Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Centralellipse.

trägheitsachsen. Der Kürze halber sollen die Achsen der gleichen Trägheitsmomente als Gleichheitsachsen bezeichnet werden.

d) Sind mehr als zwei Ellipsendurchmesser einander gleich, so ist die Ellipse ein Kreis. Folglich: Stimmen die Trägheitsmomente in Bezug auf mehr als zwei durch O gehende Achsen überein, so stimmen sie für sämtliche überein. (Später wird sich zeigen, dafs für jede beliebig gestaltete ebene Fläche zwei Punkte existieren, für deren Strahlenbüschel sämtliche Trägheitsmomente der Fläche übereinstimmen. Dies sind die sogenannten Fixpunkte.)

e) Ist eine der durch O gehenden Achsen Symmetrieachse der Fläche F, so ist sie auch Symmetrieachse der Trägheitsellipse. Folglich: Eine Symmetrieachse einer Fläche ist stets eine der Hauptachsen der Trägheitsellipse, also liegt entweder der Fall des Maximums, oder der des Minimums vor. Gerade dieser Umstand erspart zahlreiche Rechnungen.

f) Die Summe zweier Trägheitsmomente für auf einander senkrechte Achsen ist konstant, nämlich gleich dem zugehörigen Polarmomente. Folglich mufs für die Ellipse folgender Satz existieren: Die Summe der Quadrate der reciproken Werte für je zwei auf einander senkrechte Halbmesser der Ellipse ist konstant, nämlich gleich $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

132) Die Centralellipse. Die dem Schwerpunkte einer Fläche entsprechende Ellipse heifst die Centralellipse. Sie ist von besonderer Wichtigkeit, weil von ihr aus alle anderen Trägheitsmomente durch Verschiebung ($T_1 = T + e^2 F$) gefunden werden können.

Auch von ihr gelten die letzten Symmetriebemerkungen.

Von besonderer Wichtigkeit ist folgendes:

Hat eine Fläche mehr als zwei Symmetrieachsen, so ist die Centralellipse ein Kreis.

In diesem Falle braucht man also nur ein einziges Trägheitsmoment wirklich zu berechnen. Dies gilt nicht nur von den regelmäfsigen Polygonen, sondern auch von zahlreichen anderen ebenen Gebilden, die für die Technik wichtig sind. Hierher gehören z. B. die Kreuzquerschnitte und die Schnitte gewisser Säulen und Flügelachsen. Davon wurde im Abschnitt 65 Gebrauch gemacht.

Für die Biegungs- und Strebfestigkeit lassen sich daraus sofort wichtige Folgerungen ablesen. Für die erstere ist der Ausdruck $\frac{T}{a}$ mafsgebend, wo a die Entfernung der äufsersten Fasern von der

Biegungsachse ist, für die andere der Ausdruck T selbst, der hier für alle Achsen derselbe ist. Für Figur 111 z. B. ist $\frac{T}{a}$ in Bezug auf die

Fig. 111.

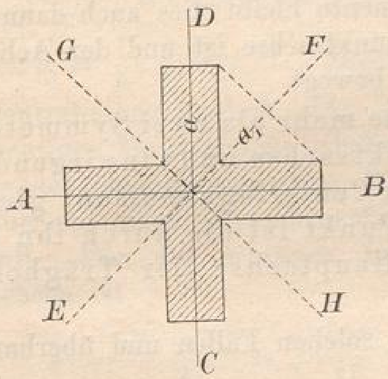
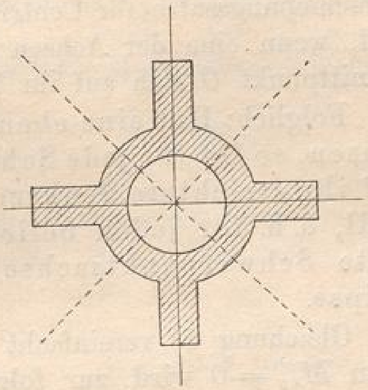


Fig. 112



Achse AB kleiner als $\frac{T}{a_1}$ in Bezug auf die Achse GH, die letztere Biegungsachse ist also für Biegungsbeanspruchung die günstigere. Entsprechendes gilt für Figur 112.

133) **Lage der Hauptachsen für beliebige Trägheitsellipsen.** Die Gleichung einer Trägheitsellipse einer Fläche für einen beliebigen Punkt ergab sich aus

1) $$T_\xi = T_x \cos^2 \alpha + T_y \sin^2 \alpha - \sin 2\alpha M_{xy}$$

als

2) $$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 2c^2xy = 1.$$

Hätte in der ersten Gleichung für jedes α der dritte Posten gefehlt, d. h. wäre $M_{xy} = 0$ gewesen, so hätte er auch in der andern Gleichung gefehlt und man hätte die einfachste Gleichung der Ellipse erhalten. Folglich:

Ist für die beiden gewählten Achsen das Centrifugalmoment der Fläche gleich Null, so ist die Gleichung der Trägheitsellipse von der Form

3) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wo a und b Hauptachsen der Ellipse sind.

Umgekehrt folgt daraus, dafs das Centrifugalmoment in Bezug auf die Hauptachsen der Trägheitsellipse gleich Null ist.

Dies ist z. B. der Fall für jede Symmetrieachse einer Fläche und eine auf der ersteren senkrecht stehende Achse.