Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

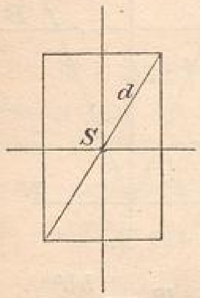
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Einfache Beispiele, Rechteck, Dreieck, regelmässiges Vieleck, Ellipse.

36) **Bemerkung.** Die Summe der axialen Trägheitsmomente einer Fläche in Bezug auf die Schenkel eines rechten Winkels bleibt ungeändert, wenn sich dieser in der Ebene um den Mittelpunkt dreht. Die Summe ist nämlich stets gleich dem polaren Trägheitsmomente in Bezug auf den Drehungspunkt.

Fig. 42.



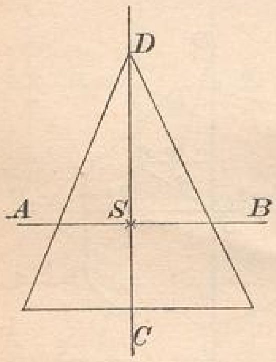
37) **Aufgabe.** Wie grofs ist das polare Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf den Schwerpunkt?

Auflösung. In Bezug auf die eine Mittellinie hat man $T_1 = \frac{bh^3}{12}$, in Bezug auf die andere $T_2 = \frac{hb^3}{12}$. Demnach ist

$$T_p = T_1 + T_2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2) = \frac{bh}{12}d^2 = \frac{Fd^2}{12},$$

wo d die Diagonale, F die Fläche bedeutet.

Fig. 43.



38) **Aufgabe.** Wie grofs ist das polare Trägheitsmoment eines gleichschenkligen Dreiecks mit Basis b und Höhe h für den Schwerpunkt und für die Spitze?

Auflösung. Für den Schwerpunkt ist nach 10) und 13)

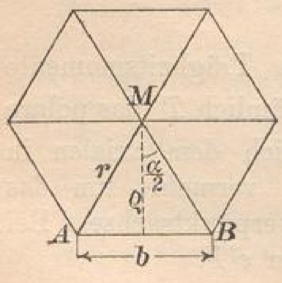
$$T_p = \frac{bh^3}{36} + \frac{hb^3}{48} = \frac{bh}{144}(4h^2 + 3b^2).$$

Addiert man dazu $\left(\frac{2}{3}h\right)^2 \frac{bh}{2}$ oder $\frac{2}{9}bh^3$, so erhält man für die Spitze

$$T_p' = \frac{bh}{144}(4h^2 + 3b^2) + \frac{32}{144}bh^3 = \frac{bh}{48}(12h^2 + b^2).$$

39) **Aufgabe.** Wie grofs ist das polare Trägheitsmoment des regelmäfsigen n-Ecks mit Umfang u in Bezug auf den Schwerpunkt?

Fig. 44.



Auflösung. Für jedes Dreieck ist in Bezug auf die Spitze M nach 19)

$$T_p = \frac{b\varrho}{48}(12\varrho^2 + b^2),$$

wo

$$\varrho = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{2}\cot\frac{180^0}{n} \text{ ist.}$$

Führt man $u = nb$ ein, so ergiebt sich für die Gesamtfläche

$$T_p = \frac{n \frac{u}{n} \varrho}{48} \left(12\varrho^2 + \frac{u^2}{n^2}\right) = \frac{\varrho u}{48} \left(\frac{u^2}{n^2} + 12\varrho^2\right).$$

40) Folgerungen für den Kreis. Nimmt man im letzten Resultate n unendlich grofs an, so wird $\frac{u^2}{n^2} = 0$, und das Polygon wird zum Kreise mit Umfang

$$u = 2\varrho\pi.$$

Das polare Trägheitsmoment des Kreises ist also in Bezug auf den Mittelpunkt

$$T_p = \frac{\varrho\,(2\varrho\pi)}{48}\, 12\varrho^2 = \frac{\varrho^4\pi}{2} = \frac{\pi d^4}{32},$$

wo d den Durchmesser bedeutet.

Für den concentrischen Kreisring mit r und r_1 bezw. d und d_1 erhält man durch Subtraktion

$$T_p = \frac{\pi d^4}{32} - \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi}{32}\left(d^4 - d_1^4\right) = \frac{\pi}{2}\left(r^4 - r_1^4\right).$$

Das axiale Trägheitsmoment des Kreises ist halb so grofs, als das polare, denn $T_p = T_1 + T_2$, oder, da die beiden letzten übereinstimmen, $T_p = 2T_1$. Demnach ist für den Kreis mit Radius r und Durchmesser d

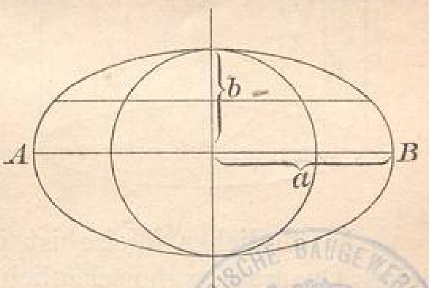
$$T = \frac{r^4\pi}{4} = \frac{d^4\pi}{64},$$

für den concentrischen Kreisring

$$T = \frac{\pi}{4}\left(r^4 - r_1^4\right) = \frac{\pi}{64}\left(d^4 - d_1^4\right).$$

41) Aufgabe. Die Trägheitsmomente einer Ellipse mit den Halbachsen a und b zu berechnen.

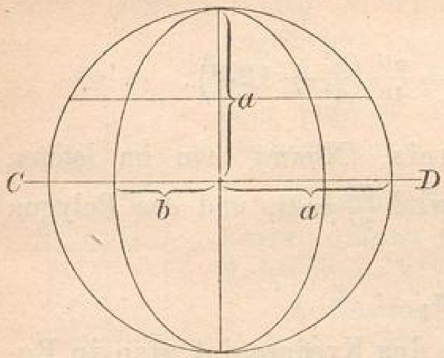
Fig. 45.



Auflösung. Für den Kreis mit Radius b ist in Bezug auf AB $T = \frac{\pi b^4}{4}$. Für die Ellipse ist jede Querlinie $\frac{a}{b}$ mal so grofs, wie die entsprechende des Kreises. Folglich ist für die Ellipse in Bezug auf AB

$$T = \frac{\pi b^4}{4}\frac{a}{b} = \frac{\pi a b^3}{4}.$$

Fig. 46.



Für den Kreis mit Radius a ist in Bezug auf CD das Trägheitsmoment $T = \frac{\pi a^4}{4}$. Für die Ellipse ist jede Querlinie das $\frac{b}{a}$-fache von der entsprechenden des Kreises. Für die Ellipse ist also in Bezug auf CD

$$T = \frac{\pi a^4}{4} \frac{b}{a} = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

Das Polarmoment der Ellipse ist

$$T_p = \frac{\pi a b^3}{4} + \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{ab\pi}{4}(a^2 + b^2) = \frac{F}{4}(a^2 + b^2).$$

42) Veranschaulichung des polaren Trägheitsmomentes. Fig. 47 stellt eine Kreisfläche dar, über der ein Cylinder von der Höhe r^2 errichtet ist. Über jedem Flächenteilchen f in der Entfernung ϱ vom Mittelpunkte denke man sich eine Säule von der Höhe ϱ^2 errichtet, so daſs der Säuleninhalt $f\varrho^2$ ist. Dann liegen die Endpunkte der Lote in einer Fläche, die man als Drehungsparaboloid bezeichnet. Der Inhalt des Auſsenkörpers ist gleich $\sum f\varrho^2$, stimmt also mit dem Trägheitsmomente überein, d. h. er ist gleich $\frac{r^4\pi}{2}$, d. h. gleich der Hälfte des Cylinders.

Fig. 47.

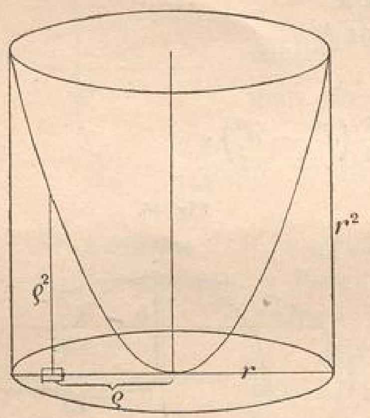
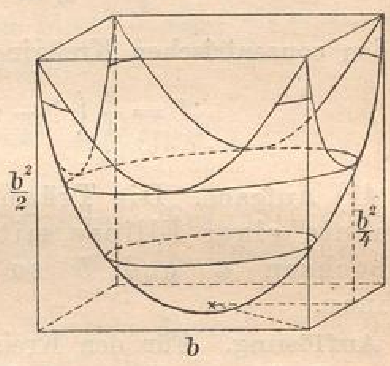


Fig. 48.



In ähnlicher Weise ist in Fig. 48 das polare Trägheitsmoment eines Quadrates veranschaulicht. Aus dem Auſsenraume des Drehungsparaboloids ist der entsprechende quadratische Cylinder ausgeschnitten. Der Auſsenkörper ist vom Inhalte

$$T_p = \frac{bb^3}{12} + \frac{bb^3}{12} = \frac{b^4}{6},$$