Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Beziehungen zwischen den Funktionen eines und desselben Winkels.

Beziehungen zwischen den sechs Funktionen eines und desselben Winkels.

§ 18. Nach § 16 ist:

$$\mathbf{cotg}\, \alpha = \frac{1}{\mathbf{tg}\, \alpha} \quad \text{oder} \quad \mathbf{tg}\, \alpha = \frac{1}{\mathbf{cotg}\, \alpha}$$

$$\mathbf{cosec}\, \alpha = \frac{1}{\mathbf{sin}\, \alpha} \quad \text{oder} \quad \mathbf{sin}\, \alpha = \frac{1}{\mathbf{cosec}\, \alpha} \qquad \text{(I.)}$$

$$\mathbf{sec}\, \alpha = \frac{1}{\mathbf{cos}\, \alpha} \quad \text{oder} \quad \mathbf{cos}\, \alpha = \frac{1}{\mathbf{sec}\, \alpha}$$

Zu diesen Reziprozitätsbeziehungen treten noch einige andere hinzu, welche wir aus den durch die Funktionslinien und den Radius gebildeten rechtwinkligen Dreiecken erhalten, wenn wir auf dieselben den Pythagoräischen Lehrsatz in folgender Form anwenden: Das (arithmetische) Quadrat der Hypotenusen-Maßzahl ist gleich der Summe aus den Quadraten der beiden Katheten-Maßzahlen.

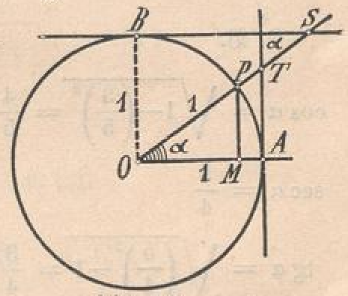


Fig. 58.

Setzen wir $r = 1$, so sind die Maßzahlen der Funktionslinien (Fig. 58) gleich den entsprechenden Funktionen des Winkels α und wir erhalten aus:

$$\triangle OPM \ldots\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1^{*}) \ldots \begin{cases} \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \end{cases}$$

$$\triangle OAT \ldots\ \sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = 1 \ldots \begin{cases} \sec\alpha = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \\ \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\sec^2\alpha - 1} \end{cases} \quad \text{(II.)}$$

$$\triangle OBS \ldots \operatorname{cosec}^2\alpha - \operatorname{cotg}^2\alpha = 1 \ldots \begin{cases} \operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha} \\ \operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1} \end{cases}$$

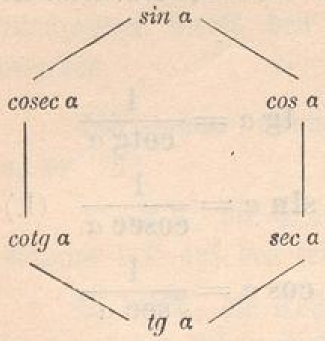
Endlich ergibt sich noch aus dem Dreiecke OPM:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PM}{OM} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{OM}{PM}$$

oder durch Übergang auf die Maßzahlen:

$$\mathbf{tg}\, \alpha = \frac{\mathbf{sin}\, \alpha}{\mathbf{cos}\, \alpha} \qquad \mathbf{cotg}\, \alpha = \frac{\mathbf{cos}\, \alpha}{\mathbf{sin}\, \alpha} \qquad \text{(III.)}$$

*) Man schreibt: $\sin^2\alpha$ statt $(\sin\alpha)^2$
$\cos^2\alpha$ statt $(\cos\alpha)^2$ u. s. f.



Auf Grund der mit (I) und (II) bezeichneten Beziehungen lassen sich die sechs Funktionen eines und desselben Winkels nach nebenstehendem Schema so gruppieren, daß sich aus jeder Funktion die beiden benachbarten nach (I und II) berechnen lassen.

Ist eine Funktion des Winkels α bekannt, so kann man demnach alle übrigen Funktionen dieses Winkels berechnen.

Man benutze dabei das vorstehende Schema, indem man, von der gegebenen Funktion ausgehend, entweder nach beiden Richtungen oder nur nach einer Richtung den Kreis durchläuft.*)

Z. B.

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3}$$

$$\sec\alpha = \frac{5}{4} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2-1} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1} = \frac{3}{4} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$$

Übungsbeispiele.

Gegeben:

1. $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$
2. $\sin\alpha = 0{\cdot}8$
3. $\cos\beta = 0{\cdot}3$
4. $\operatorname{cosec}\gamma = \sqrt{\frac{a+1}{a}}$
5. $\operatorname{tg} 45^0 = 1$
6. $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{1}{m-1}}$
7. $\operatorname{cotg} y = 3$
8. $\operatorname{cosec} z = 3$

Man bestimme die übrigen Funktionen dieser Winkel.

---

*) Die Formeln III können oft mit Vorteil angewendet werden, wenn aus einer gegebenen Funktion nicht alle übrigen Funktionen, sondern nur eine derselben berechnet werden soll. Doch ist der dadurch erzielte Vorteil zu gering, um ausführlich darauf einzugehen. Dagegen werden uns die Formeln III nach anderer Richtung wichtige Dienste leisten.

9. Folgende Ausdrücke zu vereinfachen:

a) $\sec\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$ *b)* $\operatorname{cosec}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\alpha$ *c)* $\sec\alpha : (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)$

d) $\frac{\operatorname{cotg}\alpha - 1}{\operatorname{cosec}\alpha}$ *e)* $(a + a\operatorname{tg}^2\alpha) . \cos\alpha$ *f)* $\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha}$

10. Man stelle Formeln auf, nach denen tangens und cotangens nur durch den sinus oder durch den cosinus ausgedrückt erscheinen.

Resultate.

1. $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ u. s. f.

2. $\cos\alpha = 0{\cdot}6$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ u. s. f.

3. $\sin\beta = \frac{1}{10}\sqrt{91}$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}\sqrt{91}$ u. s. f.

4. $\sin\gamma = \sqrt{\frac{a}{a+1}}$ $\cos\gamma = \sqrt{\frac{1}{a+1}}$ $\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{a}$ u. s. f.

5. $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ u. s. f.

6. $\cos x = \sqrt{\frac{m-1}{m}}$ $\sin x = \frac{1}{\sqrt{m}}$ u. s. f.

7. $\sin y = \frac{1}{10}\sqrt{10}$ $\cos y = \frac{3}{10}\sqrt{10}$ u. s. f.

8. $\operatorname{cotg} z = \sqrt{8}$ $\cos z = \frac{1}{3}\sqrt{8}$ u. s. f.

9. *a)* $\operatorname{cosec}\alpha$ *b)* $\sec\alpha$ *c)* $\sin\alpha$

d) $\cos\alpha - \sin\alpha$ *e)* $\frac{a}{\cos\alpha}$ *f)* $\sin\alpha + \cos\alpha$

10. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$

$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$

Goniometrische Gleichungen.

§ 19. Ist ein Winkel dadurch bestimmt, daß eine zwischen zwei oder mehreren seiner Funktionen giltige Gleichung gegeben ist, so nennt man diese eine goniometrische Gleichung. Um sie zu lösen, führe man zunächst jene Funktionen auf eine einzige Funktion des