Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

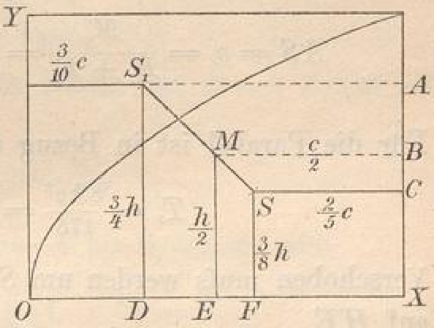
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Hakenquerschnitt.

192) Beispiel der gewöhnlichen Parabel. Die Flächen verhalten sich wie $1:2$, folglich $S_1M : MS = 2:1$, ebenso $AB : BC$ und $DE : EF$. Da $AB = \frac{3}{4}h - \frac{h}{2} = \frac{h}{4}$, so ist $BC = \frac{h}{8}$, folglich $FS = \frac{3}{8}h$; da ferner $DE = \frac{c}{2} - \frac{3}{10}c = \frac{2}{10}c$, so folgt $EF = \frac{c}{10}$ und daher $CS = \frac{4}{10}c = \frac{2}{5}c$ und $CF = \frac{3}{5}c$.

Fig. 148.



Die statischen Momente sind daher

$$M_x = \tfrac{2}{3}ch \cdot \tfrac{3}{8}h = \frac{ch^2}{4},$$

$$M_y = \tfrac{2}{3}ch \cdot \tfrac{3}{5}c = \tfrac{2}{5}hc^2.$$

Die Trägheitsmomente, durch Subtraktion aus dem Rechteck abgeleitet, sind

$$T_x = \frac{ch^3}{3} - \frac{ch^3}{5} = \tfrac{2}{15}ch^3,$$

$$T_y = \frac{hc^3}{3} - \frac{hc^3}{21} = \tfrac{2}{7}hc^3.$$

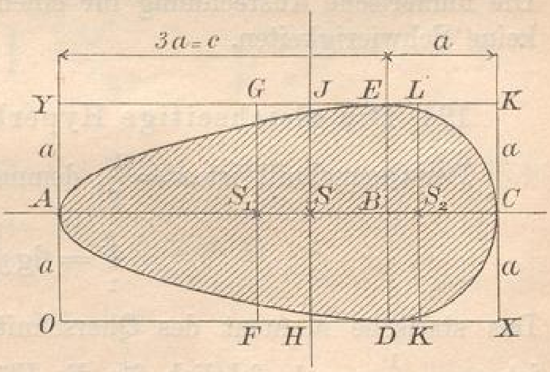
Für den Schwerpunkt erhält man

$$T_s = T_x - F\left(\tfrac{3}{8}h\right)^2 = \tfrac{2}{15}ch^3 - \tfrac{2}{3}ch\,\tfrac{9}{64}h^2 = ch^3\left(\tfrac{2}{15} - \tfrac{3}{32}\right) = \tfrac{19}{480}ch^3,$$

$$T_s' = T_y - F\left(\tfrac{3}{5}c\right)^2 = \tfrac{2}{7}hc^3 - \tfrac{2}{3}ch\,\tfrac{9}{25}c^2 = hc^3\left(\tfrac{2}{7} - \tfrac{6}{25}\right) = \frac{8hc^3}{175}.$$

193) **Aufgabe.** Ein Haken habe an der am stärksten beanspruchten Stelle einen Querschnitt, der nach der einen Seite durch einen Halbkreis mit Radius a begrenzt ist, nach der andern durch eine Parabel, die einem Rechteck mit den Seiten $3a$ und $2a$ eingeschrieben ist. Der Schwerpunkt und das mafsgebende Trägheitsmoment sollen berechnet werden.

Fig. 149 a.



Auflösung. Nach vorigem Abschnitte ist

$$AS_1 = \tfrac{3}{5}c = \tfrac{9}{5}a,$$

aufserdem ist

$$AS_2 = 3a + \frac{3a}{4\pi} = \frac{3a}{4\pi}(4\pi + 1), \quad F_1 = \tfrac{2}{3}2a \cdot 3a = 4a^2, \quad F_2 = \frac{a^2\pi}{2}.$$

Folglich ist in Bezug auf OY

$$M_y = AS_1 \cdot F_1 + AS_2 \cdot F_2 = \tfrac{9}{5}\, a \cdot 4a^2 + \frac{3a}{4\pi}(4\pi + 1)\frac{a^2\pi}{2}$$

$$= \frac{36a^3}{5} + \frac{3a^3(4\pi+1)}{8} = \frac{a^3}{40}[288 + 15(4\pi+1)] = \frac{a^3}{40}[303 + 60\pi].$$

Folglich

$$AS = e_s = \frac{M_y}{F_1 + F_2} = \frac{\frac{a^3}{40}[303 + 60\pi]}{4a^2 + \frac{a^2\pi}{2}} = \frac{a[303 + 60\pi]}{20(8+\pi)}.$$

Für die Parabel ist in Bezug auf HJ

$$T_s' = \frac{8hc^3}{175} = \frac{8 \cdot 2a \cdot (3a)^3}{175} = \frac{432a^4}{175}.$$

Verschoben mufs werden um $S_1S = e_s - \frac{9}{5}a$. Demnach ist in Bezug auf HE

$$T' = \frac{432a^4}{175} + \left(e_s - \tfrac{9}{5}a\right)^2 4a^2.$$

Für den Kreis ist in Bezug auf KL

$$T_s'' = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) = a^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right).$$

Verschoben wird um $SS_2 = AS_2 - e_s = \frac{3a}{4\pi}(4\pi + 1) - e_s$. Demnach ist in Bezug auf HE

$$T'' = a^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) + \left[\frac{3a}{4\pi}(4\pi+1) - e_s\right]^2 \frac{a^2\pi}{2}.$$

Das gesuchte Trägheitsmoment ist

$$T = T' + T''.$$

Die numerische Ausrechnung für einen beliebigen Wert von a macht keine Schwierigkeiten.

194) Die gleichseitige Hyperbel $x = \frac{1}{y}$.

Der Querschnitt ist $x = \frac{1}{y}$, demnach wird die Fläche von 1 bis y

$$\overset{y}{\underset{1}{F}} = {}^e\lg y.$$

Das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die X-Achse ist $xy = \frac{1}{y}\,y = 1$, folglich für die Fläche von 0 bis y

$$M_x = \frac{y}{1},$$