



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Abschnitt VI. Anwendungen der lemniskatischen Abbildung auf die Bestimmung polarer Trägheitsmomente und polarer Momente erster Ordnung.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

Abschnitt VI.

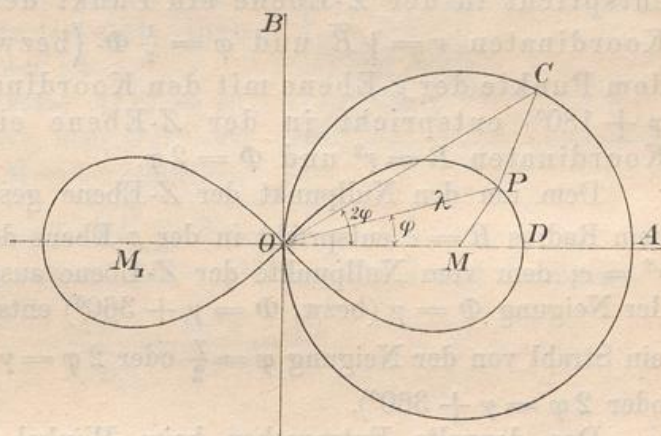
Anwendung der lemniskatischen Abbildung auf die Bestimmung polarer Trägheitsmomente und polarer Momente erster Ordnung.

218) In Nr. 142 wurde eine Konstruktion besprochen, die einen Kreis in eine Lemniskate verwandelt. Macht man die entsprechende Transformation mit allen Punkten der Ebene, und trägt man, um die Zeichnung nicht zu verwirren, das „Bild“ jedes Punktes in einer besonderen Zeichnungsebene ein, so ergeben sich für beide Ebenen interessante gegenseitige Beziehungen, die einen eigentümlichen Einblick in die höhere Mathematik und in die mathematische Physik geben und auch für den Techniker von Wichtigkeit sind.

Um das Bild P des Punktes C zu finden, hat man die mittlere Proportionale zwischen $OM = 1$ und OC als Winkelhalbierende einzutragen. Will man umgekehrt das Bild C zu P finden, so setze man auf die Seite OP des Dreiecks OMP das ähnliche Dreieck OPC .

219) Die erste Konstruktion verwandelt den Winkel $COM = \Phi = 2\varphi$ in den Winkel $POD = \varphi = \frac{\Phi}{2}$, den Radius $OC = R = r^2$ in den Radius $OP = \sqrt{OC} = r = \sqrt{R}$.

Fig. 162.



Die zweite verwandelt den Winkel φ in 2φ , den Radius r in r^2 .
 [Die erste entspricht der Moivreschen Formel

$$\sqrt{R}(\cos \Phi + i \sin \Phi) = \sqrt{R}(\cos \frac{1}{2} \Phi + i \sin \frac{1}{2} \Phi),$$

die zweite der Formel

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Wegen dieses Zusammenhanges soll die erste Transformation als die Abbildung $z = \sqrt{Z}$, die zweite als die Abbildung $Z = z^2$ bezeichnet werden.

Auf den Zusammenhang mit der Lehre von den komplexen Größen soll hier zu Gunsten der elementaren Darstellung nicht eingegangen werden. Die entsprechende Behandlung findet man in des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften“.]

220) Zwischen den Polarkoordinaten aller Punkte beider Ebenen, von denen die eine die Z -Ebene, die andere die z -Ebene heißt, finden jetzt folgende Beziehungen statt:

Dem Punkte mit den Koordinaten R und Φ (bezw. $\Phi + 360^\circ$) entspricht in der Z -Ebene ein Punkt der z -Ebene mit den Koordinaten $r = \sqrt{R}$ und $\varphi = \frac{1}{2} \Phi$ (bezw. $\varphi = \frac{1}{2} \Phi + 180^\circ$); dem Punkte der z -Ebene mit den Koordinaten r und φ (bezw. $\varphi + 180^\circ$) entspricht in der Z -Ebene ein Punkt mit den Koordinaten $R = r^2$ und $\Phi = 2\varphi$.

Dem um den Nullpunkt der Z -Ebene geschlagenen Kreise mit dem Radius $R = c$ entspricht in der z -Ebene der Kreis $r = \sqrt{c}$ oder $r^2 = c$; dem vom Nullpunkte der Z -Ebene ausgehenden Strahle von der Neigung $\Phi = \gamma$ (bezw. $\Phi = \gamma + 360^\circ$) entspricht in der z -Ebene ein Strahl von der Neigung $\varphi = \frac{\gamma}{2}$ oder $2\varphi = \gamma$ (bezw. $\varphi = \frac{\gamma}{2} + 180^\circ$ oder $2\varphi = \gamma + 360^\circ$).

Das doppelte Entsprechen beim Winkel giebt gewissermaßen die beiden Wurzelwerte an.

Umgekehrt geht jeder Kreis der z -Ebene, der mit Radius $r = c$ um den Nullpunkt geschlagen ist, über in einen Kreis $R = c^2$ oder $\sqrt{R} = c$ der Z -Ebene, jeder Strahl, der mit Neigung $\varphi = \gamma$ (bezw. $\gamma + 180^\circ$) vom Nullpunkte ausgeht, in einen Strahl $\Phi = 2\gamma$ oder $\frac{\Phi}{2} = \gamma$.

Jeder der genannten Kreise der Z -Ebene ist doppelt durchlaufen zu denken, wenn der der z -Ebene einmal durchlaufen wird, denn der Winkel 360° entspricht dem Winkel 180° . Die ganze Z -Ebene wird auf der Halbebene z dargestellt, die zweischichtig mit Punkten zu bedeckende Z -Ebene auf der ganzen einschichtigen z -Ebene.

Auf das zweifache Entsprechen soll nur noch aufmerksam gemacht werden, wenn es besonders nötig erscheint.

221) Jeder Punktfolge oder Curve der einen Ebene entspricht eine Curve der andern. In Polarkoordinaten entsprechen einander die Curven

$$f(R, \Phi) = 0 \quad \text{und} \quad f[(r^2), (2\varphi)] = 0,$$

$$f[(\sqrt{R}), (\frac{\Phi}{2})] = 0 \quad \text{und} \quad f(r, \varphi) = 0.$$

222) Wichtig ist nun Folgendes:

Jedem rechtwinkligen Flächenstücke $ABCD$ der Z -Ebene, welches von den besprochenen Kreisen und Geraden begrenzt wird, entspricht ein rechtwinkliges Flächenstück $A_1B_1C_1D_1$ der andern Ebene, und zwar wird behauptet, bei hinreichender Kleinheit seien beide „Rechtecke“ einander ähnlich, ihre Maßstäbe verhielten sich wie $2\varrho:1$, wo $\varrho = OA_1$, also $\varrho^2 = OA$ ist, ihre Flächen also wie $4\varrho^2:1$.

Beweis. Man setze $OA_1 = \varrho$, also $OA = \varrho^2$, $OB_1 = r$, also $OB = r^2$, den zum Radius $OM = 1$ gehörigen

Bogen $\widehat{E_1F_1} = \alpha$, also $\widehat{EF} = 2\alpha$,

so daß Bogen $A_1D_1 = \varrho\alpha$, $\widehat{AD} = \varrho^2 2\alpha = 2\varrho^2\alpha$ und demnach

$$\frac{\widehat{AD}}{\widehat{A_1D_1}} = \frac{2\varrho^2\alpha}{\varrho\alpha} = \frac{2\varrho}{1}$$

wird. Ebenso wird

$$\widehat{B_1C_1} = r\alpha, \quad \widehat{BC} = r^2 2\alpha = 2r^2\alpha,$$

folglich

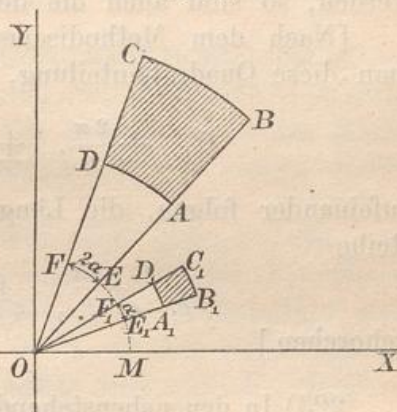
$$\frac{\widehat{BC}}{\widehat{B_1C_1}} = \frac{2r^2\alpha}{r\alpha} = \frac{2r}{1},$$

wofür, wenn die Dimensionen der Rechtecke unendlich klein sind, also für die Grenze $r = \varrho$ zu setzen ist, geschrieben werden kann

$$\frac{\widehat{BC}}{\widehat{B_1C_1}} = \frac{2\varrho}{1}.$$

Für die beiden Bogenpaare ist also das obige Verhältnis als richtig nachgewiesen.

Fig. 163.



Ferner ist

$$A_1 B_1 = r - \varrho, \text{ also } AB = r^2 - \varrho^2 = (r + \varrho)(r - \varrho),$$

demnach

$$\frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{r^2 - \varrho^2}{r - \varrho} = \frac{(r + \varrho)(r - \varrho)}{r - \varrho} = \frac{r + \varrho}{1}.$$

Bei unendlicher Kleinheit der Dimensionen strebt dieses Verhältnis der Größe $\frac{\varrho + \varrho}{1}$ oder $\frac{2\varrho}{1}$ zu, wie es oben behauptet war.

Weil bei unendlicher Kleinheit alle Rechtecksseiten sich wie $2\varrho:1$ verhalten, sind die sich entsprechenden kleinen Rechtecke beider Ebenen als ähnlich zu betrachten. Dürfen z. B. die kleinen „Rechtecke“ der einen Ebene als „Quadrate“ betrachtet werden, so sind auch die der andern als „Quadrate“ zu betrachten.

[Nach dem Methodischen Lehrbuch (Teil II, Anhang) erreicht man diese Quadrateinteilung, wenn die Strahlen unter den Winkeln

$$0, \pm \frac{2\pi}{n}, \pm \frac{4\pi}{n}, \pm \frac{6\pi}{n}, \pm \frac{8\pi}{n}, \dots$$

aufeinander folgen, die Längen der Radien aber der geometrischen Reihe

$$e, e^{\pm \frac{2\pi}{n}}, e^{\pm \frac{4\pi}{n}}, e^{\pm \frac{6\pi}{n}}, e^{\pm \frac{8\pi}{n}}, \dots$$

gehörchen.]

223) In den nebenstehenden Figuren sind die sich gegenseitig entsprechenden Quadratnetze für einfache Winkelteilungen 16 bzw. 8 dargestellt, wobei das doppelte Entsprechen klar hervortritt.

Fig. 164.

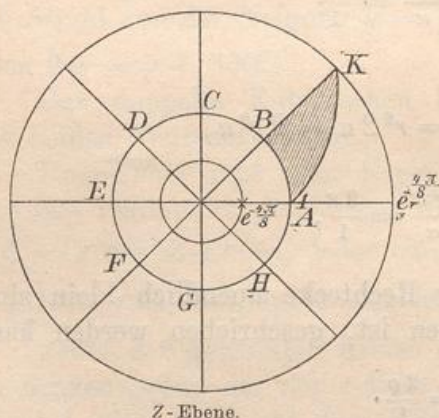


Fig. 165.

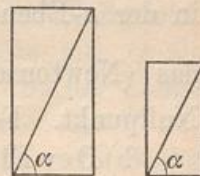


Die Diagonalkurven der Quadratnetze sind logarithmische Spiralen, die das Strahlenbüschel und die Kreisschar unter 45° durchsetzen, so

dafs auch die kleinen „Dreiecke“ AKB beider Ebenen einander ähnlich sind.

224) Bei ähnlichen „Rechtecken“ stimmen die Diagonalwinkel ebenfalls überein, und so schliesst man überhaupt, dafs einander entsprechende Winkel (mit Schenkeln von unendlich kleiner Länge) beider Ebenen übereinstimmen, so dafs die Beziehung eine winkeltreue oder isogonale ist, und dafs unendlich kleinen Dreiecken der einen Ebene unendlich kleine und ähnliche der andern entsprechen, kleinen geometrischen Gebilden ähnliche Gebilde der andern entsprechen. Man sagt, beide Ebenen seien in den kleinsten Teilen ähnlich, die Abbildung der einen auf die andere sei eine konforme.

Fig. 166.



Wie man nun ein Gemälde mit Hülfe eines Quadratnetzes vergrößert oder verkleinert wiedergeben kann, so kann man mit Hülfe der hier besprochenen Quadratnetze zu den Gebilden der einen Ebene mit beliebiger Genauigkeit die entsprechenden der andern Ebene konstruieren.

Das Vergrößerungsverhältnis ist, wie oben gezeigt wurde, für jede Stelle $2\varrho : 1$, wo ϱ den Abstand des kleinen Gebildes der z -Ebene vom Nullpunkte bedeutet. In der Umgebung des Nullpunktes wird es zu $0 : 1$, im unendlichen Bereiche zu $\infty : 1$, so dafs beide Bereiche Ausnahmestellung einnehmen. Im Nullpunkte hört auch die „Ähnlichkeit“ auf, da dort 2γ und γ einander entsprechen.

225) In technischer und mechanischer Hinsicht ist nun Folgendes von Wichtigkeit:

Jedem Flächenelemente f der z -Ebene, welches die Entfernung ϱ vom Nullpunkte hat, entspricht in der Z -Ebene ein solches von der Grösse $4\varrho^2 f$, jeder Fläche $F = \sum f$ der ersteren entspricht also in der letzteren eine Fläche vom Inhalte $F_1 = \sum 4\varrho^2 f = 4 \sum f \varrho^2$. Letzterer Ausdruck ist aber das vierfache polare Trägheitsmoment des Flächenstückes F in Bezug auf den Nullpunkt. Folglich gilt der wichtige Satz:

a) Der Flächeninhalt jedes Gebildes der Z -Ebene ist viermal so groß, wie das Trägheitsmoment des entsprechenden Gebildes der z -Ebene in Bezug auf den Nullpunkt.

226) Jedem Flächenstück f_1 der Z -Ebene entspricht ein solches von der Grösse $f = \frac{f_1}{4\varrho^2} = \frac{f_1}{4\varrho_1^2}$ in der z -Ebene, wo ϱ_1 der Abstand

des ersteren Gebildes vom Nullpunkte ist. Jeder Fläche $F_1 = \sum f_1$ der Z -Ebene entspricht also eine solche von der Größe

$$F = \sum \frac{f_1}{4 \varrho_1} = \frac{1}{4} \sum \frac{f_1}{\varrho_1}$$

in der z -Ebene. Den Ausdruck $\sum \frac{f_1}{\varrho_1}$ deutet aber die Mechanik als das (Newtonsche) Potential der Fläche $\sum f_1$ in Bezug auf den Nullpunkt. Folglich gilt der Satz:

b) Der Flächeninhalt jedes Gebildes der z -Ebene ist gleich dem vierten Teile des (Newtonschen) Potentials der entsprechenden Fläche der Z -Ebene in Bezug auf den Nullpunkt.

227) Jedem Kurvenelemente s der z -Ebene entspricht in der Z -Ebene ein solches von der Länge $2 \varrho s$, der Kurve von der Länge $\sum s$ also eine solche von der Länge $\sum 2 \varrho s = 2 \sum \varrho s$ in der Z -Ebene. Der Ausdruck $\sum \varrho s$ ist aber das Polarmoment erster Ordnung der Kurve $\sum s$ in Bezug auf den Nullpunkt. Folglich:

c) Die Länge jeder Kurve der Z -Ebene ist gleich dem doppelten Polarmomente erster Ordnung der entsprechenden Kurve der z -Ebene in Bezug auf den Nullpunkt.

228) Ebenso entspricht jedem Kurvenelemente s_1 der Z -Ebene in der z -Ebene ein solches von der Länge $\frac{s_1}{2 \varrho} = \frac{s_1}{2 \sqrt{\varrho_1}}$, so daß $\sum s_1$ übergeht in $\frac{1}{2} \sum \frac{s_1}{\sqrt{\varrho_1}}$. Auch dieser Ausdruck hat eine Potentialbedeutung für ein gewisses anderes Anziehungsgesetz (als das Newtonsche), soll aber hier nicht untersucht werden.

Ebenso soll die unter b) genannte Potentialbeziehung erst im nächsten Bande bei den Potentialbetrachtungen zur Sprache kommen.

Aus diesen Beziehungen ergibt sich eine Fülle der interessantesten Resultate, sobald man weiß, welche Kurven beider Ebenen einander entsprechen, denn es werden sich noch zahlreiche andere Anwendungen für die Wärmetheorie, Elektrizitätslehre, Hydrodynamik, Kartographie und Kinematik anschließen.

229) **Beispiel zu a.** Der Halbkreisfläche mit Radius r und Mittelpunkt O der z -Ebene entspricht in der Z -Ebene ein ganzer Kreis vom Radius r^2 und vom Inhalte $r^4 \pi$, folglich ist der vierte

Teil davon oder $\frac{r^4\pi}{4}$ das Trägheitsmoment des Halbkreises in Bezug auf den Nullpunkt.

Beispiel zu b. Der Kreisfläche mit Radius r_1 und Mittelpunkt O in der Z -Ebene entspricht in der z -Ebene ein Halbkreis vom Radius $\sqrt{r_1}$ und vom Inhalte $\frac{1}{2}(\sqrt{r_1})^2\pi = \frac{r_1\pi}{2}$. Das Vierfache, also $2r_1\pi$, ist demnach das Potential jener Kreisfläche in Bezug auf den Nullpunkt.

Beispiel zu c. Der Halbkreislinie $r\pi$ der z -Ebene mit O als Mittelpunkt entspricht in der Z -Ebene eine Kreislinie von der Länge $2(r^2)\pi = 2r^2\pi$. Demnach ist die Hälfte davon, oder $r^2\pi$, das Polarmoment erster Ordnung der Halbkreislinie vom Radius r in Bezug auf den Nullpunkt.

Jetzt einige Aufgaben über das gegenseitige Entsprechen von Kurven.

230) **Aufgabe.** In der Z -Ebene sei das von horizontalen und vertikalen Geraden gebildete Quadratnetz gezeichnet. Welches Quadratnetz entspricht diesem in der z -Ebene?

Auflösung. Der Geraden $X = a$ oder $R \cos \Phi = a$ entspricht die Kurve $r^2 \cos 2\varphi = a$ oder $r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = a$ oder $x^2 - y^2 = a$, oder

$$\frac{x^2}{(\sqrt{a})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{a})^2} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, die durch die Punkte $\pm \sqrt{a}$ der x -Achse geht.

Der Geraden $Y = b$ oder $R \sin \Phi = b$ entspricht die Kurve $r^2 \sin 2\varphi = b$ oder $2r \sin \varphi r \cos \varphi = b$ oder $2xy = b$, wofür man schreiben kann

$$xy = \frac{b}{2}.$$

Dies ist eine gleichseitige Hyperbel mit dem konstanten Asymptotenrechteck $\frac{b}{2}$, deren Asymptoten in die x - und y -Achse fallen.

Sind die Geraden der Z -Ebene der Reihe nach

$$X = 0, a, 2a, 3a, 4a, \dots$$

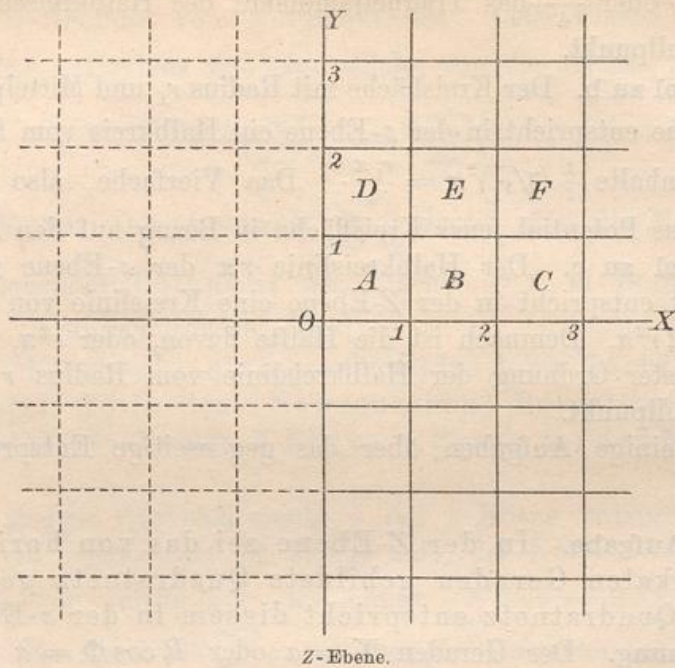
$$Y = 0, a, 2a, 3a, 4a, \dots,$$

so gehen die Hyperbeln auf der X -Achse bezw. der Geraden von der Neigung 45° durch Punkte, die von O die Abstände

$$0, \sqrt{a}, \sqrt{2a}, \sqrt{3a}, \sqrt{4a}, \dots$$

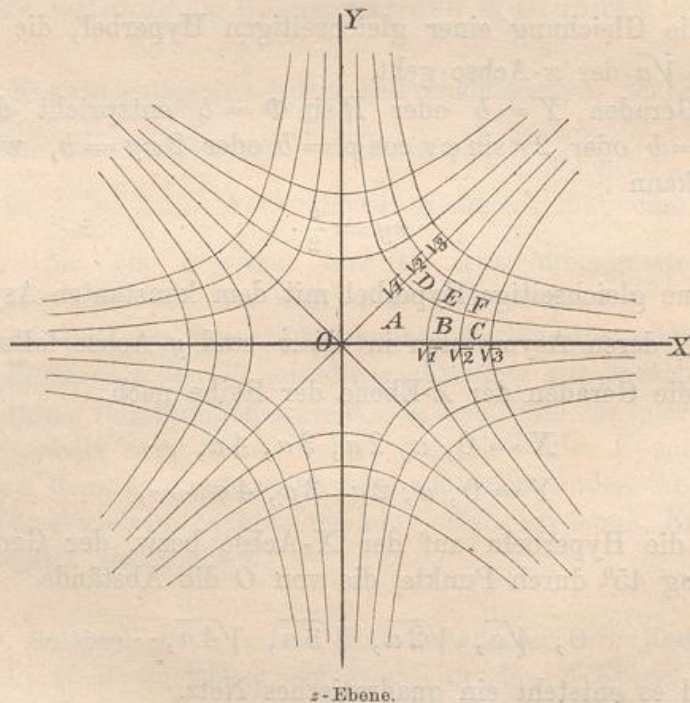
haben, und es entsteht ein quadratisches Netz.

Fig. 167.



231) Für $a = 1$ ist dieses gegenseitige Entsprechen in den Figuren 167 und 168 dargestellt. Dort hat jedes Quadrat den Inhalt 1, folglich:

Fig. 168.



Jedes der hyperbolischen Quadrate der Fig. 168 hat in Bezug auf O das polare Trägheitsmoment $T_p = \frac{1}{4}$.

Jede Quadratseite der Z -Ebene hat die Länge 1, folglich:

Jede Seite der hyperbolischen Quadrate hat in Bezug auf den Nullpunkt das Polarmoment erster Ordnung $M_p = \frac{1}{2}$.

232) Aus den Beziehungen $X = x^2 - y^2$ und $Y = 2xy$ folgt ferner der

Satz: Jeder Kurve $f(XY) = 0$ der Z -Ebene entspricht in der z -Ebene eine Kurve $f[(x^2 - y^2), (2xy)] = 0$.

Da aus jenen Beziehungen folgende sich ergeben:

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} - X}{2}},$$

so folgt der entsprechende

Satz: Jeder Kurve $f(xy) = 0$ der z -Ebene entspricht in der Z -Ebene eine Kurve

$$f\left[\sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} - X}{2}}\right] = 0.$$

233) **Aufgabe.** Was entspricht der Geraden

$$\frac{Y}{X-a} = A = \tan \alpha$$

durch den Punkt a der Z -Ebene?

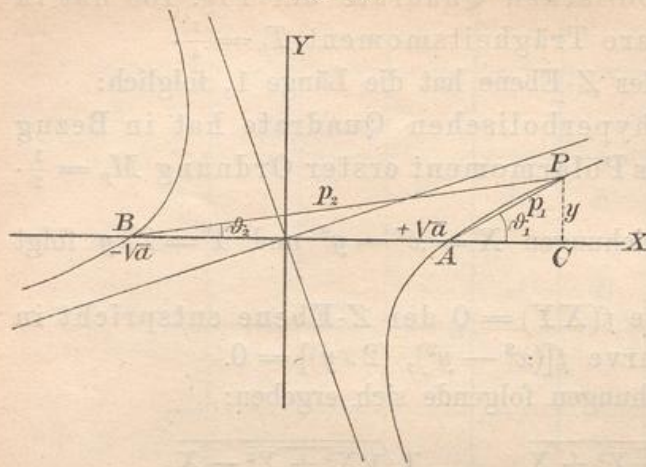
Auflösung. Ihr entspricht die Kurve

$$\frac{2xy}{x^2 - y^2 - a} = A, \quad \text{oder} \quad x^2 - y^2 - \frac{2}{A}xy = a.$$

Setzt man zugleich $-x$ und $-y$ statt x und y ein, so ändert sich nichts, so daß es sich um die Mittelpunktsgleichung eines Kegelschnitts handelt, der, weil er unendlich ferne Punkte enthält, eine Hyperbel sein muß. Nun liegen aber die unendlich fernen Punkte der Geraden auch von O aus gesehen in den Richtungen α und $\alpha + 180^\circ$, folglich die der Hyperbel, von O aus gesehen, in den Richtungen $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\alpha}{2} + 90^\circ$. Dies sind also die Asymptotenrichtungen, und da sie auf einander senkrecht stehen, handelt es sich wieder um eine gleichseitige Hyperbel.

Folgerung: Jedem schrägen Quadratnetz in der Z -Ebene entspricht ein schräges Quadratnetz gleichseitiger Hyperbeln.

Fig. 169.



Ferner: Die isogonalen Trajektorien jeder solchen Hyperbelschar sind wiederum gleichseitige Hyperbeln.

234) Für jede solche Hyperbel besteht eine wichtige Winkelbeziehung. Verbindet man nämlich einen beliebigen Punkt P der Kurve mit den Schnit-

tpunkten $\pm \sqrt{a}$ auf der X -Achse, so folgt für die Neigungswinkel ϑ_1 und ϑ_2 der Verbindungslinien p_1 und p_2 Folgendes:

$$\tan \vartheta_1 = \frac{CP}{AC} = \frac{y}{x - \sqrt{a}}, \quad \tan \vartheta_2 = \frac{CP}{BC} = \frac{y}{x + \sqrt{a}},$$

folglich

$$\tan(\vartheta_1 + \vartheta_2) = \frac{\tan \vartheta_1 + \tan \vartheta_2}{1 - \tan \vartheta_1 \tan \vartheta_2} = \frac{\frac{y}{x - \sqrt{a}} + \frac{y}{x + \sqrt{a}}}{1 - \frac{y}{x - \sqrt{a}} \cdot \frac{y}{x + \sqrt{a}}} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a}.$$

Nach Obigem ist aber letzteres gleich A oder gleich $\tan \alpha$, es folgt also

$$\tan(\vartheta_1 + \vartheta_2) = \tan \alpha,$$

folglich auch

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \alpha.$$

Also, wenn man die Geraden p_1 und p_2 als Radii vectores (nicht mit den gewöhnlichen Brennstrahlen zu verwechseln) bezeichnen will:

Für die gleichseitige Hyperbel ist die Winkelsumme der Radii vectores konstant.

Jetzt kann man sich kurz folgendermaßen ausdrücken:

Der Geraden $\Theta = \gamma$ durch den Punkt a der Z -Ebene entspricht die gleichseitige Hyperbel $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \gamma$ durch die Punkte $\pm \sqrt{a}$ der z -Ebene.

Dem Strahlenbüschel durch den Punkt a , dessen Neigungswinkel durch $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$ gegeben sind, entspricht ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch die Punkte $\pm \sqrt{a}$, deren Winkelsummen $(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ nach derselben Reihe aufeinander folgen.

235) **Aufgabe.** Was entspricht dem Kreise $R = c$ um den Punkt a der Z -Ebene?

Auflösung. Ihm entspricht, da sich statt $R = c$ auch $(X - a)^2 + Y^2 = c^2$ schreiben läßt, nach Nr. 232 die Kurve

$$(x^2 - y^2 - a)^2 + (2xy)^2 = c^2,$$

deren Gleichung sich folgendermaßen umformen läßt:

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2ax^2 + 2ay^2 + a^2 = c^2,$$

$$(x^2 + y^2 + a)^2 - 4ax^2 = c^2,$$

$$(x^2 + y^2 + a + 2x\sqrt{a})(x^2 + y^2 + a - 2x\sqrt{a}) = c^2.$$

Verbindet man aber wiederum einen Punkt P der Kurve mit den Punkten $\pm\sqrt{a}$, so gilt für die Verbindungslinien

$$p_1^2 = (x - \sqrt{a})^2 + y^2 = x^2 + y^2 + a - 2x\sqrt{a},$$

$$p_2^2 = (x + \sqrt{a})^2 + y^2 = x^2 + y^2 + a + 2x\sqrt{a}.$$

Demnach läßt sich die Kurvengleichung auch schreiben als $p_1^2 p_2^2 = c^2$, oder endlich als

$$p_1 p_2 = c.$$

Dies ist die bekannte Gleichung der Lemniskaten zweiter Ordnung oder Cassinischen Kurven, zu denen auch die in Nr. 142 besprochene gleichseitige Lemniskate gehört. Die Punkte $\pm\sqrt{a}$ heißen ihre Brennpunkte, die Geraden p_1 und p_2 ihre Brennstrahlen. Also:

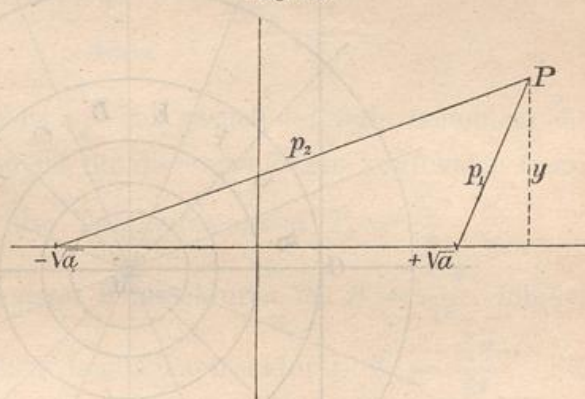
Jedem Kreise $R = c$ um den Punkt a der Z -Ebene entspricht in der z -Ebene eine Cassinische Kurve $p_1 p_2 = c$ mit den Brennpunkten $\pm\sqrt{a}$.

Folgen die Radien der Kreise der Größe nach folgendermaßen aufeinander:

$$e^0, e^{\pm\frac{2\pi}{n}}, e^{\pm\frac{4\pi}{n}}, e^{\pm\frac{6\pi}{n}}, \dots,$$

so folgen die konstanten Produkte $p_1 p_2$ nach derselben Reihe aufeinander.

Fig. 170.



236) **Folgerung:** Ist in der Z -Ebene eine Kurve in Polarkoordinaten in Bezug auf den Punkt a durch die Gleichung $f(R, \Theta) = 0$ gegeben, so entspricht ihr in der z -Ebene eine Kurve von der auf $\pm \sqrt{a}$ bezogenen Gleichung

$$f[(p_1 p_2), (\vartheta_1 + \vartheta_2)] = 0.$$

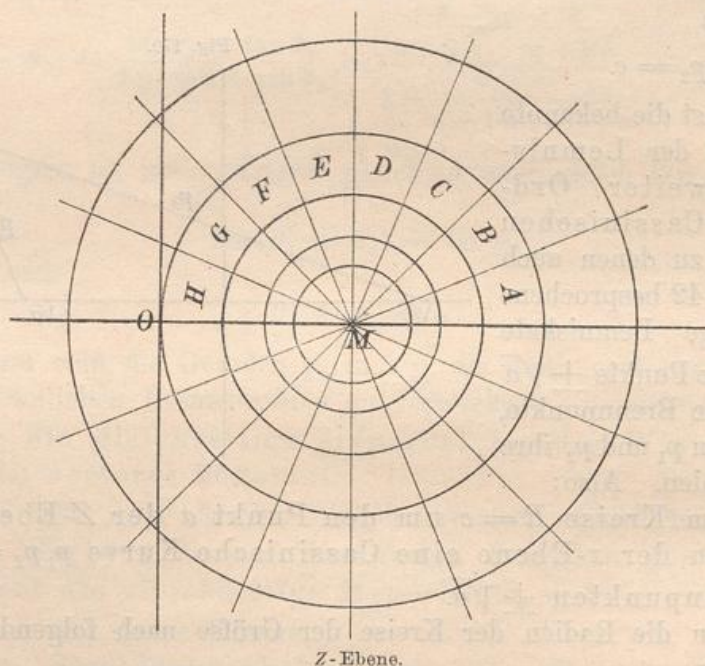
Die Variablen $(p_1 p_2)$ und $(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ sind die zuerst von Lamé aufgestellten lemniskatischen Koordinaten, deren Anwendung für die mathematische Physik von großer Bedeutung ist und viele Rechnungserleichterungen giebt.

237) **Aufgabe.** Es soll bewiesen werden, daß alles, was vom Punkte a gesagt ist, auch von jedem beliebigen Punkte mit den Koordinaten a und b gilt.

Die Ausführung ist nur eine Wiederholung der obigen Rechnungen.

238) In Fig. 161 und 162 ist das gegenseitige Entsprechen in Bezug auf den Punkt a dargestellt ($OM = a$). Dem Quadratnetz der Polarkoordinaten entspricht das Quadratnetz der lemniskatischen Koordinaten.

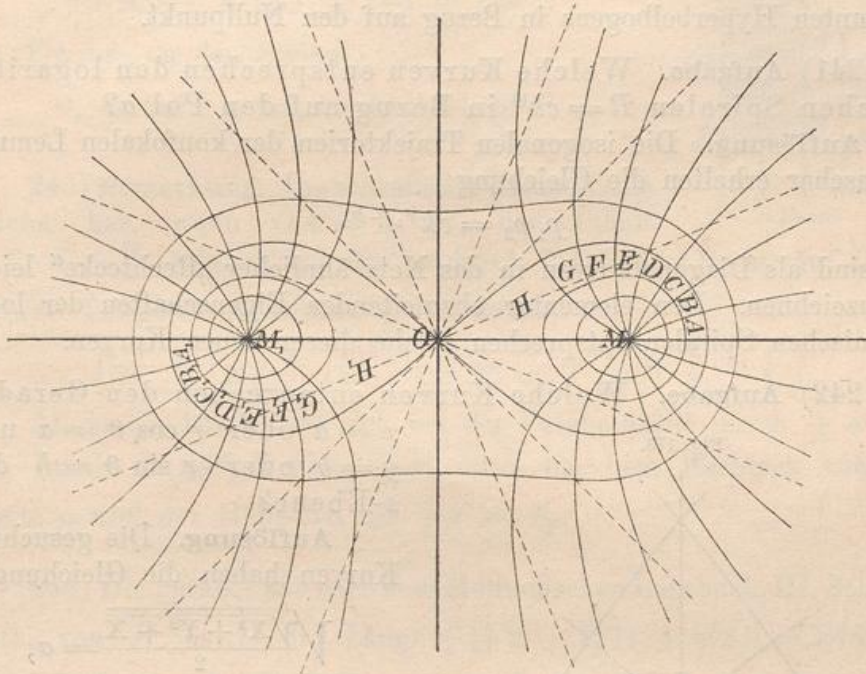
Fig. 171.



239) **Aufgabe.** Wie groß ist das polare Trägheitsmoment für die halbe Lemniskate, für jede halbe Cassinische Kurve, für jeden hyperbolischen Sektor einer solchen u. s. w. in Bezug auf den Nullpunkt?

Auflösung. Der gewöhnlichen Lemniskate $p_1 p_2 = c$ mit den Brennpunkten $\pm \sqrt{c}$ entspricht ein Kreis $R = c$ um den Punkt c .

Fig. 172.



c - Ebene.

Sein Inhalt ist $c^2 \pi$, folglich ist $\frac{c^2 \pi}{4}$ das gesuchte Trägheitsmoment der halben Lemniskate. Ebenso ist für die zugehörigen konfokalen Cassinischen Kurven $p_1 p_2 = c_1$ das Trägheitsmoment $T_p = \frac{c_1^2 \pi}{4}$.

Für jeden der gezeichneten Kreissektoren ist $F = \frac{c_1^2 \pi}{16}$, folglich für jeden der hyperbolischen Lemniskatensektoren $T_p = \frac{c_1^2 \pi}{64}$. Für jeden Kreisring ist $F = \pi (c^2 - c_1^2)$, folglich für jeden halben lemniskatischen Ring $T_p = \frac{\pi}{4} (c^2 - c_1^2)$.

240) **Aufgabe.** Wie groß ist das Polarmoment erster Ordnung der lemniskatischen und hyperbolischen Kurven in Bezug auf den Nullpunkt?

Auflösung. Der Lemniskate $p_1 p_2 = c$ mit den Brennpunkten $\pm \sqrt{c}$ entspricht ein Kreis vom Umfange $2c\pi$. Das Polarmoment der Halblemniskate ist halb so groß, also gleich $c\pi$. Für jede konfokale Cassinische Kurve $p_1 p_2 = c_1$ ist jener Kreisumfang gleich

$2c_1\pi$, also das Polarmoment erster Ordnung der Kurve gleich $c_1\pi$. Der Hyperbel von $p_1p_2 = 0$ bis $p_1p_2 = c$ entspricht ein Kreisradius von Länge c . Demnach ist $\frac{c}{2}$ das Polarmoment erster Ordnung des genannten Hyperbelbogens in Bezug auf den Nullpunkt.

241) **Aufgabe.** Welche Kurven entsprechen den logarithmischen Spiralen $R = ck^\vartheta$ in Bezug auf den Pol a ?

Auflösung. Die isogonalen Trajektorien der konfokalen Lemniskatenschar erhalten die Gleichung

$$p_1 p_2 = ck^{\vartheta_1 + \vartheta_2}.$$

Sie sind als Diagonalkurven in das Netz ähnlicher „Rechtecke“ leicht einzuzichnen. Den elementar abzuleitenden Eigenschaften der logarithmischen Spiralen entsprechen solche dieser neuen Kurven.

242) **Aufgabe.** Welche Kurven entsprechen den Geraden

$x = a$ oder $r \cos \vartheta = a$ und $y = b$ oder $r \sin \vartheta = b$ der z -Ebene?

Auflösung. Die gesuchten Kurven haben die Gleichungen

$$\sqrt{\frac{X^2 + Y^2 + X}{2}} = a,$$

oder $\sqrt{R} \cos \frac{\Phi}{2} = a,$

oder $R \frac{1 + \cos \Phi}{2} = a^2$

und

$$\sqrt{\frac{X^2 + Y^2 - X}{2}} = b,$$

oder $\sqrt{R} \sin \frac{\Phi}{2} = b,$

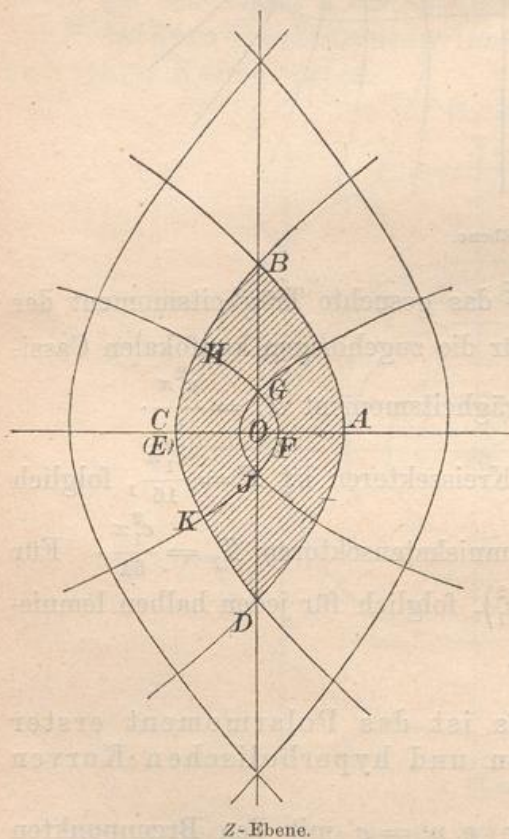
oder $R \frac{1 - \cos \Phi}{2} = b^2.$

Dies sind wiederum Kegelschnittgleichungen, und zwar Brennpunktsgleichungen von Parabeln, wie man erkennt, wenn man bei einer davon durch Koordinatenverschiebung nach a^2 die Scheitelgleichung bildet.

Folgen in der z -Ebene die beiden Schaaren von Geraden in den Abständen

$$0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \pm 4a, \dots$$

Fig. 173.



aufeinander, so schneiden die Parabeln der Z -Ebene die X -Achse an den Stellen

$$0, \pm a^2, \pm 4a^2, \pm 9a^2, \pm 16a^2,$$

die Y -Achse an den Stellen

$$0, \pm 2a^2, \pm 8a^2, \pm 18a^2, \pm 32a^2.$$

243) **Bemerkung.** Die schraffierte parabolische Fläche hat, wenn $OA = 1$ ist, den Inhalt $\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{16}{3}$, folglich hat das Rechteck $EDBC$ in Bezug auf O das polare Trägheitsmoment $\frac{4}{3}$. [Probe:

$$\left(\frac{1 \cdot 2^3}{12} + \frac{2 \cdot 1^3}{12}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 \cdot 2 = \left(\frac{8}{12} + \frac{2}{12}\right) + \frac{2}{4} = \frac{4}{3}.]$$

Allgemein handelt es sich bei der Parabelfläche durch $\pm a^2$ um den Inhalt $\frac{2}{3} (2a^2) (4a^2) = \frac{16}{3} a^2$, also bei dem Rechteck von der Breite a und der Höhe $2a$ um $\frac{4}{3} a^2 = T_p$.

244) Die Parabel hat nach dem Methodischen Lehrbuch, III, Schlussseite, von B bis D die Länge $\frac{p}{2} [\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})] = 1,1478 p$. Ist also $OA = a^2$ und $BD = p = 4a^2$, so handelt es sich um die Länge

$$2a^2 [\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})] = 1,1478 \cdot 4a^2.$$

Halb so groß ist das Polarmoment der Geraden von Länge $BD = 2a$ (Fig. 174) im Abstände a von O , also gleich

$$a^2 [\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})] \\ = 1,1478 \cdot 2a^2 = 2,2956 a^2.$$

Denkt man sich jetzt die Länge $2a$ und den Abstand veränderlich als $2x$ bzw. x , so hat man im letzten eine Querschnittsformel

$$q_x = x^2 [\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})]$$

für ein Dreieck OAB in Bezug auf O . (Fig. 175.) Für dieses ganze Dreieck ist also das Polarmoment erster Ordnung nach der Schichtenformel

$$M_p = \frac{x^3}{3} [\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})] = \frac{1,1478 \cdot 2x^3}{3};$$

Fig. 174.

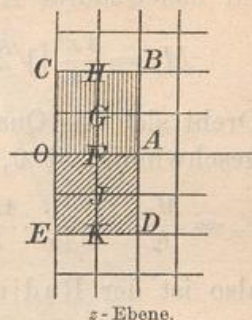
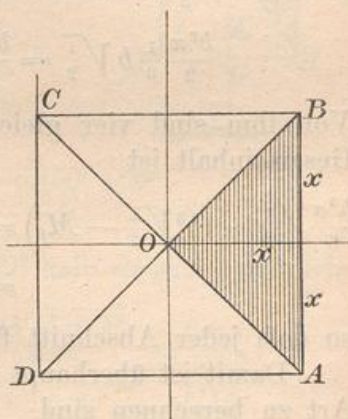
 z -Ebene.

Fig. 175.



für das Quadrat $ABCD$ mit Basis $2x$ ist also in Bezug auf O

$$M_p = \frac{4x^3}{3} [\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})] = \frac{8x^3}{3} \cdot 1,1478 = 3,0608 x^3.$$

Dreht sich das Quadrat in seiner Ebene um O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ϑ , so ist demnach die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{M_p}{F} \vartheta = \frac{1}{4x^2} \cdot \frac{4x^3}{3} [\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})] \vartheta = \frac{2}{3} \cdot 1,1478 x \vartheta = 0,7652 x \vartheta,$$

also ist der Radius der mittleren Geschwindigkeit

$$\varrho_m = 0,7652 x.$$

Dies ist zugleich der mittlere Abstand sämtlicher Punkte der Quadratfläche vom Mittelpunkt.

245) Damit ist zugleich der in Fig. 153 dargestellte Diagrammkörper berechnet. Sein Inhalt ist für $x = \frac{b}{2}$

$$M_p = \frac{4}{3} \frac{b^3}{8} [\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2})] = \frac{1,1478 b^3}{3} = 0,3826 b^3.$$

Der ganze Rechteckskörper hat den Inhalt $b^2 \cdot b \sqrt{\frac{1}{2}} = b^3 \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7071 b^3$, der innere, trichterförmige Raum also ist

$$b^3 \sqrt{\frac{1}{2}} - M_p = 0,7071 b^3 - 0,3826 b^3 = 0,3245 b^3.$$

Der auf der Spitze stehende Kegel hat die Höhe $b \sqrt{\frac{1}{2}}$ und den Radius $b \sqrt{\frac{1}{2}}$, also den Inhalt

$$\frac{b^2 \pi}{2} \frac{1}{3} b \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{b^3 \pi}{6} \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7071 b^3 \frac{\pi}{6} = 0,3702 b^3.$$

Von ihm sind vier gleiche hyperbolische Teile abgeschnitten, deren Gesamthalt ist

$$\begin{aligned} \frac{b^3 \pi}{6} \sqrt{\frac{1}{2}} - (b^3 \sqrt{\frac{1}{2}} - M_p) &= b^3 \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\frac{\pi}{6} - 1 \right] + M_p = b^3 (0,3702 - 0,3245) \\ &= 0,0457 b^3, \end{aligned}$$

so daß jeder Abschnitt für sich den Inhalt $0,0139 b^3$ hat.

Damit ist überhaupt gezeigt, wie hyperbolische Abschnitte solcher Art zu berechnen sind.

246) **Aufgabe.** Das Polarmoment erster Ordnung für das Rechteck mit den Seiten $2a$ und $2b$ zu bestimmen.

Den Geraden HB und CB der x -Ebene entsprechen nach Nr. 242 Parabeln von den Gleichungen

$$\sqrt{X^2 + Y^2} + X = 2a^2$$

und

$$\sqrt{X^2 + Y^2} - X = 2b^2,$$

aus denen durch Subtraktion folgt

$$2X = 2a^2 - 2b^2$$

oder

$$X = a^2 - b^2,$$

durch Addition dagegen

$$2\sqrt{X^2 + Y^2} = 2(a^2 + b^2)$$

oder

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = a^2 + b^2,$$

so daß

$$Y = \sqrt{R^2 - X^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2} = \sqrt{4a^2b^2} = \pm 2ab.$$

Nach dem Methodischen Lehrbuch, III, Schlufsseite, ist die Parabel-
länge \widehat{AB} für gegebenes Y

$$\widehat{s} = \frac{1}{2} \left[\frac{Y}{p} \sqrt{p^2 + Y^2} + p \operatorname{elg} \frac{Y + \sqrt{p^2 + Y^2}}{p} \right],$$

also für $p = 2a^2$ und $Y = 2ab$ der ganze Bogen

$$\begin{aligned} \widehat{HB} &= \frac{2ab}{2a^2} \sqrt{4a^4 + 4ab^2} \\ &+ 2a^2 \operatorname{elg} \frac{2ab + \sqrt{4a^4 + 4ab^2}}{2a^2} \end{aligned}$$

oder

$$\widehat{HB} = 2b \sqrt{a^2 + b^2} + 2a^2 \operatorname{elg} \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

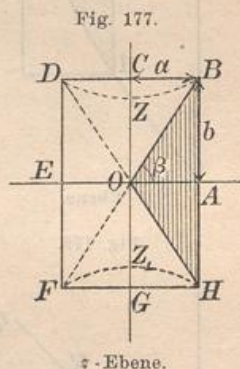
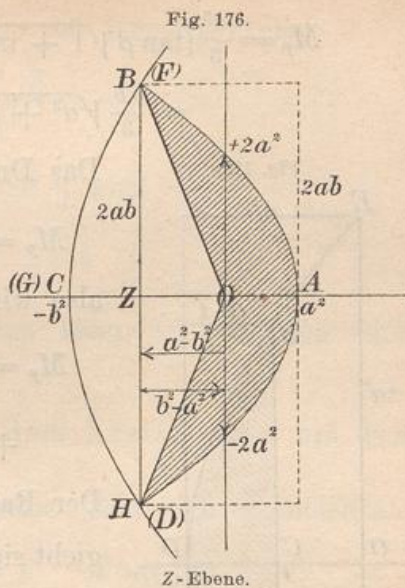
Demnach ist das Polarmoment der Geraden HB halb so groß, nämlich

$$\begin{aligned} M_p &= b \sqrt{a^2 + b^2} + a^2 \operatorname{elg} \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \\ &= a^2 \left[\frac{b}{a} \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + \operatorname{elg} \left(\frac{b}{a} + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

oder

$$M_p = a^2 [\tan \beta \sqrt{1 + \tan^2 \beta} + \operatorname{elg} (\tan \beta + \sqrt{1 + \tan^2 \beta})].$$

Setzt man nun a veränderlich gleich x , so folgt für das Dreieck OBH in Fig. 177 nach der Schichtenformel



$$M_p = \frac{a^3}{3} [\tan \beta \sqrt{1 + \tan^2 \beta} + \lg (\tan \beta + \sqrt{1 + \tan^2 \beta})]$$

$$= \frac{ab}{3} \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{a^3}{3} \lg \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

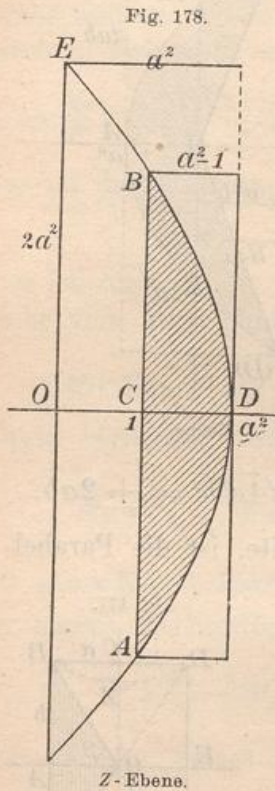


Fig. 178.

z-Ebene.

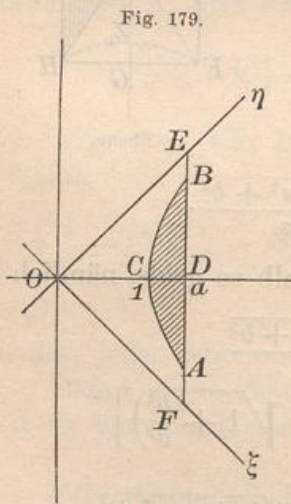


Fig. 179.

xi-Ebene.

Das Dreieck OBD giebt entsprechend

$$M_p = \frac{ab}{3} \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{3} \lg \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b},$$

also wird für das gesamte Rechteck $HBDF$

$$M_p = \frac{4ab}{3} \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{2a^3}{3} \lg \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

$$+ \frac{2b^3}{3} \lg \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b}.$$

Der Radius der mittleren Geschwindigkeit er-giebt sich aus $\frac{M_p}{F} = \frac{M_p}{4ab}$. Auch die betreffenden Kegelabschnitte sind leicht zu berechnen.

247) **Bemerkung.** Die Parabelfläche ABH in Fig. 176 hat, da $ZO = b^2 - a^2$, also $ZA = b^2$ ist, den Inhalt $\frac{2}{3} 4ab \cdot b^2 = \frac{8}{3} ab^3$. Der vierte Teil davon, $\frac{2}{3} ab^3$, ist das polare Trägheitsmoment der hyperbolisch begrenzten Fläche Z_1HBZ der z -Ebene, für die $OZ = \sqrt{b^2 - a^2}$ ist. Die Gleichung der Hyperbel in Fig. 177 ist also

$$y^2 - x^2 = b^2 - a^2.$$

248) **Aufgabe.** Das polare Trägheitsmoment des Segments der gleichseitigen Hyperbel in Fig. 179 zu berechnen.

Reicht das Hyperbelsegment von 1 bis a , so entspricht ihm in der z -Ebene (Fig. 178) ein Parabelsegment, von 1 bis a^2 reichend. Aus

$$(a^2 - 1) : a^2 = Y^2 : 4a^4$$

oder

$$Y : 2a^2 = \sqrt{a^2 - 1} : a$$

folgt

$$Y = 2a \sqrt{a^2 - 1},$$

das Parabelsegment wird also

$$F = \frac{2}{3} \cdot 4a \sqrt{a^2 - 1} \cdot (a^2 - 1) = \frac{8a (a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

Demnach ist das polare Trägheitsmoment der Hyperbelfläche

$$T_p = \frac{2a(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

In Bezug auf die Gleichheitsachsen ξ und η wird

$$T_\xi = T_\eta = \frac{a}{3}(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}.$$

Da nach Nr. 178 $M_{\xi\eta}$ berechnet werden kann, so läßt sich auch T_x und T_y bestimmen.

249) Aufgabe. Was entspricht dem Kreise $r = c$ um den Punkt a der z -Ebene?

Auflösung. Die Gleichung des Kreises läßt sich schreiben als

$$(x - a)^2 + y^2 = c^2 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = c^2.$$

Dies geht über in

$$\frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + X}}{2} + \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 - X}}{2} - 2a \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + X}}{2}} + a^2 = c^2$$

oder in

$$\sqrt{X^2 + Y^2} - 2a \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + X}}{2}} + a^2 = c^2,$$

oder auch

$$R - 2a \sqrt{\frac{R + R \cos \Phi}{2}} + a^2 = c^2$$

oder

$$1) \quad R - 2a \sqrt{R} \cdot \cos \frac{\Phi}{2} + a^2 = c^2.$$

Ist dabei $a = c$, so entsteht die einfachere Gleichung

$$X^2 + Y^2 = 2a^2(\sqrt{X^2 + Y^2 + X})$$

oder

$$R^2 = 2a^2(R + R \cos \Phi)$$

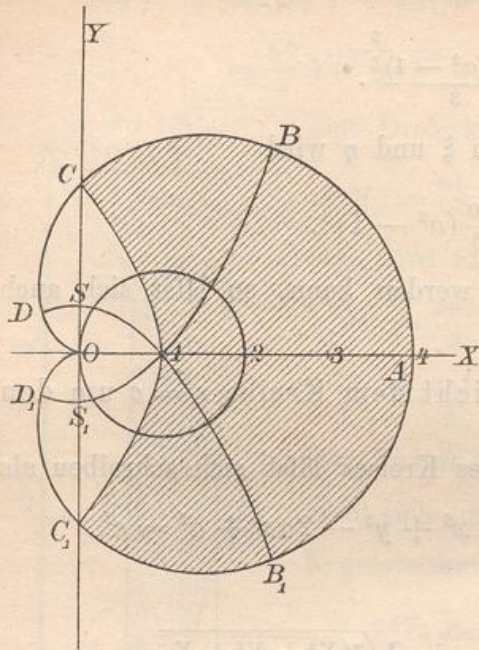
oder

$$2) \quad R = 4a^2 \frac{1 + \cos \Phi}{2} = 4a^2 \cos^2 \frac{\Phi}{2}.$$

Dies ist die Gleichung der Cardioide, die allgemeineren Kurven 1) mögen daher als cardioidische Kurven bezeichnet werden. Sie kommen später noch einmal als cyclische Kurven zum Vorschein.

250) Aufgabe. Den Inhalt der Cardioide zu berechnen, deren Grundkreis den Radius 1 hat.

Fig. 180.



Auflösung. Der entsprechende Kreis der z -Ebene hat in Bezug auf O das Trägheitsmoment

$$T_p = \frac{3}{2} r^4 \pi = \frac{3\pi}{2},$$

folglich ist der Inhalt der Cardioide das Vierfache davon, d. h.

$$F = 6\pi.$$

251) Aufgabe. Wie groß ist die Fläche zwischen dieser Cardioide und der symmetrisch teilenden Parabel?

Auflösung. Der schraffierte Halbkreis hat für O das Trägheitsmoment

$$r^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi} \right) + \left(r + \frac{4r}{3\pi} \right)^2 \frac{r^2 \pi}{2},$$

also für $r = 1$

$$T_p = \frac{3\pi}{4} + \frac{4}{3},$$

folglich ist die gesuchte Fläche

$$F = 3\pi + \frac{16}{3}.$$

Der Rest ist

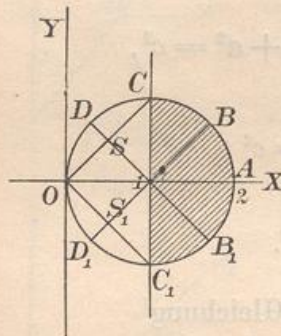
$$6\pi - \left(3\pi + \frac{16}{3} \right) = 3\pi - \frac{16}{3}.$$

So kann man jeden der entsprechenden parabolischen Sektoren der Cardioide berechnen.

[Setzt man den Umfang der Cardioide, $16r$, also hier 16 , als bekannt voraus, so folgt das Polarmoment erster Ordnung der Kreislinie vom Radius $r = 1$ in Bezug auf seinen Randpunkt O als $\frac{16}{2} = 8$; allgemein als $\frac{16\sqrt{r^2}}{2} = 8r$ für den Kreis vom Radius \sqrt{r} , also $8\rho^2$ für den Kreis mit Radius ρ .]

Weiteres über diese Kurven siehe in des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften“. Noch sei bemerkt, dass man auch bei Spiralsektoren der Lemniskaten die Trägheitsmomente sofort hinschreiben kann, ebenso die Polarmomente erster Ordnung für die Bogen der lemniskatischen Spiralen, wozu man nur die logarithmischen Spiralen der Kreisschar vergleiche.

Fig. 181.



252) **Aufgabe.** Symmetrische Brennstrahlsektoren der Parabel zu berechnen.

Das polare Trägheitsmoment des Dreiecks in Bezug auf O ist

$$\frac{ba}{48} (12a^2 + b^2) = \frac{a \cdot 2a \tan \frac{\alpha}{2}}{48} \left[12a^2 + 4a^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right] = \frac{a^4 \tan \frac{\alpha}{2}}{6} \left[3 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right].$$

Folglich ist die entsprechende Fläche der Parabel das Vierfache, nämlich

$$\frac{2}{3} a^4 \tan \frac{\alpha}{2} \left[3 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right].$$

(Probe: für $\alpha = 90^\circ$ entsteht $\frac{8}{3} a^4$, d. h. $\frac{2}{3}$ des Rechtecks $ABCD$, wo $OA = a^2$, $OD = 2a^2$ ist.)

253) **Bemerkung.** Vergleicht man die Gleichungen der Lemniskate und der gleichseitigen Hyperbel in Polarkoordinaten, so erkennt man, daß die Lemniskate die reciproke Kurve der gleichseitigen Hyperbel ist. Die Transformation der Figur 184, in der Kreis und Gerade AB von O aus gerechnet reciprok sind, mittels der Funktion $Z = \sqrt{z}$, giebt den Beweis dafür, denn dabei verwandeln sich Kreis und Tangente in Lemniskate bzw. Hyperbel.

Transformiert man dieselbe Figur mittels $Z = z^2$, so gehen Kreis und Tangente in Cardioide und Parabel über, und so folgt, daß die Cardioide reciproke Kurve der Parabel in Bezug auf den Brennpunkt ist.

Weil das Inversionsbild eines Kreises stets ein Kreis ist, so ist das Inversionsbild jeder Cassinischen Linie vom Mittelpunkt aus stets eine Cassinische Linie, das einer cardioidischen Kurve in Bezug auf O stets eine cardioidische Kurve. Dem Sonderfalle der Geraden entsprechen die Sonderfälle der gleichseitigen Hyperbel und der Parabel.

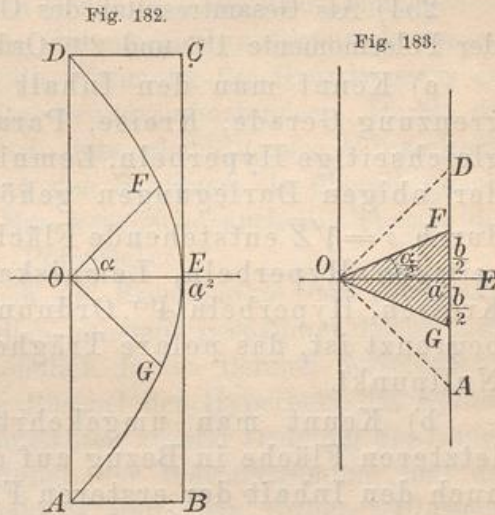
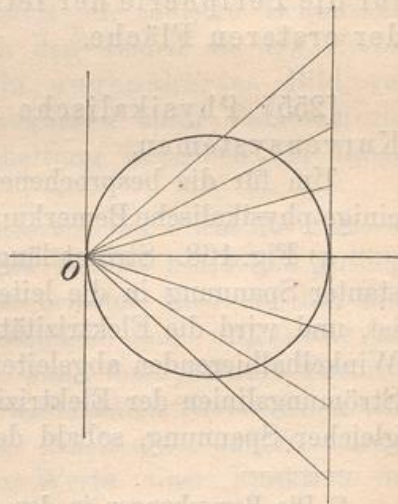


Fig. 184.



Transformiert man das System der confokalen Lemniskaten und der orthogonalen Schar gleichseitiger Hyperbeln noch einmal mittels der Funktion $Z = \sqrt{z}$, so entstehen Lemniskaten 4^{ter} Ordnung von der Gleichung $p_1 p_2 p_3 p_4 = c$ und Hyperbeln 4^{ter} Ordnung von der Gleichung $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 = \gamma$, die ebenfalls für die Festigkeitslehre von Bedeutung sind.

254) Als Gesamtergebnis des Obigen kann man für die Theorie der Polarmomente 1^{ter} und 2^{ter} Ordnung Folgendes hinstellen:

a) Kennt man den Inhalt einer Fläche, zu deren Begrenzung Gerade, Kreise, Parabeln, cardioidische Kurven, gleichseitige Hyperbeln, Lemniskaten 2^{ter} Ordnung im Sinne der obigen Darlegungen gehören, so kennt man für die durch $z = \sqrt{Z}$ entstehende Fläche, die bezüglich von gleichseitigen Hyperbeln, Lemniskaten 2^{ter} Ordnung, Geraden, Kreisen, Hyperbeln 4^{ter} Ordnung, Lemniskaten 4^{ter} Ordnung begrenzt ist, das polare Trägheitsmoment in Bezug auf den Nullpunkt.

b) Kennt man umgekehrt das Trägheitsmoment der letzteren Fläche in Bezug auf den Nullpunkt, so kennt man auch den Inhalt der ersteren Fläche.

c) Kennt man die Peripherie der ersten Fläche, so kennt man das Polarmoment 1^{ter} Ordnung für die Peripherie der zweiten Fläche.

d) Kennt man umgekehrt das Polarmoment 1^{ter} Ordnung für die Peripherie der letzteren, so kennt man die Peripherie der ersteren Fläche.

[255) Physikalische Bemerkungen zu den behandelten Kurvensystemen.

Um für die besprochenen Kurvenscharen zu interessieren, mögen einige physikalische Bemerkungen über dieselben eingeschaltet werden. *)

a) Fig. 168. Strömt längs der Koordinatenachsen Elektrizität konstanter Spannung in die leitende Platte ein, die unbegrenzt zu denken ist, und wird die Elektrizität in unendlich großer Entfernung auf den Winkelhalbierenden abgeleitet, so ist die eine Hyperbelgruppe die der Strömungslinien der Elektrizität, die andere Gruppe ist die der Linien gleicher Spannung, sobald der stationäre Zustand eingetreten ist.

*) Die Bemerkungen in den eingeklammerten Abschnitten sind nur für vorgeschrittene Leser bestimmt. Sie mögen als eine Hindeutung darauf, daß es noch höhere Gebiete gibt, aufgefaßt werden. Dort kommt die höhere Analysis zur Geltung, die im Anfange des Studiums noch entbehrt werden kann.

An Stelle der stationären Elektrizitätsströmung kann man eine stationäre Wärmeströmung setzen. Die Stromlinien behalten dann ihre Bedeutung und die Spannungscurven werden Isothermen. Solche Kurvensysteme bezeichnet man daher als isothermische Kurvensysteme.

Erkennt man die Forchheimersche Theorie der Grundwasserstände für gleichmäßig durchlässiges Erdreich als richtig an, so gilt von der Figur 168 Folgendes: Man denke sich die Koordinatenachsen als sehr weitgehende Sickerschlitze, die energisch ausgepumpt werden, dann geben die einen Hyperbeln die Strömung des Grundwassers an, die andern die Niveaukurven des Grundwasserstandes. Durch die einzelnen „Quadrate“ fließen dabei stets gleich große Flüssigkeitsmengen, sobald nur das Niveau in den Schlitzen als überall gleichmäßig betrachtet werden darf. Man vergleiche auch die Theorie des Helmholtz'schen Geschwindigkeits-Potentials.

b) Fig. 172. Man denke sich die Brennpunkte der konfokalen Lemniskaten als Einströmungsstellen konstant gespannter Elektrizität in die ebene Platte und den unendlich fernen Bereich derselben als Ausströmungsstelle, dann ist das Büschel der Hyperbeln das System der Stromlinien, während die Lemniskaten zweiter Ordnung die Linien konstanter Spannung sind. Bezüglich der Wärmeströmung und der Grundwasserbewegung findet Analoges statt, wie vorher. Übrigens lassen sich die Stromlinien und Spannungskurven bei geeignetem Arrangement mit einander vertauschen. MM_1 und das Lot in O sind dabei als Einströmungslinien, die beiderseitigen Fortsetzungen nach außen als Ausströmungslinien zu betrachten.

Hat man ein Gefäß, dessen Gestalt die äußere Lemniskate der Figur 172 ist und denkt man sich den Boden an den Brennpunkten durchbohrt, so hat man ein angenähertes Bild von dem Gange der Stromlinien und Niveaukurven unter Voraussetzung niedrigen Wasserstandes und Konstanthaltung desselben am Rande des Gefäßes.

Denkt man sich eine elastische Platte von der Form der äußeren Lemniskate der Figur 172, die längs des Randes horizontal aufliegt und in den Brennpunkten gleich stark belastet wird, so hat man unter gewissen theoretischen Voraussetzungen ein angenähertes Bild von Biegung der Platte, und zwar kann man mehrere Theorien aufstellen. Nach der einen würden die Lemniskaten Niveaulinien sein, die Hyperbeln Linien stärksten Gefälles. Nach einer andern würden die Lemniskaten Linien für konstante Werte einer Funktion der größten Biegungsspannung sein, woraus sich Entsprechendes über die Krümmungsradien aussagen lassen würde. Damit soll über die Richtigkeit solcher Theorien nichts behauptet werden. Es steht zu

vermuten, daß eine Reihe von Physikern ihre Theorien der Lehre von der konformen Abbildung geradezu anbequemt haben, so daß an Stelle ihrer Hypothesen eine einzige gesetzt werden könnte, welche die Erhaltung der Konformität und der unendlich kleinen Quadrate bedeutet. Dies dürfte z. B. bei der Forchheimerschen Theorie der Grundwasserstände der Fall gewesen sein, ebenso bei der Theorie freier Ausflußstrahlen von Helmholtz und Kirchhoff.

Zu Fig. 180 läßt sich bezüglich der Parabeln und cardioidischen Kurven Entsprechendes aussagen, nur tritt für die außerhalb der Cardioide liegenden Isothermen die Unbequemlichkeit ein, daß man sich die Ebenen doppelt bedeckt denken muß.

Auf kartographische und andere Deutungen soll hier nicht eingegangen werden, auch nicht auf den schwierigen Fall der Torsionsprobleme nach St. Venants Theorie, auch nicht auf gewisse Probleme der Kapillarität.]

[256] Die reiche Anwendbarkeit der Transformationen $Z = z^2$ und $z = \sqrt{Z}$ auf die Lehre von den Polarmomenten 1^{ter} und 2^{ter} Ordnung, von der Flächen- und Bogenberechnung, von der Elastizität, von den stationären Strömungen der Elektrizität, der Wärme, des Grundwassers und der Flüssigkeiten überhaupt, auf stereometrische Berechnungen u. dgl. sollten die Ingenieure veranlassen, sich in höherem Grade mit der Lehre von den konformen Abbildungen zu beschäftigen.

Es wird gestattet sein, außerhalb des Zusammenhanges auf einige besonders wichtige Anwendungen der Abbildungslehre hinzudeuten.

Die Abbildungen

$$Z = \frac{1}{z}, \quad Z = \frac{a + bz}{d + ez} \quad (\text{z. B. } Z = \frac{a - z}{a + z})$$

sind identisch mit der Kreisverwandtschaft von Möbius. An den entsprechenden Kreisbüscheln und Kreisscharen hat Kirchhoff zuerst die Theorie der stationären Elektrizitätsströmung erörtert, Thomson zuerst die Theorie der elektrischen Bilder erläutert. An die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ lassen sich gewisse Gravitationsprobleme anschließen.

Die Abbildung

$$Z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

führt auf die wichtigen elliptischen Koordinaten (Fig. 207) und wurde zuerst von Prof. E. Heine physikalisch verwertet. Die erste Einführung der letzteren verdankt man Jacobi.

Durch die Abbildung $Z = z^n$ bzw. $z = \sqrt[n]{Z}$ lernt man die Lemniskaten und Hyperbeln n^{ter} Ordnung kennen, die ebenfalls in physikalischer Hinsicht von Wichtigkeit sind.

Die Abbildungen

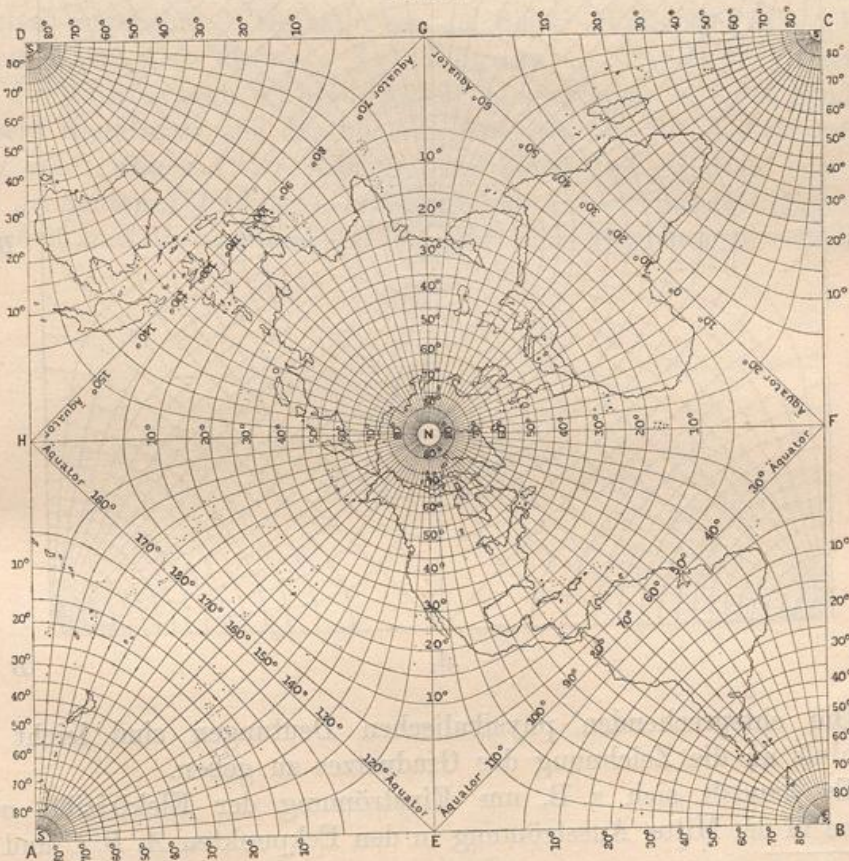
$$Z = \sqrt{1 - z^2}, \quad Z = \sin z, \quad Z = \cos z$$

führen auf die zuerst von Lamé behandelten lemniskatischen Koordinaten, die oben eingehender besprochen wurden.

Die Abbildungen $Z = \lg z$ und $z = e^Z$ geben den Zusammenhang der Mercatorkarte mit der Polarkarte von Hipparch und Ptolemäus, erleichtern die Theorie der logarithmischen Spiralen und lassen im Anschluß an Burmesters Untersuchungen kinematische Deutungen zu. Auch Gravitations- und Potentialprobleme lassen sich anschließen.

Ganz neue Bereiche des mathematischen Denkens werden durch die Abbildung mittels der elliptischen Funktionen $Z = \sin am z$, $Z = \cos am z$ und $Z = \Delta am z$ eröffnet, durch deren doppelperiodischen Charakter die Möglichkeit eröffnet wird, die ganze Ebene auf ein Rechteck konform zu übertragen.

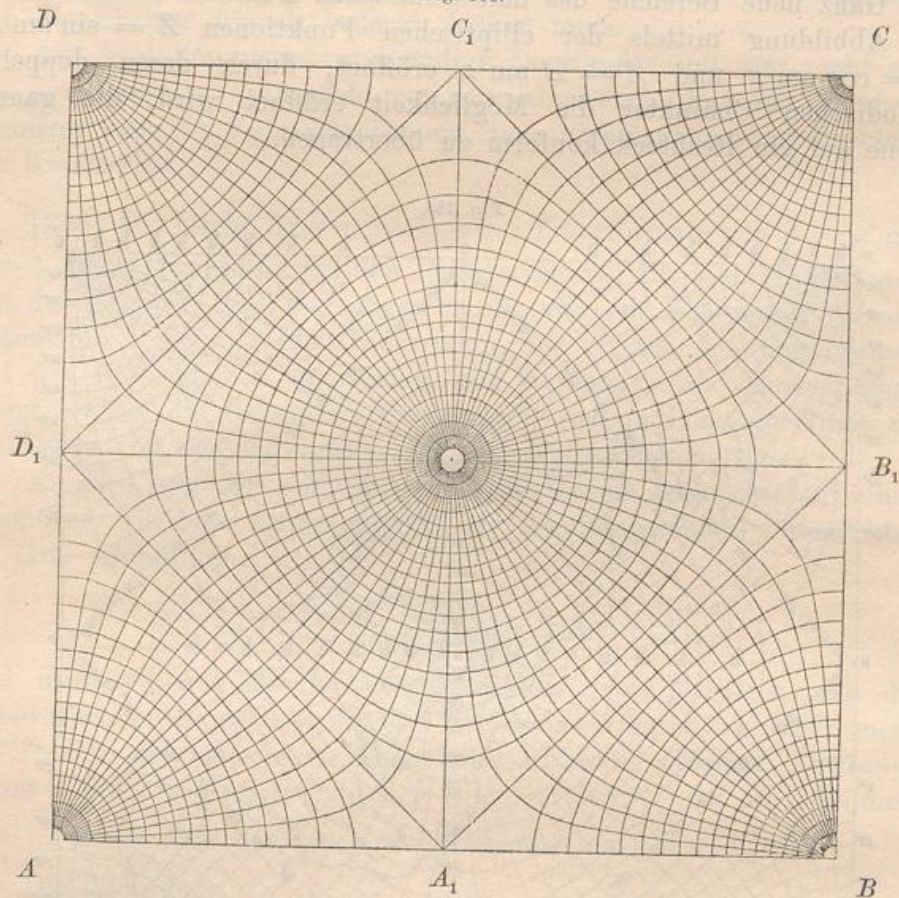
Fig. 185.



So ist z. B. im Anschluß an Jacobi, Schering und Schwarz durch Peirce gezeigt worden, wie man im Stande ist, die Kugelober-

fläche mit dem Netz der Meridiane und Parallelkreise auf der Fläche eines Quadrates darzustellen. Die Unstetigkeitspunkte sind geschickter Weise in den Ocean verlegt worden. Der Äquator erscheint als Quadrat. Die symmetrische Fortsetzung der einzelnen Oktanten läßt zwanglos die doppelte Periodizität erkennen. Aus geographischen Gründen ist in Figur 185 nicht die Einteilung in kleine Quadrate gewählt, sondern die Einteilung in Rechtecke, die, wie auf dem Globus, nur in der Nähe des Äquators quadratisch erscheinen, dagegen nach den Polen hin das Verhältnis der Länge zur Breite gesetzmäßig zunehmen lassen.*)

Fig. 186.



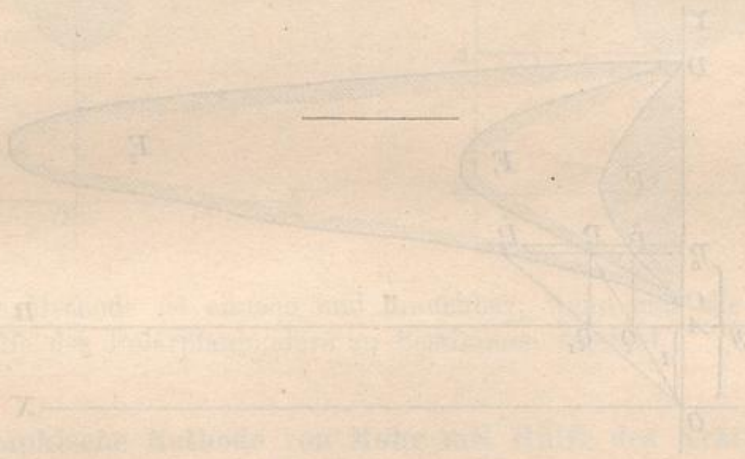
Die entsprechenden physikalischen Deutungen sind leicht im Anschluß an die Zeichnung des Gradnetzes zu geben.

Es handelt sich z. B. um Einströmung der Elektrizität oder Wärme in der Mitte, Ausströmung in den Eckpunkten A , B , C und D .

*) Die Figuren 185 und 186 sind nach einem Cliché angefertigt worden, welches von Herrn Prof. A. dr. Guébard in Paris freundlichst zur Verfügung gestellt wurde.

Denkt man sich das Quadrat $A_1B_1C_1D_1$ aus der Figur herausgeschnitten, so lassen sich Deutungen entsprechender Art ablesen, auch solche über den Zustand einer quadratisch geformten elastischen Platte, die in der Mitte belastet ist, auch über die Kapillarität im Innern eines engen Röhrchens von quadratischem Querschnitt, oder über die Wasserstandslinien in dem Terrain einer quadratisch geformten Insel, in deren Mitte sich ein Pumpwerk befindet. Nur ist zu beachten, daß die Annahme der Hypothesen, die dem Charakter der Konformität mit den einfacheren Koordinatensystemen entsprechen, an der Hand des Experimentes auf ihre Zulässigkeit zu prüfen ist.

Ohne Kenntnis des konformen Zusammenhanges ist ein Eindringen in die feineren Theorien undenkbar. Dieser spielt schon jetzt in einigen Lehrbüchern der Mechanik eine hervorragende Rolle, und Kirchhoff und Helmholtz haben mit dem Hülfsmittel der konformen Abbildung sogar die schwierige Theorie der freien Ausflußstrahlen angebahnt. Deshalb sei an dieser Stelle auf die „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen“ hingewiesen, zu deren Studium größere Kenntnisse aus der höheren Analysis nur für den Schlufsteil nötig sind, während der Anfang ganz elementar gehalten ist. Die oben genannten Abbildungen und zahlreiche andere sind dort eingehend behandelt und die angedeuteten physikalischen Beziehungen erläutert.]



die Punkte $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ sind die Schnittpunkte der Geraden $AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH', II', JJ', KK', LL', MM', NN', OO', PP', QQ', RR', SS', TT', UU', VV', WW', XX', YY', ZZ'$ mit der Kurve K . Die Punkte $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ sind die Schnittpunkte der Geraden $AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH', II', JJ', KK', LL', MM', NN', OO', PP', QQ', RR', SS', TT', UU', VV', WW', XX', YY', ZZ'$ mit der Kurve K . Die Punkte $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ sind die Schnittpunkte der Geraden $AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH', II', JJ', KK', LL', MM', NN', OO', PP', QQ', RR', SS', TT', UU', VV', WW', XX', YY', ZZ'$ mit der Kurve K .