# Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

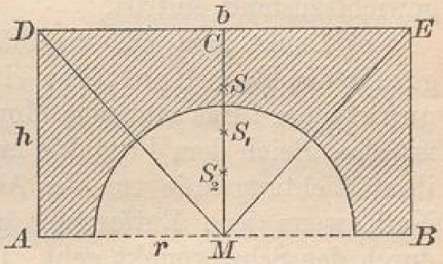
**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1897**

Anwendungen auf abgeschrägte Körper, Diagrammkörper des seitlichen Wasserdrucks, Centrifugalkraft u.s.w.

$$h_s = \frac{F_1 h_1 - F_2 h_2}{F_1 - F_2} = \frac{\frac{bh^2}{2} - \frac{2r^3}{3}}{bh - \frac{r^2\pi}{2}} = \frac{3bh^2 - 4r^3}{3(2bh - r^2\pi)}.$$

Fig. 23.




Zerschneidet man die Fläche durch $MC$, so liegt der Schwerpunkt für jeden Teil ebenso hoch, und zwar auf der Symmetrielinie $MD$ bezw. $ME$.

Andere Berechnungsmethoden kommen später zur Sprache.

14) **Anwendungen.** a) Steht über einer Fläche eine senkrechte Säule, die durch eine Ebene schräg abgeschnitten ist, so ist der Inhalt des übrig bleibenden Körpers

$$J = F \cdot h_s,$$

wo $h_s$ die Länge des im Schwerpunkte auf der Grundfläche errichteten Lotes bis zur Schrägfläche ist. Man bezeichnet diese Linie als die Mittellinie des Körpers. (Vgl. Method. Lehrbuch, II, Stereom. 61.)

b) Diesen Körper kann man als Diagrammkörper des seitlichen Wasserdrucks auffassen, der bekanntlich proportional der Tiefe zunimmt. Der Wasserdruck gegen eine senkrechte oder auch schräge ebene Wandfläche ist

$$P = F \cdot h_s,$$

z. B. in Tonnen, wenn $F$ in Quadratmetern, die Schwerpunktstiefe $h_s$ in Metern gegeben ist. (Die Druckresultante greift aber nicht im Schwerpunkte an.)

c) Ist die Säule oben und unten abgeschrägt, so hat man einen Normalschnitt zu führen. Ist dessen Fläche $F$ und ist $h_s$ die Länge des auf ihr im Schwerpunkte errichteten Lotes, von der einen Schrägfläche zur andern gemessen, so ist der Inhalt wiederum

$$J = F \cdot h_s.$$

d) Denkt man sich eine Fläche gleichmäſsig mit Masse belegt und um irgend eine in ihrer Ebene liegende oder diese schneidende Achse gedreht, so ist die entstehende Centrifugalkraft

$$P = mr\vartheta^2 = \frac{mv^2}{r} = \frac{4mr\pi^2}{t^2}.$$

Hier bedeutet $r$ die Entfernung des Flächenschwerpunktes von der Achse, $m$ die Masse, $v$ die Geschwindigkeit der Schwerpunktsbewegung, $\vartheta$ die auf den Radius 1 reducierte Geschwindigkeit (Winkelgeschwindigkeit), $t$ die Zeitdauer des einmaligen Umlaufs (Umlaufszeit).

(Der Angriffspunkt der Centrifugalkraft fällt aber im allgemeinen nicht mit dem Schwerpunkte zusammen.)

Die Centrifugalkraft ist Null, wenn die Achse durch den Schwerpunkt geht. Ihr positiver und negativer Teil aber können ein Kräftepaar bilden, welches in Bezug auf jeden Punkt der Achse ein konstantes Centrifugalmoment giebt, sodafs im allgemeinen kein Gleichgewichtszustand eintritt.

e) Denkt man sich die Fläche gleichmäfsig mit Masse belegt, so greift die Resultante der einzelnen Schwerkräfte im Schwerpunkte an. Das statische Moment in Bezug auf jede Drehungsachse ist also gleich dem Produkte aus der Schwerkraft und der Entfernung ihrer Richtungslinie von der Achse. Das statische Moment ist gleich Null, wenn jene Entfernung gleich Null ist, wenn z. B. die Achse durch den Schwerpunkt geht. Die horizontal liegende Fläche balanciert also, wenn sie im Schwerpunkte oder in zwei Punkten, deren Verbindungslinie durch den Schwerpunkt geht, unterstützt wird.

Der Schwerpunkt ist auch der Angriffspunkt der Resultante gleichmäfsig gegen eine Fläche wirkender Druckkräfte (z. B. Dampfdruck) oder Zugkräfte.

f) Die Guldinsche Regel $J = 2\,\varrho\pi F$ dient zur Inhaltsberechnung der Drehungskörper, zur Inhaltsberechnung der Schraubengewinde, und in der Form $\varrho = \frac{J}{2\,\pi F}$ zur Schwerpunktbestimmung ebener Flächen. Für Näherungsberechnungen bestimmt man den Schwerpunkt durch zwei Aufhängungen einer Schablone (z. B. von Blech) und benutzt ihn für die Inhaltsbestimmung der entsprechenden Körper.

g) Denkt man sich eine ebene Fläche gleichmäfsig mit Masse belegt und durch einen Stofs im luftleeren Raume vorwärts geschleudert, so bewegt sich ihr Schwerpunkt in einer Parabel, aufserdem aber treten Drehungsbewegungen ein. Im Weltraume würde die Bahn, die der Flächenschwerpunkt um einen anziehenden Weltkörper zurücklegt, ein Kegelschnitt sein, also Kreis, Ellipse, Parabel oder Hyperbel (Schwerpunktsprinzip).

h) Wird ein Balken ein Haken u. dgl. auf Biegung, eine Säule oder Strebe von gröfserer Länge auf Strebung beansprucht, so gehen die Biegungsachsen der Querschnitte durch die Schwerpunkte der Flächen.

i) Wird eine Welle auf Drehung beansprucht, so geschehen die Drehungen der einzelnen Querschnitte um die Flächenschwerpunkte.

k) Für die darstellende Geometrie ist von Wichtigkeit, dafs bei der Parallelprojektion einer ebenen Fläche ihr Schwerpunkt in den der neuen Fläche projiziert wird. (Bei der Parallelprojektion ebener Kurven ist dies im allgemeinen nicht der Fall, ebensowenig bei gewölbten Flächen.)

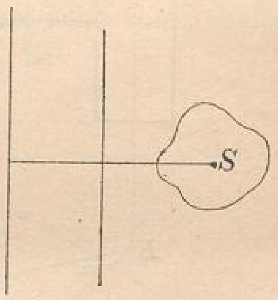
l) Mit Hülfe der Schwerpunktslehre kann man Sätze der Geometrie beweisen (barycentrischer Kalkül). So folgt z. B. der Satz, dafs die Mittellinien des Dreiecks sich in einem Punkte schneiden, daraus, dafs die Fläche nur einen einzigen Schwerpunkt haben kann.

m) Bewegt sich eine ebene Fläche so, dafs ihr Schwerpunkt eine beliebige ebene oder räumliche Curve beschreibt, auf der die bewegte Fläche in jedem Punkte senkrecht steht, so ist der Inhalt des körperlichen Weges gleich dem Produkte aus Fläche und Schwerpunktsweg. (Durchdringen einander dabei Teile des Körpers, so ist der Durchdringungsraum doppelt bezw. mehrfach einzurechnen.) Dieser Satz ist z. B. von Bedeutung für die Berechnung der für Eisenbahndämme nötigen Erdmassen.

n) Bemerkung zur Guldinschen Regel. Verschiebt man die Achse parallel zu sich selbst um $-e$, so geht $J = 2\varrho F\pi$ über in

$$J_1 = 2(\varrho F + eF)\pi = J + 2eF\pi,$$

Fig. 24.




d. h. der Inhalt wächst um den eines Drehungskörpers, der entsteht, wenn die Fläche um eine Achse rotiert, die vom Schwerpunkte um $e$ entfernt ist, oder er wächst um den Inhalt eines Cylinders, der über der Fläche steht und den Weg $2e\pi$ zur Höhe hat.

Dadurch werden Berechnungen gewisser Art unabhängig von der Kenntnis der Schwerpunktslage gemacht.

15) Graphische Schwerpunktbestimmungen.

Der Graphostatik verdanken wir neuere Methoden, die es dem exakten Zeichner ermöglichen, namentlich für Trägerquerschnitte die Schwerpunkte schnell aufzufinden. Einige Beispiele sollen dies erläutern.

Symmetrischer Trägerquerschnitt. (Figur 25.)

Die in $S_1$, $S_2$ und $S_3$ angreifenden „Kräfte"*) verhalten sich wie $b_1h_1$, $b_2h_2$ und $b_3h_3$, oder wie $F_1 : F_2 : F_3$. Man zeichne drei Senkrechte $AB$, $BC$, $CD$ wie in der Figur, die sich wie diese Gröfsen verhalten. Dann nehme man einen beliebigen Punkt (Pol) an und verbinde ihn mit $A$, $B$, $C$ und $D$.

Durch die Einzelschwerpunkte sind Senkrechte gelegt. An der zu $S_1$ gehörigen Senkrechten beginne man irgendwo, z. B. bei $E$, mit folgender Konstruktion: Man ziehe $EF \parallel AP$ und $EG \parallel BP$ bis zur Senkrechten durch $S_2$, sodann $GH \parallel CP$ bis zur Senkrechten durch $S_3$, zum Schlufs durch $H$ eine Parallele zu $PD$. Letztere giebt mit $EF$ einen Schnitt $K$, und senkrecht über diesem liegt der gesuchte Schwerpunkt $S$.

*) Man denke sich die Flächen homogen mit Masse belegt, so dafs man von Gewichten sprechen kann.