Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Satz über die Parallelverschiebung.

bolische Fläche $\frac{2}{3}$ weggeschnitten, es bleibt also stehen $\frac{1}{3}\frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$.
Das gesuchte Trägheitsmoment ist also $T = \frac{bh^3}{12}$.

Fig. 33.

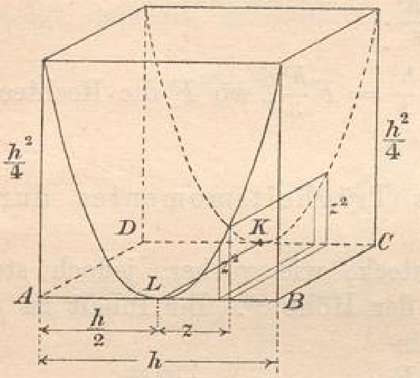
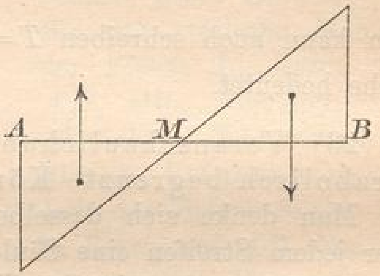


Fig. 34.



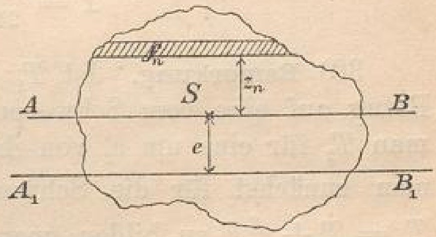
25) **Bemerkung.** Die frühere Veranschaulichungsmethode macht, wenn die angenommene Achse die Fläche schneidet, einige Vorsicht nötig. Aus $f \cdot (-z) = -f \cdot z$ folgt nämlich, dafs die Darstellung des statischen Momentes durch den abgeschrägten Körper auch auf negative Lote führt, so dafs ein Teil des Diagrammkörpers unter die Grundfläche zu liegen kommt. Dort ist dann die Schwerkraft als negativ aufzufassen, damit $f \cdot z^2$ und $f(-z) \cdot (-z)$ Momente geben, die zu addieren sind, wie es das Trägheitsmoment verlangt. Die parabolische Veranschaulichung ist daher im allgemeinen vorzuziehen.

26) **Bemerkung.** Neben $M = \sum fz$ und $T = \sum fz^2$ könnte man noch andere Momente, wie $\sum fz^3$, $\sum fz^4$ u. s. w. betrachten. Dies soll vorläufig nicht geschehen. Jedoch sei darauf aufmerksam gemacht, dafs man, je nach dem Exponenten von z, von Momenten 1[ter], 2[ter], 3[ter] u. s. w. Ordnung sprechen kann.

27) Satz über die **Parallelverschiebung.** Ist das Trägheitsmoment einer Fläche F in Bezug auf eine Schwerpunktsachse gleich T, so ist es in Bezug auf eine parallele, um e von ihr entfernte Achse derselben Ebene $T_1 = T + e^2F$.

Beweis. Wird die Achse von AB nach A_1B_1 verschoben, so wird der Abstand z eines Parallelstreifens in $z + e$ verwandelt, und aus $f \cdot z^2$ wird $f(z + e)^2 = fz^2 + fe^2 + 2fze$. Demnach geht $T = \sum fz^2$ über in $T_1 = \sum f(z + e)^2 = \sum fz^2 + \sum fe^2 + \sum 2fze$ $= \sum fz^2 + e^2 \sum f + 2e \sum fz$. Der erste Posten ist das alte Trägheitsmoment T, der zweite ist identisch mit e^2F, der dritte verschwindet, denn $\sum fz$ ist das statische Moment der Fläche in Bezug auf die Schwerpunktsachse AB, also gleich $0 \cdot F = 0$. Man hat also in der That $T_1 = T + e^2 F$.

Fig. 35.



Ob man um $+e$ oder $-e$ verschiebt, ist gleichgültig, stets tritt eine Zunahme um e^2F ein.

Das Trägheitsmoment einer Fläche in Bezug auf eine Schwerpunktsachse ist demnach stets kleiner, als in Bezug auf jede zu dieser parallele Achse. Je gröfser man die Verschiebung e macht, um so gröfser wird das Trägheitsmoment.

Man hat nur noch nötig, die Trägheitsmomente in Bezug auf Schwerpunktsachsen zu untersuchen, da sie sich für alle andern nach dem gefundenen Satze leicht ableiten lassen.

Auch an den beiden Diagrammkörpern läfst sich der Satz leicht beweisen. Aus ihm lassen sich Sätze über parabolisch begrenzte Körper ableiten.

28) **Beispiel.** Für das Rechteck war in Bezug auf die Mittellinie $T = \frac{bh^3}{12}$. Verschiebt man die Achse um $e = \frac{h}{2}$, so erhält man $T_1 = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 F = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} \cdot bh = \frac{bh^3}{3}$. Dies stimmt mit dem früheren Resultate überein.

29) **Aufgabe.** Das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten b und h in Bezug auf die zu b parallele Schwerpunktsachse zu finden.

Fig. 36.

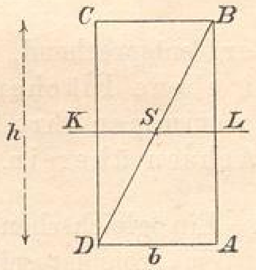
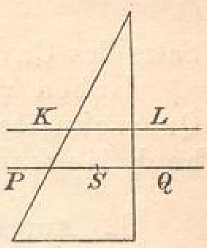


Fig. 37.



Auflösung. Für das Rechteck ist in Bezug auf die Achse KL das Trägheitsmoment $T = \frac{bh^3}{12}$. Für das Dreieck ABD ist es in Bezug auf KL halb so grofs, wie man am Diagonalschnitt des Diagrammkörpers (Fig. 33) erkennt, also gleich $\frac{bh^3}{24}$. Bei der Verschiebung nach dem Schwer-