Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Satz über ringförmige Körper.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

daraus $\varrho^2 = \frac{h^2}{3}$, oder $\varrho = \frac{h}{\sqrt{3}}$. Allgemein erhält man für jede beliebige Fläche

$$\varrho = \sqrt{\frac{T}{F}}.$$

Für die Mittellinie des Rechtecks erhält man

$$\varrho = \sqrt{\frac{T}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{h}{6}\sqrt{3}.$$

Beim Kreise ergiebt sich in Bezug auf den Durchmesser

$$\varrho = \sqrt{\frac{T}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{r^4\pi}{4}}{r^2\pi}} = \frac{r}{2}.$$

Den so bestimmten Radius nennt man den Radius des Trägheitsmomentes oder kurz den Trägheitsradius.

Entsprechende Betrachtungen kann man für das polare Trägheitsmoment anstellen, wo sich ergiebt

$$\varrho = \sqrt{\frac{T_p}{F}}.$$

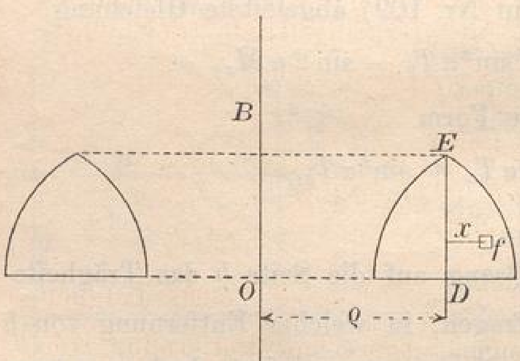
So ist z. B. für die Kreisfläche

$$\varrho = \sqrt{\frac{\frac{r^4\pi}{2}}{r^2\pi}} = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

Der Trägheitsradius dient zur Vereinfachung von Rechnungen und Formeln.

Ein Beispiel für seine Verwendung bietet die folgende Aufgabe.

Fig. 105.



125) **Aufgabe.** Ein ringförmiger Körper entstehe durch Drehung einer symmetrischen Fläche um eine zur Symmetrieachse parallele Gerade. Wie grofs ist das Trägheitsmoment des Drehungskörpers in Bezug auf diese Achse?

Auflösung. Jedes Flächenteilchen f in der Entfernung $\varrho + x$ von der Achse OB giebt nach Guldin einen Ring vom Inhalte $2(\varrho + x)\pi f$. Ist m die Masse dieses Ringes, so ist sein Trägheitsmoment in Bezug auf OB gleich

$m(\varrho + x)^2$, also ist, da die Masse m mathematisch genommen mit dem Inhalte übereinstimmt, das Trägheitsmoment gleich

$$2(\varrho + x)\pi f(\varrho + x)^2 = 2\pi f(\varrho + x)^3$$

oder gleich

$$2\pi f(\varrho^3 + 3\varrho^2 x + 3\varrho x^2 + x^3).$$

Aus Symmetriegründen gehört zu jedem Teilchen f in der Entfernung $\varrho + x$ ein entsprechendes in der Entfernung $\varrho - x$, und für dieses ergiebt sich ebenso ein Partialring vom Trägheitsmomente

$$2\pi f(\varrho^3 - 3\varrho^2 x + 3\varrho x^2 - x^3).$$

Beide Partialringe zusammen haben also das Trägheitsmoment

$$2\pi f(2\varrho^3 + 6\varrho^2 x^2).$$

Für das gesamte Trägheitsmoment

$$T = \sum 2\pi f\varrho^3 + \sum 6\pi f\varrho^2 x + \sum 6\pi f\varrho x^2 + \sum 2\pi f x^3$$

folgt daraus, dafs Glieder mit ungeraden Potenzen von x wegfallen und nur die mit geraden Potenzen stehen bleiben. Demnach wird

$$T = 2\pi\varrho^3 \sum f + 6\pi\varrho \sum f x^2.$$

Hier bedeutet $\sum f$ die Fläche F und $\sum f x^2$ ihr Trägheitsmoment T_1 in Bezug auf die Symmetrieachse. Führt man den Trägheitsradius ϱ_1 dieser Fläche mit Hülfe der Gleichung $\varrho_1^2 F = T_1$ ein, so folgt

$$T = 2\pi\varrho F\varrho^2 + 6\pi\varrho F\varrho_1^2,$$

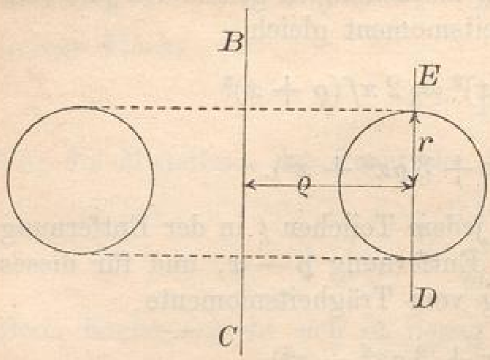
oder, da $2\pi\varrho F = J$ ist,

$$\boldsymbol{T = J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2)}.$$

In Worten läfst sich der Satz ausdrücken:

Entsteht ein Ringkörper durch Drehung einer symmetrischen Fläche um eine zur Symmetrielinie parallele Achse, so ist das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehungsachse gleich $J(\varrho^2 + 3\varrho_1^2)$, wo J den Inhalt des Körpers, ϱ den Abstand der Symmetrielinie von der Achse, ϱ_1 den Trägheitsradius der Fläche in Bezug auf die Symmetrielinie bedeutet. Der Trägheitsradius des Körpers ist also gleich $\sqrt{\varrho^2 + 3\varrho_1^2}$.

Fig. 106.



126) Beispiel des Ringkörpers mit Kreisquerschnitt. Hier ist der Inhalt

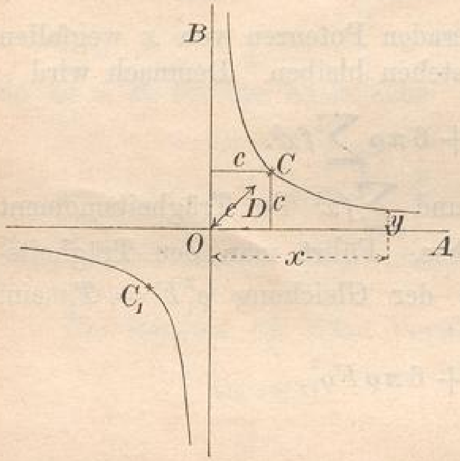
$$J = 2\,\varrho\pi r^2\pi = 2\,\varrho\, r^2\pi^2.$$

In Bezug auf DE ist für die Fläche des Kreises $T_1 = \frac{r^4\pi}{4}$, aus $\varrho_1^2 F = T_1$ oder $\varrho_1^2 \cdot r^2\pi = \frac{r^4\pi}{4}$ folgt $\varrho_1^2 = \frac{r^2}{4}$. Demnach wird das Trägheitsmoment des Körpers

$$T = J\left(\varrho^2 + 3\,\varrho_1^2\right) = 2\,\varrho r^2\pi^2\left(\varrho^2 + \frac{3r^2}{4}\right).$$

127) Der Radius des Centrifugalmomentes. Ebenso könnte man fragen, wo man sich die gesamte Fläche (Masse) vereinigt denken müsse, um in Bezug auf zwei Achsen OA und OB dasselbe Centrifugalmoment zu erhalten. Dann hätte man zu setzen

Fig. 107.



$$F \cdot x \cdot y = M_{xy},$$

oder

$$xy = \frac{M_{xy}}{F}.$$

Ist der Ausdruck rechts positiv, so sind im ersten und dritten Quadranten unendlich viele Stellen möglich, da zwei veränderliche Gröfsen x und y vorhanden sind. Die gesuchten Punkte liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel mit dem konstanten Rechteck $xy = \frac{M_{xy}}{F}$. Eins dieser Rechtecke ist ein Quadrat vom Inhalte

$$c^2 = \frac{M_{xy}}{F},$$

seine Seite ist

$$c = \sqrt{\frac{M_{xy}}{F}}.$$

Die Ecke C ist symmetrisch gegen beide Achsen und wird am bequemsten für die Anbringung der Masse F sein. Nur noch C_1 würde ebenso bequem liegen. Die positive Gröfse c bezeichnet man als den Radius