Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Möglichkeit von Fixpunkten.

welche die Trägheitsellipse ein Kreis ist. Es fragt sich, ob solche auch für jeden Körper in dem Sinne vorhanden sind, dafs das Trägheitsellipsoid in Bezug auf sie eine Kugel ist, so dafs auch hier Erleichterungen eintreten würden. Es wird sich zeigen, dafs dies im allgemeinen nicht, sondern nur unter gewissen Bedingungen der Fall ist.

Man gehe von dem Koordinatensysteme der Hauptachsen des Centralellipsoides mit dem Schwerpunkte als Nullpunkt aus. Soll ein Punkt mit den Koordinaten a, b, c ein Fixpunkt sein, so müssen die durch ihn gelegten Parallelen zu den Koordinatenachsen Hauptachsen sein, denn jede Gerade durch den Mittelpunkt ist für die Kugel Hauptachse. Für diese Parallelen müfsten also die Centrifugalmomente verschwinden, d. h. es müfste sein

$$1)\quad \sum m(y-b)(z-c)=0,\quad 2)\quad \sum m(z-c)(x-a)=0,$$
$$3)\quad \sum m(x-a)(x-b)=0.$$

Zunächst soll die erste dieser Gleichungen untersucht werden. Sie lautet

$$\sum myz - b\sum mz - c\sum my + bc\sum m = 0.$$

Weil die Koordinaten Hauptachsen waren, ist $\sum myz = 0$ als zugehöriges Centrifugalmoment. Ferner ist $b\sum mz = bJz_s$, wo J der Inhalt des Körpers, z_s sein Schwerpunktsabstand ist. Dieser aber ist Null, denn es war vom Centralellipsoid ausgegangen, also ist $b\sum mz = 0$. Ebenso ist $c\sum my = 0$. Die Gleichung beschränkt sich auf $bc\sum m = bcJ = 0$. Da J als Körperinhalt von Null verschieden ist, mufs das Produkt $bc = 0$ sein.

Ebenso giebt die zweite Gleichung die Bedingung $ca = 0$, die dritte die Bedingung $ab = 0$.

Erste Bedingung dafür, dafs der Punkt ein Fixpunkt sei, ist also, dafs zwei der Koordinaten a, b, c gleich Null sind, d. h. der Punkt mufs auf einer der Koordinatenachsen liegen, d. h. auf einer Hauptachse. Angenommen nun, der Punkt habe die Koordinaten a, $b = 0$, $c = 0$, er liege also auf der durch den Schwerpunkt gehenden X-Achse, so sind, wenn T_x, T_y, T_z die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptachsen bedeuten, die in Bezug auf die durch den Punkt gelegten Parallelen genommenen T_x, $T_y + a^2J$, $T_z + a^2J$ (Verschiebungssatz). Da sie aber gleich grofs sein sollen, so folgt zunächst aus $T_y + a^2J = T_z + a^2J$, dafs $T_y = T_z$ sein mufs, d. h. das ursprüngliche Centralellipsoid mufs ein Drehungsellipsoid mit der X-Achse als Drehungsachse sein. Ferner folgt aus $T_x = T_y + a^2J$, dafs $T_x > T_y$ und ebenso $T_x > T_z$ sein mufs, d. h. die X-Achse ist die kleinere Achse der Ellipse, durch deren Umdrehung das Centralellipsoid entstanden ist. Ist dies der Fall, so findet man a reell aus der Gleichung $T_x = T_y + a^2 J$ als

$$a = \pm\sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}}.$$

Folglich: Soll es Punkte geben, für die das Trägheitsellipsoid eine Kugel ist, so mufs das Centralellipsoid ein durch Drehung um die kleinere Achse entstandenes Drehungsellipsoid sein. Je nachdem diese Drehungsachse die X-Achse, Y-Achse oder Z-Achse ist, hat man auf ihr die Punkte zu suchen in der Entfernung

$$a = \pm\sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}}, \text{ oder } b = \pm\sqrt{\frac{T_y - T_z}{J}}, \quad c = \pm\sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}}.$$

Dafs diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, ergiebt sich aus der Probe für a. Ist nämlich das Centralellipsoid durch Drehung um die X-Achse entstanden, so ist zunächst $T_y = T_z$, und wenn die X-Achse die kleinere Achse war, $T_x > T_y$. Folglich giebt es auf der X-Achse Punkte

$$x = \pm\sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}} = a.$$

In Bezug auf jeden der beiden Punkte ist $\frac{T_x - T_y}{J}$ oder $T_x = T_y + a^2 J$ und da $T_y = T_z$ ist, $T_x = T_z + a^2 J$. Weil die drei Momente gleich sind, ist das Trägheitsellipsoid für die beiden Punkte eine Kugel.

398) **Beispiel.** Das quadratische Prisma mit den Kanten a, a, h.

Die Mittellinien sind Hauptachsen des Centralellipsoids, und zwar soll h der Achsenrichtung z entsprechen. Die Hauptträgheitsmomente sind dann

$$T_y = \frac{J}{12}(a^2 + h^2), \; T_y = \frac{J}{12}(h^2 + a^2), \; T_z = \frac{J}{12}(a^2 + a^2) = \frac{J}{6}a^2,$$

also ist $T_x = T_y$, so dafs es sich um ein centrales Drehungsellipsoid handelt. Ist nun $h < a$, so giebt $c = \pm\sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}}$ zwei reelle Werte, nämlich $c = \pm\sqrt{\frac{a^2}{6} - \frac{a^2 + h^2}{12}} = \pm\sqrt{\frac{a^2 - h^2}{12}}$. Diese Punkte sind die Fixpunkte, wie auch die Probe ergiebt.