Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

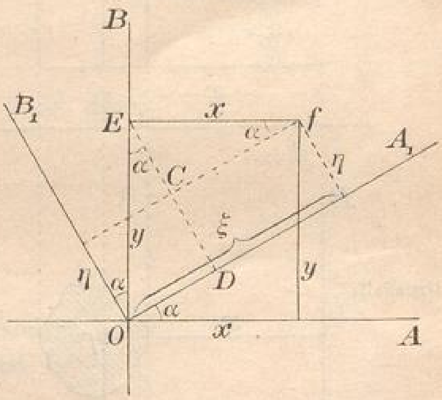
Der Drehungssatz.

Abschnitt IV.

Centrifugalmomente und Trägheitsmomente für beliebige Achsen.

109) In den vorigen Abschnitten wurden die Trägheitsmomente in Bezug auf besonders bequem liegende Achsen, meist Symmetrieachsen, berechnet. Gewisse Aufgaben der Festigkeitslehre und der Dynamik beanspruchen aber ihre Kenntnis für ganz beliebig liegende Achsen. Der Fall der Parallelverschiebung ist schon in Nr. 27) abgethan. Es fragt sich, welche Änderungen eintreten, wenn man die Achse um irgend einen Punkt dreht. Auf was es dabei ankommt, das ergiebt sich aus folgender Aufgabe: Die Trägheitsmomente einer Fläche in Bezug auf zwei aufeinander senkrechte Achsen OA und OB seien bekannt; wie grofs ist ihr Trägheitsmoment in Bezug auf eine Achse OA_1, die mit OA den Winkel α bildet?

Fig. 87.



Auflösung. $T_x = \sum fy^2$ und $T_y = \sum fx^2$ seien die bekannten auf OA und OB bezogenen Trägheitsmomente einer gegebenen Fläche. In Figur 87 ist ein Flächenteilchen f dargestellt, dessen Entfernungen von diesen Achsen y und x sein mögen, während es von den neuen Achsen OA_1 und OB_1 die Entfernungen η und ξ hat. Dann ist

$$\eta = DE - CE = y \cos\alpha - x \sin\alpha,$$

folglich

$$\eta^2 = y^2 \cos^2\alpha + x^2 \sin^2\alpha - 2xy \sin\alpha \cos\alpha$$

oder auch

$$\eta^2 = y^2 \cos^2\alpha + x^2 \sin^2\alpha - xy \sin 2\alpha.$$

Folglich ist das Trägheitsmoment des Teilchens f in Bezug auf OA_1

$$f\eta^2 = \cos^2\alpha fy^2 + \sin^2\alpha fx^2 - \sin 2\alpha fxy,$$

und das gesuchte Trägheitsmoment der Gesamtfläche

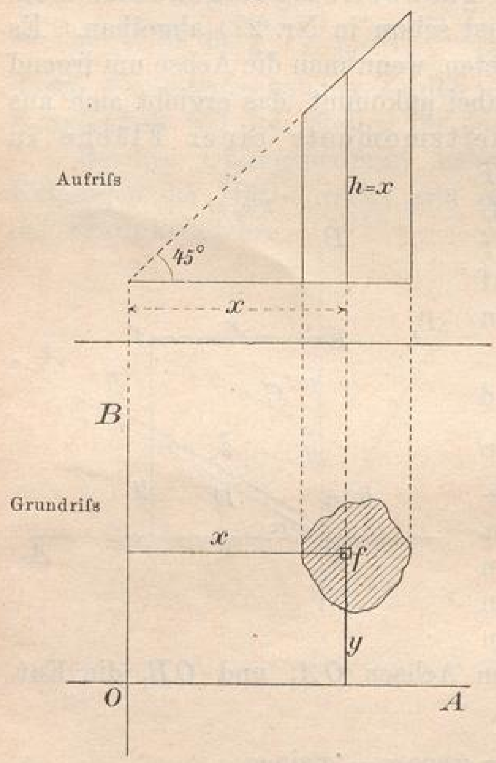
$$T_\xi = \sum f\eta^2 = \cos^2\alpha \sum fy^2 + \sin^2\alpha \sum fx^2 - \sin 2\alpha \sum fxy.$$

Bezeichnet man den Ausdruck $\sum fxy$ mit M_{xy}, so hat man die Gleichung

$$T_\xi = \cos^2\alpha\, T_x + \sin^2\alpha\, T_y - \sin 2\alpha\, M_{xy}.$$

Der Ausdruck M_{xy} wird aus später anzugebenden Gründen der Dynamik als das Centrifugalmoment oder auch als das Deviationsmoment der gegebenen Fläche in Bezug auf die X-Achse und Y-Achse bezeichnet. Kann man ihn für eine gegebene Fläche berechnen, so ist die oben gestellte Aufgabe gelöst. Es wird sich aber zeigen, dafs durch die Kenntnis der Centrifugalmomente noch eine ganze Reihe anderer Aufgaben lösbar wird, so dafs es sich der Mühe verlohnt, sie genauer zu untersuchen.

Fig. 88.



110) Veranschaulichung des Centrifugalmomentes einer Fläche.

In Figur 88 ist eine Fläche F als Grundrifs gezeichnet und auf ein Koordinatensystem OA und OB bezogen, so dafs z. B. das Teilchen f von beiden Achsen die Entfernungen x und y hat. Nach Obigem handelt es sich darum, für den Ausdruck fxy eine Deutung zu finden.

Man denke sich über jedem Flächenteilchen f eine Säule von der Höhe x, also vom Inhalte fx errichtet, dann ist ihr statisches Moment in Bezug auf die Achse OA gleich fxy. Diese sämtlichen Säulen bilden aber einen senkrechten Cylinder (bezw. ein Prisma) über der Fläche, der durch eine durch OB gehende und unter 45° geneigte Ebene schräg abgeschnitten ist. Dieser ist im Aufrifs dargestellt.