Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Beispiel der Halbkugel.

Abschnitt VIII.

Schwerpunkte und statische Momente homogener Körper.

294) Bei den Flächen zerfielen die Momente jeder Ordnung in zwei Gruppen, polare und axiale Momente. Bei den Körpern dagegen sind drei Gruppen zu unterscheiden, denn je nachdem die Abstände der Körperteilchen auf einen Punkt oder Pol, auf eine geradlinige Achse, auf eine Ebene bezogen werden, handelt es sich um polare, axiale und Plan-Momente.

Am Beispiele der Halbkugel mögen die entsprechenden Momente erster Ordnung erläutert werden.

Teilt man die Wölbung mittelst zweier Scharen von Meridianen und Parallelkreisen in kleine „Quadrate“ ein und verbindet man deren Eckpunkte mit dem Kugelmittelpunkte, so ist die Halbkugel in ein System von Pyramiden eingeteilt. Der Schwerpunkt jeder Pyramide hat von dem Mittelpunkte die Entfernung $\frac{3}{4}r$. Demnach ist $\frac{3}{4}r$ der mittlere Abstand aller Punkte der Halbkugel vom Kugelmittelpunkte, und $\frac{3}{4}r \cdot \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{r^4\pi}{2}$ ist das Polarmoment erster Ordnung in Bezug auf den Mittelpunkt.

Teilt man, wie es in Fig. 54 angedeutet ist, die Halbkugel in unendlich viele Meridiankeile ein, so liegen die Schwerpunkte derselben nach Nr. 50) auf einem Kreise vom Radius $\frac{3\pi}{16}r$. Demnach ist $\frac{3\pi}{16}r$ der mittlere Abstand der Halbkugelpunkte von dem als Achse gewählten Durchmesser, und $\frac{3\pi}{16}r \cdot \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{r^4\pi^2}{8}$ ist das Axialmoment erster Ordnung in Bezug auf diese Achse.

Der Schwerpunkt der Halbkugel liegt in der Entfernung $\frac{3}{8}r$ von der Grundfläche. Demnach ist $\frac{3}{8}r$ der mittlere Abstand der Halbkugelpunkte von der Grundfläche und $\frac{3}{8}r \cdot \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{r^4\pi}{4}$ ist das Planmoment erster Ordnung in Bezug auf jene Ebene.

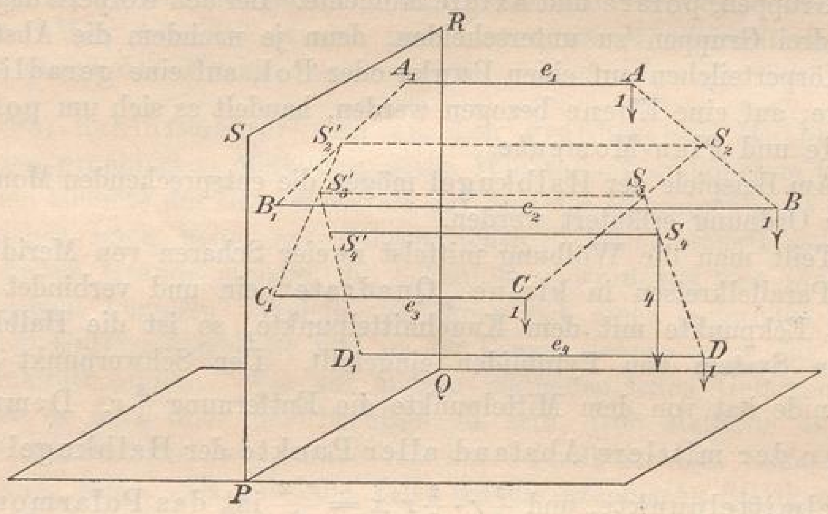
Ist eine Unterscheidung nötig, so kann das Polarmoment mit M_p, das Axialmoment mit M_a, das Planmoment, weil es auf eine Fläche bezogen ist, mit M_f bezeichnet werden.

Das vorliegende Kapitel beschäftigt sich nur mit den Momenten erster Ordnung, und zwar besonders mit den Planmomenten, die mit der Lehre vom Schwerpunkt zusammenhängen. Die Momente zweiter Ordnung kommen im nächsten Abschnitte zur Sprache.

295) Der Schwerpunkt eines Systems homogener Massenpunkte.

In der Mechanik wird der Schwerpunkt definiert als der Angriffspunkt eines Systems paralleler Kräfte, wobei die Richtung

Fig. 220.



dieser Kräfte gleichgültig ist. Angenommen wird, dafs in den einzelnen Punkten gleichviel Masse angebracht sei, dafs alle Punkte gleich schwer seien. Dann läfst sich beweisen, dafs der Schwerpunkt der Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene ist.

Beweis: Man denke sich die gegebenen Massenpunkte A, B, C, D durch die Lote e_1, e_2, e_3, e_4 mit der gegebenen Ebene $PQRS$ starr verbunden, die Ebene denke man sich senkrecht auf eine andere gestellt und die in jedem Punkte wirkende Schwerkraft als die Krafteinheit angenommen.

Der Hebelarm jeder Kraft in Bezug auf die Achse PQ, um die sich die belastete Ebene mit den Punkten drehen will, wird gefunden, indem man von ihr aus auf jede Kraftlinie ein Lot fällt. Diese Lote erhalten die Längen der Abstände e_1, e_2, e_3, e_4. Die statischen Momente werden $e_1 \cdot 1$, $e_2 \cdot 1$, $e_3 \cdot 1$ und $e_4 \cdot 1$. Denkt man sich