



## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1897**

Dreieck und Viertelkreis.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

von der ursprünglichen Drehungsbewegung erstreben, so daß auch der Name Deviationsmoment brauchbar erscheint.

120) Beispiel des Dreiecks.

Ein Dreieck drehe sich um die Achse  $OB$ . Wie groß ist die entstehende Centrifugalkraft, und wo greift sie an?

a) Geometrische Behandlung. Man denke sich auf der Fläche Lote errichtet, die gleich den einzelnen Centrifugalkräften  $fx\vartheta^2$ , also proportional zum Abstände  $x$  sind. Der entstehende Diagrammkörper ist eine Pyramide, deren senkrechte Höhe im Punkte  $A$  zu denken ist. Ihr Schwerpunkt wird gefunden, indem man den Flächenschwerpunkt  $S$  mit der über  $A$  schwebenden Spitze verbindet und von der Verbindungslinie den vierten Teil abschneidet.  $P$  ist dann die Projektion des Schwerpunktes und zugleich der gesuchte Angriffspunkt der Centrifugalkraft. Die Koordinaten von  $P$  sind

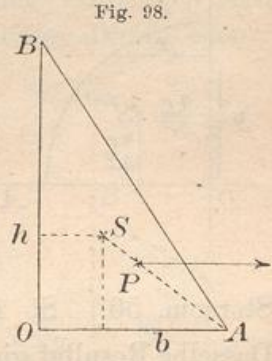


Fig. 98.

$$x_s = \frac{b}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} b = \frac{b}{3} + \frac{b}{6} = \frac{b}{2}; \quad y_s = \frac{h}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{3} = \frac{h}{4}.$$

In  $S$  hat man sich die Masse vereinigt zu denken, um die Centrifugalkraft  $m \frac{b}{3} \vartheta^2$  zu finden. Da aber die Fläche des Dreiecks als Masse betrachtet werden kann, so folgt  $m = \frac{bh}{2}$ , und man erhält als Centrifugalkraft

$$p = \frac{bh}{2} \cdot \frac{b}{3} \vartheta^2 = \frac{hb^2 \vartheta^2}{6}.$$

So wird  $S$  benutzt, um die Größe der Centrifugalkraft zu finden. Ihr Angriffspunkt aber hat ganz andere Koordinaten als  $S$ .

b) Behandlung mit Hilfe des Trägheits- und Centrifugalmoments.

$$x_s = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\frac{hb^3}{12}}{\frac{bh}{2} \cdot \frac{b}{3}} = \frac{b}{2}; \quad y_s = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\frac{b^2 h^2}{24}}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{h}{4}.$$

Die Kraft wird ebenso berechnet wie vorher.

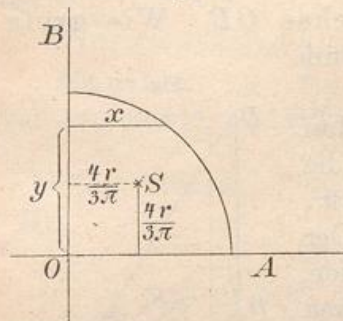
121) Beispiel des Viertelkreises, der sich um  $OB$  dreht.

Gemischte Behandlung. Der mittels  $OB$  abgeschrägte Körper hat den Inhalt

$$J = \frac{r^2 \pi}{4} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{r^3}{3}.$$

(Ebenso groß ist das statische Moment  $M_y$  der Fläche.) Seine Schwerpunktsprojektion hat die Koordinaten

Fig. 99.



$$x_s = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\frac{r^4 \pi}{16}}{\frac{r^3}{3}} = \frac{3\pi}{16} r \quad \text{und} \quad y_s = \frac{M_{xy}}{M_y} = ?$$

Hier versagen zunächst die bisherigen Methoden zur Berechnung von  $M_{xy}$ . Der Diagrammkörper der Centrifugalkraft (bei der Drehung um  $OB$ ) ist aber ein Sektor der Halbkugel, dessen Schwerpunkt mit dem der letzteren in derselben Höhe  $y_s = \frac{3}{8} r$  liegen muss. (Vgl. Method. Lehrbuch, II, Stereom. 56.) So findet man zugleich  $M_{xy} = y_s M_y = \frac{3}{8} r \cdot \frac{r^3}{3} = \frac{r^4}{8}$ . Dasselbe Resultat giebt die später zu behandelnde Summenformel. Über jedem Schnitte  $x$  ist nämlich ein Dreieck vom Inhalte  $x \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$  zu denken, dessen statisches Moment in Bezug auf  $OA$  gleich  $\frac{x^2}{2} y$  ist. Dafür kann man schreiben

$$\frac{r^2 - y^2}{2} y = \frac{r^2}{2} y - \frac{y^3}{2}.$$

Nach der Summenformel ist dann das Moment von  $y = 0$  bis  $y = y_1$  gleich

$$\frac{r^2}{2} \frac{y_1^2}{2} - \frac{y_1^4}{2 \cdot 4} = \frac{y_1^2}{8} (2r^2 - y_1^2).$$

Für  $y_1 = r$  wird dies

$$\frac{r^2}{8} (2r^2 - r^2) = \frac{r^4}{8} = M_{xy}.$$

Folglich ist

$$y_s = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\frac{r^4}{8}}{\frac{r^3}{3}} = \frac{3}{8} r.$$

Wiederum haben die Koordinaten des Angriffspunktes nichts mit dem Flächenschwerpunkte  $S$  zu thun. Letzterer giebt als Größe der Centrifugalkraft

$$m \varrho \vartheta^2 = \frac{r^2 \pi}{4} \cdot \frac{4r}{3\pi} \vartheta^2 = M_y \vartheta^2 = \frac{r^3}{3} \vartheta^2.$$

Zugleich hat man gesehen, dass im allgemeinen Rechnungsmethoden zur Anwendung kommen müssen, wie sie später behandelt werden sollen.

Ein wirklicher Einblick in die Lehre von der Centrifugalkraft ist nur möglich auf Grund der Kenntnis der

Trägheits- und Centrifugalmomente, die uns die Koordinaten der Angriffspunkte geben. —

122) Fälle, in denen das Centrifugalmoment gleich Null oder gleich einer Konstanten wird.

Die allgemeine Bekanntschaft mit mechanischen Vorgängen läßt es bequem erscheinen, an der Hand der Centrifugalkraft ebener drehender Flächen einige besondere Fälle zu betrachten.

a) Hat die Fläche eine Symmetrieachse, und betrachtet man diese als Drehungsachse, so heben sich die Centrifugalkräfte je zweier symmetrischer Teilchen gegenseitig auf. Die Centrifugalkraft und ebenso das Centrifugalmoment wird gleich Null. Also:

Das Centrifugalmoment einer Fläche in Bezug auf eine Symmetrieachse und eine zu ihr Senkrechte ist stets gleich Null.

b) Denkt man sich die beiden symmetrischen Teile gegeneinander verschoben, wie in Figur 101, so ist die Summe der Centrifugalkräfte zwar noch immer gleich Null, da aber die Resultanten nicht in dieselbe Linie fallen, so entsteht ein Kräftepaar (Drehungspaar). Das Moment der Centrifugalkraft wird, wenn jede der Resultanten gleich  $p$  und ihre gegenseitige senkrechte Entfernung gleich  $e$  ist, in Bezug auf jeden Punkt der Achse  $OB$  gleich  $pe$ . Dabei ist es durchaus nicht nötig, daß die beiden gegeneinander verschobenen Teile ursprünglich symmetrisch waren, wenn nur die Achse durch den Schwerpunkt geht. Folglich:

Das Centrifugalmoment einer ebenen Fläche in Bezug auf eine Schwerpunktsachse und jede Normale der letzteren hat einen konstanten Wert. Beide Achsen sind dabei in der Ebene der Fläche zu denken.

c) Fälle, in denen das Centrifugalmoment gleich Null wird, kann man sich leicht konstruieren. So kann man z. B. Fig. 102 so einrichten, daß die vier einzelnen Centrifugalkräfte im Gleichgewichte

Fig. 100.

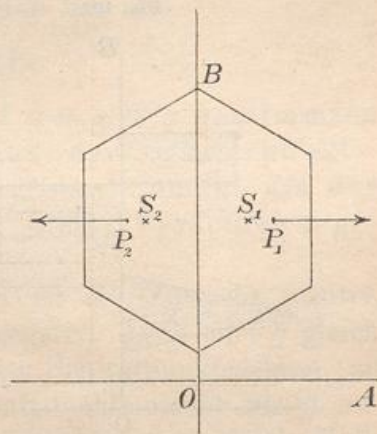


Fig. 101.

