



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

X. Anhang.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

X. Anhang.

Die Schwungradtheorie.

Ein elementares Beispiel zum Abschnitt 43.

409) Das nachstehende Beispiel soll zeigen, in wie fruchtbarer Weise die Lehre von den Trägheitsmomenten in der Technik Verwendung finden kann.

Zur Schwungradtheorie gehören zunächst die Aufgaben 90) und 91), bei denen die Gestalt, die Masse bzw. das Gewicht und die Winkelgeschwindigkeit gegeben sind. Eine Reihe weiterer Aufgaben läßt sich anschließen. Bei diesen soll bisweilen nur vom Schwungringe, statt vom ganzen Rade die Rede sein, auch soll bisweilen, wie es in der Praxis meist geschieht, einfach der mittlere Radius als maßgebend angenommen werden, obwohl z. B. bei rechteckigem Querschnitt eigentlich aus

$$\varrho^2 m = m \frac{r^2 + r_1^2}{2}$$

folgen würde

$$\varrho = \sqrt{\frac{r^2 + r_1^2}{2}},$$

nicht aber $\varrho = \frac{r + r_1}{2}$. Bei den Beispielen kommt es hier weniger auf rechnerische Genauigkeit, als auf die Art des Ansatzes und die Aufstellung der Gleichungen an. Die Forderung strenger Genauigkeit giebt dann zu umfangreicheren Übungsaufgaben Anlaß.

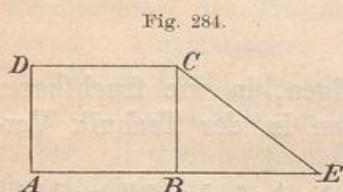
Es ist zu raten, stets mit Metern und Tonnen zu rechnen, nicht aber mit Metern und Kilogrammen, weil die letzteren die Einführung von Dezimetern verlangen, so daß zweierlei Maße in der Rechnung vorkommen und daher Umrechnungen im Laufe der letzteren nötig werden. Dabei treten bisweilen naheliegende Versehen auf, indem man z. B. versäumt, $g = 9,81$ m in $g_1 = 98,1$ dem umzuwandeln.

Bei den ersten Aufgaben handelt es sich um die Thätigkeit des Schwungrades als Arbeitsaufsammler, bei den späteren um seine regulierende Thätigkeit bei der Kurbelbewegung. Auf-

gaben über das Zerreißen der Schwungräder durch Centrifugalkräfte sollen auch zur Sprache kommen, obwohl der Gegenstand schon in Abschnitt 49 behandelt worden ist.

A. Das Schwungrad als Ansammler der Energie.

410) **Aufgabe.** Eine Dampfmaschine leiste bei einer sekundlichen Umdrehung 300 Pferdestärken. Wie schwer müfste der Schwungring von 3 m mittlerem Radius sein, um nach Abstellung der Triebkraft denselben Widerstand 10, 20, 30 Sekunden lang zu überwinden?



Auflösung. Die sekundliche Leistung der Maschine beträgt $300 \cdot 75 \text{ mkg} = 22,5$ Metertonnen. Das Auslaufdiagramm für 10 Sekunden ist unter der Annahme konstanten Widerstandes ein Dreieck BCE , welches halb so groß ist, als das entsprechende Rechteck $ABCD$ für eine konstante Maschinenleistung von gleicher Dauer. Der Widerstand kann durch Lote von gleicher Länge, die auf die Diagrammfläche aufzusetzen sind, dargestellt werden. Vom Schwungrad, dessen Arbeitswucht $\frac{T\vartheta^2}{2}$ ist, wird also eine Arbeit von $\frac{10}{2} \cdot 22,5$ Metertonnen beansprucht. Es ist demnach zu setzen

$$\frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{10}{2} \cdot 22,5$$

oder

$$\frac{p}{g} \cdot \frac{r^2 (2\pi)^2}{2} = \frac{10}{2} \cdot 22,5,$$

also

$$p = \frac{10 \cdot 22,5}{4} \cdot \frac{g}{9\pi^2} = \frac{225 \cdot 9,81}{36 \pi^2} = 6,2 \text{ Tonnen} = 62 \text{ Doppelzentner.}$$

Für 20 Sekunden sind 12,4, für 30 Sekunden 18,6 Tonnen erforderlich.

Bemerkungen. Für bloße Überschlagungsrechnungen kann man $\frac{9,81}{\pi^2} = 1$ setzen, was bei diesem Beispiele 6,25 Tonnen geben würde.

Die allgemeine Formel für diese Art von Aufgaben ergibt sich bei n sekundlichen Umdrehungen und einer sekundlichen Leistung L der Maschine für eine gegebene Auslaufzeit t aus

$$\frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{t}{2} L \quad \text{oder} \quad \frac{p r^2 (2n\pi)^2}{g} = \frac{t}{2} L$$

als

$$1) \quad p = \frac{gtL}{4r^2n^2\pi^2} = \frac{gtL}{4(rn\pi)^2}.$$

Ist eine der andern Größen als Unbekannte betrachtet, so folgt daraus:

$$\begin{aligned}
 2) \quad & t = \frac{4p(rn\pi^2)}{gL}, \\
 3) \quad & L = \frac{4p(rn\pi)^2}{gt}, \\
 4) \quad & r = \sqrt{\frac{gtL}{4n^2\pi^2p}} = \frac{1}{2n\pi} \sqrt{\frac{gtL}{p}}, \\
 5) \quad & n = \frac{1}{2r\pi} \sqrt{\frac{gtL}{p}}.
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich entsprechende Aufgaben lösen und an sie allgemeinere Betrachtungen anknüpfen.

411) **Aufgabe.** Eine Maschine leiste bei einer sekundlichen Umdrehung 400 Pferdestärken, ihr Schwungring wiege 20 Tonnen bei 3 m mittlerem Radius. Wie lange kann das Rad nach Abstellung der Triebkraft den gesamten Widerstand noch überwinden?

Auflösung. Die Sekundenleistung der Maschine ist $L = \frac{400 \cdot 75}{1000} = 30$ Metertonnen. Gleichung 2) giebt

$$t = \frac{4 \cdot 20 \cdot 3^2 \pi^2}{9,81 \cdot 30} = 24,14 \text{ Sekunden.}$$

412) **Aufgabe.** Die Leistung einer Maschine bei einer sekundlichen Umdrehung soll bestimmt werden, nachdem sich ergeben hat, daß das Schwungrad von 20 Tonnen Gewicht und 3m Radius nach Abstellung der Triebkraft den gesamten Widerstand noch 20 Sekunden lang überwinden kann.

Auflösung. Nach 3) ist

$$L = \frac{4 \cdot 20 \cdot 3^2 \cdot 1^2 \cdot \pi^2}{9,81 \cdot 20} = 36,22 \text{ mt/s (Metertonnen pro Sekunde),}$$

oder 483 Pferdestärken.

Bemerkung. Da das Absperren des Dampfes Zeit beansprucht, müßte man die Geschwindigkeit zunächst höher treiben, sodann den Dampf absperren und die Zeit des Auslaufs von dem Augenblicke ab zählen, wo das Rad eine Tour in der Sekunde macht.

Die gefundene Leistungsfähigkeit ist gewissermaßen die Bruttoleistung der Maschine, denn sämtliche Widerstände sind darin enthalten, z. B. Kolbenreibung, Stopfbüchsenreibung, Reibung der Geradföhrungen, sämtliche Zapfenreibungen, die Luftwiderstände und dgl. Um die Nettoleistung zu finden, müßte man nicht nur die Triebkraft abstellen, sondern auch den eigentlichen Widerstand (die Last) auslösen und die Dauer des Auslaufs des Rades und der Maschine beobachten.

Angenommen, es handle sich um 600 Sekunden, dann ist die folgende Aufgabe maßgebend.

413) **Aufgabe.** Mit wieviel Pferdestärken müßte ein konstanter Widerstand einsetzen, um das obige Rad in der Auslaufzeit von 600 Sekunden zur Ruhe zu bringen?

Auflösung. Gleichung 3) giebt

$$L_1 = \frac{4 \cdot 20 \cdot 3^2 \cdot 1^2 \cdot \pi^2}{9,81 \cdot 600} = 1,208 \text{ Metertonnen auf die Sekunde}$$

oder 16,1 Pferdestärken.

Die Nettoleistung der Maschine würde also sein $483 - 16,1 = \sim 477$ Pferdestärken.

In dem Effektverlust von 16,1 Pferdestärken ist jeder Widerstand enthalten, auch der Einfluß der etwa hin- und herschwingenden Teile. Die Annahme, daß der Widerstand konstant sei, ist z. B. im Hinblick auf den Luftwiderstand nicht ganz richtig, das Resultat ist aber für praktische Zwecke hinweisend genau und kann zur Ergänzung der Ergebnisse von Indikator- und Bremsversuchen dienen. In solcher Weise ist man auch imstande, den Arbeitsaufwand, den Lochmaschinen, Pressen u. dgl. für ihre Funktionen erfordern, versuchsweise festzustellen. Da theoretische Vorhersagungen hier kaum möglich sind, müssen Experimente die nötige Unterlage geben.

414) **Aufgabe.** Mit wieviel Pferdestärken müßte ein konstanter Widerstand einsetzen, um obiges Rad in einer Sekunde oder in $\frac{1}{10}$ Sekunde, oder in $\frac{1}{100}$ Sekunde zur Ruhe zu zwingen.

Auflösung. Für eine Sekunde bedarf es einer Anfangsarbeit von $L = \frac{4p3^21^2\pi^2}{g \cdot 1} = 724,4 \text{ mt/s}$ oder 9640 Pferdestärken, bei $\frac{1}{10}$ Sekunde das 10-fache, bei $\frac{1}{100}$ Sekunde das 100-fache.

Bemerkung. Nach den in Nr. 97, 98 und 101 behandelten Formeln kann aber die Schwungradwelle aus Gründen der Festigkeit nur eine begrenzte Anzahl von Pferdestärken übertragen, z. B. die Anzahl

$$N = \frac{\pi n S d^3}{16 \cdot 716 \ 200} \text{ bzw. } N = \frac{G n \pi^2 d^4}{4 \cdot 360 \cdot 1000 \cdot 16 \cdot 716 \ 200},$$

daraus geht also hervor, daß die Triebwelle durch Torsion zerbrechen muß, wenn das Stillstehen in allzukurzer Zeit geschehen soll. Selbstverständlich können vorher die zu schwach gebauten Radarme nachgeben, oder der Keil, mittels dessen die Nabe auf die Triebwelle gekeilt ist, wird vorher durch Abscherung beseitigt. Letzteres

würde noch das am wenigsten schädlich wirkende sein, und deshalb pflegt man den Keil nicht allzuwiderstandsfähig zu machen.

Bezeichnet man den Widerstand, der das Rad schnell zur Ruhe bringen soll, kurzweg als Stofs, so folgt aus Gleichung 3) dafs die Bruchgefahr umgekehrt proportional der Stofsdauer ist. Setzt man in abstrakter Weise $t = 0$, so würde $L = \infty$, das Rad oder die Welle also unter jeder Bedingung zertrümmert werden.

415) **Aufgabe.** Ein Schwungring vom spez. Gewichte p' mit den Radien r und r_1 , der durch Rotation einer Rechtecksfläche mit den Seiten $h = r - r_1$ und d entstanden gedacht wird, hat bei n Umdrehungen in der Sekunde welche Arbeitswucht in sich?

Auflösung. Das polare Trägheitsmoment der Ringfläche ist

$$\frac{r^4 - r_1^4}{2} \pi = \frac{r^2 + r_1^2}{2} (r^2 - r_1^2) \pi = F \frac{r^2 + r_1^2}{2}.$$

Hier also wird

$$T = m \frac{r^2 + r_1^2}{2} = \frac{p}{g} \frac{r^2 + r_1^2}{2} = \frac{(r^2 - r_1^2) \pi p'}{g} d \frac{r^2 + r_1^2}{2} = \frac{(r^4 - r_1^4) \pi p' d}{2g},$$

also

$$A = T \frac{\vartheta^2}{2} = \frac{(r^4 - r_1^4) \pi p'}{2g} d \frac{\vartheta^2}{2} = \frac{(r^4 - r_1^4) \pi p' d 4 n^2 \pi^2}{4g} = \frac{(r^4 - r_1^4) \pi^3 p' d n^2}{g}$$

Metertonnen.

Ist z. B. $r = 2$ m, $r_1 = 1,6$ m, $d = 0,2$ m, $p' = 7,5$ m, so würde sein

$$A = \frac{(2^4 - 1,6^4) \pi^3 \cdot 7,5 \cdot 0,2}{9,81} n^2 = 44,786 n^2 \text{ Metertonnen}$$

oder $A = 44\,786 n^2$ mkg. Also bei 1, 2, 3 Umdrehungen bezw. 44 786 mkg, 179 144 mkg, 403 074 mkg.

Die plötzliche Herabsetzung der Geschwindigkeit von 3 auf 2 sekundliche Umgänge würde schon $403\,074 - 179\,144 = 223\,930$ mkg. Zerstörungsarbeit in die Maschinerie werfen. Stofsweise Verlangsamungen also, wie sie beim Walzen, Bohren, Pressen häufig eintreten, müssen bei der Konstruktion berücksichtigt werden. Ebenso würden Stöße eintreten, wenn man Schleifsteine, Mühlsteine oder vollständige Transmissionsbetriebe durch plötzlich wirkende Einrückkuppelungen in sofortige Bewegung versetzen wollte. Der Vorgang beim Zerbrechen der Radarme oder des Kranzes ist in Figur 285 dargestellt. Dreht sich das Rad in der Richtung v und ist w die plötzlich hemmend wirkende Gegenkraft, so wird jeder Radarm ABC

hervorgeht, die Gleichung 2) maßgebend. Man erhält

$$t = \frac{4 \cdot 20 (3 \cdot 3 \pi)^2}{g \cdot 30} = 217,2 \text{ Sekunden.}$$

Dies ist 9-fache des Resultates der Aufgabe 411, was sich naturgemäß daraus erklärt, daß t dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit proportional ist.

B. Schwungrad und Centrifugalkraft.

418) Schwungräder werden in der Regel durch Betriebsstockungen in der oben erwähnten Weise zerstört. Bei sehr großen Geschwindigkeiten, z. B. beim Durchgehen der unbelasteten Maschine, deren Absperrventil nicht in Ordnung ist, kann die Zerstörung auch durch die Centrifugalkraft erfolgen. Sieht man von den Radarmen vorläufig ab, so handelt es sich um das Abreißen der einen Kranzhälfte von der andern. Maßgebend ist also die im Schwerpunkte S_1 vereinigt gedachte Masse jeder Hälfte. (Vgl. Figur 53.)

Ist d die Dicke des Rades mit rechteckigem Hauptschnitt, sind r und r_1 die Radien, und ist p' das spezifische Gewicht, so handelt es sich um die Masse $\frac{p}{g} = \frac{\pi}{2} (r^2 - r_1^2) d \frac{p}{g}$ und um Centrifugalkräfte $m \varrho (2n\pi)^2$, wo ϱ der Schwerpunktsabstand $\frac{4(r^3 - r_1^3)}{3\pi(r^2 - r_1^2)}$, n die Tourenzahl für die Sekunde bedeutet, also um

$$K = \frac{\pi (r^2 - r_1^2) d p'}{2g} \frac{4(r^3 - r_1^3)}{3\pi (r^2 - r_1^2)} (2n\pi)^2 = \frac{2 d p' (r^3 - r_1^3) (2n\pi)^2}{3g}$$

419) Aufgabe. Wie groß ist die Centrifugalkraft, die einen einfach gestalteten Schwungring von den nachstehenden Dimensionen bei einer, zwei, drei Touren in der Sekunde zerreißen will? $r = 3,3$ m, $r_1 = 3$ m, $d = 0,3$ m, $p' = 7,5$.

Auflösung.

$$K_1 = \frac{2 \cdot 0,3 \cdot 7,5 (3,3^3 - 3^3) 4\pi^2}{3 \cdot 9,81} = \frac{6\pi^2 (3,3^3 - 3^3)}{9,81} = \frac{53,62 \pi^2}{9,81} = 53,94 \text{ Tonnen.}$$

Bei 2 Touren handelt es sich um das 4-fache, bei 3 Touren um das 9-fache u. s. w.

Bemerkung. Die gesamte Rifsfläche ist das doppelte Rechteck aus d und $(r - r_1)$, also gleich $2d(r - r_1) = 2 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,18$ qm = 180 000 qmm. Von der Spannung 53 940 kg kommen also auf jedes Quadratmillimeter $0,2997 = \sim 0,3$ kg. Der Tragmodul des Gußeisens ist 7,5 kg. Wann wird er erreicht? Bei n Touren

handelt es sich um $n^2 \cdot 0,3$ kg Spannung, aus $n^2 \cdot 0,3 = 7,5$ folgt $n^2 = 25$ und $n = 5$. Bei 5 Touren also wird bereits die Elastizitätsgrenze erreicht. Wird der Bruchmodul als 11 angenommen, so erfolgt das Zerreißen bei

$$n = \sqrt{\frac{11}{0,3}} = 6,055 \text{ Umdrehungen in der Sekunde.}$$

Die Annahme, daß der Zug sich gleichmäßig über die ganze Rifsfläche verbreitet, ist nicht ganz richtig, aber für praktische Zwecke zulässig.

Bei anderer Gestaltung des Hauptschnittes kommen die Formeln des Abschnittes 49 zur Geltung.

Will man direkt die Spannung erhalten, so ergibt sich in Tonnen auf das Quadratmeter die Zugspannung

$$S_1 = \frac{2 d p' (r^3 - r_1^3) (2 n \pi)^2}{3 g 2 d (r - r_1)} = \frac{p' (r^2 + r r_1 + r_1^2) (2 n \pi)^2}{3 g}$$

Multiplikation mit 1000 und Division durch 1000000 reduziert diese Spannung auf Kilogramm pro Quadratmillimeter, so daß man dann hat

$$S = \frac{p' (r^2 + r r_1 + r_1^2) (2 n \pi)^2}{3000 g},$$

im Beispiele also

$$S = \frac{7,5 (10,89 + 9,9 + 9) 4 \pi^2}{3000 \cdot 9,81} = 0,2997 \text{ kg/qmm.}$$

Bei den großen z. B. in Drahtwalzwerken gebräuchlichen Umdrehungszahlen sind nach Obigem gußeiserne Räder von großen Dimensionen unbrauchbar. Sie werden dort durch schmiedeeiserne ersetzt. Bei dem Schrägwalzverfahren (Mannesmann) hat man die Sicherheit noch durch Umspinnung mit Draht zu vergrößern gesucht.

C. Die ausgleichende Arbeit des Schwungrades bei der einfachen Kurbelbewegung.

420) Der Kurbelradius der Maschine sei r , der Widerstand, auf den Radius r reduziert, sei q , also qr das Moment des zu überwindenden Widerstandes. Man denke sich z. B. die Last q an einem Seile wirkend, welches um die Peripherie des Kurbelkreises geschlungen ist. Die Richtung der Pleuelstange werde stets als horizontal angenommen, was bei der sogenannten Kurbelschleife durchaus richtig, bei Pleuelstangen gewöhnlicher Art angenähert richtig ist, sobald sie mehr als die 5-fache Länge des Kurbelradius haben. Die treibende Maschine werde, wie überall in den Lehrbüchern, zunächst als Voll-

druckmaschine angenommen, so daß es sich um eine konstante Triebkraft p handelt. T sei das Trägheitsmoment der gesamten Schwungradmasse (zu der im angenommenen Beispiele auch die am Seile hängende Last q gehören müßte, wenn sie nicht vollständig abstrakt als Kraft aufgefaßt wird).

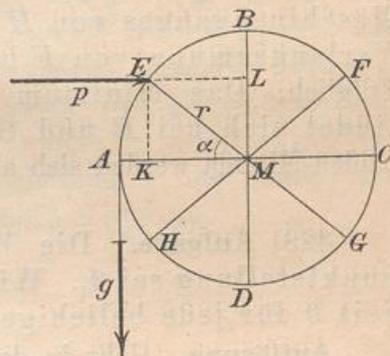
421) **Aufgabe.** Wie groß muß die Triebkraft p theoretisch sein, damit der Gang der Maschine ein periodisch regelmäßiger werde?

Auflösung. Bei jeder Umdrehung ist die Arbeit $q \cdot 2r\pi$ zu leisten. Ebenso viel Arbeit muß die Dampfmaschine hergeben*), wenn die Maschine nicht in dauernde Beschleunigung oder in Verlangsamung geraten soll. Der Hin- und Rückgang des Kolbens giebt den Weg $4r$, also ist $p \cdot 4r$ die entsprechende Arbeit der Maschine. Aus $p \cdot 4r = q \cdot 2r\pi$ folgt

$$1) \quad p = \frac{\pi}{2}q = 1,5708q.$$

Die Triebkraft ist also mehr als das $1\frac{1}{2}$ fache der Last, und zwar deshalb größer, weil ihr Hebelarm zwischen den Werten Null und r schwankt, während der Hebelarm der Last konstant gleich r bleibt. Bemerkenswert ist, daß die Größe von r für das Resultat gleichgültig ist.

Fig. 286.



422) **Aufgabe.** In welchen Stellungen ist das statische Moment der Kraft gleich dem der Last?

Auflösung. Für die beliebige Stellung α (Fig. 286) ist das statische Moment der Kraft $pr \sin \alpha$, das der Last ist stets qr . Setzt man beide gleich, so ist

$$pr \sin \alpha = qr$$

oder

$$\frac{\pi}{2}qr \sin \alpha = qr.$$

Daraus folgt

$$\sin \alpha = \frac{2}{\pi},$$

d. h.

$$2) \quad \alpha = 39^\circ 32' 30''.$$

*) Der Satz von der Erhaltung der Arbeit bei diesem Probleme ist vorher in bekannter Weise elementar zu beweisen.

Dasselbe gilt von den Stellungen

$$- 39^{\circ} 32' 30'' \text{ und } \pm 140^{\circ} 27' 30''.$$

Diese Stellungen sind die einzig möglichen für das Gleichgewicht. Bleibt die Maschine zwischen H und E oder zwischen F und G stehen, so ist es der Dampfkraft p nicht möglich, das Moment der Last zu überwinden und die Maschine in Gang zu setzen. Entweder muß die Last vermindert oder das Rad mit besonderen Mitteln über die Minimalstellen hinaus getrieben werden, d. h. mindestens $39^{\circ} 32\frac{1}{2}'$ über die Totpunktstellung hinaus. Die Vorrichtungen, die dem Maschinenwärter diese Arbeit ermöglichen, sind wohl allgemein bekannt.

Folgerungen. Von H bis E ist das Moment der Triebkraft zu klein, von E bis F ist es zu groß, von F bis G zu klein, von G bis H zu groß. Demnach herrscht Verlangsamung des Maschinenganges von H bis E , Beschleunigung von E bis F , Verlangsamung von F bis G , Beschleunigung von G bis H . Folglich: Das Minimum der Drehungsgeschwindigkeit befindet sich bei E und G , das Maximum bei F und H . Die beiden Minima werden sich als gleich herausstellen, ebenso die Maxima.

423) **Aufgabe.** Die Winkelgeschwindigkeit in der Totpunktstellung sei ϑ_1 . Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ϑ für jede beliebige Stellung α des Kurbelradius?

Auflösung. Geht in der Figur der Endpunkt des Radius von A nach E , so ist die Last um den Bogen $AE = r \cdot \hat{\alpha}$ gehoben. Die geleistete Arbeit ist also $qr\hat{\alpha}$, oder, wie aus der Proportion $\alpha : \hat{\pi} = \alpha^{\circ} : 180^{\circ}$ folgt, geleistete Arbeit $= qr\pi \frac{\alpha^{\circ}}{180^{\circ}}$, wobei man die Gradzeichen dulden möge, um Verwechslungen zu vermeiden.

Der Weg des Dampfkolbens aber ist AK , die aufgewandte Arbeit der Maschine also $p \cdot AK$, oder, da $p = \frac{\pi}{2}q$ und $AK = r(1 - \cos \alpha)$ ist, aufgewandte Arbeit $= \frac{\pi}{2}qr(1 - \cos \alpha)$. Folglich Kraftarbeit — Lastarbeit

$$= \frac{\pi}{2}qr(1 - \cos \alpha) - qr\pi \frac{\alpha^{\circ}}{180^{\circ}} = qr\pi \left[\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) - \frac{\alpha^{\circ}}{180^{\circ}} \right].$$

Dieser Arbeitsüberschufs, der allerdings positiv und negativ sein kann, wirft sich in die Schwungmassen und bringt deren Arbeits-

wucht von $\frac{T\vartheta_1^2}{2}$ auf $\frac{T\vartheta^2}{2}$, so dafs sein muß:

$$\frac{T}{2} (\vartheta^2 - \vartheta_1^2) = q r \pi \left[\frac{1}{2} (1 - \cos \alpha) - \frac{\alpha^0}{180^0} \right].$$

Hieraus ergibt sich

$$3) \quad \vartheta^2 = \vartheta_1^2 - \frac{2 q r \pi}{T} \left[\frac{\alpha^0}{180^0} - \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha) \right],$$

woraus sich die Winkelgeschwindigkeit ϑ für jedes α leicht berechnet.

Setzt man für α den Supplementwinkel $180^0 - \alpha$ ein, so wandelt sich die Formel in

$$3^*) \quad \vartheta^2 = \vartheta_1^2 + \frac{2 q r \pi}{T} \left[\frac{\alpha^0}{180^0} - \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha) \right],$$

so daß die Summe der Quadrate der Winkelgeschwindigkeiten für Supplementstellungen stets gleich $2\vartheta_1^2$ ist. Daraus folgt, daß in den Stellungen A, B, C und D , d. h. für $0^0, 90^0, 180^0$ und -90^0 die Winkelgeschwindigkeit gleich ϑ_1 ist, was sich bei Einsetzung dieser Winkel auch bestätigt. In der statisch günstigsten Stellung ist also die Geschwindigkeit dieselbe, wie in der Totpunktstellung.

Auch für die Minimal- und Maximalstellung ist die Summe der Quadrate der Winkelgeschwindigkeiten gleich $2\vartheta_1^2$, also

$$\vartheta_{\max}^2 + \vartheta_{\min}^2 = 2\vartheta_1^2,$$

oder

$$4) \quad \vartheta_1^2 = \frac{\vartheta_{\max}^2 + \vartheta_{\min}^2}{2}.$$

Folglich: Das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit in der Totpunktstellung ist das arithmetische Mittel der Quadrate der Maximal- und Minimalgeschwindigkeit.

424) Noch klarer tritt das Resultat hervor, wenn man beide Seiten der Gleichung 4) mit $\frac{T}{2}$ multipliziert. Es ergibt sich

$$5) \quad \frac{T\vartheta_1^2}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{T}{2} \vartheta_{\max}^2 + \frac{T}{2} \vartheta_{\min}^2 \right],$$

oder

$$5^*) \quad A_1 = \frac{A_{\max} + A_{\min}}{2},$$

d. h. die Arbeitswucht der Schwungmassen in der Totpunktstellung ist das arithmetische Mittel der Arbeitswuchten in den Stellungen der Maximal- und Minimalgeschwindigkeit.

Dasselbe gilt von den Stellungen $\pm 90^\circ$. Nach den Bemerkungen zu den Gleichungen 3) ist A_1 auch das arithmetische Mittel der Arbeitswuchten für jedes Paar der dort besprochenen Supplementstellungen.

425) **Aufgabe.** Die Maximal- und die Minimalgeschwindigkeit sollen aus der Totpunktgeschwindigkeit berechnet werden.

Auflösung. Beide berechnen sich nach 3) und 3*) aus der Gleichung

$$\vartheta^2 = \vartheta_1^2 \pm \frac{2r\pi q}{T} \left[\frac{39^\circ 32' 30''}{180^\circ} - \frac{1}{2} (1 - \cos 39^\circ 32' 30'') \right],$$

also:

$$6) \quad \begin{cases} \vartheta_{\max} = \sqrt{\vartheta_1^2 + \frac{0,6614 qr}{T}}, \\ \vartheta_{\min} = \sqrt{\vartheta_1^2 - \frac{0,6614 qr}{T}}. \end{cases}$$

Folgerungen: Die gesamte Schwankung ist:

$$\vartheta_{\max} - \vartheta_{\min} = \sqrt{\vartheta_1^2 + \frac{0,6614 qr}{T}} - \sqrt{\vartheta_1^2 - \frac{0,6614 qr}{T}}.$$

Aus 6) folgt

$$7) \quad \vartheta_{\max}^2 - \vartheta_{\min}^2 = 1,3228 \frac{qr}{T}$$

(was unabhängig von ϑ_1 ist), oder wenn man beiderseits mit $\frac{T}{2}$ multipliziert:

$$\frac{T}{2} \vartheta_{\max}^2 - \frac{T}{2} \vartheta_{\min}^2 = 0,6614 qr,$$

d. h.

$$8) \quad A_{\max} - A_{\min} = 0,6614 qr = 0,6614 M.$$

Also: Die Arbeitswucht, die von den Schwungmassen in der Beschleunigungsperiode aufgenommen und in der Verlangsamungsperiode wieder abgegeben wird, ist gleich dem 0,6614-fachen des Lastmomentes, oder etwa gleich $\frac{2}{3}$ des Lastmomentes. Die Größe der Schwungmasse, die Größe ihres Trägheitsmomentes, die mittlere Geschwindigkeit und die mittlere Arbeitswucht der Schwungmasse sind dabei vollständig gleichgültig. Die Arbeitsaufnahme eines Schwungrades ist also nur von dem Lastmoment abhängig.

426) Soll das Schwungrad über die Minimalstelle wirklich hinauskommen, so muß nach Gleichung 7), in der für ϑ_{\min} der Grenzwert Null einzusetzen ist,

$$\vartheta_{\max} > \sqrt{1,3228 \frac{qr}{T}}$$

sein. Die kleinste denkbare Maximalgeschwindigkeit ist also

$$\vartheta'_{\max} = \sqrt{1,3228 \frac{qr}{T}}.$$

Die kleinste denkbare Totpunktgeschwindigkeit ist also nach 6) zu berechnen aus

$$\vartheta_1^2 = \vartheta_{\max}^2 - 0,6614 \frac{qr}{T} = 1,3228 \frac{qr}{T} - 0,6614 \frac{qr}{T}.$$

Dafs sie mindestens

$$\vartheta_1 = \sqrt{0,6614 \frac{qr}{T}}$$

sein muß, ergibt sich auch aus der zweiten der Formeln 6), die sonst Imaginäres ergeben würde.

Man erkennt daraus, dafs bei gegebenem Lastmoment und gegebener Schwungmasse die Maximalgeschwindigkeit und ebenso die Totpunktgeschwindigkeit unter gewisse Minimalwerte nicht herabsinken dürfen. Will man jedoch mit geringerer Maximalgeschwindigkeit arbeiten, so muß man das Trägheitsmoment T der Schwungmasse vergrößern, denn das gestattete Minimum ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente. Schon daraus wird man den Schluß ziehen, dafs man grofse Schwungmassen anwenden muß, wenn man der Maschine möglichst geringe Tourenzahl bei einiger Regelmäßigkeit des Ganges geben will.

Man sieht ferner, dafs die grösste mögliche Schwankung diejenige zwischen dem kleinsten Maximalwerte und Null sein wird, also $\sqrt{1,3228 \frac{qr}{T}}$, was sich später noch deutlicher zeigen wird.

427) In der Technik berechnet man die Schwankungen vom Mittelwerte der Maximal- und Minimalgeschwindigkeit aus, der ϑ_m sein mag. Dem wird genügt, wenn man

$$9) \quad \begin{cases} \vartheta_{\max} = \vartheta_m + \frac{\vartheta_m}{n} = \vartheta_m \left(1 + \frac{1}{n}\right), \\ \vartheta_{\min} = \vartheta_m - \frac{\vartheta_m}{n} = \vartheta_m \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

setzt, woraus eben folgt

$$\vartheta_m = \frac{\vartheta_{\max} + \vartheta_{\min}}{2}.$$

Man bezeichnet dann $\frac{1}{n}$ als die Schwankung (vom Mittelwerte aus gerechnet) und n als den Schwankungskoeffizienten.

Durch Addition und Subtraktion folgt aus den Gleichungen 9)

$$\vartheta_{\max} + \vartheta_{\min} = 2 \vartheta_m,$$

$$\vartheta_{\max} - \vartheta_{\min} = \frac{2 \vartheta_m}{n},$$

und durch Multiplikation erhält man aus den letzteren

$$10) \quad \vartheta_{\max}^2 - \vartheta_{\min}^2 = \frac{4 \vartheta_m^2}{n}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit 7), so findet man

$$\frac{4 \vartheta_m^2}{n} = 1,3228 \frac{qr}{T},$$

oder

$$11) \quad \frac{\vartheta_m^2}{n} = 0,3307 \frac{qr}{T} = 0,3307 \frac{M}{T}.$$

Sind also gegeben das Widerstandsmoment M , das Trägheitsmoment T und die Mittelgeschwindigkeit $\vartheta_m = \frac{\vartheta_{\max} + \vartheta_{\min}}{2}$, so läßt sich die Schwankung $\frac{1}{n}$ leicht berechnen.

428) Für den Techniker ist die wichtigste Aufgabe die, für eine zulässige Schwankung $\frac{1}{n}$ die dazu nötige Schwungmasse zu bestimmen. Ihr Trägheitsmoment ergibt sich aus

$$11*) \quad T = \frac{0,3307 M n}{\vartheta_m^2}.$$

Aus

$$11**) \quad \frac{1}{n} = \frac{0,3307 M}{\vartheta_m^2 T}$$

folgt ohne weiteres, daß die Schwankung umgekehrt proportional dem Trägheitsmomente und dem Quadrate der Mittelgeschwindigkeit ϑ_m ist, welche letztere jedoch nicht mit der mittleren Geschwindigkeit in Bezug auf die Zeit verwechselt werden darf. Man ist trotzdem berechtigt, daraus abzulesen, daß man bei großer Umdrehungsgeschwindigkeit auch mit einem

kleineren Schwungrade große Regelmäßigkeit des Ganges erzielen kann. Der Ausschlag $\frac{\vartheta_m}{n}$ wird in jedem Falle $\frac{0,3307 M}{\vartheta_m T}$.

429) **Aufgabe.** Wie unterscheidet sich die Mittelgeschwindigkeit ϑ_m von der Totpunktgeschwindigkeit ϑ_1 ?

Auflösung. Es war

$$\vartheta_1^2 = \frac{\vartheta_{\max}^2 + \vartheta_{\min}^2}{2} = \frac{\vartheta_m^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \vartheta_m^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}{2} = \vartheta_m^2 \left[1 + \frac{1}{n^2}\right],$$

also

$$12) \quad \vartheta_1 = \vartheta_m \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}.$$

Die Totpunktgeschwindigkeit ist also stets ein wenig größer, als der Mittelwert ϑ_m . Ist z. B. die Schwankung, von diesem aus gerechnet, $\frac{1}{50}$, so ist

$$\vartheta_1 = \vartheta_m \sqrt{1 + \frac{1}{2500}} \approx \vartheta_m \left(1 + \frac{1}{5000}\right) \approx 1,0002 \vartheta_m.$$

Bei großen Geschwindigkeiten darf man also Totpunktgeschwindigkeit und Mittelgeschwindigkeit zur Not mit einander vertauschen, bei geringer Umdrehungsgeschwindigkeit aber nicht. Die Unterschiede können sogar sehr groß werden. Bei der kleinsten möglichen Maximalgeschwindigkeit und der zugehörigen Minimalgeschwindigkeit Null z. B. ist die Mittelgeschwindigkeit $\vartheta_m = \frac{1}{2} \sqrt{1,3228 \frac{qr}{T}}$, die Totpunktgeschwindigkeit dagegen $\vartheta_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 1,3228 \frac{qr}{T}}$, so daß sich beide verhalten wie $\frac{1}{2} : \sqrt{\frac{1}{2}}$, oder wie $1 : \sqrt{2}$, also etwa wie $1 : 1,41$, wobei die Vertauschung doch wohl etwas bedenklich sein dürfte.

Diese Bemerkung soll nur dazu dienen, auf die Unzulässigkeit des Verfahrens aufmerksam zu machen, dessen sich einige Lehrbücher bedienen, wenn sie solche Vertauschungen ohne jede Vorsichtsmaßregel vornehmen.

Nach Gleichung 11**) wird nun allerdings bei großem ϑ_m die Schwankung $\frac{1}{n}$ sehr klein, der Unterschied zwischen mittlerer Geschwindigkeit, Mittelgeschwindigkeit und Totpunktgeschwindigkeit ebenfalls klein, jedenfalls weit kleiner als Unterschied $\frac{\vartheta_m}{n}$ oder $\frac{0,3307 M}{\vartheta_m T}$, der den Gesamtausschlag vom Mittelwerte aus bezeichnet. Bei größerer Umdrehungszahl also wird es für technische Zwecke berechtigt

sein, ϑ_1 , ϑ_m und die mittlere Geschwindigkeit in Bezug auf die Zeit etwa ϑ_0 , mit einander zu verwechseln. Dann ist man noch in der Lage, Pferdestärken und Tourenzahl (pro Minute) einzuführen.

430) **Aufgabe.** Welche Beziehung findet zwischen dem statischen Momente des Widerstandes $M = qr$, der Anzahl von Pferdestärken N und der Tourenzahl m statt?

Auflösung. Bei jeder Umdrehung wird die Last q um $2r\pi$ gehoben, also die Arbeit $2r\pi q$ geleistet, die Arbeit pro Sekunde ist also bei m minutlichen Umdrehungen $\frac{2r\pi q m}{60}$, also, wenn z. B. in Meterkilogrammen gerechnet war, $N = \frac{2r\pi q m}{60 \cdot 75}$ Pferdestärken. Demnach ist das Lastmoment

$$13) \quad M = qr = \frac{75 \cdot 60 N}{2\pi m}$$

zu setzen. Die mittlere* Umdrehungsgeschwindigkeit aber ist jetzt

$$\vartheta_0 = \frac{2r\pi m}{60}.$$

Darf man nun ϑ_m und ϑ_0 verwechseln, so geht Gleichung 11**) über in

$$\frac{1}{n} = \frac{0,3307 \frac{75 \cdot 60 \cdot N}{2\pi m}}{\frac{4r^2\pi^2 m^2}{3600} \cdot T},$$

woraus folgt:

$$14) \quad n = \frac{T m^3}{21600 N},$$

oder auch

$$15) \quad T = \frac{21600 N n}{m^3}.$$

Dies ist die auf den technischen Hochschulen gebräuchliche Formel*). Schon sie ist streng genommen nur eine Annäherungsformel für den

*) Die höhere Rechnung würde für die halbe Umlaufszeit die Formel

$$t = \frac{1}{\vartheta_1} \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + \frac{2qr}{T\vartheta_1^2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \bar{\alpha} \right)}}$$

ergeben. Auf die Berechnung der wirklichen mittleren Geschwindigkeit $\vartheta_m = \frac{\pi}{t}$ wird jedoch auch auf der Hochschule wegen der Schwierigkeit der Auswertung des Integrals verzichtet. Vergl. meinen Aufsatz in der Zeitschr. d. V. deutscher Ingenieure, Bd. 34, S. 30 u. s. w.

Fall großer Geschwindigkeiten. Weit komplizierter würde die Rechnung werden, wenn man statt der Volldruckmaschine die Expansionsmaschine behandeln wollte. Immerhin würde die Berechnung von hohem Interesse sein, sowohl bei Zugrundlegung des Mariotteschen Diagramms (gleichseitige Hyperbel) als des adiabatischen Diagramms für atmosphärische Luft bzw. gesättigte Dämpfe. Hier sind graphische Darstellungen vorzuziehen, wie sie am Schlusse zur Sprache kommen sollen.

431) Aus Gleichung 14) läßt sich folgendes ablesen:

Die Schwankung der Maschine ist direkt proportional der Anzahl der Pferdestärken, umgekehrt proportional der Schwungmasse und umgekehrt proportional der dritten Potenz der Tourenzahl.

Was diese dritte Potenz anbetrifft, so scheint darin ein Widerspruch gegen die Formel 11) zu liegen, nach der die Schwankung dem Quadrate der Geschwindigkeit, also auch dem der Tourenzahl, umgekehrt proportional war. Der Widerspruch ist jedoch nur ein scheinbarer, denn wenn die Maschine doppelt so schnell (bei gleicher Belastung) geht, wird auch die Anzahl der Pferdestärken verdoppelt, so daß der Faktor $\frac{1}{2^3}$ auf $\frac{2}{2^3}$ oder $\frac{1}{2^2}$ reduziert wird. Man erkennt wiederum, daß man bei doppelter Umdrehungsgeschwindigkeit (und doppelter Anzahl der Pferdestärken) mit dem vierten Teile des Trägheitsmomentes, dieselbe Regelmäßigkeit erzielt.

Darf man das Trägheitsmoment der Last q vernachlässigen, was stets gestattet ist, sobald es sich um einen nur passiv wirkenden Widerstand handelt (z. B. um die Reibung, die niemals eine entgegengesetzte Bewegung der Maschine aktiv hervorrufen kann) und will man beim Schwungrade nur den Ring, nicht aber die Radarme, die Achse und die Nabe berücksichtigen, so kann man Aufgaben der folgenden Art ohne weiteres lösen:

432) **Aufgabe.** Ein Schwungring habe den Radius R . Wie schwer ist er zu nehmen, damit bei N Pferdestärken und m minutlichen Touren die Schwankungen der Maschine, vom Mittelwerte aus gerechnet, den Betrag $\frac{1}{n}$ nicht überschreiten?

Auflösung. Ist P das Gewicht des Rades, so ist $\frac{P}{g}$ seine Masse, $\frac{P}{g} \cdot R^2 = \frac{P}{9,81} R^2$ sein Trägheitsmoment, wobei in Metern und Kilogrammen zu rechnen ist. In Formel 15) eingesetzt, giebt dies

$$\frac{P}{g} R^2 = \frac{21\,600 N n}{m^3},$$

also ist das gesuchte Gewicht des Ringes

$$P = \frac{9,81 \cdot 21\,600 \cdot Nn}{R^2 m^3}.$$

Leistet z. B. die Maschine 100 Pferdestärken bei 60 Touren, und soll die Schwankung, vom Mittelwerte aus gerechnet, $\frac{1}{100}$ nicht übersteigen, so ergibt sich als Gewicht des Ringes, wenn der Radius $R = 2$ m sein soll,

$$R = \frac{9,81 \cdot 21\,600 \cdot 100 \cdot 100}{4 \cdot 60^3} = \frac{9,81 \cdot 216\,000\,000}{4 \cdot 216\,000} = 2452 \text{ kg.}$$

Die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Maschine ist dabei 2π , die Maximalgeschwindigkeit $2\pi \left(1 + \frac{1}{100}\right)$, die Minimalgeschwindigkeit $2\pi \left(1 - \frac{1}{100}\right)$, wobei bezüglich des Ausdrucks mittlere Geschwindigkeit von der oben erörterten Erlaubnis zur angenäherten Berechnung Gebrauch gemacht worden ist.

Bei dieser Aufgabe war der Radius des Ringes schlechthin gleich R angenommen. In Wahrheit handelt es sich um einen äußeren Radius R und einen inneren Radius R_1 . (Das vorige R ist nicht etwa das arithmetische Mittel der beiden jetzigen Radien, sondern sein Quadrat ist das Mittel der jetzigen Radienquadrate.) Also:

433) **Aufgabe.** Dieselbe Aufgabe für einen Schwungring mit rechteckigem Querschnitte und den Radien R und R_1 zu lösen.

Auflösung. Das Trägheitsmoment ist jetzt:

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{R^2 + R_1^2}{2}.$$

Einsetzung in Gleichung 15) giebt als Gewicht des Ringes

$$P = \frac{2 \cdot 9,81 \cdot 21\,600 Nn}{m^3 (R^2 + R_1^2)}.$$

Sind z. B. für das vorige Zahlenbeispiel die beiden Radien $R = 2,3$ m und $R_1 = 2$ m, so ergibt sich unter denselben Bedingungen das Gewicht 2112 kg.

434) **Aufgabe.** Ein Schwungring habe den Radius R und das Gewicht P . Welche Schwankung macht die Maschine bei N Pferdestärken und m minutlichen Umdrehungen?

Auflösung.

$$\frac{1}{n} = \frac{9,81 \cdot 21\,600 \cdot N}{PR^2 m^3}.$$

Ist z. B. $P = 5000$ kg, $R = 2$ m, Tourenzahl $m = 60$ und Zahl der Pferdestärken $N = 100$, so folgt

$$\frac{1}{n} = \frac{9,81 \cdot 21600 \cdot 100}{5000 \cdot 4 \cdot 60^2} = \sim \frac{1}{204}.$$

Berücksichtigt man dagegen beide Radien, so lautet die Lösung

$$\frac{1}{n} = \frac{2 \cdot 9,81 \cdot 21600 N}{P(R^2 + R_1^2) m^3}.$$

Dasselbe Beispiel, jedoch mit $R = 2,3$ und $R_1 = 2$ giebt als Schwankung $\frac{1}{237}$.

Genauer pflegt die Praxis nicht zu rechnen. Will man die Aufgaben durch Einrechnung der Radarme u. s. w. komplizierter machen, so stellen sich bei einfacherer Gestaltung dieser Teile Schwierigkeiten nicht in den Weg.

Endlich sei noch folgende Aufgabe gestellt:

435) **Aufgabe.** Eine Maschine leiste N Pferdestärken bei m minutlichen Umdrehungen. Wieviel Arbeit hat das Schwungrad in der günstigen Periode aufzunehmen und in der ungünstigen wieder abzugeben?

Auflösung. Nach Gleichung 8) war die aufzunehmende und abzugebende Arbeit

$$A_{\max} - A_{\min} = 0,6614 pr.$$

Nach Gleichung 13) war aber

$$qr = \frac{75 \cdot 60 N}{2\pi m}.$$

Folglich ist die Arbeitsaufnahme und Abgabe der Schwungmasse

$$A = 0,6614 \frac{75 \cdot 60 N}{2\pi m} = \sim 473,7 \frac{N}{m}.$$

Werden z. B. 100 Pferdestärken bei 50 Touren geleistet, so ist die Aufnahme und Abgabe von Arbeit

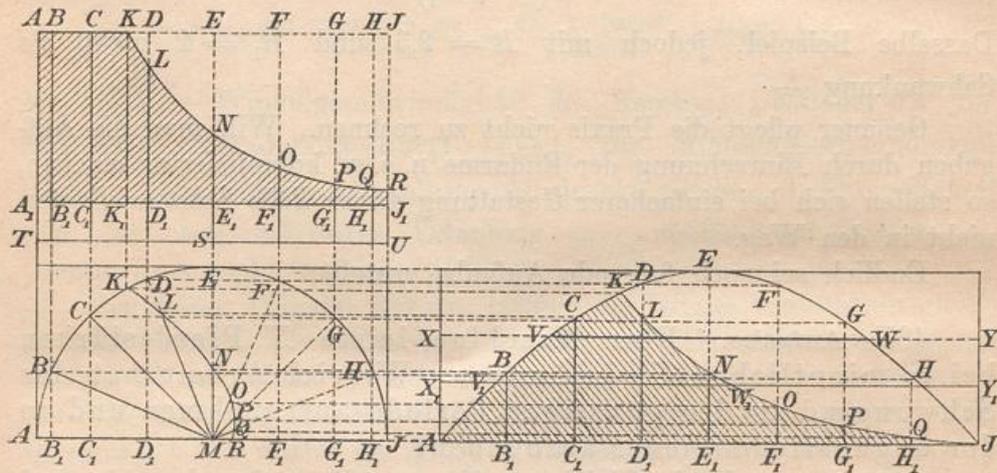
$$A = 473,7 \cdot \frac{100}{50} = 947,4 \text{ mkg},$$

wobei die Größe des Schwungrades, die der Schwankung u. s. w. ganz gleichgültig ist.

436) Ein leichtverständliches Diagramm für die Geschwindigkeitsverhältnisse des Schwungrades erhält man, indem man durch einen Punkt ein Strahlenbüschel legt und auf jedem Strahle die der entsprechenden Kurbelstellung zugehörige Geschwindigkeit aufträgt. Die Endpunkte geben die verlangte Diagrammkurve.

Durch ein anderes Diagramm (Fig. 287) läßt sich veranschaulichen, wie sich die Verhältnisse der Schwungradarbeit gestalten, wenn nicht von der Volldruckmaschine, sondern von der Expansionsmaschine die Rede ist, möge nun das Mariottesche Diagramm, oder das adiabatische für Druckluft oder Dämpfe, oder endlich ein beliebiges Indikatordiagramm zu Grunde gelegt werden.

Fig. 287.



In Figur 287 ist der Fall des Mariotteschen Diagramms und der der Volldruckmaschine zugleich behandelt.

Als Expansionsdiagramm ist dasjenige für $\frac{1}{4}$ Füllung gewählt, so daß $SN = \frac{1}{2} TA$, $UR = \frac{1}{4} TA$ ist und das Diagramm von einer gleichseitigen Hyperbel begrenzt wird. TU ist die Grundlinie, A_1J_1 die atmosphärische Linie des Diagramms. Die schraffierte Fläche giebt also den Überdruck an. Die Überdruckshöhe A_1A ist halb so groß, wie die Grundlinie des Diagramms gezeichnet worden, was bei der Willkürlichkeit des Maßstabes der Allgemeinheit keinen Eintrag thut. Ebenso groß ist der Radius des Kurbelkreises, von dem nur die Hälfte gezeichnet zu werden braucht.

Der Halbkreis ist durch die Punkte B, C, D, E, F, G, H in acht gleiche Teile geteilt. Rechts davon ist über der Geraden $AJ = r\pi$, die in derselben Weise eingeteilt ist, durch Horizontalprojektion der Kreispunkte auf die entsprechenden Lote die zugehörige Sinuskurve konstruiert. Diese bedeutet das auf die Peripherie übertragene Arbeitsdiagramm bei der Volldruckarbeit.

Angenommen XY sei die Horizontale, für die $AJYX$ gleich der Fläche der Sinuskurve ist, d. h. also $AX = \frac{2}{\pi} r$, so würde die Fläche VEW gleich der Summe der Flächen AXV und JYW sein. Das

Schwungrad würde also in der Überschufsperiode die durch VEW dargestellte Arbeit aufnehmen und in der Verlustperiode ebensoviel abgeben.

Handelt es sich dagegen um das Expansionsdiagramm, so ist folgendermaßen zu verfahren. Auf dem Radius MD des Kurbelkreises ist die Überdruckslinie D_1L als ML abzutragen und der nun gefundene Endpunkt L ist auf das Lot D_1D der Sinuslinie zu projizieren, was dort den Punkt L giebt. Ebenso ist mit den übrigen Radien des Kurbelkreises zu verfahren. Die neue Diagrammkurve für die Kurbelperipherie ist also von A bis K die vorige Sinuskurve, von dort ab aber tritt der Expansion entsprechend die Kurve $KLNOPQJ$ für diese ein. Die schraffierte Fläche des neuen Diagramms ist, da bei der Anwendung des Hebelgesetzes die Momente und die Arbeiten sich nicht ändern, gleich der des Expansionsdiagramms.

Berechnet man die letztere theoretisch oder mit Hilfe des Polarplanimeters, so findet man durch Multiplikation der Fläche mit $\frac{1}{r\pi}$ die Höhe AX_1 , die das Rechteck AJY_1X_1 der Diagrammfläche gleich macht. Jetzt giebt die Fläche $V_1W_1K = AX_1V_1 + JY_1W_1$ die Arbeit an, welche das Schwungrad in der Überschufs- und Verlustperiode aufzunehmen bzw. abzugeben hat.

Während bei der Volldruckarbeit die Verlängerung von XY den Kurbelkreis in den Punkten schneidet, wo das Moment der Kraft gleich dem der Last ist und zugleich das Minimum und Maximum der Winkelgeschwindigkeit stattfinden, hat man jetzt X_1Y_1 bis zu den Schnitten mit dem Kreise zu verlängern, um den Minimal- und Maximalpunkt (aber nicht den der Momentengleichheit zwischen Kraft und Last) zu finden.

Ist A die Überschufsarbeit, so hat man für diese Geschwindigkeiten die Gleichung

$$\frac{1}{2} T\vartheta_{\max}^2 - \frac{1}{2} T\vartheta_{\min}^2 = A$$

Fügt man noch die Geschwindigkeit der mittleren Arbeitswucht des Rades als ϑ ein (d. h. das Mittel der Grenzwerte), so geschieht dies durch die Gleichung

$$\frac{1}{2} T\vartheta_{\max}^2 + \frac{1}{2} T\vartheta_{\min}^2 = 2 T\frac{\vartheta^2}{2}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{1}{2} T\vartheta_{\max}^2 = \frac{1}{2} \left[2 T\frac{\vartheta^2}{2} + A \right],$$

$$\frac{1}{2} T\vartheta_{\min}^2 = \frac{1}{2} \left[2 T\frac{\vartheta^2}{2} - A \right].$$

Will man die Wirkung der Voreinströmung des Gegendampfes berücksichtigen, so hat man dessen Überdrucklinien am Ende des Expansionsdiagramms von dessen Drucklinien abzuziehen, was stellenweise auch Negatives geben kann.

In entsprechender Weise ist mit dem adiabatischen Diagramm für Druckluft, Heißluft oder Dämpfe zu verfahren.

Will man für die Kurbelbewegung nicht die Sinusversus-Bewegung als maßgebend annehmen, sondern die verschiedenen Lagen der Pleuelstange berücksichtigen, so hat man von der durch die Pleuelstange übertragenen Druckkraft die in der Richtung der Pleuelstange liegende Komponente zu bilden und von dieser die Tangentialkomponente zu bilden, die dann im Diagramm der Sinuslinie als Lot abzutragen ist.

So gewinnt man genaue graphische Darstellungen für die Arbeitsvorgänge am Schwungrade, während der exakten rechnerischen Durchführung unüberwindliche Integrationschwierigkeiten im Wege stehen, die nur durch Näherungsrechnungen umgangen werden können.

Die Behandlung der Fälle der Zweicylinder- und Dreicylindermaschinen soll dem Leser überlassen bleiben. Der rechnerische und der graphische Weg schließt sich dem für einfache Maschinen gegebenen genau an.

