Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Abschnitt III. Trägheitsmomente für die wichtigeren Querschnittsformeln des Bau- und Maschinenwesens.

Abschnitt III.

Trägheitsmomente für die wichtigeren Querschnittsformen des Bau- und Maschinenwesens.*)

A. Die Momente.

51) Rechtecksquerschnitt.

$$T_1 = \frac{bh^3}{12}, \quad T_2 = \frac{hb^3}{12}, \quad T_p = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$$

oder

$$T_p = \frac{F}{12} d^2,$$

wo d die Diagonale, F die Fläche bedeutet.

Widerstandsmoment:

$$W_1 = \frac{T_1}{\left(\frac{h}{2}\right)} = \frac{bh^2}{6}, \quad W_2 = \frac{T_2}{\left(\frac{b}{2}\right)} = \frac{hb^2}{6}.$$

Sonderfall des Quadrates:

$$T_1 = T_2 = \frac{b^4}{12}, \quad T_p = \frac{b^4}{6}, \quad W_1 = W_2 = \frac{b^3}{6}.$$

Fig. 55.

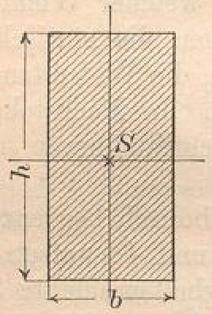


Fig. 56.

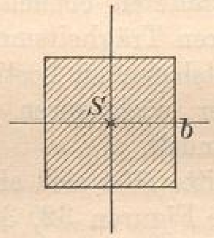
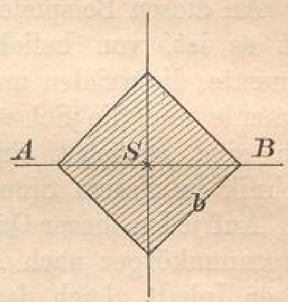


Fig. 57.



Quadrat in diagonaler Stellung. Figur 57.

Jedes der Dreiecke mit Basis $AB = b\sqrt{2}$ hat die Höhe $b\sqrt{\frac{1}{2}}$, nach Nr. 32 ist also für jedes in Bezug auf die Basis

*) In dieser Zusammenstellung werden einige schon behandelte Grundformen noch einmal dargestellt, damit nicht scheinbare Lücken entstehen.

$$T = \frac{b\sqrt{2}\left(b\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3}{12} = \frac{b^4}{24},$$

für das Quadrat also

$$T_1 = T_2 = \frac{b^4}{12}, \quad W_1 = W_2 = \frac{\frac{b^4}{12}}{b\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3\sqrt{2}}{12}.$$

52) Rechteckige Gurtungen, die durch Fachwerk verbunden und als ein einziger Körper zu betrachten sind.

$$T_1 = \frac{b}{12}\left(h^3 - h_1^3\right), \quad W_1 = \frac{b\left(h^3 - h_1^3\right)}{12\,\frac{h}{2}} = \frac{b\left(h^3 - h_1^3\right)}{6h}.$$

Die andern Gröſsen kommen hier nicht in Betracht.

Fig. 58.

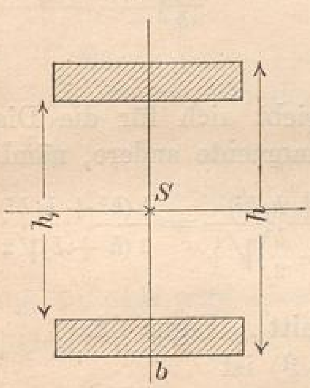
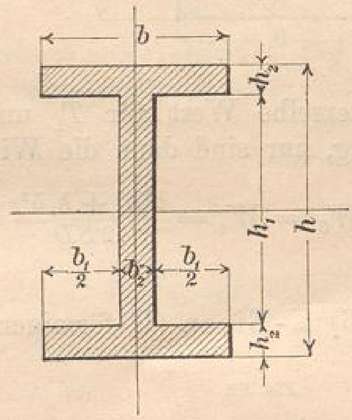


Fig. 59.



53) I-Träger (Doppel-T-Querschnitt). Figur 59.

$$T_1 = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{12}, \quad T_2 = \frac{h_1 b_2^3 + 2\,h_2 b^3}{12}.$$

T_2 kommt in Frage, wenn der Träger als Strebe benutzt wird.

$$W_1 = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{6h}, \quad W_2 = \frac{h_1 b_2^3 + 2\,h_2 b^3}{6b}.$$

54) Gurtungen mit T-Querschnitt. Figur 60.

$$T = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3}{12},$$

$$W = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3}{6h}.$$

Die andern Gröſsen kommen hier nicht in Betracht.

55) ┼-Eisen (Kreuz-Querschnitt). Figur 61.

$$T_1 = T_2 = \frac{bh^3 + b_1 b^3}{12} = \frac{b\,(h^3 + b_1 b^2)}{12}, \quad T_p = \frac{b\,(h^3 + b_1 b^2)}{6}.$$

$$W_1 = W_2 = \frac{b\,(h^3 + b_1 b^2)}{6h}.$$

Fig. 60.

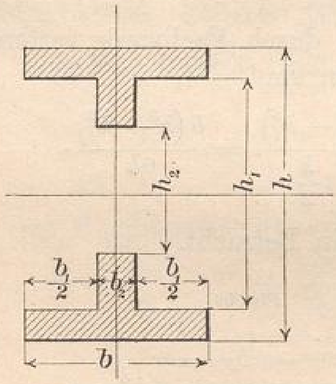
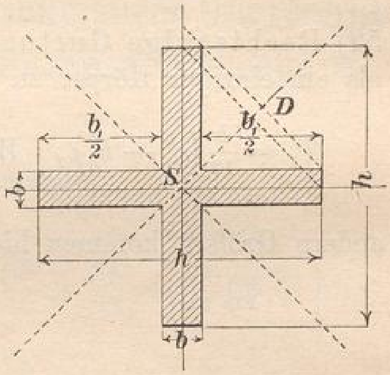


Fig. 61.



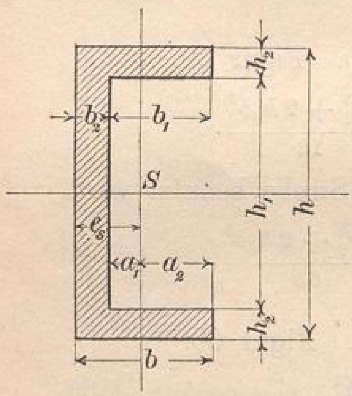
Derselbe Wert für T_1 und T_2 ergiebt sich für die Diagonalstellung, nur sind dann die Widerstandsmomente andere, nämlich

$$W_3 = W_4 = \frac{b\,(h^3 + h_1 b^2)}{12\,SD} = \frac{b\,(h^3 + h_1 b^2)}{12\left(\frac{h}{2} + \frac{b}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{b\,(h^3 + h_1 b^2)}{3\,(h + b)\sqrt{2}}.$$

56) ⊏-Eisen (U-förmiger Querschnitt). Figur 62.

Nach Nr. 3) ist

Fig. 62.



$$e_s = \frac{2h_2 b^2 + h_1 b_2^2}{2\,(2h_2 b + h_1 b_2)}.$$

Die beiden Momente werden

$$T_1 = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{12},$$

$$T_2 = \tfrac{1}{3}\left[he_s^3 - h_1 a_1^3 - 2\,h_2 a_2^3\right].$$

Die leicht zu bildenden Widerstandsmomente sollen von jetzt ab nicht mehr angegeben werden.

57) ┳-Träger (einfacher T-Querschnitt). Figur 63.

Nach Nr. 2) ist

$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2\,(2\,h_1 + h_2)}{2\,(b_1 h_1 + b_2 h_2)}.$$

Die Momente werden

$$T_1 = \tfrac{1}{3}\left[b_1 h_s^3 + b_2 h_2^3 - b_3 h_3^3\right], \quad T_2 = \frac{h_1 b_1^3 + h_4 b_2^3}{12}.$$

Fig. 63.

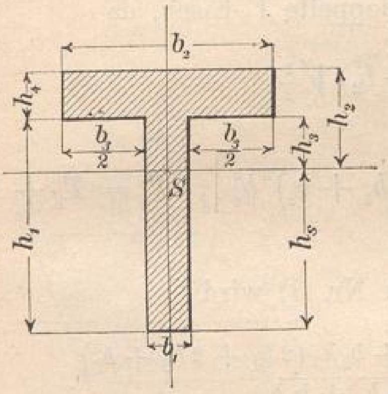
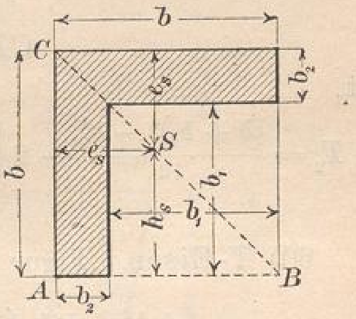


Fig. 64.



58) Γ-Eisen (gleichschenkliges Winkeleisen). Fig. 64.

Es handelt sich um die Differenz zweier Quadrate, so dafs nach Nr. 3)

$$h_s = \frac{b^3 - b_1^3}{2\left(b^2 - b_1^2\right)}, \quad e_s = b - h_s.$$

In Bezug auf AB wird $T = \frac{b^4 - b_1^4}{3}$, also in Bezug auf beide Schwerpunktsachsen

$$T_1 = T_2 = \frac{b^4 - b_1^4}{3} - h_s^2\left(b^2 - b_1^2\right).$$

59) Diagonalstellung des Γ-Eisens. Figur 65.

Vom Quadrat $AEBD$ sind drei Quadrate abzuziehen, wenn man das doppelt gezeichnete Winkeleisen erhalten will. In Bezug auf AB ist also

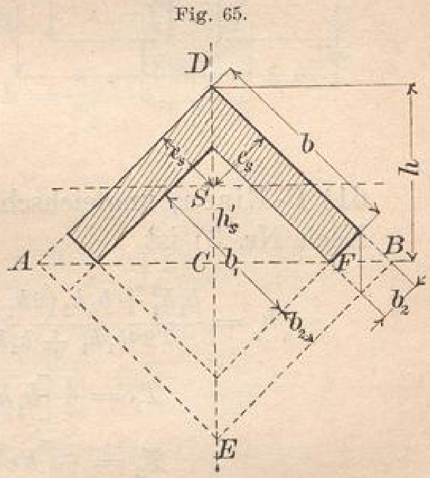
$$T = \frac{(b + b_2)^4}{12} - \frac{b_1^4}{12} - \frac{2\,b_2^4}{12}.$$

Für das einzelne Winkeleisen bleibt die Hälfte oder

$$T = \tfrac{1}{24}\left[\left(b + b_2\right)^4 - b_1^4 - 2\,b_2^4\right].$$

Nun ist aber $h = \left(b + b_2\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ und

Fig. 65.



$h'_s = h - e_s\sqrt{2}$. Demnach wird für die horizontale Schwerpunktsachse

$$T_1 = \frac{1}{24}\left[\left(b + b_2\right)^4 - b_1^4 - 2\,b_2^4\right] - h_s'^2\left(b^2 - b_1^2\right).$$

In Bezug auf Achse DE giebt das doppelte **Γ**-Eisen, da

$$CF = (b_1 + b_2)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

ist,

$$T_2 = \frac{\left(b + b_2\right)^4 - b_1^4}{12} - 2\left[\frac{b_2^4}{12} + \frac{1}{2}\left(b_1 + b_2\right)^2 b_2^2\right],\quad T_p = T_1 + T_2.$$

60) **T**-Eisen. Figur 66. Nach Nr. 3) wird

$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2\left(2\,h_1 + b_2\right) + b_3 h_3\left(2\,h_1 + 2\,h_2 + h_3\right)}{2\,(b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3)},$$

$$T_1 = \frac{1}{3}\left[b_1 h_s^3 + b_3 a_3^3 - b_4 a_4^3 - b_5 a_5^3\right],$$

$$T_2 = \frac{1}{12}\left[h_1 b_1^3 + h_2 b_2^3 + h_3 b_3^3\right].$$

Fig. 66.

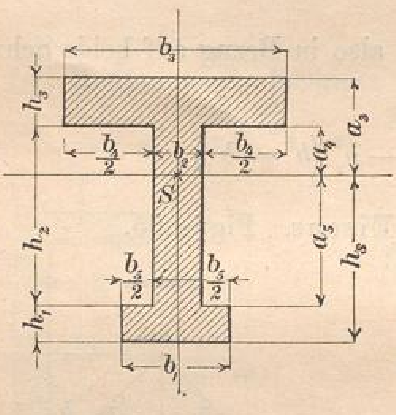
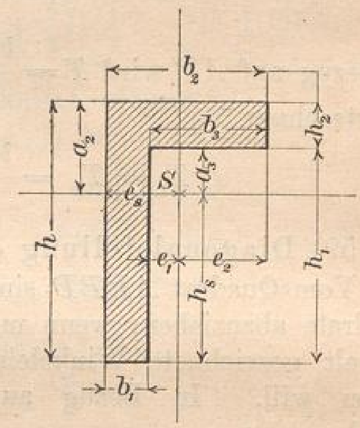


Fig. 67.



61) **Γ**-Eisen, ungleichschenklig. Figur 67.
Nach Nr. 3) ist

$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2\left(2 h_1 + h_2\right)}{2\,(b_1 h_1 + b_2 h_2)},\quad e_s = \frac{b_1^2 h_1 + b_2^2 h_2}{2\,(b_1 h_1 + b_2 h_2)},$$

$$T_1 = \frac{1}{3}\left[b_1 h_s^3 + b_2 a_2^3 - b_3 a_3^3\right],$$

$$T_2 = \frac{1}{3}\left[h e_s^3 - h_1 e_1^3 + h_2 e_2^3\right].$$

62) Dreieck, gleichschenkliges.

$$T_1 = \frac{b h^3}{36}, \quad T_2 = \frac{h b^3}{48}, \quad T_p = \frac{b h}{144}(4 h^2 + 3 b^2).$$

In Bezug auf die Spitze ist infolge der Verschiebung um $\frac{2}{3} h$

$$T_p = \frac{b h}{48}(12 h^2 + b^2).$$

Fig. 68.

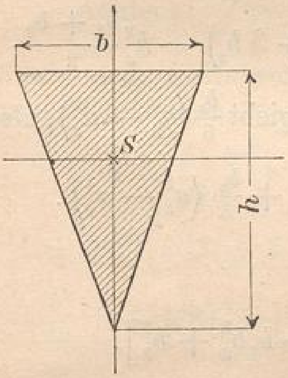
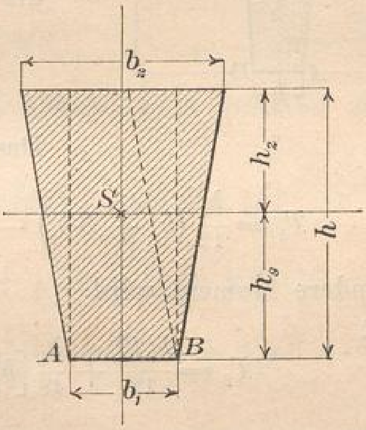


Fig. 69.



63) Trapez. (Annäherungsform für den Hakenquerschnitt.) Nach Nr. 4) ist

$$h_s = \frac{h(b_1 + 2 b_2)}{3(b_1 + b_2)}.$$

In Bezug auf AB hat man durch Parallelogramm und Dreieck

$$\frac{b_1 h^3}{3} + \frac{(b_2 - b_1) h^3}{4} = \frac{h^3}{12}(b_1 + 3 b_2).$$

Abzuziehen ist $h_s^2 F$, so dafs man erhält

$$T_1 = \frac{h^3}{12}(b_1 + 3 b_2) - h_s^2 \frac{b_1 + b_2}{2} h = \frac{h^3}{36} \frac{b_1^2 + 4 b_1 b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}.$$

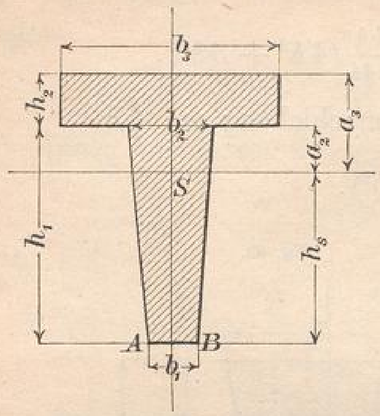
Das andere Moment wird

$$T_2 = \frac{h b_1^3}{12} + 2\left[\frac{h\left(\frac{b_2 - b_1}{2}\right)^3}{36} + \left(\frac{b_1}{2} + \frac{b_2 - b_1}{6}\right)^2 \frac{b_2 - b_1}{2} \cdot \frac{h}{2}\right]$$

$$= \frac{h b_1^3}{12} + \frac{h(b_2 - b_1)^3}{144} + \frac{2(2 b_1 + b_2)^2 (b_2 - b_1) h}{144}$$

$$= \frac{h b_1^3}{12} + \frac{h(b_2 - b_1)}{48}\left(3 b_1^2 + b_2^2 + 2 b_1 b_2\right) = \frac{h}{48}\left[b_1^3 + b_1^2 b_2 + b_1 b_2^2 + b_2^3\right].$$

Fig. 70.



64) Trapezförmiger T-Träger.
Nach Nr. 4) ist

$$h_s = \frac{h_1^2 (b_1 + 2\,b_2) + (2\,h_1 + h_2)\,3\,b_3 h_2}{3\,[(b_1 + b_2)\,h_1 + 2\,b_3\,h_2]}.$$

In Bezug auf AB giebt das Trapez wie vorher $\frac{h^3}{12}(b_1 + 3\,b_2)$, also in Bezug auf die Schwerpunktsachse

$$\frac{h_1^3}{12}(b_1 + 3\,b_2) - h_s^2 \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

Das Rechteck giebt $\frac{b_3}{3}(a_3^3 - a_2^3)$, also wird

$$T_1 = \frac{h_1^3}{12}(b_1 + 3\,b_2) - h_s^2 \frac{b_1 + b_2}{2} + \frac{b_3}{3}(a_3^3 - a_2^3).$$

Das andere Moment wird

$$T_2 = \frac{h_2\,b_3^3}{12} + \frac{h_1}{48}\left[b_1^3 + b_1^2 b_2 + b_1 b_2^2 + b_2^3\right].$$

65) Regelmäſsiges n-Eck.

Aus dem polaren Trägheitsmomente des gleichschenkligen Dreiecks für die Spitze folgt für das regelmäſsige n-Eck mit Seite b und Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises das polare Trägheitsmoment

$$T_p = \frac{n\,b\,\varrho}{48}(12\,\varrho^2 + b^2),$$

Fig. 71.

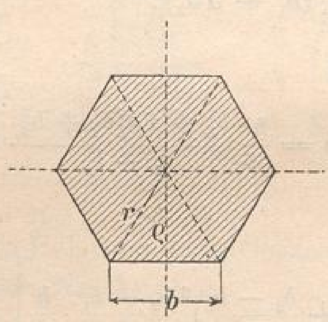
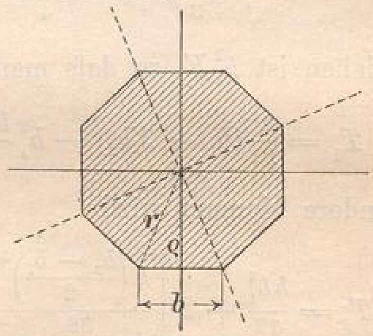


Fig. 72.



folglich sind für jede Symmetrieachse (wie später gezeigt wird sogar für jede beliebige Schwerpunktsachse) die Trägheitsmomente

$$T_1 = T_2 = \frac{n\,b\,\varrho}{96}(12\,\varrho^2 + b^2).$$

Dadurch erhält man folgende Reihe von axialen Trägheitsmomenten, die für jede Schwerpunktsachse der regelmäfsigen Vielecke gelten:

a) regelmäfsiges Dreieck: $T = \frac{b^4}{96}\sqrt{3}$, denn hier ist $\varrho = \frac{b}{6}\sqrt{3}$

b) „ Viereck: $T = \frac{b^4}{12}$, „ „ „ $\varrho = \frac{b}{2}$

c) „ Sechseck: $T = \frac{5\,b^4}{16}\sqrt{3}$, „ „ „ $\varrho = \frac{b}{2}\sqrt{3}$

d) „ Achteck: $T = \frac{b^4}{12}(11 + 8\sqrt{2})$, „ „ „ $\varrho = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2})$.

So könnte man fortfahren. — Beim Achteck z. B. gestaltet sich die Rechnung folgendermafsen:

$$T = \frac{8b}{96}\,\frac{b}{2}(1 + \sqrt{2})\left[12\,\frac{b^2}{4}(1 + \sqrt{2})^2 + b^2\right]$$

$$= \frac{b^4}{24}(1 + \sqrt{2})\left[3\,(1 + 2 + 2\sqrt{2}) + 1\right] = \frac{b^4}{24}(1 + \sqrt{2})(10 + 6\sqrt{2})$$

$$= \frac{b^4}{12}(1 + \sqrt{2})(5 + 3\sqrt{2}) = \frac{b^4}{12}(5 + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6)$$

$$= \frac{b^4}{12}(11 + 8\sqrt{2}).$$

Führt man in die Formel des n-Ecks den Umfang $u = \frac{b}{n}$ ein, so geht sie über in

$$T_1 = T_2 = \frac{n\,\frac{u}{n}\,\varrho}{96}\left(12\,\varrho^2 + \frac{u^2}{n^2}\right) = \frac{u\varrho}{96}\left(12\,\varrho^2 + \frac{u^2}{n^2}\right).$$

66) Kreisfläche. Für $n = \infty$ folgt aus der Formel für das regelmäfsige n-Eck, wenn man $u = 2\,\varrho\pi$ einsetzt,

$$\frac{2\,\varrho\pi\varrho}{96}(12\,\varrho^2 + 0) = \frac{\varrho^4\pi}{4},$$

oder, wenn man den Durchmesser d einführt,

$$T = \frac{\pi d^4}{64},$$

dagegen, wie in Nr. 42,

$$T_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Fig. 73.

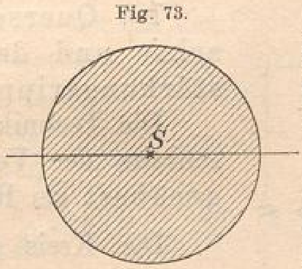
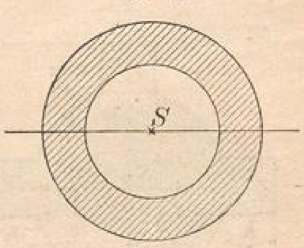


Fig. 74.



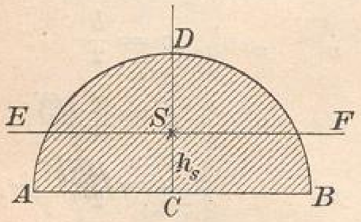
67) Fläche des concentrischen Kreisrings (Hohlsäule).

$$T = \frac{\pi}{64}\left(d^4 - d_1^4\right), \quad T_p = \frac{\pi}{32}\left(d^4 - d_1^4\right).$$

68) Fläche des Halbkreises.

Nach Nr. 6) ist $h_s = \frac{4\,r}{3\,\pi}$, in Bezug auf AB ist nach vorigem Beispiele

Fig. 75.



$$T = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8}.$$

Demnach wird für EF

$$T_1 = \frac{\pi r^4}{8} - h_s^2 \frac{r^2 \pi}{2}$$

$$= \frac{\pi r^4}{8} - \frac{16\,r^2}{9\,\pi^2}\frac{r^2\pi}{2} = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{8\,r^4}{9\,\pi}$$

oder

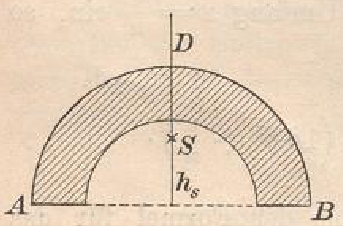
$$T_1 = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\,\pi}\right) = d^4\left(\frac{\pi}{128} - \frac{1}{18\,\pi}\right). \quad \text{(Abgerundet } T_1 = 0{,}11\, r^4.\text{)}$$

Dagegen ist $T_2 = \frac{\pi r^4}{8}$, also

$$T_p = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\,\pi}\right) + \frac{\pi r^4}{8} = r^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\,\pi}\right).$$

69) Fläche des halben concentrischen Kreisrings (Halbsäule).

Fig. 76.



Nach Nr. 6) ist $h_s = \frac{4\left(r^3 - r_1^3\right)}{3\,\pi\left(r^2 - r_1^2\right)}$, außerdem für AB

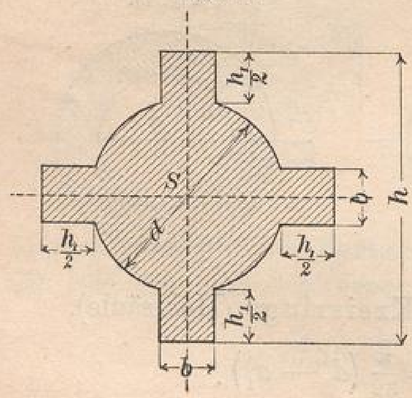
$$T = \frac{\pi}{8}\left(r^4 - r_1^4\right),$$

folglich

$$T_1 = \frac{\pi}{8}\left(r^4 - r_1^4\right) - h_s^2 \pi \frac{r^2 - r_1^2}{2},$$

$$T_2 = \frac{\pi}{8}\left(r^4 - r_1^4\right), \quad T_p = \frac{\pi}{4}\left(r^4 - r_1^4\right) - h_s^2 \pi \frac{r^2 - r_1^2}{2}.$$

Fig. 77.



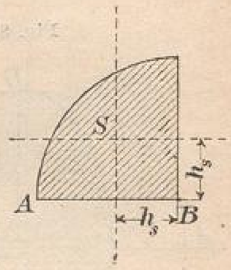
70) Querschnitt der Flügelachse und der Säule mit Verstärkungsrippen.

Die Technik betrachtet die Querschnitte der Verstärkungsrippen angenähert als Rechtecke.

Der Kreis giebt $\frac{\pi d^4}{64}$, die senkrecht stehenden Rechtecke nach der Formel für einfache Gurtungen $\frac{b}{12}(h^3 - d^3)$, die horizontal liegenden

$2\frac{h_1}{2}\frac{b^3}{12}=\frac{h_1 b^3}{12}$, man erhält also $T_1=T_2=\frac{\pi d^4}{64}+\frac{1}{12}[b(h^3-d^3)+h_1 b^3]$. Das polare Moment ist $T_p=2\,T_1$.

Fig. 78.



71) Fläche des Viertelkreises.

Für AB hat man $T=\frac{r^4\pi}{16}$, der Schwerpunktsabstand ist $h_s=\frac{4r}{3\pi}$, daraus folgt (vgl. Nr. 68)

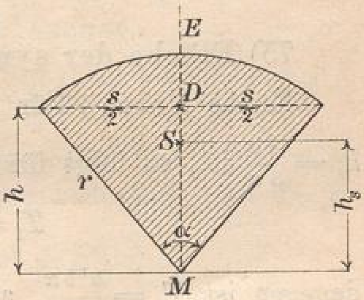
$$T_1=T_2=\frac{r^4\pi}{16}-h_s^2\frac{r^2\pi}{4}=\frac{r^4\pi}{16}-\frac{16r^2}{9\pi^2}\frac{r^2\pi}{4}$$

$$=r^4\left[\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right],\quad T_p=r^4\left[\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right].$$

72) Fläche des allgemeinen Kreisausschnittes (Sektors).

Vorläufig kann nur das polare Trägheitsmoment berechnet werden. Für die Kreisfläche war dieses $\frac{r^4\pi}{2}$, also ist es für den Sektor in Bezug auf den Punkt M

Fig. 79.



$$T=\frac{r^4\pi}{2}\frac{\alpha^0}{360^0}=\frac{r^4\pi\alpha}{720},$$

sobald α in Graden gegeben ist. Nach Nr. 10) ist

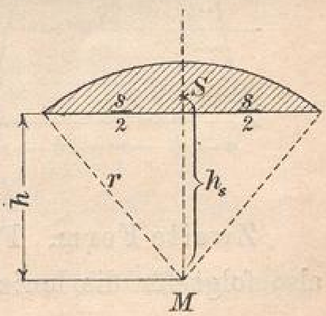
$$h_s=\frac{2\,rs}{3\,b}\quad\begin{pmatrix}b=\text{Bogen}\\ s=\text{Sehne}\end{pmatrix}$$

folglich ist für S

$$T_p=\frac{r^4\pi\alpha}{720}-h_s^2\cdot r^2\pi\frac{\alpha}{360}=\frac{r^2\pi\alpha}{360}\left[\frac{r^2}{2}-h_s^2\right].$$

Zur Ableitung der axialen Momente sind später zu entwickelnde Hülfssätze nötig.

Fig. 80.



73) Fläche des Kreisabschnittes (Segmentes).

Auch hier kann zunächst nur das Polarmoment berechnet werden. Vom Sektor ist das Dreieck abzuziehen, also wird für M

$$T_p=\frac{r^4\pi\alpha}{720}-\frac{sh}{48}(12\,h^2+s^2).$$

Nach Nr. 7) ist $h_s=\frac{s^3}{12F}$, also wird für den Schwerpunkt S

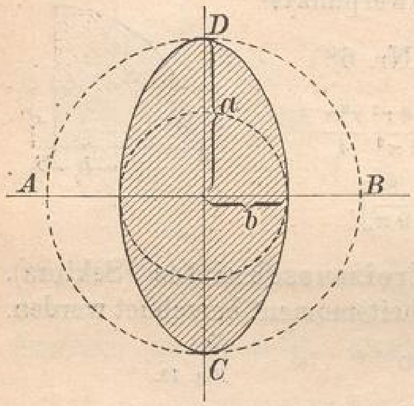
$$T_p=\frac{r^4\pi\alpha}{720}-\frac{sh}{48}(12\,h^2+s^2)-h_s^2F,$$

wo $F=\frac{r^2\pi\alpha}{360}-\frac{sh}{2}$ ist.

74) Fläche der Ellipse. (Vgl. Nr. 12.)

Aus der Formel für den Kreis mit Radius a folgt durch Verkleinerung der Sehnen mittels des konstanten Faktors $\frac{b}{a}$

Fig. 81.



$$T_1 = \frac{a^4\pi}{4} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a^3 b\pi}{4}.$$

Für die Achse CD nimmt man den kleinen Kreis zu Hülfe und findet mittels des konstanten Vergröſserungsfaktors $\frac{a}{b}$

$$T_2 = \frac{b^4\pi}{4}\,\frac{a}{b} = \frac{ab^3\pi}{4}.$$

Das Polarmoment wird

$$T_p = \frac{ab\pi}{4}(a^2 + b^2) = \frac{F}{4}(a^2 + b^2).$$

75) Fläche der symmetrischen Halbellipse.

Erste Form. Für AB ist $T' = \frac{a^3 b\pi}{8}$, da aber nach Nr. 12) $h_s = \frac{4a}{3\pi}$ ist, so folgt für die horizontale Schwerpunktsachse

$$T_1 = \frac{a^3 b\pi}{8} - \left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2 \frac{ab\pi}{2},$$

dagegen ist $T_2 = \frac{a^3 b\pi}{8}$, also $T_p = \frac{a^3 b\pi}{4} - \left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2 \frac{ab\pi}{2}$.

Fig. 82.

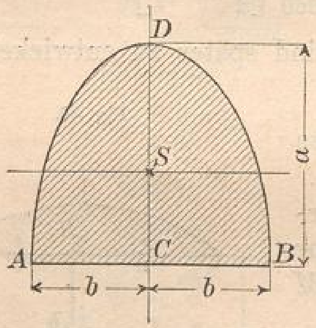
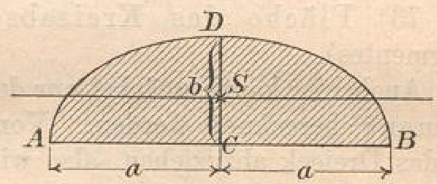


Fig. 83



Zweite Form. Für AB ist $T' = \frac{ab^3\pi}{8}$, nach Nr. 12) ist $h_s = \frac{4b}{3\pi}$, also folgt für die horizontale Schwerpunktsachse

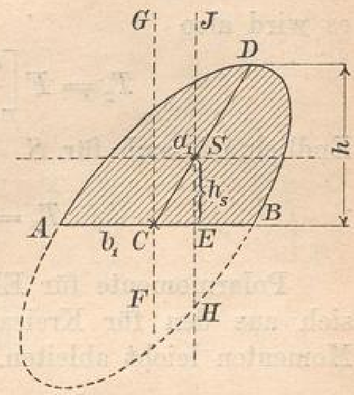
$$T_1 = \frac{ab^3\pi}{8} - \left(\frac{4b}{3\pi}\right)^2 \frac{ab\pi}{2},$$

während $T_2 = \frac{ab^3\pi}{8}$ ist. $T_p = \frac{ab^3\pi}{4} - \left(\frac{4b}{3\pi}\right)^2 \frac{ab\pi}{2}$.

76) Fläche der unsymmetrischen Halbellipse.

Diese allgemeinere Form läfst sich aus Fig. 82 durch Horizontalverschiebung der Elementarstreifen herstellen, wobei weder das statische Moment, noch die Schwerpunktshöhe, noch das axiale Trägheitsmoment für AB geändert wird. Die Fläche der Halbellipse bleibt dabei $\frac{b_1 h \pi}{2}$, oder, da $h = a_1 \sin\gamma$ ist, $F = \frac{a_1 b_1 \pi \sin\gamma}{2}$. Ferner ist $h_s = \frac{4h}{3\pi}$, ebenso $CS = \frac{4a_1}{3\pi}$, $CE = \frac{4a_1}{3\pi}\cos\gamma = e_s$. Für AB ist

Fig. 84.



$$T' = \frac{b_1 h^3 \pi}{8} = \frac{b_1 (a_1 \sin\gamma)^3 \pi}{8}$$
$$= \frac{F}{4} a_1^2 \sin^2\gamma = \frac{F}{4} h^2,$$

folglich für die horizontale Schwerpunktsachse

$$T_1 = \frac{b_1 h^3 \pi}{8} - \left(\frac{4h}{3\pi}\right)^2 \frac{b_1 h \pi}{2} = \frac{(a_1 \sin\gamma)^3 b_1 \pi}{8} - \left(\frac{4a_1 \sin\gamma}{3\pi}\right)^2 \frac{a_1 b_1 \pi \sin\gamma}{2}.$$

T_2 kann mit Hülfe von T_p berechnet werden, denn für C ist, wenn a und b die wirklichen Halbachsen der Ellipse bedeuten, nach Nr. 74

$$T_p' = \frac{ab\pi}{8}(a^2 + b^2) = \frac{F}{4}(a^2 + b^2).$$

Diese Halbachsen a und b kann man mittels der aus der Geometrie bekannten Formeln

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2,$$
$$ab = a_1 b_1 \sin\gamma$$

berechnen, was aber hier überflüssig ist. Einsetzung giebt nämlich sofort

$$T_p = \frac{a_1 b_1 \sin\gamma}{8}\left(a_1^2 + b_1^2\right) = \frac{F}{4}\left(a_1^2 + b_1^2\right).$$

Für die durch C gehende Vertikalachse wird

$$T_2' = T_p' - T_1' = \frac{F}{4}\left(a_1^2 + b_1^2\right) - \frac{F}{4}h^2 = \frac{F}{4}\left(a_1^2 + b_1^2 - h^2\right).$$

Verschiebung um $e_s = \frac{4a_1 \cos\gamma}{3\pi}$ giebt für die senkrechte Schwerpunktsachse HJ

$$T_2 = \frac{F}{4}\left(a_1^2 + b_1^2 - h^2\right) - \left(\frac{4a_1 \cos\gamma}{3\pi}\right)^2 F,$$

oder

$$T_2 = F\left[\frac{a_1^2 + b_1^2 - h^2}{4} - \left(\frac{4\,a_1 \cos\gamma}{3\,\pi}\right)^2\right].$$

Hier ist

$$a_1^2 - h^2 = a_1^2 - a_1^2 \sin^2\alpha = a_1^2 \cos^2\alpha,$$

es wird also

$$T_2 = F\left[\frac{a_1^2 \cos^2\alpha + b_1^2}{4} - \left(\frac{4\,a_1 \cos\gamma}{3\,\pi}\right)^2\right].$$

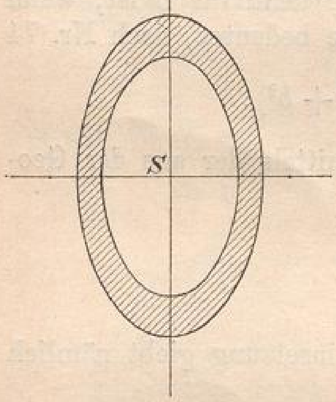
Endlich ist noch für S

$$T_p = F\left[\frac{a_1^2 + b_1^2}{4} - \left(\frac{4\,a_1}{3\,\pi}\right)^2\right].$$

Polarmomente für Ellipsenabschnitte und Ellipsenfaktoren lassen sich aus den für Kreisabschnitte und Kreisausschnitte berechneten Momenten leicht ableiten.

77) Elliptischer Ringquerschnitt. Sind a_1 und a_2 die grofsen, b_1 und b_2 die kleinen Halbachsen, so wird

Fig. 85.



$$T_1 = \frac{a_1^3 b_1 \pi}{4} - \frac{a_2^3 b_2 \pi}{4} = \frac{\pi}{4}\left(a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2\right).$$

Ebenso

$$T_2 = \frac{\pi}{4}\left(a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3\right),$$

$$T_p = T_1 + T_2$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[a_1 b_1\left(a_1^2 + b_1^2\right) - a_2 b_2\left(a_2^2 + b_2^2\right)\right].$$

Hier ist zu bemerken, dafs die Wandstärken verschieden ausfallen. Ist $a : a_1 = b : b_1$, so erhält man ähnliche Ellipsen. Nimmt man die Wandstärke überall gleich grofs, so wird die eine Curve eine solche 4ten Grades, und zwar die Parallelcurve der Ellipse. Bei geringen Wandstärken ist jedoch der Unterschied so klein, dafs er für praktische Berechnungen vernachlässigt werden kann, so dafs die gegebenen Formeln fortgelten.

78) Elliptischer Halbring. Gleichung für die statischen Momente in Bezug auf AB:

$$h_s \cdot F = \frac{4\,a_1}{3\,\pi} F_1 - \frac{4\,a_2}{3\,\pi} F_2,$$

folglich

$$h_s = \frac{\frac{4a_1}{3\pi} \cdot \frac{a_1 b_1 \pi}{2} - \frac{4a_2}{3\pi} \frac{a_2 b_2 \pi}{2}}{\frac{a_1 b_1 \pi}{2} - \frac{a_2 b_2 \pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} \frac{a_1^2 b_1 - a_2^2 b_2}{a_1 b_1 - a_2 b_2}.$$

In Bezug auf AB ist

$$T = \frac{\pi}{8}\left(a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2^3\right),$$

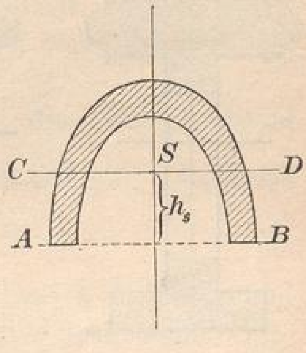
folglich in Bezug auf die Schwerpunktsachsen

$$T_1 = \frac{\pi}{8}\left(a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2\right) - h_s^2 \cdot \frac{\pi}{2}\left(a_1 b_1 - a_2 b_2\right),$$

$$T_2 = \frac{\pi}{8}\left(a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3\right); \quad T_p = T_1 + T_2.$$

Auch der schräge (unsymmetrische) Halbring läſst sich im Anschluſs an Nr. 76) behandeln.

Fig. 86a.



B. Bemerkungen und numerische Beispiele.

79) Eine groſse Anzahl weiterer Übungsbeispiele über die Querschnittsformen des praktischen Maschinenbaues lieſse sich hier anschlieſsen. Einige sind durch Zeichnungen angedeutet. Figur 86b, c, d, e. — In der Regel beschränkt sich aber die Praxis auf die behandelten rein schematisch aufzufassenden Formen.

Fig. 86b.

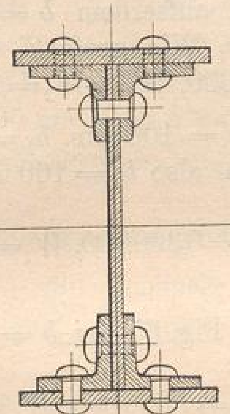
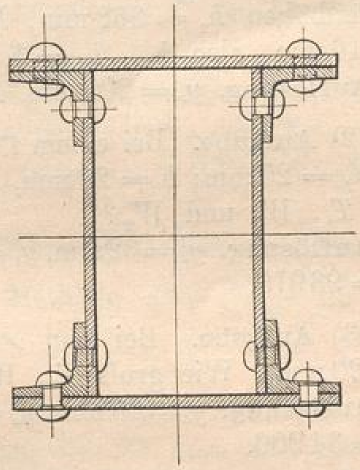


Fig. 86c.



Sind die Querschnitte nicht einheitlich, sondern in ihren Teilen durch Nieten mit einander verbunden, so ist darauf zu achten, daſs mindestens der Einfluſs der Nietlöcher berücksichtigt werden muſs. An einigen der Zeichnungen ist dies angedeutet. Bei Gurtungen, die groſse Entfernungen von der neutralen Achse haben, kann der

Einfluſs sehr groſs werden. Die Nieten werden in möglichst geringer Zahl in denselben Querschnitt gelegt, damit die Festigkeit nicht zu stark vermindert werde. In den Zeichnungen ist dies durch Schraffierung angedeutet.

Fig. 86 d.

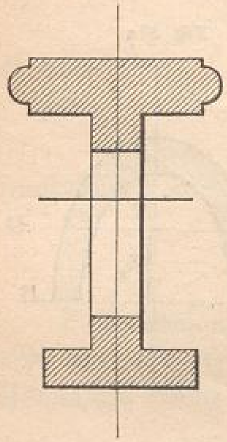
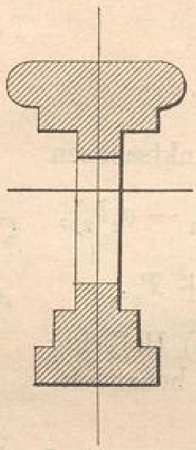


Fig. 86 e.



Die nachstehenden Übungsaufgaben sollen nicht etwa die Festigkeitslehre ersetzen, sondern sie setzen diese voraus. Es soll nur gezeigt werden, wie mannigfaltig die Anwendung der bisher erläuterten Begriffe ist. Die Maſse sind in Millimetern gegeben. Neuerdings wird auch mit Centimetern gerechnet.

80) **Aufgabe.** Bei einem T-Träger sei $h_1 = 160$ mm, $h_2 = 20$ mm, $b_1 = 20$ mm, $b_2 = 100$ mm. Wie groſs ist das wichtigste Trägheitsmoment und wie groſs sind die Widerstandsmomente (oder Querschnittsmoduln)?

Auflösung. $y_s' = 115$ mm, also $y_s'' = 65$ mm, $T_s = 17\,040\,000$, $W_1 = \frac{T_s}{y_s'} = 262\,200$, $W_2 = \frac{T_s}{y_s''} = 148\,200$.

81) **Aufgabe.** Bei einem I-Träger sei die Gesamthöhe $h = 400$ mm, die Teilhöhen $h_1 = 368$ mm, $h_2 = 16$ mm, auſserdem $b = 140$ mm, $b_2 = 16$ mm, also $b - b_2 = b_1 = 124$ mm. Wie groſs T_s und W?

Auflösung. $y_s = 200$ mm, $T_s = 231\,690\,000$, $W_1 = W_2 = 1\,158\,000$.

82) **Aufgabe.** Bei einem ⊓-Eisen sei $h = 100$ mm, $h_1 \doteq 80$ mm, also $h_2 = 20$ mm; $b = 20$ mm, $b_1 = 200$ mm, also $b_2 = 160$ mm. Wie groſs T_s, W_1 und W_2?

Auflösung. $y_s' = 32$ mm, $y_s'' = 68$ mm, $T_s = 6\,390\,000$, $W_1 = 197\,000$, $W_2 = 93\,970$.

83) **Aufgabe.** Bei dem ∧-Eisen der Fig. 65 sei $b = 100$ mm, $b_2 = 20$ mm. Wie groſs T_s, W_1 und W_2?

Auflösung. $y_s' = 46$ mm, $y_s'' = 39$ mm, $T_s = 1\,360\,000$, $W_1 = 29\,600$, $W_2 = 34\,900$.

84) **Aufgabe.** Eine schmiedeeiserne Achse von 2 m Länge soll bei einer zulässigen Spannung von 5 kg eine Last von 20 000 kg in der Mitte tragen. Wie stark ist sie bei kreisförmigem Querschnitt zu nehmen?

Die Festigkeitslehre giebt die elementar abzuleitende Gleichung $\frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = W \cdot S$. Daraus folgt $\frac{Pl}{4} = \frac{\pi d^3}{32} S$, also

$$d = \sqrt[3]{\frac{8Pl}{\pi S}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 20000 \cdot 2000}{\pi \cdot 5}} = \sim 274 \text{ mm}.$$

85) **Aufgabe.** Ein I-Träger von den Dimensionen $h = 400$ mm, $h_2 = 30$ mm, also $h_1 = 340$ mm, $b = 200$ mm, $b_2 = 25$ mm, also $b_1 = b - b_2 = 175$ mm, habe 6 m Länge. Wie stark darf er, zweifach frei aufliegend, in der Mitte belastet werden, wenn die zulässige Spannung 7,5 kg betragen darf?

Auflösung. Die Festigkeitslehre giebt die Traggleichung $P = \frac{4SW}{l}$, und zwar ist $W = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{6h} = 2\,468\,000$. Es folgt $P = \backsim 12\,340$ kg.

86) **Aufgabe.** Eine schmiedeiserne Achse von 2 m Länge und 274 mm Durchmesser sei bis zur Hälfte des Radius ausgebohrt. Wie stark darf sie bei 5 kg zulässiger Spannung belastet werden?

Auflösung. Zunächst ist $W = \frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{32d} = 1\,890\,000$. $P = \frac{4WS}{l}$ giebt 18 900 kg.

87) **Bemerkung.** Bei gleichmäſsiger Belastung über die ganze Länge gilt für den frei aufliegenden Träger die Formel $P = \frac{8SW}{l}$. Der Krümmungsradius des Trägers wird an jeder Stelle berechnet aus $\varrho = \frac{TE}{M} = \frac{aE}{S}$, wo T das Trägheitsmoment, E der Elastizitätsmodul des Materials, M das biegende Moment ist.

Hat z. B. ein schmiedeiserner Freiträger rechteckigen Querschnitts von $b = 50$ mm und $h = 90$ mm am freien Ende die dem Tragmodul entsprechende Probelastung ($S = 15$ kg), so ist $\varrho = \frac{45 \cdot 20000}{15} = 60000$ mm $= 60$ m.

Für die Strebfestigkeit giebt die elementare Annäherungsmethode $P = \frac{2JE}{l^2}$, die genauere Eulersche Methode $P = \frac{\pi^2}{4}\frac{JE}{l^2}$ für den sogenannten ersten Fall.

88) **Aufgabe.** Der Querschnitt einer hohlen Säule mit vier Verstärkungsrippen habe die Dimensionen $d = 200$ mm, $d_1 = 160$ mm, also Wandstärke $\delta = 20$ mm, ferner sei für die Rippen $b = 20$ mm, $h = 60$ mm. Wie groſs ist das Trägheitsmoment T?

Auflösung.

$$T = \frac{\pi}{64}(200^4 - 160^4) + \frac{20}{12}\left[(200 + 120)^3 - 200^3\right] + \frac{120}{12} \cdot 20^3$$
$$= 87\,731\,000.$$

89) **Aufgabe.** Ein Schleifstein habe den Radius $r = 1$ m und das Gewicht 1000 kg. Wieviel Drehungsenergie besitzt er bei 1, 2, 3 Umdrehungen in der Sekunde?

Auflösung. Bei einer Umdrehung in der Sekunde ist die Energie

$$E_1 = m\frac{r^2}{2}\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{1000}{9{,}81}\frac{1^2}{2}\frac{4\pi^2}{2} = 1006 \text{ mkg},$$

bei 2 Umdrehungen

$$E_2 = 4 \cdot 1006 = 4024 \text{ mkg},$$

bei 3 Umdrehungen

$$E_3 = 9 \cdot 1006 = 9054 \text{ mkg}.$$

90) **Aufgabe.** Ein Schwungring wiege 20 000 kg und habe die Radien $r = 4$ m und $r_1 = 3{,}6$ m bei einfach rechteckigem Querschnitt. Wie grofs ist seine Drehungswucht (Energie) bei 1, 2, 3 Umdrehungen in der Sekunde?

Auflösung.

$$T = \frac{m \cdot (r^2 + r_1^2)}{2},$$

folglich

$$E_1 = \frac{m(r^2 + r_1^2)}{2}\frac{4\pi^2}{2} = \frac{20\,000}{9{,}81} \cdot \frac{4^2 + 3{,}6^2}{2} \cdot \frac{4\pi^2}{2} = 582\,720 \text{ mkg},$$

demnach

$$E_2 = 4 \cdot 582\,720 = 2\,330\,880 \text{ mkg}, \quad E_3 = 9 \cdot 582\,720 = 5\,244\,480 \text{ mkg}.$$

91) **Aufgabe.** Ein Schwungring habe die Radien $r = 3$ m und $r_1 = 2{,}8$ m und das Gewicht 10 000 kg. Jeder der sechs Radarme wiege 300 kg, je zwei davon mögen als ein Rechteck von der Diagonale $d = 2\,r_1$ betrachtet werden. Wie grofs ist die Drehungswucht bei 1, 2, 3 Umdrehungen in der Sekunde?

Auflösung.

$$T = \frac{m_1(r^2 + r_1^2)}{2} + 3 \cdot 600 \cdot \frac{m_2}{12}(2r_1)^2,$$

wo

$$m_1 = \frac{10\,000}{9{,}81}, \quad m_2 = \frac{600}{9{,}81}$$

ist. Es wird

$$E_1 = 26\,400 \text{ mkg}, \quad E_2 = 105\,600 \text{ mkg}, \quad E_3 = 237\,600 \text{ mkg}.$$

92) **Bemerkung.** Wirken an einer irgendwie gestalteten Scheibe drehende Kräfte $p_1, p_2, p_3 \ldots$ an den Radien $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ und ist T das gesamte Trägheitsmoment, so wird die dem Radius 1 entsprechende Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{\Sigma p \varrho}{T}$$

und die Bewegungsformeln, die den drei Fallformeln entsprechen, werden

$$\vartheta = \gamma t, \quad \widehat{w} = \tfrac{1}{2}\gamma t^2, \quad \vartheta = \sqrt{2\gamma\widehat{w}}.$$

93) **Aufgabe.** Um die Achse einer Kreisscheibe sei ein Faden geschlungen, der am freien Ende festgehalten werde, so dass die Scheibe nur drehend fallen kann. Wie schnell fällt sie und wie grofs ist die Fadenspannung?

Auflösung. Arbeit der Schwerkraft gleich der Energiesumme aus der fortschreitenden und drehenden Bewegung, also

$$m\frac{v^2}{2} + T\frac{\vartheta^2}{2} = ph.$$

Die Drehungsgeschwindigkeit am Achsenradius ϱ ist gleich der Fallgeschwindigkeit v, folglich ist die erstere, am Radius 1 gemessen, $\vartheta = \frac{v}{\varrho}$, also wird

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{T}{2}\frac{v^2}{\varrho^2} = ph,$$

die dritte Fallformel wird also

$$v = \sqrt{2\left(\frac{m\varrho^2}{m\varrho^2 + T}g\right)h},$$

so dafs, wie aus $v = \sqrt{2g_1 h}$ folgt, die Beschleunigung des Falles wird

$$g_1 = \frac{m\varrho^2}{m\varrho^2 + T}g.$$

Die Fadenspannung wird gleich $g - g_1$.

94) **Aufgabe.** Eine Kreisscheibe werde mit den Achsenenden auf zwei schräge Leisten gelegt und rolle so, ohne zu gleiten, auf schiefer Ebene herab. Welcher Art ist die Bewegung?

Auflösung. Wie vorher wird

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2}\frac{v^2}{2\varrho^2} = mgh$$

oder

$$\frac{v^2}{2}\frac{2\varrho^2 + r^2}{2\varrho^2} = gh,$$

also

$$v = \sqrt{2\left(\frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2}g\right)h} = \sqrt{2\left(\frac{2\varrho^2}{r^2 + 2\varrho^2}g \sin\alpha\right)l},$$

wo l die Länge, α den Neigungswinkel der schiefen Ebene bedeutet. Die fortschreitende Bewegung hat also die Beschleunigung

$$g_1 = \frac{2\varrho^2 \sin\alpha}{r^2 + 2\varrho^2} g.$$

95) **Aufgabe.** Eine Rechtecksscheibe schwinge als Pendel um eine senkrecht auf ihr stehende, durch den obersten Punkt der Mittellinie gehende Achse. Wie grofs ist die Schwingungsdauer?

Auflösung. Für ein mathematisches Pendel ist $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, hier ist $l = \frac{T_A}{M_A}$, wo T_A das polare Trägheitsmoment in Bezug auf den Drehungspunkt A, M_A das statische Moment in Bezug auf diesen Punkt bedeutet, also

$$l = \frac{m\frac{d^2}{12} + m\left(\frac{h}{2}\right)^2}{m\frac{h}{2}} = \frac{d^2 + 3h^2}{6h},$$

wo d die Diagonale des Rechtecks ist. Also wird

$$t = \pi\sqrt{\frac{d^2 + 3h^2}{6gh}}.$$

96) **Aufgabe.** Ein Pendel bestehe aus einer Scheibe vom Radius r und dem Gewicht p_1 und einer Stange von der Länge l und dem Gewicht p_2. Wie schwingt es?

Auflösung. Wird die Stange als Rechtecksscheibe betrachtet, so ist für sie in Bezug auf den obersten Punkt

$$T_2 = \frac{m_2 d^2}{12} + m_2\left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

Ist das Rechteck sehr schmal, so ist $d = h$ zu setzen und man erhält

$$T_2 = \frac{m_2 h^2}{12} + m_2\frac{h^2}{4} = m_2\frac{h^2}{3} = m_2\frac{l^2}{3}.$$

Für die Scheibe ist

$$T_1 = \frac{m_1 r^2}{2} + m_1(r + l)^2 = \frac{m_1}{2}[r^2 + 2(r + l)^2].$$

Das gesamte Trägheitsmoment also wird

$$\frac{m_1}{2}[r^2 + 2(r + l)^2] + m_2\frac{l^2}{3}.$$

Das statische Moment wird $m_1(r + l) + m_2 \cdot \frac{l}{2}$, folglich ist die reducierte Pendellänge

$$l = \frac{T}{M} = \frac{\frac{m_1}{2}[r^2 + 2(r+l)^2] + m_2\frac{l^2}{3}}{m_1(r+l) + m_2\frac{l}{3}} = \frac{3p_1[r^2 + 2(r+l)^2] + 2m_2 l^2}{3[2m_1(r+l) + m_2 l]}.$$

Dies ist in $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ einzusetzen.

97) **Aufgabe.** Eine kurze cylindrische Triebwelle soll bei zulässiger Schubspannung S ein Moment $P \cdot R$ (in Kilogrammen und Millimetern) übertragen. Wie stark ist sie zu nehmen?

Auflösung. Die Festigkeit giebt die Traggleichung $PR = SW_p$, wo $W_p = \frac{1}{r}T_p$ ist. Also:

$$PR = S \cdot \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{2}{d} = \frac{S\pi d^3}{16}.$$

Demnach mufs werden

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,PR}{\pi S}}.$$

Beispiel. Sind 10 000 kg am Kurbelradius 500 mm wirkend zu übertragen, und ist 6 kg pro qmm die zulässige Spannung, so wird $d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10\,000 \cdot 500}{\pi \cdot 6}} = \sim 162$ mm. Läfst man nur 4 kg Spannung zu, so wird $d = 204$ mm.

98) **Bemerkung.** Die Kraft P wirke stets am Radius R, dann ist die Leistung bei einer Umdrehung $2R\pi P$ in Millimeter-Kilogrammen, bei n minutlichen Umdrehungen hat man das n-fache, also auf die Sekunde reduciert die Arbeit $\frac{n \cdot 2R\pi P}{60}$. Dividiert man durch 75 000, so hat man die Leistung in Pferdestärken. Ist die Anzahl der letzteren N, so ist also $N = \frac{2R\pi Pn}{60 \cdot 75\,000}$, also

$$PR = 716\,200\,\frac{N}{n}.$$

Setzt man dies in die letzte Formel ein, so folgt als Wellenstärke

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 716\,200}{\pi S}\,\frac{N}{n}}.$$

99) **Aufgabe.** Eine kurze schmiedeiserne Welle soll 200 Pferdestärken bei 120 Touren übertragen. Wie stark mufs sie genommen werden, wenn 6 kg Spannung zugelassen werden?

Auflösung.

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 716\,200}{\pi \cdot 6} \cdot \frac{200}{120}} = \sim 100 \text{ mm}.$$

100) **Aufgabe.** Die Panzerfregatte „König Wilhelm“ hat eine Maschine von 8325 indicierten Pferdestärken bei 63,86 Touren. Wie stark müfste die schmiedeiserne Schraubenwelle zu nehmen sein bei 6 kg zulässiger Spannung?

Auflösung.

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 716\,200}{\pi \cdot 6} \cdot \frac{8325}{63{,}86}} = \sim 430 \text{ mm.}$$

Der Erbauer hat 457 mm genommen.

101) **Bemerkung.** Die Lehre von der Drehungsfestigkeit zeigt elementar, dafs die Verdrehung in Graden

$$\vartheta = \frac{360\, l S}{d \pi G}$$

wird, wenn l die Länge der Welle in Millimetern, S die Randspannung, d der Durchmesser und G der sogenannte Gleitungsmodul $\left(\frac{2}{5}\text{ des Elasticitätsmoduls}\right)$ ist. Nach Nr. 97) ist aber $S = \frac{16\, PR}{\pi d^3}$, setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so wird

$$\vartheta = \frac{360 l\, 16\, PR}{d^4 \pi^2 G}, \quad \text{also} \quad d = \sqrt[4]{\frac{360 l\, 16\, PR}{\vartheta \pi^2 G}},$$

oder, wenn man die Tourenzahl und die Zahl der Pferdestärken einsetzt,

$$\vartheta = \frac{360 l\, 16 \cdot 716\,200}{d^4 \pi^2 G} \frac{N}{n}, \quad \text{also} \quad d = \sqrt[4]{\frac{360 l\, 16 \cdot 716\,200}{\vartheta \pi^2 G} \frac{N}{n}}.$$

Setzt man nun fest, dafs die Verdrehung einer längeren Transmissionswelle höchstens $\frac{1}{4}$ Grad auf das laufende Meter betragen soll, so ist für ϑ der Werth $\frac{1}{4}$, für l der Wert 1000 einzusetzen. Dann folgt als nötige Wellenstärke

$$d = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 360 \cdot 1000 \cdot 16\, PR}{\pi^2 G}},$$

oder, wenn Pferdestärken und Tourenzahlen eingesetzt werden,

$$d = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 360 \cdot 1000 \cdot 16 \cdot 716\,200}{\pi^2 G} \cdot \frac{N}{n}}.$$

102) **Aufgabe.** Eine schmiedeiserne Welle habe 5 m Länge und 120 mm Dicke, die Randspannung sei 6 kg. Um wieviel Grad verdreht sie sich dabei, und um wieviel auf das laufende Meter? ($G = 8000$ zu setzen.)

Auflösung.

$$\vartheta = \frac{360\, l S}{d \pi G} = \frac{360 \cdot 5000 \cdot 6}{120 \cdot \pi \cdot 8000} = \sim 3{,}58^0,$$

also um $0{,}716^0$ auf das laufende Meter.

103) **Aufgabe.** Eine schmiedeiserne Welle von 4 m Länge soll eine Kraft von 5000 kg am Radius 500 mm übertragen. Ihre Dicke sei 150 mm. Um wieviel Grad verdreht sie sich?

Auflösung.

$$\vartheta = \frac{360\, l\, 16\, P R}{d^4 \pi^2 G} = \frac{360 \cdot 4000 \cdot 16 \cdot 5000 \cdot 500}{150^4 \cdot \pi^2 \cdot 8000} = 1{,}44^0,$$

also um $0{,}36^0$ auf das laufende Meter.

104) **Aufgabe.** Eine schmiedeiserne Welle übertrage bei einer Länge von 3 m und einer Dicke von 200 mm 300 Pferdestärken bei 100 Touren. Um wieviel verdreht sie sich?

Auflösung.

$$\vartheta = \frac{360\, l\, 16 \cdot 716\,200}{d^4 \pi^2 G} \frac{N}{n} = \frac{360 \cdot 3000 \cdot 16 \cdot 716\,200 \cdot 300}{200^4 \cdot \pi^2 \cdot 8000} = 0{,}3^0,$$

also $0{,}1^0$ auf das laufende Meter.

105) **Aufgabe.** Eine schmiedeiserne Transmissionswelle soll bei $\frac{1}{4}$ Grad Verdrehung auf das laufende Meter 10 000 kg am Kurbelradius 500 mm übertragen. Wie stark ist sie zu nehmen?

Auflösung.

$$d = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 360 \cdot 1000 \cdot 16 \cdot 10\,000 \cdot 500}{\pi^2 \cdot 8000}} = \sim 195 \text{ mm}.$$

106) **Aufgabe.** Eine Schiffsschraubenwelle soll 10 000 Pferdestärken bei 70 Touren übertragen. Wie stark fällt sie aus bei der Berechnung auf Verdrehung $\frac{1}{4}$ Grad auf das laufende Meter? Wie stark bei Festigkeitsberechnung und 6 kg zulässiger Spannung?

Auflösung.

$$d = 415{,}6 \text{ mm bezw. } 442{,}85 \text{ mm}.$$

Letzteres ist zu wählen.

107) Bezüglich der Wellen von nicht kreisförmigem Querschnitt sei darauf hingedeutet, dafs man die polaren Trägheitsmomente, wie St. Venant bewiesen hat, nicht ohne weiteres anwenden darf. Der Grund liegt darin, dafs die Querschnitte bei der Verdrehung nicht

eben bleiben, was beim Kreisquerschnitt unter gewissen Voraussetzungen als richtig angenommen werden darf. Dagegen behalten die polaren Trägheitsmomente für andere dynamische Fragen ihre Bedeutung vollkommen bei.

108) Bezüglich der Biegungsfestigkeit sei noch hingewiesen auf die Zapfenberechnungen, auf die Profilbestimmung für Körper von überall gleicher Biegungsfestigkeit, z. B. auf die Kernkörper der Balanciers, Krummzapfen, Flügelachsen, Konsolen und dgl., auf die Formengebung der Haken, auf die Querschnitte gleicher Festigkeit für Gufseisen und anderes Material, bei dem die Tragmoduln für Zug und Druck verschieden sind. Auch hinsichtlich der Strebfestigkeit treten Profilbestimmungen entsprechender Art auf. Dies alles findet sich in den besseren Lehrbüchern über Festigkeit und Elasticität.

Es empfiehlt sich, für die gebräuchlichsten Querschnitte eine Tabelle anzufertigen, in der für jeden der Flächeninhalt, die Schwerpunktslage, das Trägheitsmoment, das Widerstandsmoment u. s. w. anzugeben sind. Jede Formel ist dabei möglichst weit auszurechnen, so dafs z. B. in $\frac{4}{3\pi}r$, $\frac{\pi}{32}d^4$, $\frac{11+8\sqrt{2}}{12}b^4$ die Faktoren von r, d^4 und b^4 durch die entsprechenden Zahlen ersetzt werden. Dabei genügt eine Genauigkeit auf drei Stellen für das praktische Bedürfnis vollkommen.

Reiches Übungsmaterial nebst Resultaten findet man in den Katalogen der Hüttenwerke und in den Tabellen einiger Lehrbücher der Festigkeitslehre.
