Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

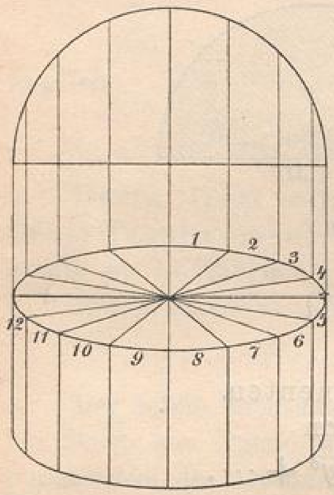
Leipzig, 1897

Schraubengewinde.

summieren kann, wovon in Nr. 195 einige Beispiele vorkommen, oder bei denen man auf eine geschlossene Summierung verzichten mufs. Im letzteren Falle erhält man Annäherungsresultate, indem man eine hinreichende Anzahl von Reihengliedern summiert.

329) Sektoren allgemeiner Drehungskörper. Ist die Y-Achse die Drehungsachse für eine Fläche, so liegt nach Nr. 116 der Schwerpunkt jedes Sektors des entstehenden Drehungskörpers in der Höhe

Fig. 239.



$$y = \frac{M_{xy}}{M_y},$$

wo M_{xy} das Centrifugalmoment der Fläche in Bezug auf die Koordinatenachsen, M_y ihr statisches Moment in Bezug auf die Y-Achse ist. Im übrigen ist (nach Nr. 47—50) der Schwerpunkt desjenigen Kreisbogens zu bestimmen, dessen Radius

$$e = \frac{T_y}{M_y}$$

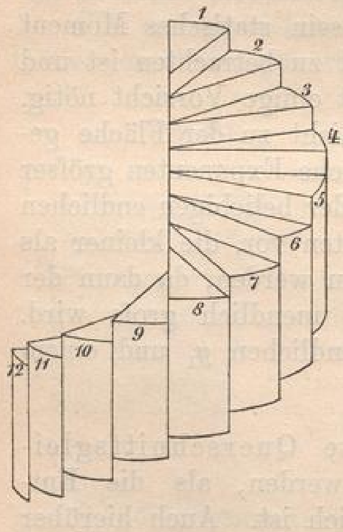
ist und dessen Centriwinkel der des Sektors ist. Nach Nr. 9 ergiebt sich als Abstand

$$\varrho = \frac{es}{b} \text{ bezw. } \varrho = \frac{2e^2 \sin\frac{\alpha}{2}}{b},$$

wo $\alpha = \frac{b}{e\pi} 180^0$ ist.

Die Beispiele aus Nr. 49) und 50) mögen genügen.

Fig. 240.

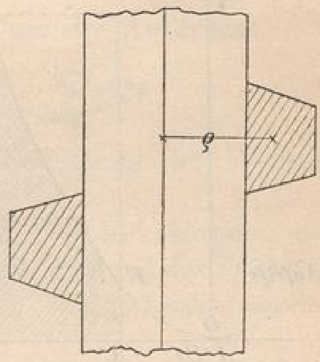


330) Körperliche Schraubengewinde. Im Method. Lehrbuche, Teil III, Stereometrie, ist an Fig. 91 gezeigt, dafs der Inhalt der körperlichen Schraubengewinde ohne weiteres nach der Guldinschen Regel berechnet werden kann, da die einzelnen Sektoren des Drehungskörpers nur in ihrer Lage verschoben sind, was den Inhalt nicht ändert. (Dies entspricht ganz der Flächenverschiebung beim Cavalierischen Prinzip).

Für einen vollen Umgang findet man also nach Nr. 116 den Schwerpunkt folgendermafsen. In der erzeugenden Fläche bestimme man den Punkt mit den Koordinaten $y = \frac{M_{xy}}{M_y}$, $x = \frac{T_y}{M_y}$. In der durch diesen

Punkt gehenden Schraubenlinie liegen die Schwerpunkte aller unendlich kleinen Sektoren. Der Schwerpunkt dieser Schraubenlinie ist zu suchen. Er liegt in halber Höhe. Seine Entfernung von der Achse stimmt überein mit der des Schwerpunktes für den Kreisbogen, in den sich diese Schraubenlinie projizieren läfst, wobei übrigens $\alpha > 360^0$ sein kann.

Fig. 241.

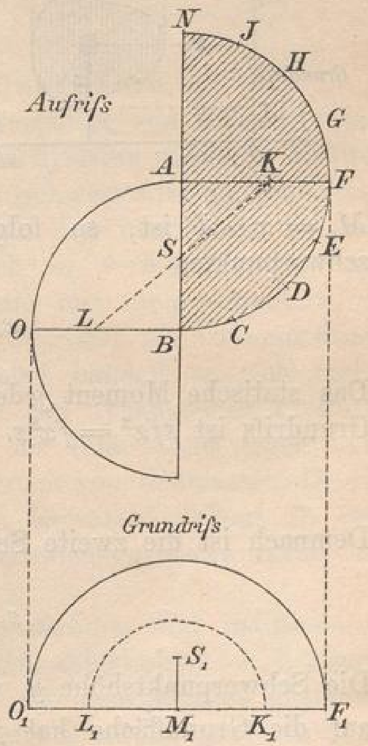


Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens ergiebt sich ebenfalls aus dem Prinzip von Cavalieri.

Als Beispiel behandle man nach Art von Nr. 165 das in der Figur angedeutete Trapezgewinde.

331) **Aufgabe.** Ein Schraubengewinde entstehe durch Drehung eines Halbkreises um eine unendlich dünne Spindel und zwar so, wie es Fig. 242 darstellt. Er soll im Aufrifs genau konstruiert werden, z. B. mit Hülfe der durch die Punkte C, D, E, F, G, H, J gehenden Schraubenlinien.

Fig. 242.



Der Inhalt und der Schwerpunkt sollen für einen halben Umgang bestimmt werden.

Das Ausführen der Zeichnung wird dem Leser überlassen. Der Inhalt wird gleich dem der Halbkugel, also $J = \frac{2}{3} r^3 \pi$. Der Schwerpunkt liegt in der Höhe von S. Der Punkt K, durch den die Hülfsschraubenlinie geht, hat nach Nr. 50 den Abstand $AK = \frac{3\pi}{16} r$, demnach ist im Grundrifs die Schwerpunktsentfernung $M_1 S_1 = \frac{2AK}{\pi} = \frac{3}{8} r$, was dem Schwerpunkte der Halbkugel entspricht.

Für einen beliebigen Umdrehungswinkel findet man die Lösung

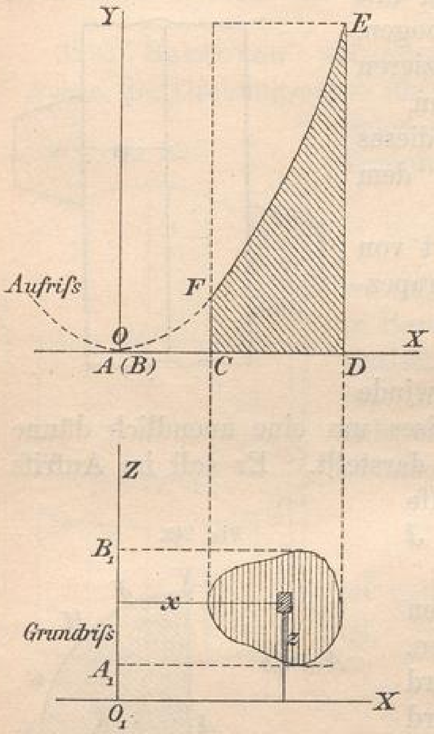
$$M_1 S_1 = \frac{135}{2} \frac{r \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

ebenso, wie in Nr. 50.

332) Andeutung über parabolisch abgeschnittene Prismen und Cylinder.

Fig. 243 stelle ein Prisma bezw. einen Cylinder in Grund- und Aufriſs dar. Derselbe ist durch einen parabolischen Cylinder 2. Ordnung abgeschnitten, der die Grundriſsebene in der Geraden $A_1 B_1$ berührt. Wie groſs ist der Inhalt des Körpers und wo liegt sein Schwerpunkt?

Fig. 243.



Auflösung. Ist die Parabelgleichung $y = x^2$, so steht über jedem Flächenteilchen F des Grundrisses eine Säule vom Inhalte fx^2. Der gesamte Körperinhalt ist also

$$J = \sum fx^2 = T_z,$$

d. h. gleich dem Trägheitsmomente der Grundriſsfläche in Bezug auf die Z-Achse des Grundrisses.

Das statische Moment jeder kleinen Säule in Bezug auf die Z-Achse ist gleich $x \cdot fx^2 = fx^3$, also ist das des Körpers

$$M_z = \sum fx^3,$$

so das es sich um ein Flächenmoment dritter Ordnung handelt. Da zugleich $M_z = x_s \cdot J$ ist, so folgt als die eine Koordinate des Körperschwerpunktes

$$x_s = \frac{M_z}{J} = \frac{\sum fx^3}{\sum fx^2}.$$

Das statische Moment jeder Säule fx^2 in Bezug auf die X-Achse im Grundriſs ist $zfx^2 = fx^2 z$. Das des gesamten Körpers ist

$$M_x = \sum fx^2 z.$$

Demnach ist die zweite Schwerpunktskoordinate

$$z_s = \frac{M_x}{J} = \frac{\sum fx^2 z}{\sum fx^2}.$$

Die Schwerpunktshöhe y_s wird folgendermaſsen gefunden. In Bezug auf die Grundfläche hat jedes Säulchen fx^2 das statische Moment $\frac{y}{2} fx^2$ oder $\frac{x^2}{2} fx^2$, oder endlich $\frac{1}{2} fx^4$. Das Gesamtmoment in Bezug auf die Grundfläche ist also $\frac{1}{2} \sum fx^4$, also die Schwerpunktshöhe