Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Schwerpunkt eines Systems homogener Massenpunkte.

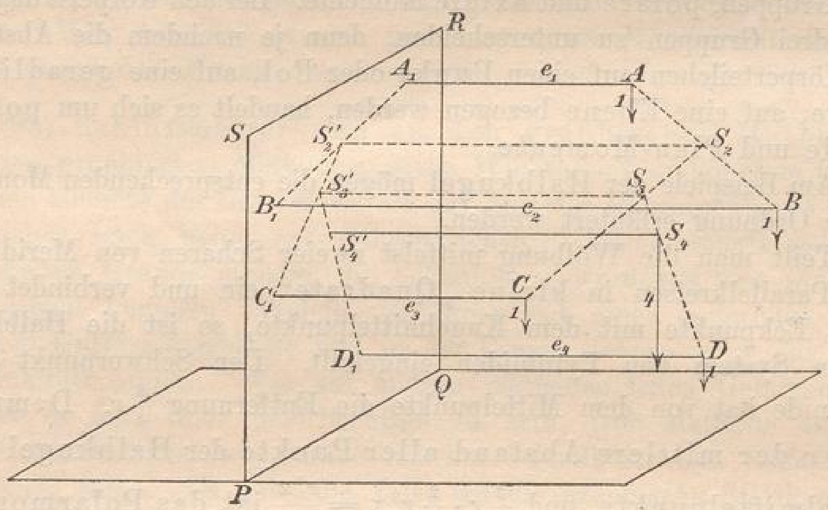
Ist eine Unterscheidung nötig, so kann das Polarmoment mit M_p, das Axialmoment mit M_a, das Planmoment, weil es auf eine Fläche bezogen ist, mit M_f bezeichnet werden.

Das vorliegende Kapitel beschäftigt sich nur mit den Momenten erster Ordnung, und zwar besonders mit den Planmomenten, die mit der Lehre vom Schwerpunkt zusammenhängen. Die Momente zweiter Ordnung kommen im nächsten Abschnitte zur Sprache.

295) Der Schwerpunkt eines Systems homogener Massenpunkte.

In der Mechanik wird der Schwerpunkt definiert als der Angriffspunkt eines Systems paralleler Kräfte, wobei die Richtung

Fig. 220.



dieser Kräfte gleichgültig ist. Angenommen wird, daſs in den einzelnen Punkten gleichviel Masse angebracht sei, daſs alle Punkte gleich schwer seien. Dann läſst sich beweisen, daſs der Schwerpunkt der Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene ist.

Beweis: Man denke sich die gegebenen Massenpunkte A, B, C, D durch die Lote e_1, e_2, e_3, e_4 mit der gegebenen Ebene $PQRS$ starr verbunden, die Ebene denke man sich senkrecht auf eine andere gestellt und die in jedem Punkte wirkende Schwerkraft als die Krafteinheit angenommen.

Der Hebelarm jeder Kraft in Bezug auf die Achse PQ, um die sich die belastete Ebene mit den Punkten drehen will, wird gefunden, indem man von ihr aus auf jede Kraftlinie ein Lot fällt. Diese Lote erhalten die Längen der Abstände e_1, e_2, e_3, e_4. Die statischen Momente werden $e_1 \cdot 1$, $e_2 \cdot 1$, $e_3 \cdot 1$ und $e_4 \cdot 1$. Denkt man sich im Schwerpunkte S_4, dem Angriffspunkte der Resultante, die Kraft 4 angebracht, und ist e_s die Entfernung des Schwerpunktes von der Ebene, so ist das statische Moment der Resultante gleich $e_s \cdot 4$. Dieses Moment mufs gleich der Summe der Einzelmomente sein, also wird

$$4e_s = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$$

und daher

$$e_s = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}{4}.$$

Ebenso wird für den Schwerpunkt von n Punkten gefunden

$$e_s = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n}{n}.$$

Der Schwerpunkt ist also der Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene.

296) Bekanntlich kann er folgendermafsen gefunden werden:

Man halbiere AB, verbinde den Halbierungspunkt S_2 mit C und schneide von der Verbindungslinie den dritten Teil S_2S_3 ab. Man verbinde S_3 mit D und schneide auf S_3D den vierten Teil S_3S_4 ab, dann ist S_4 der Schwerpunkt der vier Massenpunkte u. s. w.

Beweis: Die Kräfte in A und B kann man ersetzen durch die in S_2 wirkende Resultante 2. Am Hebel S_2C wirkt in S_2 die Kraft 2, in C die Kraft 1, beide können ersetzt werden durch die in S_3 wirkende Resultante 3. Am Hebel S_3D wirkt in S_3 die Kraft 3, in D die Kraft 1, beide können ersetzt werden durch die in S_4 wirkende Resultante 4 u. s. w.

297) **Bemerkungen.** Diese Konstruktion ist erstens unabhängig von der Richtung der Parallelkräfte, der obige Satz gilt also von jeder beliebigen Ebene. Zweitens ist sie unabhängig von der Reihenfolge der Punkte. Man kann daraus geometrische Schlüsse ziehen.

Für drei Punkte folgt, dafs die drei Mittellinien des Dreiecks einander in einem Punkte schneiden, der von jeder den dritten Teil abschneidet.

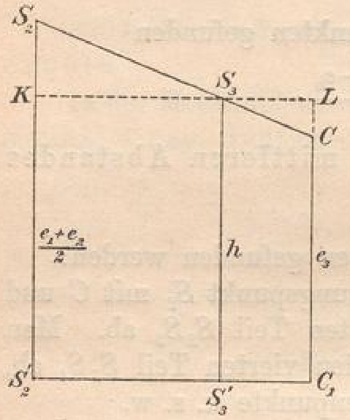
Für vier Punkte folgt, dafs die vier Mittellinien des Tetraeders sich in einem Punkte schneiden, der von jeder den vierten Teil abschneidet.

Diese Art, geometrische Sätze mit Hülfe der Lehre vom Schwerpunkte zu finden, bezeichnet man als den barycentrischen Kalkül. Im Methodischen Lehrbuche, Band II, sind z. B. die Sätze von Ceva und Menelaos so bewiesen worden. Die Formel für e_s wird dort in der Koordinatenlehre abgeleitet. Die Guldinschen Regeln, die Sätze über abgeschrägte Prismen und über die Schwerpunkte von Drehungskörpern bezw. ihrer Sektoren, gehören hierher.

298) Daſs der so gefundene Schwerpunkt der Punkt mittleren Abstandes ist, läſst sich auch rein geometrisch beweisen.

Geometrischer Beweis. In Fig. 1 ist das Lot $S_2'S_2' = \frac{e_1 + e_2}{2}$ als mittlere Höhe des Trapezes A_1ABB_1. Das dortige Trapez $C_1CS_2S_2'$ ist in Fig. 2 besonders gezeichnet und durch S_3 die Parallele KL zur Grundlinie gelegt. Wegen des Teilungsverhältnisses $1:2$ der Linie S_2C ist

Fig. 221.



$$S_2K = 2\,LC,$$

d. h.

$$\frac{e_1 + e_2}{2} - h = h - e_3$$

oder

$$e_1 + e_2 - 2h = 2h - e_3,$$

also

$$h = \frac{e_1 + e_2 + e_3}{3}.$$

Ebenso ist das nächstfolgende Trapez zu behandeln, in dem $S_3K = 3 \cdot LD$ wird u. s. w.

299) Die rein geometrische Definition des Schwerpunktes ist also folgende: Der Schwerpunkt eines Systems homogener Massenpunkte ist der Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene.

Mit Hülfe dreier nicht paralleler Ebenen, z. B. der drei Koordinatenebenen, kann er bestimmt werden.

Sind die Raumkoordinaten der n Punkte $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; \cdots x_n, y_n, z_n$, so sind die Schwerpunktskoordinaten

$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}, \quad y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n}{n},$$

$$z_s = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n}{n}.$$

Sind in den einzelnen Punkten die Massen $m_1, m_2, m_3, \cdots m_n$ angebracht, so sind die Schwerpunktskoordinaten, wie sich ganz ebenso zeigen läſst,

$$x_s = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{M_x}{m},$$

$$y_s = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{M_y}{m},$$

$$z_s = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \cdots + m_nz_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{M_z}{m}$$

wo M_x, M_y, M_z die Planmomente des Systems für die Ebenen YZ, ZX und XY sind und m die Gesamtmasse bedeutet.

300) Die gefundenen Formeln sind allerdings nur für eine endliche Anzahl von Massenpunkten abgeleitet worden; da aber die Zahl derselben beliebig grofs angenommen werden darf, läfst man die Beweise auch für unendlich viele Punkte gelten. Jede Linie, jede Fläche und jeder Körper kann als aus unendlich vielen „Punkten" bestehend angenommen werden, und so bleibt der Schwerpunkt auch für solche Gebilde der Punkt mittleren Abstandes in Bezug auf jede beliebige Ebene, nur mufs die Anordnung der Punkte als eine homogene angenommen werden. Dies entspricht der in der Mechanik gebräuchlichen Annahme, dafs der Körper überall gleich dicht sei, dafs er überall dasselbe spezifische Gewicht habe.

301) **Allgemeine Sätze.** Besitzt ein Körper eine Symmetrieebene, so geht diese durch den Schwerpunkt; besitzt er zwei Symmetrieebenen, so geht ihre Schnittlinie durch den Schwerpunkt; besitzt er drei Symmetrieebenen, die nicht durch dieselbe Gerade gelegt sind, so schneiden sich die drei Schnittlinien im Schwerpunkte. Sind mehr als drei Symmetrieebenen vorhanden, so gehen sämmtliche Schnittlinien derselben durch den Schwerpunkt. Der Schwerpunkt regelmäfsiger Körper fällt daher mit dem Mittelpunkte zusammen.

Stimmen die Querschnitte zweier Körper im Sinne des Cavalierischen Prinzips überein, so liegen ihre Schwerpunkte in derselben Höhe. An Stelle der Gleichheit der zusammengehörigen Querschnitte kann auch ein konstantes Verhältnis der Flächeninhalte treten. Der Beweis für den ersten Fall liegt darin, dafs je zwei zusammengehörige Querschnitte in Bezug auf die Grundfläche gleiche statische Momente haben. Demnach stimmen auch die Momentsummen überein. Bei beiden Körpern wird $h_s = \frac{M}{J} = \frac{\text{statisches Moment}}{\text{Inhalt}}$. Entsprechendes geschieht im zweiten Falle.

Die oben gegebenen Formeln bleiben auch dann richtig, wenn die Ebene, auf welche die Abstände bezogen sind, den Körper schneidet. Dabei sind die auf der einen Seite befindlichen Abstände als positiv, die andern als negativ einzurechnen. Geht die Ebene durch den Schwerpunkt des Körpers, so ist der mittlere Abstand gleich Null.