Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Beispiele: Dreieck, Rechteck, Parallelogramm.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

Punkte von der Achse, so ist das gesuchte $T_1 = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2$, dagegen ist $M = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$, also z. B.

$$\frac{T_x}{M_y} = \frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2}{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}.$$

Dasselbe kann in Bezug auf jede Senkrechte zu jener Achse gemacht werden, wodurch man T_y erhält, so dafs man auch T_p ableiten kann. Ferner wird $M_{xy} = m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + m_3 x_3 y_3$, woraus sich z. B. $\frac{T_x}{M_{xy}}$ und $\frac{T_y}{M_{xy}}$ entwickeln läfst.

Endlich lassen sich durch Parallelprojektion (Collineation) Schlüsse auf andere Figuren ziehen. Kennt man die Centralellipse, so sind auch die beiden andern Ellipsen bekannt und alle Berechnungen kommen auf die eines Punktdreiecks hinaus.

Einige Beispiele werden dies erläutern.

288) Das Dreieck. Sollen die Punkte gleiche Massen $\frac{F}{3}$ haben, so mufs für den Fall, dafs die Verbindungslinie $m_2 m_3$ der Basis parallel sein soll, $SA : SB = 1 : 2$ sein. Es folgt also

$$\frac{F}{3} y^2 + \frac{F}{3} y^2 + \frac{F}{3} (2y)^2 = \frac{bh^3}{36} = \frac{Fh^2}{18}$$

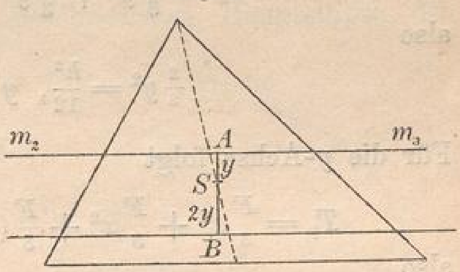
oder

$$2y^2 = \frac{h^2}{18},$$

also

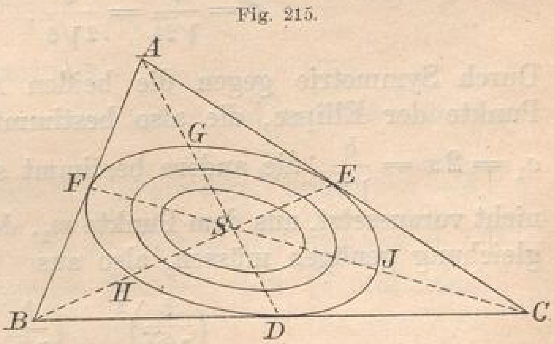
$$y = \frac{h}{6},\ 2y = \frac{h}{3},$$

Fig. 214.



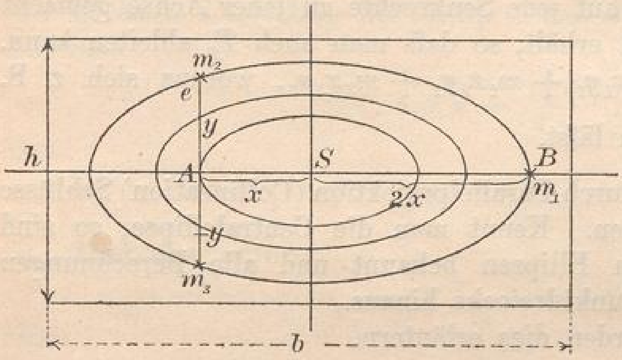
d. h. der untere Punkt fällt in die Grundlinie, die beiden andern in die Verbindungslinie der Halbierungspunkte. Für das gleichseitige Dreieck also ist das Fufspunktdreieck der Höhen, für jedes beliebige Dreieck durch Parallelprojektion das Fufspunktdreieck der Mittellinien eins der gesuchten. Von der äufseren Ellipse hat man, da $SG = GD$, $SH = SE$, $SJ = SF$ sein mufs, sechs Punkte. Diese Ellipse aber ist identisch mit der in D, E, F berührenden. Dies konnte auch durch Projektion aus dem Falle des gleichseitigen Dreiecks geschlossen werden, wo es sich um

Fig. 215.



den In-Kreis handelt. Die Verkleinerung auf $\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{2}$ des Mafsstabes giebt die Centralellipse und die einbeschriebene Ellipse für sämtliche möglichen Punktdreiecke. Die Richtungen der Hauptachsen sind mit Hülfe eines Kreises um S, der in symmetrisch liegenden Punkten schneidet, bequem zu bestimmen.

Fig. 216.



289) Das Rechteck. Die Ellipse der Punktdreiecke für gleiche Massen hat die Mittellinien zur Symmetrieachse. Demnach müssen zwei der Dreiecke symmetrisch, wie m_1, m_2, m_3 liegen, wobei $SB = 2\,AS$ sein mufs. Es folgt für die X-Achse

$$T_x = \frac{F}{3}y^2 + \frac{F}{3}y^2 + \frac{F}{3}0^2 = \frac{bh^3}{12} = \frac{Fh^2}{12},$$

also

$$\tfrac{2}{3}y^2 = \frac{h^2}{12},\quad y = h\sqrt{\tfrac{1}{8}} = \frac{h}{2\sqrt{2}}.$$

Für die y-Achse folgt

$$T_y = \frac{F}{3}x^2 + \frac{F}{3}x^2 + \frac{F}{3}(2x)^2 = 2\,Fx^2 = \frac{hb^3}{12} = \frac{Fb^2}{12},$$

also

$$x^2 = \frac{b^2}{24},$$

daher

$$x = \frac{b}{\sqrt{24}} = \frac{b}{2\sqrt{6}},\quad 2x = \frac{b}{\sqrt{6}}.$$

Durch Symmetrie gegen die beiden Achsen findet man drei neue Punkte der Ellipse, die also bestimmt ist. Die eine Halbachse ist $a_1 = 2x = \frac{b}{\sqrt{6}}$, die andere bestimmt sich, wenn man Vorkenntnisse nicht voraussetzt, aus dem Punkte m_2, dessen Koordinaten der Ellipsengleichung genügen müssen, also aus

$$\frac{\left(\frac{b}{\sqrt{24}}\right)^2}{a_1^2} + \frac{\left(\frac{h}{\sqrt{8}}\right)^2}{b_1^2} = 1$$

oder

$$\frac{b^2}{24\,\frac{b^2}{6}} + \frac{h^2}{8\,b_1^2} = 1$$

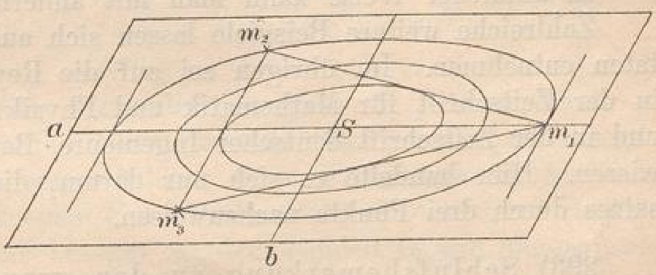
oder
$$\tfrac{1}{4} + \frac{h^2}{8\,b_1^2} = 1,$$

also
$$\frac{h^2}{8\,b_1^2} = \tfrac{3}{4}, \text{ d. h. } b_1 = h\sqrt{\tfrac{1}{6}}.$$

Die Halbachsen verhalten sich also wie b und h, was nach Nr. 135 selbstverständlich war.

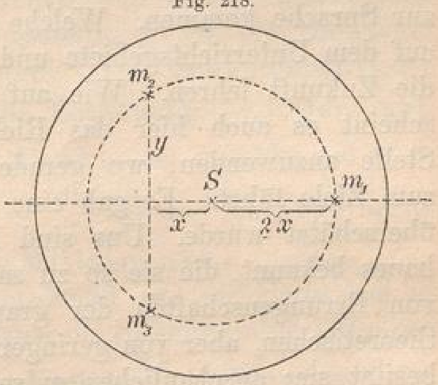
290) Für das Parallelogramm ergeben sich die drei Ellipsen durch Parallelprojektion der Figur 216. Ihre konjugierten Halbachsen bestimmen sich als $\frac{b}{\sqrt{6}}$ und $\frac{a}{\sqrt{6}}$. Eins der Punktdreiecke ist eingezeichnet. Die drei Ellipsen sind ähnlich der einbeschriebenen Hauptellipse des Parallelogramms.

Fig. 217.



291) Kreis. Aus
$$\frac{F}{3}y^2 + \frac{F}{3}y^2 + \frac{F}{3}0^2 = \tfrac{2}{3}Fy^2 = \frac{r^4\pi}{4} = \frac{Fr^2}{4}$$
folgt
$$y = r\sqrt{\tfrac{3}{8}}.$$
Aus
$$\tfrac{2}{3}Fx^2 + \frac{F}{3}(2x)^2 = \frac{Fr^2}{4}$$
folgt
$$x = r\sqrt{\tfrac{1}{8}},\ 2x = a_1 = r\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Fig. 218.



Die drei Punkte bilden einen Kreis mit Radius $a_1 = r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Die beiden andern Kreise sind leicht einzuzeichnen.

292) Ellipse. Durch Projektion folgt aus dem Vorigen $SA = a\sqrt{\tfrac{1}{8}}$, für m_1 folgt der Abstand $a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, für m_2 und m_3 der Abstand $\pm\, b\sqrt{\tfrac{3}{8}}$. Nun mufs m_2 der Ellipsengleichung genügen, d. h. es mufs sein

$$\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{8}}\right)^2}{\left(a\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} + \frac{\left(b\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2}{b_1^2} = 1,$$