a = \frac{\sqrt{12}}{100}$ kaum sichtbar sein.

Ist allgemeiner die Länge 1 gegeben, und hat man $\varrho_1 = \frac{b}{\sqrt{12}}$ gezeichnet, so findet man $a_1 = \frac{1}{\varrho_1}$ mit Hülfe der Proportion $\varrho_1 : 1 = 1 : a_1$. Ebenso ist es mit $\varrho_2 = \frac{h}{\sqrt{12}}$ und $\varrho_2 : 1 = 1 : b_1$.)

136) **Aufgabe.** Wie groſs ist das Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf seine Diagonale d?

Fig. 114.



Auflösung. Aus

$$T_\xi = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha$$

folgt, da

$$\sin \alpha = \frac{h}{d}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{d}$$

und

$$d = \sqrt{b^2 + h^2}$$

ist,

$$T_\xi = \frac{bh^3}{12}\frac{b^2}{d^2} + \frac{hb^3}{12}\frac{h^2}{d^2} = \frac{b^3h^3}{6\,d^2} = \frac{b^3h^3}{6\,(b^2 + h^2)},$$

was auch mit Hülfe des Dreiecks gefunden werden konnte. [Jedes Diagonaldreieck giebt $\frac{dl^3}{12}$, die Gesamtfigur also $\frac{dl^3}{6}$. Nun ist aber