Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Fixpunkte bei regelmässigen Prismen.

ebenso $T_x > T_z$ sein muſs, d. h. die X-Achse ist die kleinere Achse der Ellipse, durch deren Umdrehung das Centralellipsoid entstanden ist. Ist dies der Fall, so findet man a reell aus der Gleichung $T_x = T_y + a^2 J$ als

$$a = \pm \sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}}.$$

Folglich: Soll es Punkte geben, für die das Trägheitsellipsoid eine Kugel ist, so muſs das Centralellipsoid ein durch Drehung um die kleinere Achse entstandenes Drehungsellipsoid sein. Je nachdem diese Drehungsachse die X-Achse, Y-Achse oder Z-Achse ist, hat man auf ihr die Punkte zu suchen in der Entfernung

$$a = \pm \sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}}, \text{ oder } b = \pm \sqrt{\frac{T_y - T_z}{J}}, \quad c = \pm \sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}}.$$

Daſs diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, ergiebt sich aus der Probe für a. Ist nämlich das Centralellipsoid durch Drehung um die X-Achse entstanden, so ist zunächst $T_y = T_z$, und wenn die X-Achse die kleinere Achse war, $T_x > T_y$. Folglich giebt es auf der X-Achse Punkte

$$x = \pm \sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}} = a.$$

In Bezug auf jeden der beiden Punkte ist $\frac{T_x - T_y}{J}$ oder $T_x = T_y + a^2 J$ und da $T_y = T_z$ ist, $T_x = T_z + a^2 J$. Weil die drei Momente gleich sind, ist das Trägheitsellipsoid für die beiden Punkte eine Kugel.

398) **Beispiel.** Das quadratische Prisma mit den Kanten a, a, h.

Die Mittellinien sind Hauptachsen des Centralellipsoids, und zwar soll h der Achsenrichtung z entsprechen. Die Hauptträgheitsmomente sind dann

$$T_y = \frac{J}{12}(a^2 + h^2), \; T_y = \frac{J}{12}(h^2 + a^2), \; T_z = \frac{J}{12}(a^2 + a^2) = \frac{J}{6} a^2,$$

also ist $T_x = T_y$, so daſs es sich um ein centrales Drehungsellipsoid handelt. Ist nun $h < a$, so giebt $c = \pm \sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}}$ zwei reelle Werte, nämlich $c = \pm \sqrt{\frac{a^2}{6} - \frac{a^2 + h^2}{12}} = \pm \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{12}}$. Diese Punkte sind die Fixpunkte, wie auch die Probe ergiebt.

Ist $a = h$, so fallen die Punkte $\pm c$ in den Schwerpunkt, und es handelt sich um den Würfel, dessen Centralellipsoid eine Kugel ist.

399) **Bemerkung.** Für jedes regelmäßsige Prisma und für jedes Prisma oder jeden Cylinder mit mehr als zwei durch die Achse gehenden Symmetrieebenen ist das Centralellipsoid ein Drehungsellipsoid, z. B. mit der z-Achse als Drehungsachse. Es läßst sich also stets eine Höhe h so bestimmen, daß das Centralellipsoid eine Kugel wird. Diese Höhe ist der Grenzwert für die Existenz von Fixpunkten.

400) Beispiel des regelmäßsigen dreiseitigen Prismas.

$$T_x = \frac{b^2h^3\sqrt{3}}{48} + \frac{b^4h\sqrt{3}}{96} = T_y, \quad T_z = \frac{b^4h\sqrt{3}}{48}.$$

Setzt man $T_z = T_x$, so folgt $h = b\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Für diese Höhe ist das Centralellipsoid eine Kugel, bei geringerer Höhe aber sind zwei leicht zu berechnende Fixpunkte vorhanden, nämlich in der Entfernung

$$c = \pm\sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{b^4h\sqrt{3}}{96} - \frac{2\,b^2h^3\sqrt{3}}{96}}{\frac{b^2}{4}\sqrt{3}\,h}} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 2h^2}{24}}.$$

401) Entsprechendes gilt von den Planmomenten. Handelt es sich wieder um $x = a$, ist also $T_{xy} = T_{xz}$, so bleiben diese beiden Momente für a unverändert, nur T_{yz} verwandelt sich in $T_{yz} + a^2J$. Soll nun $T_{yz} + a^2J = T_{zx}$ sein, so folgt $a = \pm\sqrt{\frac{T_{zx} - T_{yz}}{J}}$, was mit $a = \pm\sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}}$ identisch ist. Ebenso ist im Falle b

$$b = \pm\sqrt{\frac{T_{yx} - T_{zx}}{J}}, \text{ im Falle c dagegen } c = \pm\sqrt{\frac{T_{zy} - T_{xy}}{J}}.$$

Bedeutung und Anwendbarkeit der Fixpunkte sind also für Körper weit geringer, als für ebene Flächen, weil nur der Drehungsfall ins Auge zu fassen ist.

402) Die Aufgabe, mit Hülfe der Fixpunkte die Momente für beliebige Ebenen und Achsen zu finden, ist genau nach Fig. 122 zu lösen, denn man kann das Koordinatensystem so legen,