Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Symmetriefälle.

388) Bemerkung über die Dynamik.

Der Umstand, dafs die Centrifugalmomente für die Hauptachsen jedes Trägheitsellipsoides verschwinden, ist für die Dynamik von besonderer Bedeutung.

Aus Abschnitt 4 ist bekannt (ebenso durch die Deutung in Nr. 383), dafs bei der Drehung eines Körpers um eine feste Achse an dieser ein umstürzendes, d. h. auf Änderung der Achsenrichtung wirkendes Kräftepaar zur Geltung kommt. Dieses Kräftepaar wird aber nach obigem Null, wenn der Körper sich um eine der Hauptachsen des ihm zugehörigen Trägheitsellipsoides dreht. Dann also bleibt nur eine auf Parallelverschiebung der Achse hinarbeitende Centrifugalkraft übrig. Geht aber die Drehungsachse durch den Schwerpunkt des Körpers, oder handelt es sich um das Centralellipsoid, so ist auch die letztere Kraft gleich Null, so dafs weder Kraft noch Kräftepaar wirken. Daraus folgt im letzteren Falle:

Dreht sich ein Körper um eine Hauptachse des Centralellipsoides seiner Trägheitsmomente, so wird die Achse durch die Drehung in keiner Weise beeinflufst, d. h. sie übernimmt die Rolle einer freien Achse.

Angenommen z. B. der Erdkörper oder vielmehr das an seine Stelle zu setzende ideale Geoid sei ein homogenes dreiachsiges Ellipsoid, dessen Hauptachsen, wie sich zeigen wird, mit denen seines Trägheitsellipsoides zusammenfallen, angenommen ferner, die Drehung finde um eine der Hauptachsen statt, so würde diese Drehungsachse, vorausgesetzt dafs keine äufseren Kräfte störend einwirken, ihre Richtung im Raume konstant beibehalten.

Würde jedoch durch irgend welche äufsere Einwirkung, z. B. durch hinreichend wuchtigen Anprall eines Meteorsteins oder eines Weltkörpers eine andere Achse zur Drehungsachse gemacht, die nicht Hauptachse ist, so würde deren Richtung nicht konstant bleiben, sondern näher zu untersuchenden Schwankungen unterworfen sein.

Wird ein homogener Rechteckskörper emporgeschleudert, so bewegt sich sein Schwerpunkt in einer Parabel und aufserdem findet Drehung um eine Schwerpunktsachse statt. Ist zufällig eine der Mittellinien die Drehungsachse, so behält sie während des Wurfes ihre Lage bei, sonst aber ist dies nicht der Fall. Hierbei ist selbstverständlich vom Luftwiderstande abgesehen.

389) Fälle besonderer Einfachheit. In vielen Fällen ist die oben angegebene Berechnung der Hauptachsen nicht nötig, da man direkt aus der Gestalt des Körpers auf ihre Lage schliefsen kann. Ist z. B. die ZY-Ebene eine Symmetriebene des Körpers, so gehört

zu jedem Elemente mxy des Centrifugalmomentes ein symmetrisches $m(-x)y = -mxy$, so dafs je zwei einander aufheben. In diesem Falle ist also $\sum mxy = 0$ und $\sum mxz = 0$ und jedes auf der Symmetrieebene errichtete Lot ist Hauptachse für das Trägheitsellipsoid, welches zu seinem Fufspunkte gehört. Wählt man den Schwerpunkt, so hat man die eine Hauptachsenrichtung für das Centralellipsoid.

Sind zwei Symmetrieebenen vorhanden, z. B. die Ebene ZY und XZ, so ist wegen der ersteren $\sum mxy = 0$ und $\sum mxz = 0$, wegen der zweiten $\sum myz = 0$ (und $\sum myx = 0$). Weil für jeden Punkt ihrer Schnittlinie alle drei Momente verschwinden, hat man in jedem sofort in den Loten und den Schnittlinien die drei Hauptachsen des Trägheitsellipsoides. Wählt man den Schwerpunkt, so hat man die des Centralellipsoides.

Sind drei Symmetrieebenen vorhanden, die nicht durch ein und dieselbe Gerade gehen, so hat man in ihren Schnittlinien die Hauptachsen des Centralellipsoides.

Gehen hingegen die drei Symmetrieebenen durch eine Gerade, so ist für jeden Punkt der Schnittlinie das Trägheitsellipsoid ein Drehungsellipsoid mit der Geraden als Achse. Wählt man den Schwerpunkt, so hat man das centrale Drehungsellipsoid.

Werden die letztgenannten drei Symmetrieebenen durch eine vierte (rechtwinklig) geschnitten, so handelt es sich um das centrale Drehungsellipsoid. Dies ist z. B. der Fall bei jedem regelmäfsigen Prisma. Bei einer gewissen Länge desselben ist das centrale Drehungsellipsoid eine Kugel, in anderen Fällen ist die Drehungsachse die kleinere oder die gröfsere des Drehungsellipsoides. Beim Rechteckskörper hat man den Fall der Kugel, wenn er ein Würfel ist. Man versuche den Fall der Kugel bei dem dreiseitigen, sechsseitigen u. s. w. regelmäfsigen Prisma aufzufinden. Beispiele folgen in Nr. 398 und 400.

Bei jedem regelmäfsigen Körper ist das Centralellipsoid eine Kugel.

390) Folgerungen aus der Existenz des Trägheitsellipsoides.

a) Weil jeder Halbmesser den umgekehrten Wert des ihm zugehörigen axialen Trägheitsmomentes angiebt, so braucht man nur die drei Hauptträgheitsmomente zu kennen, um geometrisch oder rechnerisch sämtliche für das durch O gehende Strahlenbündel zu finden.

b) Sind a, b, c die nach der Gröfse geordneten Hauptachsen, so entspricht die längste a dem kleinsten Trägheitsmoment, die kürzeste c dem gröfsten für das vorliegende Strahlenbündel.

c) Es war für beliebig gerichtete Koordinaten durch einen beliebigen Punkt für den gegebenen Körper

$$T_{xy} + T_{yz} = T_y, \quad T_{yz} + T_{zx} = T_z, \quad T_{zx} + T_{xy} = T_x,$$
$$T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = T_p,$$

folglich ist

$$T_x + T_y + T_z = 2\,(T_{xz} + T_{yx} + T_{zx}) = 2\,T_p$$

und

$$T_p = T_y + T_{zx} = T_z + T_{xy} = T_z + T_{yz}.$$

Diese Gleichungen lassen sich auch schreiben als folgende

$$\varrho_{xy}^2 + \varrho_{yz}^2 = \varrho_y^2, \quad \varrho_{yz}^2 + \varrho_{zx}^2 = \varrho_z^2, \quad \varrho_{zx}^2 + \varrho_{xy}^2 = \varrho_x^2,$$
$$\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2 = 2\,(\varrho_{xy}^2 + \varrho_{yz}^2 + \varrho_{zx}^2) = 2\,\varrho_p^2,$$
$$\varrho_p^2 = \varrho_y^2 + \varrho_{zx}^2 = \varrho_z^2 + \varrho_{xy}^2 = \varrho_z^2 + \varrho_{yz}^2.$$

Die polaren, axialen und planen Trägheitsmomente hängen also einfach zusammen, und die verschiedenen Arten von Trägheitsradien lassen sich durch Pythagoreische Addition oder Subtraktion aus einander ableiten.

d) **Aufgabe.** Die Trägheitsradien ϱ_x, ϱ_y, ϱ_z seien bekannt, wie findet man alle übrigen mit diesen Achsen zusammenhängenden Trägheitsradien?

Auflösung. $\varrho_p = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2}}, \quad \varrho_{xy} = \sqrt{\varrho_p^2 - \varrho_z^2},$

$$\varrho_{yz} = \sqrt{\varrho_p^2 - \varrho_x^2}, \quad \varrho_{zx} = \sqrt{\varrho_p^2 - \varrho_y^2}.$$

e) Aus $\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2 = 2\,\varrho_p^2$ folgt der Satz: Die Summe der Trägheitsmomente für je drei auf einander senkrechte Achsen ist eine konstante Gröſse, nämlich gleich dem doppelten Quadrate des polaren Trägheitsmomentes.

Daraus folgt der geometrische Satz:

Die Summe der Quadrate der reciproken Werte je dreier auf einander senkrechter Halbmesser des Ellipsoides ist eine konstante Gröſse, und zwar gleich $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

f) Ist ferner der Satz bekannt, daſs die Summe der Quadrate je dreier konjugierter Halbmesser des Ellipsoides konstant ist, so kann man für die entsprechenden axialen Trägheitsmomente folgern, daſs die Summe ihrer reciproken Werte konstant sei, nämlich gleich $\frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_b} + \frac{1}{T_c}$.