Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

urn:nbn:de:hbz:466:1-76733

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

von

Prof. Hans Hartl. II

Zweite Auflage

Ausgabe A. — Nullpunkt rechts.

Alfred Hölder,
k. u. k. Hof- und Universitäts-Buchhändler

Girndt

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie.

Für den Unterrichtsgebrauch und für das Selbststudium.

Von
Hans Hartl,
k. k. Professor an der Staatsgewerbeschule in Reichenberg.

Mit 117 in den Text gedruckten Abbildungen und über 500 Übungsbeispielen nebst deren Resultaten.

Zweite, umgearbeitete Auflage.

Ausgabe A. — Nullpunkt rechts.

Preis gebunden 1 K 64 h.

Wien, 1906.
Alfred Hölder,
k. u. k. Hof- und Universitäts-Buchhändler,
I., Rotenturmstraße 13.

Druck von Gebrüder Stiepel in Reichenberg.

Inhalt.

Einleitung.

In der Planimetrie wird gelehrt: Wenn die Winkel zweier Dreiecke paarweise gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich. Dann haben die Seiten des einen Dreieckes unter einander genau dieselben Verhältnisse, wie die entsprechenden (homologen) Seiten des zweiten Dreieckes.

Wenn z. B. von den beiden Dreiecken MNP und ABC bekannt ist,

daß $\sphericalangle M = \sphericalangle A$

$\sphericalangle N = \sphericalangle B$ ist,

so muß auch:

$\sphericalangle P = \sphericalangle C$

und das Verhältnis

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{n}{p} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{p}{m} = \frac{c}{a}$$

sein.*)

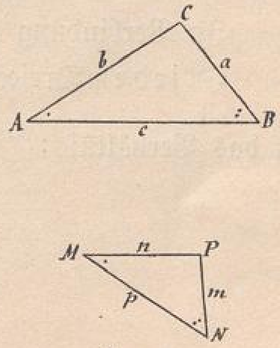


Fig. 1.

Die Längenverhältnisse zwischen den drei Seiten eines Dreieckes sind demnach lediglich durch die Größe der Dreieckswinkel bestimmt.

Es steht daher außer Zweifel, daß, wenn von einem Dreiecke die drei Winkel gegeben sind, die Seiten dieses Dreieckes zu einander in ganz bestimmten, von der Größe der gegebenen Winkel abhängigen Verhältnissen stehen müssen.

*) Wir folgen hier der üblichen Bezeichnung, nach welcher die Seiten, welche den Winkeln A, B, C, M .... gegenüberliegen, mit a, b, c, m .... bezeichnet werden.

So werden z. B. in **jedem** Dreiecke, in welchem die drei Winkel 50°, 60° und 70° betragen, die Seitenverhältnisse ganz bestimmte Werte besitzen, die wir (wenigstens annähernd) finden können, wenn wir ein einziges solches Dreieck mit möglichster Genauigkeit konstruieren, seine Seiten abmessen und die durch die verschiedenen Verhältnisse angezeigten Divisionen verrichten.

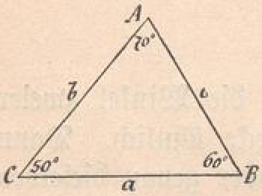


Fig. 2.

Eine derartige Konstruktion und Abmessung hat an einem Dreiecke, das in Fig. 2 in $\frac{1}{10}$ seiner wirklichen Größe verzeichnet ist und in welchem $\sphericalangle A = 70°$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 50°$ ist, folgende Abmessungen:

$a = 25\ cm$, $b = 23{\cdot}04\ cm$, $c = 20{\cdot}38\ cm$

und demgemäß die Seitenverhältnisse:

$\frac{c}{b} = 0{\cdot}8845$ $\quad \frac{b}{a} = 0{\cdot}9216$ $\quad \frac{a}{c} = 1{\cdot}2267$ ergeben.

In Verbindung mit dem obigen kann man daher behaupten:

In **jedem** Dreiecke, in welchem die Winkel 50°, 60°, 70° betragen,

ist das Verhältnis: $\frac{\text{kleinste Seite}}{\text{mittlere Seite}} = 0{\cdot}8845$

$$\frac{\text{mittlere Seite}}{\text{größte Seite}} = 0{\cdot}9216$$

$$\frac{\text{größte Seite}}{\text{kleinste Seite}} = 1{\cdot}2267.$$

Wir wollen an einem Beispiele zeigen, wie wir diese gewonnenen Verhältniswerte anwenden könnten.

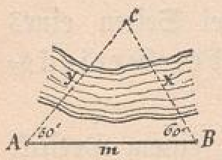


Fig. 3.

Eine in ebenem Gelände mit Winkelmeßinstrumenten und Meßlatte vorgenommene Messung hat ergeben, daß die von den Punkten A und B nach dem unzugänglichen Punkte C gerichteten Visierlinien mit der „**Standlinie**“ AB die Winkel: $\sphericalangle A = 50°$ $\sphericalangle B = 60°$ einschließen, und daß $AB = m = 1250\ m$ ist.

Man bestimme die Entfernungen $BC = x$ und $AC = y$.

Nach den Angaben ist $x < y < m$, daher nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{y}{m} = 0{\cdot}9216 \ldots . \; y = 0{\cdot}9216 \,.\, m = \mathbf{1152}\ m$$

$$\frac{m}{x} = 1{\cdot}2267 \ldots . \; x = m : 1{\cdot}2267 = \mathbf{1019}\ m$$

An diesem Beispiele ersehen wir, daß es möglich ist, aus einer Dreiecksseite die übrigen Seiten mit Hilfe der Winkel zu berechnen, wenn man die diesen Winkeln entsprechenden Seitenverhältnisse kennt. Diese Seitenverhältnisse nun sind aus gewissen Tabellen, die wir später kennen lernen werden, zu entnehmen.

Aufgabe der ebenen Trigonometrie ist es, mit Hilfe solcher Tabellen — (ihres unentbehrlichen Hilfsmittels) — im allgemeinen folgende Aufgabe zu lösen: Aus drei bestimmenden Stücken eines Dreieckes sind die übrigen Stücke desselben durch Rechnung zu ermitteln.*)

Wollte man für die verschiedenen Winkelkombinationen des schiefwinkligen Dreieckes eine Tafel der entsprechenden Seitenverhältnisse aufstellen (etwa in der Art, wie wir dies oben für die bestimmte Kombination: 50°, 60°, 70° getan haben), so würde diese Tafel eine zu große Ausdehnung gewinnen. Es ist deshalb von großem Vorteile, zunächst bloß das rechtwinklige Dreieck in Betracht zu ziehen, in welchem der rechte Winkel den festen Wert von 90° besitzt und demnach nur noch einem Winkel eine selbständige Veränderlichkeit zukommt. Dazu tritt noch die Erwägung, daß man jedes schiefwinklige Dreieck durch Fällen einer Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen und dadurch die Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes auf die Berechnung des rechtwinkligen Dreieckes zurückführen kann.

Das rechtwinklige Dreieck.

§ 1. Verzeichnet man beliebig viele rechtwinklige Dreiecke, welche außer dem rechten Winkel noch einen Spitzwinkel gleich haben, so sind alle diese Dreiecke einander ähnlich. Das Verhältnis zweier Seiten des einen Dreiecks ist dann genau gleich dem Verhältnisse der beiden homologen (gleichliegenden) Seiten in jedem der anderen Dreiecke.

*) Die Berechnung der unbekannten Stücke bezeichnet man kürzer als „Auflösung“ des Dreieckes.

Wenn beispielsweise in den nebenstehenden rechtwinkligen Drei-ecken ABC und MNP

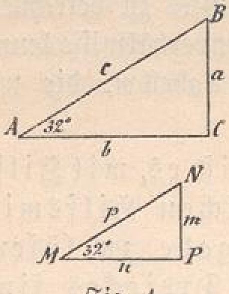


Fig. 4.

$\sphericalangle M = \sphericalangle A = 32^0$ ist,

so muß $\triangle MNP \sim \triangle ABC$,

folglich das Verhältnis

$$\frac{m}{p} = \frac{a}{c} \qquad \frac{n}{p} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b} \qquad \frac{n}{m} = \frac{b}{a} \text{ sein.}$$

Verzeichnen wir die beiden Dreiecke der Fig. 4 in hundertfacher Größe, so ergibt eine genaue Abmessung der Seiten:

$$a = 13 \cdot 25\ dm, \quad b = 21 \cdot 2\ dm, \quad c = 25\ dm,$$

$$m = 8 \cdot 48\ dm, \quad n = 13 \cdot 57\ dm, \quad p = 16\ dm.$$

Es ist also

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{c} &= 13 \cdot 25 : 25 = 0 \cdot 530 \\ \frac{m}{p} &= \ \ 8 \cdot 48 : 16 = 0 \cdot 530 \end{aligned}\right\} \text{demnach } \frac{a}{c} = \frac{m}{p} = 0 \cdot 530$$

Ebenso würden wir erhalten:

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{p} = 0 \cdot 848$$

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} = 0 \cdot 625$$

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{m} = 1 \cdot 600$$

Daraus entnehmen wir:

In jedem rechtwinkligen Dreiecke, in welchem ein Spitzwinkel 32^0 beträgt, ist das Verhältnis:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} \doteq 0 \cdot 530 \\ &\frac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} \doteq 0 \cdot 848 \\ &\frac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Anliegende Kathete}} \doteq 0 \cdot 625 \\ &\frac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Gegenüberliegende Kathete}} \doteq 1 \cdot 600 \end{aligned}\right\} {}^{*)}$$

*) Die Bezeichnungen „anliegend" und „gegenüberliegend" beziehen sich auf die Lage der betreffenden Kathete gegen den Winkel 32⁰.

Das Zeichen $\doteq$ bedeutet: „annähernd gleich".

Die Verwendbarkeit dieser Verhältniswerte, die wir uns vorläufig wie oben durch Abmessung und Ausführung der Divisionen ermittelt denken können (siehe Anhang I), leuchtet sofort ein. Wenn ein rechtwinkliges Dreieck vorliegt, in welchem ein Winkel (z. B. $\mathbf{A = 32^0}$) und außerdem eine Seite (z. B. Hypotenuse $\mathbf{c = 26 \cdot 5}$ m) bekannt sind, so lassen sich die beiden Katheten (a und b) nach Vorstehendem in folgender Weise ermitteln:

$$\frac{a}{c} = 0 \cdot 530, \quad \text{daher} \quad a = 0 \cdot 530 \times c = \mathbf{14 \cdot 05} \text{ m}$$

$$\frac{b}{c} = 0 \cdot 848, \quad b = 0 \cdot 848 \times c = \mathbf{22 \cdot 47} \text{ m}$$

Anmerkung. Man prüfe die Rechnung, indem man das Dreieck nach verjüngtem Maßstabe aus den gegebenen Stücken konstruiert und dann die Seiten a und b abmißt.

§ 2. Der Kürze halber hat man für die obengenannten Verhältnisse bestimmte Namen eingeführt u. zw. nennt man das Verhältnis:

$\dfrac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}}$	den **sinus**	jenes Winkels, auf den sich die Ausdrücke „gegenüberliegend" und „anliegend" beziehen.
$\dfrac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}}$	den **cosinus**	
$\dfrac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Anliegende Kathete}}$	den **tangens**	
$\dfrac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Gegenüberliegende Kathete}}$	den **cotangens**	

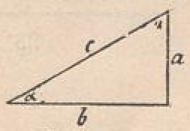


Fig. 5.

Demgemäß ist z. B. in Fig. 5 zu setzen:

$\frac{a}{c}$ = sinus des Winkels α oder kürzer $\frac{a}{c} = \sin \alpha$

$\frac{b}{c}$ = cosinus des Winkels α " " $\frac{b}{c} = \cos \alpha$

$\frac{a}{b}$ = tangens des Winkels α " " $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$

$\frac{b}{a}$ = cotangens des Winkels α " " $\frac{b}{a} = \operatorname{cotg} \alpha$

Man sieht sofort, daß tangens und cotangens reziprok sind, daß also

$$\mathbf{cotg}\, \alpha = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{tg}\, \alpha} \quad \text{und} \quad \mathbf{tg}\, \alpha = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cotg}\, \alpha} \quad \text{ist.}$$

Unter Benützung der eben besprochenen Benennungen können wir somit die in § 1 entwickelten Ergebnisse folgendermaßen anschreiben:

$$\sin 32^{0} \doteq 0 \cdot 530 \qquad \operatorname{tg} 32^{0} \doteq 0 \cdot 625$$
$$\cos 32^{0} \doteq 0 \cdot 848 \qquad \operatorname{cotg} 32^{0} \doteq 1 \cdot 600$$

Wir nennen die angegebenen Verhältnisse die trigonometrischen oder goniometrischen Funktionen oder kurz die Funktionen des betreffenden Winkels.

§ 3. Es ist einleuchtend, daß diese Funktionen ebenso wie für den Winkel 32° auch für jeden anderen Spitzwinkel ganz bestimmte Zifferwerte besitzen müssen, die wir annähernd etwa in folgender Art graphisch ermitteln könnten:

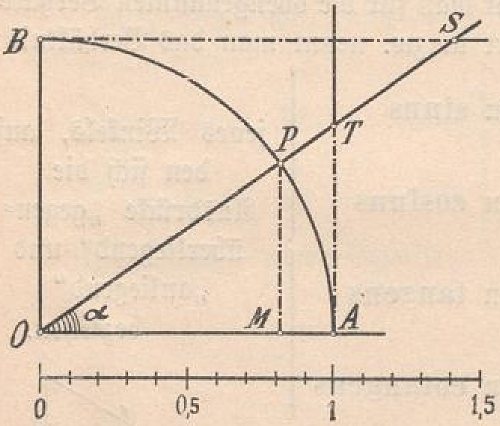


Fig. 6.

Wir verzeichnen mit dem Halbmesser O A = r = 1 *dm* den Viertelkreis A B mit den auf einander senkrechten Tangenten A T und B S. (Fig. 6).*) Um nun für einen beliebigen Winkel α die Funktionen zu ermitteln, tragen wir diesen Winkel von O A aus auf, so daß

$\sphericalangle$ A O S = $\sphericalangle$ α ist.

Es ist dann auch als Wechselwinkel

$\sphericalangle$ B S O = $\sphericalangle$ α

Machen wir nun P M $\perp$ O A und ist z. B. $\sphericalangle \alpha = 35^{0}$, so ergibt eine genaue Abmessung

P M = 0·573 *dm* O M = 0·819 *dm* A T = 0·700 *dm* B S = 1·428 *dm*

und nach obigem folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke:

$$\text{OMP} \;.\;.\;.\;.\;.\; \sin \alpha = \frac{\text{PM}}{\text{OP}} = \frac{0 \cdot 573 \ dm}{1 \ dm} = 0 \cdot 573$$

$$\text{OMP} \;.\;.\;.\;.\;.\; \cos \alpha = \frac{\text{OM}}{\text{OP}} = \frac{0 \cdot 819 \ dm}{1 \ dm} = 0 \cdot 819$$

$$\text{OAT} \;.\;.\;.\;.\;.\; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{AT}}{\text{OA}} = \frac{0 \cdot 700 \ dm}{1 \ dm} = 0 \cdot 700$$

$$\text{OBS} \;.\;.\;.\;.\;.\; \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{BS}}{\text{OB}} = \frac{1 \cdot 428 \ dm}{1 \ dm} = 1 \cdot 428$$

*) Fig. 6 zeigt den Viertelkreis in $^{1}/_{3}$ der gedachten Größe.

Ist also in Fig. 6 der Kreishalbmesser = 1, so geben die Maßzahlen der Strecken PM, OM, AT und BS unmittelbar die Funktionen des Winkels α an. Diese Strecken heißen daher die Funktionslinien.

Indem wir dem Winkel α der Reihe nach verschiedene Werte beilegen und stets die Funktionslinien verzeichnen und abmessen, können wir eine ganze Tafel zusammenstellen, welche für die einzelnen Spitzwinkel die zugehörigen Funktionswerte angibt.

Solche Funktionstafeln sind das unentbehrliche Hilfsmittel für alle trigonometrischen Rechnungen. Die in den Jelinek'schen mathematischen Tafeln enthaltenen Funktionstabellen haben folgende Anordnung:

33°

33°	sin.	+δ1''	cos.	−δ1''	tg.	+δ1''	cotg.	−δ1''	
0'	0·54464	0·41	0·83867	0·27	0·64941	0·69	1·53987	1·63	60'
2'	54513		83835		65024		53791		58'
10	0·54708	40	0·83708	27	0·65355	69	1·53010	62	50
12	54756	41	83676	26	65438	69	52816	62	48
14	54805	41	83645	27	65521	69	52622	61	46
30'	0·55194	0·41	0·83389	0·27	0·66189	0·70	1·51084	1·59	30'
	cos.	−δ1''	sin.	+δ1''	cotg.	−δ1''	tg.	+δ1''	56°

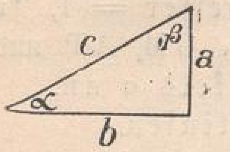
Links sind die Winkel in Sprüngen von 2 zu 2 Minuten, oben sind die Funktionen angeschrieben.*) Wir entnehmen z. B. dem obenstehenden Ausschnitte aus der Tabelle:

sin 33° 0' = 0·54464 — cos 33° 2' = 0·83835
sin 33° 12' = 0·54756 — cos 33° 10' = 0·83708
sin 33° 30' = 0·55194 — cos 33° 30' = 0·83389

tg 33° 0' = 0·64941 — cotg 33° 2' = 1·53791
tg 33° 14' = 0·65521 — cotg 33° 12' = 1·52816
tg 33° 30' = 0·66189 — cotg 33° 30' = 1·51084

*) Die übrigen Aufschriften werden später erklärt werden, sind übrigens auch in der Anleitung zum Gebrauche der Tafeln eingehend erläutert.

Hat man nicht die Jelinek'schen, sondern andere Tafeln im Gebrauche, so wende man das hier Gesagte sinngemäß auf diese Tafeln an.



Von großer Wichtigkeit für die Einrichtung der Funktions-Tabellen ist die Doppeldeutigkeit der Funktionswerte, welche aus folgender Betrachtung ersichtlich wird.

Fig. 7.

Nach unseren Definitionen ist in Fig. 7

$$\frac{b}{c}\begin{cases} \text{bezügl. des } \sphericalangle \beta \ldots \ldots \dfrac{\text{Gegenüberliegd. Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \sin \beta \\ \text{bezügl. des } \sphericalangle \alpha \ldots \ldots \dfrac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \cos \alpha \end{cases}$$

$$\text{Somit: } \frac{b}{c} = \begin{cases} = \sin \beta \\ = \cos \alpha \end{cases} \quad \text{folglich} \quad \sin \beta = \cos \alpha$$

$$\text{Ebenso: } \frac{a}{c} = \begin{cases} = \cos \beta \\ = \sin \alpha \end{cases} \quad \text{"} \quad \cos \beta = \sin \alpha$$

$$\frac{b}{a} = \begin{cases} = \operatorname{tg} \beta \\ = \operatorname{cotg} \alpha \end{cases} \quad \text{"} \quad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\frac{a}{b} = \begin{cases} = \operatorname{cotg} \beta \\ = \operatorname{tg} \alpha \end{cases} \quad \text{"} \quad \operatorname{cotg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$$

wobei $\beta = 90^{0} - \alpha$ ist.

Bezeichnet man sinus und cosinus und ebenso tangens und cotangens als „sinnverwandte Funktionen“, so lassen sich die vorstehenden vier Gleichungen zu folgendem allgemeinen Satze zusammenfassen:

Die Funktion eines beliebigen Spitzwinkels β gibt zugleich die sinnverwandte Funktion des zugehörigen Komplementswinkels (90^{0}—β) an.

Die Funktionen der Winkel von 45^{0} bis 90^{0} lassen sich demgemäß auf die Funktionen ihrer Komplementswinkel, d. i. der Winkel zwischen 45^{0} und 0^{0}, zurückführen. Dieser wichtige Umstand wird bei der Einrichtung der Funktionstabellen in folgender Weise benützt.

Zu jedem linksstehenden Winkel ist in gleicher Höhe rechts sein Komplementswinkel angegeben. Den oben am Kopfe der Tabelle angegebenen Funktionsbezeichnungen stehen unten die entsprechenden sinnverwandten Funktionen gegenüber.

Jeder Tabellenwert bedeutet nun zweierlei:

1. die oben angegebene Funktion des linksstehenden Winkels und gleichzeitig
2. die unten angegebene Funktion des rechtsstehenden Winkels.

So entnehmen wir z. B. dem obigen Bruchstücke der Tabelle:

$$0\cdot54708 = \begin{cases} = \sin 33^{0}\,10' \\ = \cos 56^{0}\,50' \end{cases} \qquad 0\cdot83645 = \begin{cases} = \cos 33^{0}\,14' \\ = \sin 56^{0}\,46' \end{cases}$$

$$0\cdot66189 = \begin{cases} = \operatorname{tg} 33^{0}\,30' \\ = \operatorname{cotg} 56^{0}\,30' \end{cases} \qquad 1\cdot53791 = \begin{cases} = \operatorname{cotg} 33^{0}\,2' \\ = \operatorname{tg} 56^{0}\,58' \end{cases}$$

$$0\cdot54464 = \begin{cases} = \sin 33^{0}\,0' \\ = \cos 56^{0}\,60' = \cos 57^{0} \end{cases} \qquad 0\cdot64941 = \begin{cases} = \operatorname{tg} 33^{0} \\ = \operatorname{cotg} 57^{0} \end{cases}$$

Übungsbeispiele.

a) Man bestimme aus der Tabelle:

sin 15°	sin 17° 12′	sin 28° 40′
cos 25° 30′	cos 34° 24′	cos 7° 34′
tg 8°	tg 43° 8′	tg 33° 42′
cotg 42° 30′	cotg 10° 16′	cotg 5° 54′
sin 49°	sin 66° 12′	sin 47° 40′
cos 55° 30′	cos 50° 26′	cos 81° 52′
tg 72°	tg 82° 8′	tg 62° 36′
cotg 62° 30′	cotg 48° 2′	cotg 53° 44′

b) Man beachte die Funktionswerte für die Winkel 0°, 90° und 45° und leite dieselben nach Fig. 6 ab.

c) Wie groß sind die Winkel α, β, γ, δ, wenn: *)

1. $\sin\alpha = 0\cdot46947$	6. $\cos\beta = 0\cdot77273$	11. $\operatorname{tg}\gamma = 5\cdot39552$
2. $\cos\beta = 0\cdot82413$	7. $\operatorname{tg}\gamma = 0\cdot39930$	12. $\operatorname{cotg}\delta = 0\cdot59454$
3. $\operatorname{tg}\gamma = 0\cdot48773$	8. $\operatorname{cotg}\delta = 3\cdot53392$	13. $\sin\alpha = 0\cdot75088$
4. $\operatorname{cotg}\delta = 3\cdot44951$	9. $\sin\alpha = 0\cdot87462$	14. $\cos\beta = 0\cdot61932$
5. $\sin\alpha = 0\cdot58307$	10. $\cos\beta = 0\cdot35837$	15. $\operatorname{tg}\gamma = 1\cdot77230$
	16. $\operatorname{cotg}\delta = 0\cdot21377$	

*) Hat man zu einem gegebenen Funktionswerte den zugehörigen Winkel zu bestimmen, so beachte man:

Sinus- oder Cosinus-Werte, die kleiner (größer) als 0·707 .. sind, suche man in der ersten (zweiten) Reihe der Tafel.

Tangens- oder Cotangens-Werte, die kleiner (größer) als 1 sind, suche man in der dritten (vierten) Reihe der Tafel.

Resultate zu c.

1. 28°	5. 35° 40′	9. 61°	13. 48° 40′
2. 34° 30′	6. 39° 24′	10. 69°	14. 51° 44′
3. 26°	7. 21° 46′	11. 79° 30′	15. 60° 34′
4. 16° 10′	8. 15° 48′	12. 59° 16′	16. 77° 56′

Auflösung rechtwinkliger Dreiecke
mit Hilfe der Funktionstafeln.

§ 4. Für die Auflösung rechtwinkliger Dreiecke erweist es sich von Vorteil, die in § 2 aufgestellten Gleichungen (Definitionen) je nach einer Dreiecksseite aufzulösen und in dieser Form als textierte Lehrsätze festzuhalten.

In Fig. 8 ist:

1.) $\frac{a}{c} = \sin A$, folglich $\mathbf{a = c \,.\, \sin A}$

$\frac{b}{c} = \sin B$, " $\mathbf{b = c \,.\, \sin B}$ I.

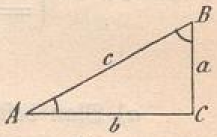


Fig. 8.

D. h. Jede Kathete ist gleich der Hypotenuse, multipliziert mit dem sinus des dieser Kathete gegenüberliegenden Winkels (Sinussatz).

2.) $\frac{b}{c} = \cos A$, . . . folglich $\mathbf{b = c \,.\, \cos A}$

$\frac{a}{c} = \cos B$, . . . " $\mathbf{a = c \,.\, \cos B}$ II.

D. h. Jede Kathete ist gleich der Hypotenuse, multipliziert mit dem Cosinus des dieser Kathete anliegenden Winkels (Cosinussatz).

Beispiel.

Gegeben $c = 110{\cdot}25\,cm$ $\sphericalangle A = 22°$

Dann ist $a = c \,.\, \sin A = 110{\cdot}25 \times 0{\cdot}37461 = \mathbf{41{\cdot}301}\ cm$

$b = c \,.\, \cos A = 110{\cdot}25 \times 0{\cdot}92718 = \mathbf{102{\cdot}221}\ cm$

Übungsbeispiele.

Man löse folgende rechtwinklige Dreiecke auf:

1. $c = 125\ cm$	2. $c = 99{\cdot}7\ cm$	3. $c = 235{\cdot}5\ mm$	4. $c = 293{\cdot}5\ m$
$\sphericalangle A = 37°$	$\sphericalangle A = 65°$	$\sphericalangle B = 41° 30'$	$\sphericalangle B = 71° 10'$

Resultate.

1. $a = 75{\cdot}227\ cm$ $\quad$ $b = 99{\cdot}83\ cm$
2. $a = 90{\cdot}359\ cm$ $\quad$ $b = 42{\cdot}135\ cm$
3. $a = 176{\cdot}38\ mm$ $\quad$ $b = 156{\cdot}05\ mm$
4. $a = 94{\cdot}748\ m$ $\quad$ $b = 277{\cdot}787\ m$

3.) Zwischen den beiden Katheten bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{a}{b} = \operatorname{tg} A, & \text{folglich} & \mathbf{a = b \cdot tg\, A} \\ \frac{b}{a} = \operatorname{tg} B, & \text{"} & \mathbf{b = a \cdot tg\, B} \end{array}\right\} \quad \text{III.}$$

D. h. Jede Kathete ist gleich der anderen Kathete, multipliziert mit dem Tangens des der ersteren gegenüberliegenden Winkels (Tangenssatz).

4.)
$$\left.\begin{array}{lll} \frac{a}{b} = \operatorname{cotg} B, & \text{folglich} & \mathbf{a = b \cdot cotg\, B} \\ \frac{b}{a} = \operatorname{cotg} A, & \text{"} & \mathbf{b = a \cdot cotg\, A} \end{array}\right\} \quad \text{IV.}$$

D. h. Jede Kathete ist gleich der anderen Kathete, multipliziert mit dem Cotangens des der ersteren anliegenden Winkels (Cotangenssatz).

Übungsbeispiele.

1. Wie groß ist die Kathete b, wenn in Fig. 8

$\alpha)$ $a = 25{\cdot}25\ m$, $\sphericalangle A = 29^0\ 20'$ $\quad$ $\beta)$ $a = 99{\cdot}95\ m$, $\sphericalangle B = 37^0\ 30'$ $\quad$ $\gamma)$ $a = 17{\cdot}85\ m$, $\sphericalangle A = 73^0\ 12'$ ist?

2. Wie groß ist die Kathete a, wenn in Fig. 8

$\alpha)$ $b = 715{\cdot}8\ mm$, $\sphericalangle A = 59^0\ 40'$ $\quad$ $\beta)$ $b = 357{\cdot}5\ dm$, $\sphericalangle B = 40^0\ 50'$ $\quad$ $\gamma)$ $b = 28{\cdot}35\ m$, $\sphericalangle A = 65^0\ 44'$ ist?

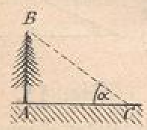


Fig. 9.

3. Wie viele Meter beträgt die Höhe AB eines vertikalen Baumes (Fig. 9), dessen Schatten AC auf horizontalem Boden $15{\cdot}75\ m$ mißt, wenn die Sonnenstrahlen unter $33^0\ 30'$ (α) einfallen?

Resultate.

1. $\alpha)$ $44{\cdot}93\ m$ $\quad$ $\beta)$ $76{\cdot}69$ $\quad$ $\gamma)$ $5{\cdot}388\ m$
2. $\alpha)$ $1223{\cdot}3\ mm$ $\quad$ $\beta)$ $413{\cdot}7\ dm$ $\quad$ $\gamma)$ $62{\cdot}885\ m$
3. $h = 10{\cdot}424\ m$

5.) Aus den Gleichungen I. und II. ergeben sich weiters noch die Gleichungen

$$\text{V.}\quad \begin{aligned} \mathbf{c} &= \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sin A}} \\ \mathbf{c} &= \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{\sin B}} \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \mathbf{c} &= \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{\cos B}} \\ \mathbf{c} &= \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{\cos A}} \end{aligned} \quad \text{VI.}$$

D. h. Die Hypotenuse ist gleich einer Kathete, dividiert durch den Sinus des dieser Kathete gegenüberliegenden (oder: dividiert durch den Cosinus des dieser Kathete anliegenden) Winkels.

Beispiele.

1. $a = 49{\cdot}5\ m$
$\sphericalangle A = 31^0 40'$

$c = \frac{a}{\sin A} = 49{\cdot}5 : 0{\cdot}52498$

$c = \mathbf{94{\cdot}29}\ m$

2. $b = 125{\cdot}8\ cm$
$\sphericalangle A = 62^0 50'$

$c = \frac{b}{\cos A} = 125{\cdot}8 : 0{\cdot}45658$

$c = \mathbf{275{\cdot}53}\ cm$

Für die Auflösung rechtwinkliger Dreiecke beachte man folgende, auf Klangähnlichkeit beruhende Merkregeln:

1. Immer, wenn die Hypote**nus**e in der Rechnung vorkommt, hat man **sinus** oder cos**inus** zu nehmen. (Sätze I, II, V und VI.)

2. Kommen nur die beiden **Kat**h**ete**n vor, so nimmt man **tangens** oder co**tangens**. (Sätze III, IV.)

Übungsbeispiele.

Man löse folgende rechtwinklige Dreiecke auf:

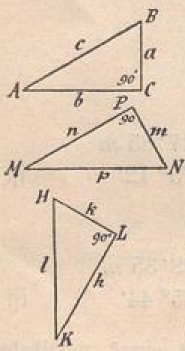


Fig. 10.

$\sphericalangle C = 90^0$ 1. $c = 58{\cdot}7\ m$, $\sphericalangle A = 29^0 10'$ 2. $c = 62{\cdot}3\ cm$, $\sphericalangle B = 37^0 30'$

$\sphericalangle P = 90^0$ 3. $m = 42{\cdot}7\ cm$, $\sphericalangle N = 53^0 20'$ 4. $n = 68{\cdot}3\ m$, $\sphericalangle N = 65^0 20'$

$\sphericalangle L = 90^0$ 5. $k = 53{\cdot}65\ m$, $\sphericalangle H = 72^0 20'$ 6. $l = 458{\cdot}73\ dm$, $\sphericalangle K = 39^0 40'$

7. Wie groß ist die Beschleunigungskomponente γ (Fig. 11), mit welcher eine Kugel über eine schiefe Ebene vom Neigungswinkel $\alpha = 17^0 40'$ herabrollt? (Beschleunigung der Schwere $g = 9{\cdot}81\ m$.)

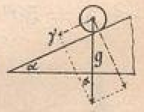


Fig. 11.

8. Ein auf horizontaler Unterlage liegender Körper (Fig. 12) wird durch eine unter dem Winkel $\alpha = 27^0 30$, geneigte Kraft $P = 25{\cdot}75\ kg$ geschoben.

a) Wie groß ist die Bewegungskomponente p?

b) Wie groß ist die zur Verstärkung der Reibung dienende Druck-Komponente n?

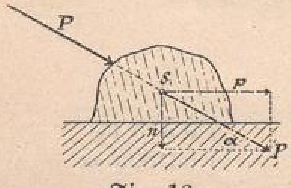


Fig. 12.

c) Wie groß ist die Reibung R, wenn der Reibungskoëffizient 0·21 und das Gewicht des Körpers $Q = 35·5\ kg$ ist?

9. *a)* Wie groß sind die Spannungen (z und d) in den Teilen a c und b c der in Fig. 13 dargestellten Eisenkonstruktionen, wenn die vertikale Belastung
$Q = 785\ kg$ und der $\sphericalangle\ \alpha = 57^0\ 30'$ ist?
(α bedeutet die Neigung des schrägen Konstruktionsteiles gegen die Vertikale.)

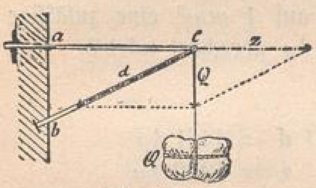


Fig. 13 a.

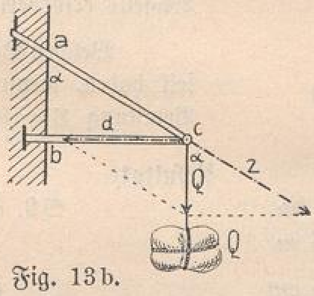


Fig. 13 b.

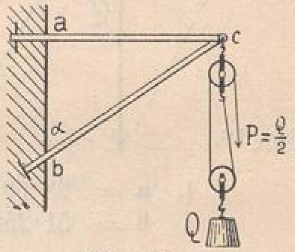


Fig. 13 c.

Dieselbe Aufgabe ist für folgende Angaben zu lösen:

b) $Q = 555\ kg$ $\sphericalangle\ \alpha = 58^0$ *c)* $Q = 2375\ kg$ $\sphericalangle\ \alpha = 55^0\ 20'$

Wie stellen sich die Lösungen, wenn die Last Q nicht unmittelbar am Punkte c, sondern nach Fig. 13 c an einem Rollenzuge hängt?

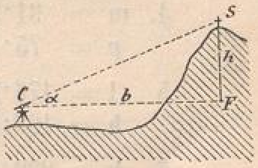


Fig. 14.

10. Die Bergspitze S erscheint von C aus unter dem Elevations- (Höhen-) Winkel $\alpha = 6^0\ 10'$. Wie groß ist der Höhenunterschied h beider Punkte S und C, wenn ihre Horizontalentfernung $CF = b$ 5867 *m* beträgt? (Fig. 14.)

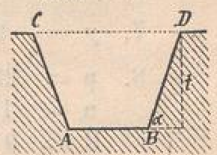


Fig. 15.

11. *a)* Ein Graben (Fig. 15) hat die Tiefe $t = 2·25\ m$ und beiderseits einen Böschungswinkel $\alpha = 35^0\ 30'$. Wie groß ist die Grabenseite AC und die obere Breite CD, wenn die Grabensohle AB... 5·75 *m* breit ist?

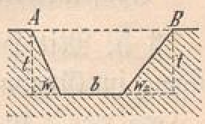


Fig. 16.

b) Ein Graben (Fig. 16) hat eine Grabensohle von 5·25 *m* Breite, eine Tiefe $t = 3·25\ m$ und seine beiden Seitenwände besitzen die Böschungswinkel $w_1 = 65^1/_2{}^0$ und $w_2 = 37^0$. Wie groß ist die obere Breite des Grabens?

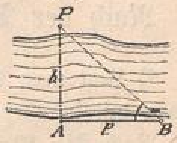


Fig. 17.

12. Wie groß ist die Breite AP eines Flusses (Fig. 17), wenn die zu AP senkrechte „Standlinie" $AB = 95·35\ m$ und der Visierwinkel $PBA = 51^0\ 40'$ ist?

13. Auf einer Arbeitsbahn vom Neigungswinkel $\alpha = 21^0\ 20'$ wird ein Wagen vom Gewichte $Q = 2375\ kg$ mittels Drahtseils emporgezogen. (Fig. 18.)

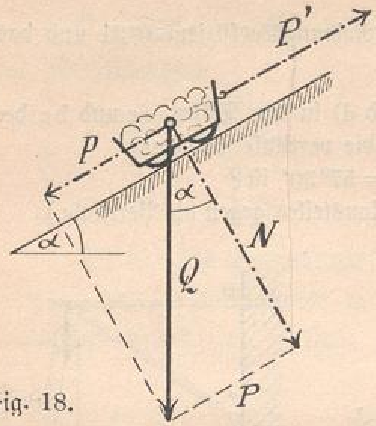


Fig. 18.

Wie groß sind die parallel und senkrecht zum Geleise wirkenden Komponenten P und N?

Wie groß ist die Reibung, wenn der Reibungskoeffizient $f = 0·08$ ist?

Wie groß ist die zum Hinaufziehen des Wagens erforderliche Kraft P'?

Welchen Durchmesser δ muß das Drahtseil haben, wenn auf 1 mm^2 eine zulässige Belastung $S = 9$ *kg* gerechnet wird?

Resultate.

1. a = 28·607 *m*
   b = 51·258 *m*

2. a = 49·426 *cm*
   b = 37·926 *cm*

3. n = 57·355 *cm*
   p = 71·505 *cm*

4. m = 31·366 *m*
   p = 75·158 *m*

5 l = 176·78 *m*
   h = 168·44 *m*

6. k = 292·82 *dm*
   h = 353·12 *dm*

7. γ = 2·977 *m*

8. p = 22·84 *kg*
   n = 11·89 *kg*
   R = 9·952 *kg*

*) 9. *a)* d = 1461 *kg*
   z = 1232 *kg*
   b) d = 1047 *kg*
   z = 888 *kg*
   c) d = 4175 *kg*
   z = 3434 *kg*

10. h = 633·9 *m*

11. *a)* AC = 3·875 *m*
   CD = 12·058 *m*
   b) AB = 11·043 *m*

12. b = 120·59 *m*

13. P = 863 *kg*
   N = 2212 *kg*
   R = 177 *kg*
   P' = 1040 *kg*
   δ = 13·13 *mm*

Konstruktion eines Winkels mit Hilfe der Funktionswerte.

§ 5. Mit Hilfe der Funktionstabellen kann man auch einen beliebigen, im Gradmaße gegebenen Winkel ohne Transporteur verzeichnen.

Es sei z. B. ein Winkel $\omega = 29^0\,10'$ aufzutragen.

Nach der Tabelle ist $\quad tg\,29^0\,10' = 0·558.. = \frac{55·8}{100}$

---

*) Legt man der Aufgabe die Fig. 13 b zugrunde, so sind in den Resultaten d und z miteinander zu vertauschen.

Nach Fig. 13 c ist der bei c wirksame Druck = 1·5 Q; daher sind auch die Werte d und z mit 1·5 zu multiplizieren.

Zeichnet man nun ein rechtwinkliges Dreieck A B C (Fig. 19), in welchem die Kathete $a = 55 \cdot 8$ *mm*, $b = 100$ *mm* ist (in Fig. 19 in $^1/_4$ der wirklichen Größe), so ist

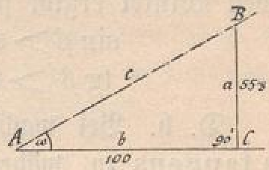


Fig. 19.

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{55 \cdot 8}{100} = 0 \cdot 558 = \operatorname{tg}\ 29^0\ 10'$$

folglich $\sphericalangle\ \omega = 29^0\ 10'$

Übungsbeispiele.

Man verzeichne auf dieselbe Art:

$\sphericalangle\ x = 37^0\ 20'$	$\sphericalangle\ \alpha = 173^0 = (180^0 - 7^0)$
$\sphericalangle\ y = 54^0\ 10'$	$\sphericalangle\ \beta = 145^0 = (180^0 - 35^0)$
$\sphericalangle\ z = 73^0\ 40'$	$\sphericalangle\ \gamma = 216^0 = (180^0 + 36^0)$

In gleicher Weise läßt sich jeder andere Funktionswert des Winkels zur Konstruktion des letzteren verwenden.

Z. B. Es ist der Winkel $37^0\ 50'$ zu verzeichnen.

$\sin 37^0\ 50' = 0 \cdot 613 .. = \frac{61 \cdot 3}{100} ...$ Man macht $\sphericalangle\ C = 90^0$

$CB = a = 61 \cdot 3$ *mm*

$AB = c = 100$ *mm*

Dann ist $\sphericalangle\ A = 37^0\ 50'$, denn: $\sin A = \frac{61 \cdot 3}{100} = \sin 37^0 50,$

Übungsbeispiele.

Man konstruiere die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta, ...$ von welchen gegeben ist:

$\sin \alpha = \frac{5}{7}$ $\qquad \sin \beta = 0 \cdot 79$ $\qquad \operatorname{tg} \gamma = 1 \cdot 25$ $\qquad \operatorname{tg} \delta = 1^2/_3$

$\sin \varphi = \frac{1}{3} \sqrt{3}$ $\qquad \sin \psi = (2 - \sqrt{2})$ $\qquad \operatorname{tg} m = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ $\qquad \operatorname{tg} n = \sqrt{5}$

Änderung der Funktionswerte beim Wachsen des Winkels.

§ 6. In Fig. 20, in welcher der Halbmesser $OA = OB = 1$ ist, sind PM, OM, AT und BS die Funktionslinien des Winkels α und QN, ON, AV und BW die Funktionslinien des Winkels β, wobei $\beta > \alpha$ ist.

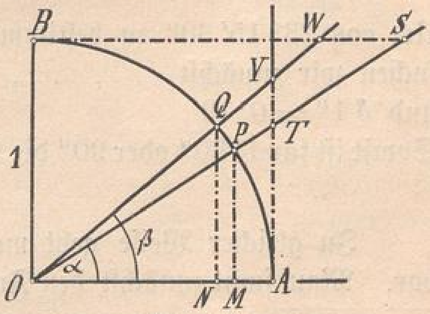


Fig. 20.

Aus der Betrachtung der gleichnamigen Funktionslinien der beiden Winkel ergibt sich unmittelbar:

$$\sin\beta > \sin\alpha \qquad \cos\beta < \cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,\beta > \mathrm{tg}\,\alpha \qquad \mathrm{cotg}\,\beta < \mathrm{cotg}\,\alpha$$

D. h. **Bei wachsendem Winkel nehmen die Funktionen sinus und tangens zu, während die Kofunktionen, Cosinus und Cotangens, abnehmen.**

Wäre in Fig. 20 der Winkel $POQ = 1''$, so würden die Differenzen

$$\delta_1 = (\sin\beta - \sin\alpha) \qquad \delta_3 = (\cos\beta - \cos\alpha)^{*)}$$
$$\delta_2 = (\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha) \qquad \delta_4 = (\mathrm{cotg}\,\beta - \mathrm{cotg}\,\alpha)$$

die Veränderungen darstellen, welche die einzelnen Funktionen des Winkels α erfahren, wenn derselbe um 1 Sekunde wächst.

Diese Veränderungen, welche wir kurzweg „Sekundendifferenzen" oder „Sekundenkorrekturen" nennen wollen, sind in der Tafel für jeden Winkel und für jede Funktion unter der Überschrift $\delta 1''$ in Einheiten der letzten Dezimalstelle angegeben.

Wächst der Winkel um n Sekunden, so ist die Veränderung seiner Funktionen (annähernd) gleich der nfachen Sekundendifferenz. (Sieh' Anhang II.)

§ 7. Bestimmung der Funktionen solcher Winkel, die mit einer beliebigen Zahl von Sekunden angegeben sind.

Hat man z. B. den $\sin 37^0 42' 35''$ zu bestimmen, so findet man zunächst aus der Tafel . . . . . $\sin 37^0 42' = 0{\cdot}61153$
und $\delta 1'' = 0{\cdot}38$
Somit ist die Korrektur für 35" . . $0{\cdot}38 \times 35$ . . . $+13{\cdot}_3$
und $\sin 37^0 42' 35'' = 0{\cdot}61166_3$

Um $\cos 23^0 15' 30''$ zu bestimmen,
suchen wir zunächst . . . . $\cos 23^0 14' = 0{\cdot}91891$
und $\delta 1'' = 0{\cdot}19$
Somit ist für 1' 30" oder 90" die Korrektur $= 0{\cdot}19 \times 90$ . . $-17{\cdot}_1$
und $\cos 23^0 15' 30'' = 0{\cdot}91873_9$

In gleicher Weise geht man auch bei den übrigen Funktionen vor. Man sucht zunächst den Funktionswert für den nächst kleineren,

*) δ_1 und δ_2 sind positiv, δ_3 und δ_4 negativ.

in der Tafel enthaltenen Winkel, multipliziert die nebenstehende Sekundendifferenz mit der Zahl der „Überschuß-Sekunden“ und addiert die so gefundene Korrektur, wenn man es mit sinus oder tangens zu tun hat, während man bei cosinus oder cotangens die Korrektur subtrahiert.*)

Beispiele.

cos 53° 17′ = ?	tg 31° 28′ 45″ = ?	cotg 20° 37′ 13″ = ?
cos 53° 16′ = 0·59809	tg 31° 28′ = 0·61200	cotg 20° 36′ = 2·66046
0·38 × 60 .... —23	0·67 × 45 .... +30	3·92 × 73 .... — 286
cos 53° 17′ = 0·59786	tg 31° 28′ 45″ = 0·61230	cotg 20° 37′ 13″ = 2·65760

Übungsbeispiele.

1. Man bestimme:

a) sin 33° 45′	*e)* sin 78° 13′	*i)* sin 54° 16′ 18″
b) cos 57° 17′	*f)* cos 65° 29′	*j)* cos 17° 20′ 40″
c) tg 42° 39′	*g)* tg 39° 25′	*k)* tg 62° 35′ 10″
d) cotg 17° 47′	*h)* cotg 81° 17′	*l)* cotg 21° 17′ 15″

2. Ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen, von welchem gegeben sind:

α) c = 6·75 *m*	*β)* a = 34·8 *m*	*γ)* b = 44·5 *m*
∢ A = 38° 45′	∢ A = 38° 45′	∢ A = 51° 37′

3. Auf einem Hafenturme (Fig. 21) ist ein Winkelmeßinstrument aufgestellt, dessen Achse C sich 47·75 *m* hoch über dem Seespiegel befindet. Ein in Sicht befindliches Schiff S erscheint unter einem Tiefenwinkel (Depression) $\alpha = 5° 37'$. Wie groß ist die Horizontalentfernung S F des Schiffes vom Turme?

Man löse dieselbe Aufgabe für
$\alpha = 2° 50'$, 1° 40′, 1° 20′.

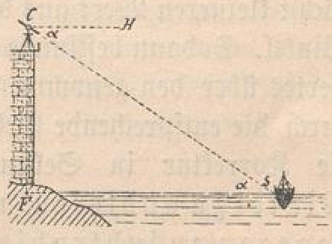


Fig. 21.

4. *a)* Es ist der Lichtbrechungsexponent n für Luft-Glas aus dem Einfallswinkel
$\alpha = 52° 35'$ (Fig. 22) und dem Brechungswinkel $\beta = 30° 45'$ nach dem Brechungsgesetze: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ zu bestimmen.

b) Man berechne n für folgende, an einem anderen Glase beobachtete Winkel: $\alpha = 41° 20'$, $\beta = 26° 10'$.

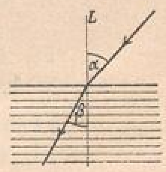


Fig. 22.

*) In den kleinen Schlömilch'schen Tafeln sind die Funktionswerte von 10 zu 10 Minuten und daneben, unter der Aufschrift D 1′, die Differenzen für 1 Minute angegeben. Um mit Hilfe dieser Tafel z. B. sin 37° 26′ zu bestimmen, entnimmt man der Tabelle sin 37° 20′ = 0·60645

Korr. 23·1 × 6 ... + 139

sin 37° 26′ = 0·60784

Resultate.

1. *a)* 0·55557
b) 0·54048
c) 0·92116
d) 3·11776
e) 0·97893
f) 0·41496
g) 0·82190
h) 0·15332
i) 0·81179
j) 0·95453
k) 1·92805
l) 2·56652

2. *α)* a = 4·225 *m*
b = 5·264 *m*
β) b = 43·36 *m*
c = 55·60 *m*
γ) a = 56·18 *m*
c = 71·67 *m*

3. 485·5 *m*
964·7 *m*
1641 *m*
2051·5 *m*

4. *a)* 1·5534
b) 1·4977

Korrektur des aufgesuchten Winkels.

§ 8. Ist ein Winkel α durch eine seiner goniometrischen Funktionen gegeben, z. B. durch $\sin \alpha = 0{\cdot}46515$, und ist dieser Sinus-Wert nicht vollständig in der Tafel enthalten, so nehme man den nächst kleineren Wert aus der Sinus-Reihe und notiere den zugehörigen Winkel. Sodann bestimme man den Überschuß des gegebenen Funktionswertes über den genommenen Tafelwert und dividiere diesen Überschuß durch die entsprechende Sekundendifferenz (δ **1″**). Der Quotient gibt die Korrektur in Sekunden. Dieselbe ist zum notierten Winkel zu addieren, wenn man es mit sinus oder tangens, dagegen zu subtrahieren, wenn man es mit cosinus oder cotangens zu tun hat (§ 6).

Beispiele.

1. $\sin \alpha =$ **0·46343** . . . $\alpha = ?$

Tafel . . . . 0·46330 . . . . 27° 36′

Überschuß 13

δ 1″ . . . 0·43

*) Korrektur 13 : 0·43 = 30 . . . . . + 30″

$\sphericalangle \alpha = 27^{0}\ 36'\ 30''$

*) Für 1″ . . . Korrektur = 0·43
„ x″ „ = 13

x : 1 = 13 : 0·43
x = 13 : 0·43 = 30

2. $\cot x = \mathbf{0{\cdot}73475} \;\ldots\; x = ?$

Tafel .... 457 .... $53^\circ\,42'$

$18 : 0{\cdot}75 = 24\ldots \qquad -24''$

$\sphericalangle x = 53^\circ\,41'\,36''$

Übungsbeispiele.

1. Man bestimme folgende Winkel:

$\sin\alpha = 0{\cdot}55501$	$\sin x = 0{\cdot}75553$
$\cos\beta = 0{\cdot}74085$	$\cos y = 0{\cdot}37599$
$\mathrm{tg}\,\gamma = 0{\cdot}75544$	$\mathrm{tg}\,u = 2{\cdot}23050$
$\mathrm{cotg}\,\delta = 1{\cdot}10970$	$\mathrm{cotg}\,v = 0{\cdot}63509$

2. Man bestimme die am Schlusse des § 5 angegebenen Winkel nach Gradmaß.

3. Wie groß sind die Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes ABC, wenn

$\alpha)$ $a = 43{\cdot}5\,cm$	$\beta)$ $a = 45{\cdot}2\,m$	$\gamma)$ $a = 45{\cdot}83\,m$	$\delta)$ $b = 35{\cdot}55\,m$
$c = 73{\cdot}8\,cm$	$b = 38{\cdot}1\,m$	$c = 59{\cdot}52\,m$	$c = 56{\cdot}48\,m$ ist?

4. Unter welchem Winkel fallen die Sonnenstrahlen ein, wenn eine vertikale Stange von $6{\cdot}785\,m$ Länge auf horizontalem Boden einen $12{\cdot}75\,m$ langen Schatten wirft? (Siehe Fig. 9.)

5. Aus dem Punkte P, dessen Entfernung vom Mittelpunkte O eines Kreises $72{\cdot}25\,cm$ beträgt, werden an den Kreis die beiden Tangenten gezogen, deren Berührungspunkte A und B sind. Der Radius des Kreises ist $r = 28{\cdot}5\,cm$. Welchen Winkel schließen die beiden Tangenten ein? Wie lang ist die Berührungssehne AB? Wie lang sind die begrenzten Tangenten $PA = PB$?

Resultate.

1.	$\alpha = 33^\circ\,42'\,41''$	$x = 49^\circ\,4'\,19''$
	$\beta = 42^\circ\,11'\,45''$	$y = 67^\circ\,54'\,52''$
	$\gamma = 37^\circ\,4'\,8''$	$u = 65^\circ\,51'\,7''$
	$\delta = 42^\circ\,1'\,24''$	$v = 57^\circ\,34'\,51''$
2.	$\alpha = 45^\circ\,35'\,6''$	$\varphi = 35^\circ\,15'\,53''$
	$\beta = 52^\circ\,11'\,7''$	$\psi = 35^\circ\,51'\,32''$
	$\gamma = 51^\circ\,20'\,25''$	$m = 61^\circ\,48'\,47''$
	$\delta = 59^\circ\,2'\,10''$	$n = 65^\circ\,54'\,18''$
3 $\alpha)$	$\sphericalangle A = 36^\circ\,6'\,59''$	$\gamma)$ $\sphericalangle A = 50^\circ\,21'\,11''$
	$\sphericalangle B = 53^\circ\,53'\,1''$	$\sphericalangle B = 39^\circ\,38'\,49''$
$\beta)$	$\sphericalangle A = 49^\circ\,52'\,18''$	$\delta)$ $\sphericalangle A = 50^\circ\,59'\,34''$
	$\sphericalangle B = 40^\circ\,7'\,42''$	$\sphericalangle B = 39^\circ\,0'\,26''$
4.	$28^\circ\,1'\,11''$	

5. $46^\circ\,27'\,52''$ $\quad AB = 52{\cdot}377\,cm \quad PA = 66{\cdot}39\,cm$

Logarithmen der goniometrischen Funktionen.

§ 9. In den vorhergehenden Aufgaben haben wir gesehen, daß wir stets mit den der Tafel entnommenen Funktionswerten zu multiplizieren oder zu dividieren hatten. Da nun die Funktionswerte als sechsziffrige Zahlen angegeben sind, so ist es in der Regel vorteilhaft, die mit denselben vorzunehmenden Multiplikationen und Divisionen logarithmisch durchzuführen. Man hat deshalb weitere Tafeln zusammengestellt, in denen für jeden einzelnen Winkel nicht die Funktionswerte selbst, sondern gleich deren Logarithmen angegeben sind.

In den meisten gebräuchlichen Tafeln sind die Funktionslogarithmen für alle Spitzwinkel von Minute zu Minute angegeben. Dies ist auch bei den Jelinekschen Tafeln der Fall, in denen die Funktionslogarithmen unter den Funktionswerten selbst angeordnet sind. (S. 60—149.) **Dabei ist jedem Funktionslogarithmus der ersten drei Reihen noch die Zahl — 10 anzufügen,** welche in der Tafel der Raumersparnis halber weggelassen ist.*)

Auch bei den Logarithmen der Funktionen ist, entsprechend dem im § 3 Gesagten, die Doppeldeutigkeit der Werte benützt. Jeder Tabellenwert bedeutet wieder Zweierlei:

1. den Logarithmus der oben angegebenen Funktion des linksstehenden Winkels und gleichzeitig

2. den Logarithmus der unten angegebenen sinnverwandten Funktion des rechtsstehenden (Komplements-)Winkels.

So ist z. B.**) $9{\cdot}72323 - 10 = \begin{cases} = \log \operatorname{tg}\ 27^0\,52' \\ = \log \operatorname{cotg}\ 62^0\,8' \end{cases}$

Beispiele.

Man berechne: $\mathbf{x = a \sin \alpha}$ und $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sin \alpha}}$, wenn $\begin{matrix} \mathbf{a = 75{\cdot}35}\ m \\ \alpha = \mathbf{25^0\,17'} \end{matrix}$ ist.

a) Gewöhnliche Ausrechnung:

$\sin 25^0\,16' \ldots\ldots 0{\cdot}42683$

$0{\cdot}44 \times 60 \ldots\ldots\ldots\ 26$

$0{\cdot}42709$

$x = 75{\cdot}35 \times 0{\cdot}42709 = \mathbf{32{\cdot}18}\ m$

$y = 75{\cdot}35 : 0{\cdot}42709 = \mathbf{176{\cdot}43}\ m$

b) Logarithmische Ausrechnung:

$\log a = 1{\cdot}87708$

$\log \sin \alpha = 9{\cdot}63052 - 10$

$-\qquad +$

$\log x = 1{\cdot}50760$

$\log y = 2{\cdot}24656$

daraus: $x = \mathbf{32{\cdot}18}\ m$

$y = \mathbf{176{\cdot}425}\ m$

*) Andere Tafeln, z. B., die kleinen Schlömilchschen Tafeln, sind so eingerichtet, daß in allen vier Reihen jedem Tafelwerte die Zahl — 10 anzufügen ist.

**) Jelinek'sche Tafeln S. 115.

Man berechne $z = \frac{\mathbf{57 \cdot 35 . tg\ 31^0\ 15'}}{\mathbf{sin\ 54^0\ 23'}}$

$$+\begin{cases} \log 57 \cdot 35 = 1 \cdot 75853 \\ \log tg\ 31^0\ 15' = 9 \cdot 78306 - 10 \end{cases}$$

$$1 \cdot 54159$$

$$\log \sin 54^0\ 23' = 9 \cdot 91005 - 10$$

$$- \quad\quad - \quad +$$

$$\lg z = 1 \cdot 63154$$

$$z = \mathbf{42 \cdot 81}$$

Übungsbeispiele.

1. Man berechne:

$x = 75 \cdot 67 \sin 37^0\ 15'$ | $y = 315 \cdot 6 \operatorname{cotg} 40^0\ 39'$

$a = 417 \cdot 5 \quad \cos 59^0\ 6'$ | $b = 90 \cdot 83 \operatorname{tg} 41^0\ 13'$

$p = \frac{49 \cdot 58}{\sin 37^0\ 43'}$ | $q = \frac{533 \cdot 8}{\cos 53^0\ 47'}$

2. Man löse die Beispiele in § 7 auf logarithmischem Wege.

3. Folgende Winkel nach Winkelmaß anzugeben:

$\log \sin \alpha = 8 \cdot 90885 - 10$	$\log \sin x$*) $= 0 \cdot 98679 - 2$	$\log \sin \alpha = 0 \cdot 98538 - 1$
$\log \cos \beta = 9 \cdot 97691 - 10$	$\log \cos y = 0 \cdot 94687 - 1$	$\log \cos \beta = 0 \cdot 51811 - 1$
$\log \operatorname{tg} \gamma = 9 \cdot 88968 - 10$	$\log \operatorname{tg} z = 0 \cdot 64620 - 1$	$\log \operatorname{tg} \gamma = 0 \cdot 46798$
$\log \operatorname{cotg} \delta = 0 \cdot 48224$**)	$\log \operatorname{cotg} u = 1 \cdot 17962$	$\log \operatorname{cotg} \delta = 0 \cdot 84334 - 1$

Resultate.

1. $x = 45 \cdot 802$ | $y = 367 \cdot 567$

$a = 214 \cdot 41$ | $b = 79 \cdot 563$

$p = 81 \cdot 046$ | $q = 903 \cdot 46$

2. Siehe Resultate in § 7.

3.

$\alpha = 4^0\ 39'$	$x = 5^0\ 34'$	$\alpha = 75^0\ 13'$
$\beta = 18^0\ 31'$	$y = 27^0\ 46'$	$\beta = 70^0\ 45'$
$\gamma = 37^0\ 48'$	$z = 23^0\ 53'$	$\gamma = 71^0\ 12'$
$\delta = 18^0\ 14'$	$u = 3^0\ 47'$	$\delta = 55^0\ 7'$

Korrekturen der Funktionslogarithmen für die Mitberücksichtigung von Sekunden.

§ 10. So wie bei den natürlichen Funktionswerten, so hat man auch bei den Funktionslogarithmen eine Korrektur anzubringen, wenn der Winkel auf Sekunden genau gegeben ist.

*) Man bringe den Logarithmus zuerst auf die in der Tabelle vorausgesetzte Form; z. B.:
$\log \sin x = 0 \cdot 98679 - 2 = 8 \cdot 98679 - 10$; $\log \operatorname{tg} u = 0 \cdot 48629 - 1 = 9 \cdot 48629 - 10$
und suche dann in der Tabelle den zugehörigen Winkel.

**) Bei Benützung der Schlömilch'schen Tafeln setze man
$0 \cdot 48224 = 10 \cdot 48224 - 10.$

Die Korrekturen, welche 1″ entsprechen, sind in der Tabelle unter der Aufschrift $\delta\,1''$ neben dem betreffenden Logarithmus angegeben. Für n Sekunden ist die Korrektur n mal so groß. **Die so berechnete Korrektur ist** (aus den in § 6 dargelegten Gründen) **bei log sinus und log tangens zu addieren, hingegen bei log cosinus und log cotangens zu subtrahieren.**

Z. B. $\log \sin 31^0\, 17'\, 25'' = ?$	$\log \operatorname{cotg} 58^0\, 13'\, 48'' = ?$
$\log \sin 31^0\, 17' \ldots\ldots 9\cdot71539 - 10$	$\log \operatorname{cotg} 58^0\, 13' \ldots\ldots 9\cdot79213 - 10$
$\dfrac{0\cdot35 \times 25}{8\cdot75 \doteq 9}$ 25″ ... Korr. 9	$\dfrac{0\cdot47 \times 48}{22\cdot6}$ 48″ .... Korr. 22·6
$\log \sin 31^0\, 17'\, 25'' = 9\cdot71548 - 10$	$\log \operatorname{cotg} 58^0\, 13'\, 48'' = 9\cdot791904 - 10$

Hiebei ist folgendes zu bemerken:

$$\text{Nach § 2 ist} \ldots\ldots \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \ldots\ldots \text{(I)}$$

$$\text{ebenso} \ldots\ldots \operatorname{cotg}(\alpha + 1'') = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + 1'')} \ldots \text{(II)}$$

$$\text{daher (II : I)} \ldots \frac{\operatorname{cotg}(\alpha + 1'')}{\operatorname{cotg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + 1'')}$$

und, wenn wir beide Seiten der Gleichung logarithmieren,

$$\log \operatorname{cotg}(\alpha + 1'') - \log \operatorname{cotg} \alpha = \log \operatorname{tg} \alpha - \log \operatorname{tg}(\alpha + 1'')$$

oder

$$\underbrace{[\log \operatorname{cotg}(\alpha + 1'') - \log \operatorname{cotg} \alpha]}_{\delta\,1''} = -\underbrace{[\log \operatorname{tg}(\alpha + 1'') - \log \operatorname{tg} \alpha]}_{\delta\,1''} \quad \text{(III)}$$

d. h. die Sekundenkorrekturen ($\delta\,1''$) für $\log \operatorname{cotg} \alpha$ und $\log \operatorname{tg} \alpha$ sind **für denselben Winkel** α numerisch gleich.

Diese Korrekturen sind daher in manchen Tafeln, z. B. in der kleinen Schlömilch'schen Tafel, als „Gemeinschaftliche Sekunden-Differenz" (G D I″) zwischen den Werten von log tg und log cotg eingestellt.

(Der Unterschied der Vorzeichen in Gleichung III bezieht sich darauf, daß mit wachsendem Winkel α auch $\log \operatorname{tg} \alpha$ zunimmt, $\log \operatorname{cotg} \alpha$ hingegen abnimmt.)

Beispiel.

Folgendes rechtwinklige Dreieck aufzulösen.

$c = 536\cdot8\ cm$	$a = c \sin A$	$b = c \cos A$
$\sphericalangle A = 37^0\, 31'\, 15''$	$\log c = 2\cdot72981$	$\log c = 2\cdot72981$
$\sphericalangle B = 52^0\, 28'\, 45''$	$\log \sin A = 9\cdot78465 - 10$	$\log \cos A = 9\cdot89934 - 10$
	$\log a = 2\cdot51446$	$\log b = 2\cdot62915$
	$\mathbf{a = 326\cdot93}\ cm$	$\mathbf{b = 425\cdot75}\ cm$

Übungsbeispiele.

Folgende rechtwinklige Dreiecke sind aufzulösen:

1. $c = 85\cdot89\,m$	2. $c = 45\cdot78\,m$	3. $c = 68\cdot75\,cm$
$\sphericalangle A = 23^0$	$\sphericalangle A = 59^0\,15'\,30''$	$\sphericalangle A = 31^0\,15'\,17''$
4. $a = 73\cdot56\,m$	5. $a = 57\cdot25\,dm$	6. $b = 573\cdot58\,dm$
$\sphericalangle A = 56^0$	$\sphericalangle B = 27^0\,8'\,20''$	$\sphericalangle B = 39^0\,20'\,17''$

Resultate.

1. $a = 33\cdot56\,m$	2. $a = 39\cdot348\,m$	3. $a = 35\cdot671\,cm$
$b = 79\cdot062\,m$	$b = 23\cdot401\,m$	$b = 58\cdot771\,cm$
4. $c = 88\cdot73\,m$	5. $b = 29\cdot3456\,dm$	6. $a = 699\cdot83\,dm$
$b = 49\cdot617\,m$	$c = 64\cdot334\,dm$	$c = 904\cdot85\,dm$

Korrektur des aufgesuchten Winkels.

§ 11. Ist ein Winkel durch den Logarithmus einer seiner Funktionen bestimmt und ist dieser Logarithmus nicht vollständig in der Tafel vorzufinden, so nehme man den nächst kleineren Tabellenwert und notiere den zugehörigen Winkel. Sodann dividiere man den Überschuß des gegebenen Logarithmus über den Tabellenwert durch die nebenstehende Sekundenkorrektur. Der erhaltene Quotient gibt die Anzahl der Sekunden an, welche man zu dem notierten Winkel addieren oder von demselben subtrahieren muß, je nachdem man von log sinus oder log tangens oder von log cosinus oder log cotangens ausgegangen ist.

Ein Beispiel möge dies klarer stellen:

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 9\cdot87221 - 10 \;\ldots\; \alpha = ?$$

Nächst kleinerer Tabellenwert $9\cdot87211 - 10 \;\ldots\ldots\; 36^0\,41'$

$10 : 0\cdot45 = 22$ Korrektur $+\,22''$

$\sphericalangle \alpha = 36^0\,41'\,22''$

Für 1″ .. Korrektur 0·45
„ x″ „ 10·00

$x : 1'' = 10 : 0\cdot45$
$x = 10'' : 0\cdot45 = 22''$

Übungsbeispiele.

1. Es sind die durch folgende Angaben bestimmten Winkel im Winkelmaße anzugeben:

$$\begin{array}{ll} \log \sin \alpha = 9\cdot17835 - 10 & \log \sin x = 0\cdot57093 - 1 \\ \log \cos \beta = 9\cdot90819 - 10 & \log \cos y = 0\cdot98763 - 1 \\ \log \operatorname{tg} \gamma = 9\cdot79365 - 10 & \log \operatorname{tg} u = 0\cdot69237 - 2 \\ \log \operatorname{cotg} \delta = 0\cdot25670 & \log \operatorname{cotg} v = 1\cdot35195 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log \sin m = 0\cdot98134 - 1 \\ \log \cos n = 0\cdot70895 - 1 \\ \log \operatorname{tg} r = 0\cdot35562 \\ \log \operatorname{cotg} s = 0\cdot53557 - 1 \end{array}$$

2. Die Winkel A, B, C und D sind logarithmisch zu bestimmen, wenn gegeben ist

$$\sin A = \frac{5\cdot378}{9\cdot256} \qquad \cos B = \frac{1}{1\cdot538}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{47\cdot38}{25\cdot67} \qquad \operatorname{cotg} D = \frac{145\cdot6}{95\cdot87}$$

3. $\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{\frac{5\cdot637}{9\cdot208}}$

$x = ?$

Ausrechnung:

$$\begin{array}{rl} \log 5\cdot637 = & 0\cdot75105 \\ \log 9\cdot208 = & 0\cdot96417 \\ & - \\ \hline & (0\cdot78688 - 1) : 3 \\ = & (29\cdot78688 - 30) : 3 \\ \hline \log \operatorname{tg} x = & 9\cdot92896 - 10 \end{array}$$

$$\sphericalangle x = \mathbf{40^0\,20'\,5''}$$

4. Wie groß sind die Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes ABC, von welchem gegeben sind:

$\alpha)$ a = 95·87 *m* c = 159·3 *m*	$\beta)$ a = 930·6 *cm* b = 1951 *cm*	$\gamma)$ a = 45·85 *m* c = 73·97 *m*
$\delta)$ b = 39·57 *m* c = 58·23 *m*	$\varepsilon)$ a = 35·89 *cm* b = 71·65 *cm*	$\zeta)$ a = 47·68 *m* c = 75·35 *m*

Resultate.

1. $\alpha = 8^0\,40'\,20''$	x = $21^0\,51'\,34''$	m = $73^0\,19'\,29''$
$\beta = 35^0\,57'\,27''$	y = $13^0\,36'\,40''$	n = $59^0\,13'\,40''$
$\gamma = 31^0\,52'\,23''$	u = $2^0\,49'\,10''$	r = $66^0\,12'\,19''$
$\delta = 28^0\,58'\,29''$	v = $2^0\,32'\,46''$	s = $71^0\,3'\,25''$

2. $\sphericalangle A = 35^\circ\, 31'\, 23''$ $\qquad$ $\sphericalangle B = 49^\circ\, 26'\, 40''$
$\sphericalangle C = 61^\circ\, 33'\, 6''$ $\qquad$ $\sphericalangle D = 33^\circ\, 21'\, 47''$

4. *a)* $\sphericalangle A = 37^\circ$, $\sphericalangle B = 53^\circ$, $b = 127 \cdot 22\ m$
β) $\sphericalangle A = 25^\circ\, 30'$, $\sphericalangle B = 64^\circ\, 30'$, $c = 2161 \cdot 6\ cm$
γ) $\sphericalangle A = 38^\circ\, 18'\, 15''$, $\sphericalangle B = 51^\circ\, 41'\, 45''$, $b = 58 \cdot 048\ m$

δ) $\sphericalangle A = 47^\circ\, 11'\, 30''$, $\sphericalangle B = 42^\circ\, 48'\, 30''$, $a = 42 \cdot 72\ m$
ε) $\sphericalangle A = 26^\circ\, 36'\, 23''$, $\sphericalangle B = 63^\circ\, 23'\, 37''$, $c = 80 \cdot 136\ cm$
ζ) $\sphericalangle A = 39^\circ\, 15'\, 22''$, $\sphericalangle B = 50^\circ\, 44'\, 38''$, $b = 58 \cdot 345\ m$

Vermischte Beispiele.

1. Von einem hart am westlichen Ufer des Traunsees in einer Höhe $h = 35 \cdot 85\ m$ über dem Seespiegel gelegenen Punkte C (bei Traunkirchen) erscheint das östliche Seeufer unter einem Tiefenwinkel $\alpha = 1^\circ\, 36'\, 41''$. (Siehe Fig. 21.)

a) Wie breit ist der See an dieser Stelle?

b) Wie groß wird der Fehler, wenn man $\alpha = 1^\circ 37'$ setzt?

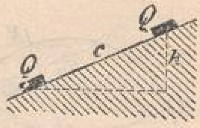


Fig. 23.

2. *a)* Wie viel Pferdekraft Hubarbeit leistet die Berglokomotive der Vitznau-Rigi-Zahnradbahn, wenn sie längs einer Steigung von $11^\circ\, 30'$ einen Zug vom Gewichte $Q = 23750\ kg$ mit der Geschwindigkeit 80 m per Minute aufwärts fördert? (Fig. 23.)

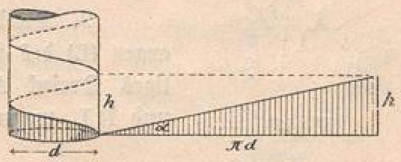
b) Wie groß ist der durchschnittliche Steigungswinkel dieser Bahn, wenn bei einer Geleislänge von 7058 m eine vertikale Höhe von 1310 m gewonnen wird?

3. *a)* Für Hauptbahnen gilt die Norm, daß die Steigung (h : b) im flachen Lande höchstens 1 : 200, im Hügellande 1 : 100, im Gebirge 1 : 40 werde. Welche Neigungswinkel entsprechen diesen Steigungen?

b) Die von Rüdesheim zum Niederwalddenkmal führende Zahnradbahn hat anfänglich eine Steigung 1 : 12, zuletzt 1 : 5. Wie groß sind die Steigungswinkel?

c) Auf der Pilatus-Zahnradbahn beträgt die mittlere Steigung 42 %, die maximale Steigung 48 %. Die größten Steigungen der Drahtseilbahnen Territet-Glion (am Genfer See) und Lauterbrunn-Mürren (Berner Oberland) betragen 57 % und 60 %.

Wie groß sind die Steigungswinkel?



d) Wie groß ist der Steigungswinkel einer Schraube vom Spindeldurchmesser d und der Ganghöhe h, wenn

α) $d = 12\ mm$, $h = 3$ „ $\quad$ *β)* $d = 35\ mm$, $h = 8$ „ $\quad$ *γ)* $d = 25\ mm$, $h = 6 \cdot 5$ „ $\quad$ *δ)* $d = 56\ mm$, $h = 12$ „ ist?

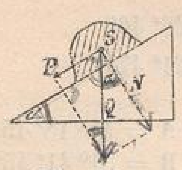


Fig. 24.

$P = Q . \sin\alpha$

$N = Q . \cos\alpha$

4. Auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel α (Fig. 24) liegt ein Körper vom Gewichte Q. Wie groß sind die Bewegungskomponente P und der Reibung erzeugende Normaldruck N? Wie groß ist die Reibung $R = N f$, wenn der Reibungskoëffizient f ist? Wird der Körper herabgleiten oder vermöge der Reibung festsitzen?

a)	$Q = 72{\cdot}5\ kg$	*β)*	$Q = 285\ kg$
	$\sphericalangle\ \alpha = 29^0$		$\sphericalangle\ \alpha = 25^0\ 30,$
	$f = 0{\cdot}42$		$f = 0{\cdot}15$

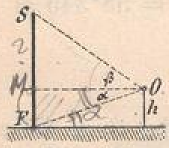


Fig. 25.

5. Von einem Punkte O, dessen Höhe über den horizontalen Erdboden $h = 14{\cdot}75\ m$ ist, erscheint der Fuß eines Turmes unter dem Tiefenwinkel $\alpha = 8^0\ 31'$, die Spitze S unter dem Höhenwinkel $\beta = 30^0\ 46'\ 46''$.

Wie hoch ist der Turm? (Fig. 25.)

6. Wie groß sind die Radien und Umfänge der beiden Polarkreise und der Wendekreise (Fig. 26), wenn deren geographische Breiten beziehungsweise

$$\varphi = 66^0\ 32'\ 54''$$
$$\psi = 23^0\ 27'\ 6''\ \text{ sind?}$$

(Die Erde ist als eine Kugel vom Radius $R = 859$ Meilen anzunehmen.)

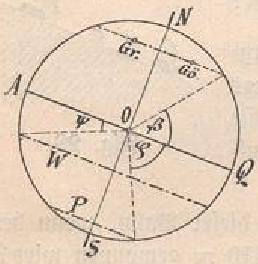


Fig. 26.

7. Göttingen und Greenwich (Fig. 26) haben die östlichen Längen (von Ferro)

$$\lambda_1 = 27^0\ 36'\ 15''\ \text{und}\ \lambda_2 = 17^0\ 39'\ 37'',$$

und nahezu dieselbe geographische Breite $\beta = 51^1/_2{}^0$.

Wie groß ist die Entfernung der beiden Orte, gemessen längs des Parallelkreises?

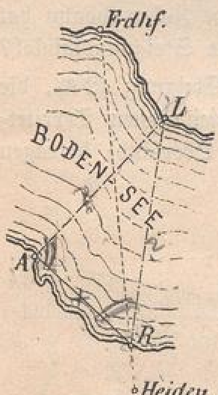


Fig. 27.

8. Mit welcher Geschwindigkeit nimmt Wien, dessen geographische Breite $\varphi = 48^0\ 12'\ 35{\cdot}5''$ ist, an der Erdrotation teil?

Die Umdrehungszeit der Erde (ein Sterntag) beträgt 23 Stdn. 56 Min. 4 Sek. $R = 6\,366\,750\ m$.)

9. Die Uferorte Arbon (A), Rorschach (R) und Langenargen (L) des Bodensees (Fig. 27) bilden ein bei A rechtwinkliges Dreieck A R L. Wie groß sind die Entfernungen A L und R L, wenn $A R = 6375\ m$

$$\sphericalangle\ A R L = 60^0\ 40'\ 30''.$$

10. Von Heiden (bei Rorschach), dessen Höhe über dem Bodensee $h = 407\ m$ ist, erscheint das Ufer bei Rorschach in einem Tiefenwinkel $\alpha = 5^0\ 57'\ 28''$ und der in derselben

Vertikalebene liegende Uferpunkt bei Friedrichshafen unter dem Tiefenwinkel $\beta = 1^0\ 0'\ 58''$. Wie groß ist die Entfernung der beiden Uferpunkte. (Fig. 27 und 28.)

11. Die Beschleunigung g_φ der Schwere für einen Ort von der geographischen Breite φ berechnet man nach der Formel:

$$g_\varphi = 9{\cdot}78\ m + 0{\cdot}051 \sin^2 \varphi$$

Man berechne den Wert von g für folgende Orte:

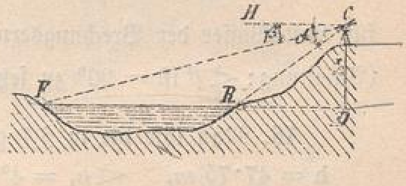


Fig. 28.

a) Wien .... $\varphi = 48^0\ 12'\ 36''$
b) Petersburg ...... $\varphi = 59^0\ 56'\ 21''$
c) Spitzbergen ...... $\varphi = 79^0\ 49'\ 58''$
d) Was erhält man, wenn $\varphi = 0$ und wenn $\varphi = 90^0$ wird?

12. Auf ein Crown-Glasprisma vom Brechungsexponenten $n = 1{\cdot}533$ und dem brechenden Winkel $\omega = 70^0$ fällt ein grüner Lichtstrahl unter dem Einfallswinkel $\alpha = 65^0\,20'$ auf. Man berechne die Winkel β, γ, δ (Fig. 29) und die gesamte Ablenkung

$$\varphi = (\alpha - \beta) + (\delta - \gamma).$$

Anleitung: Nach dem Brechungsgesetze ist:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \qquad \frac{\sin \delta}{\sin \gamma} = n$$

Ferner ergibt sich aus der Fig 29 $\sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = \sphericalangle \omega$ (Außenwinkel!)

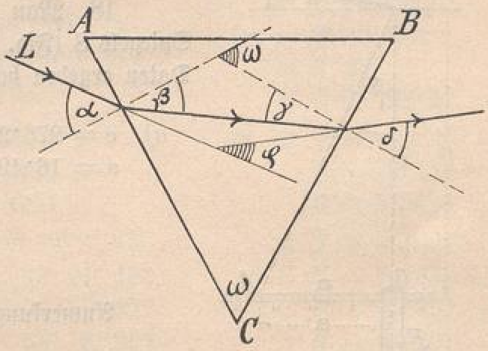


Fig. 29.

12a. Wie groß müßte bei obiger Annahme $\sphericalangle \alpha$ sein, damit $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma$ würde und wie groß wäre in diesem Falle die Ablenkung? (Minimum der Ablenkung.)

13. Man löse die Aufgabe 12 für ein Flintglasprisma vom brechenden Winkel $\omega = 58^0$ und dem Brechungsexponenten $n = 1{\cdot}71$, wenn $\sphericalangle \alpha = 50^0\ 30'$ ist.

13a. Wie groß ist die minimale Ablenkung in einem Prisma vom brechenden Winkel ω und dem Brechungsquotienten n, wenn

α) $\omega = 60^0$, $n = 1{\cdot}52$ *β)* $\omega = 50^0$, $n = 1{\cdot}72$ ist?

14. Auf ein Flintglasprisma vom brechenden Winkel $\omega = 58^0\ 30'$ fällt unter dem Winkel $\alpha = 51^0\ 10'$ ein weißer Lichtstrahl auf. Welchen Winkel schließen nach dem Austritte (Farbenzerstreuung!) der äußerste violette und der äußerste rote Strahl

miteinander ein, wenn die Brechungsexponenten des Prismenglases für diese beiden Lichtstrahlen folgende Werte haben: $n_v = 1 \cdot 6711$ $n_r = 1 \cdot 62775$.

15. Unter welchem Einfallswinkel α muß ein aus Wasser in Luft übertretender Lichtstrahl die Wasseroberfläche treffen, damit er total reflektiert werde, wenn für Luft-Wasser der Brechungsexponent $n = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 1 \cdot 3343$ ist? (Anleitung: $\sphericalangle \beta$ ist $= 90^0$ zu setzen.)

16. Man löse die in § 7 gestellte Aufgabe Nr. 3 für folgende Angaben: $h = 47 \cdot 75\ m$, $\sphericalangle \alpha_1 = 4^0\ 25'$, $\sphericalangle \alpha_2 = 3^0\ 15'$, $\sphericalangle \alpha_3 = 1^0\ 10'\ 30''$.

17. Man bestimme die Totalintensität des Erdmagnetismus aus der in Dyne gegebenen Horizontalkomponente H und der Inklination i für:

α) Berlin	β) Wien	γ) Rom
$H = 0 \cdot 18592$	$H = 0 \cdot 20668$	$H = 0 \cdot 23295$
$i = 66^0\ 49'$	$i = 63^0\ 15'$	$i = 58^0\ 7'$

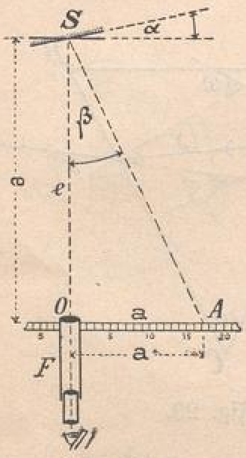


Fig. 30.

18. Man bestimme den Drehungswinkel α des Spiegels S (Fig. 30), wenn die Spiegelablesung folgende Daten ergeben hat:

a) $e = 276 \cdot 2\ cm$, $a = 16 \cdot 49\ cm$

b) $e = 204 \cdot 8\ cm$, $a = 24 \cdot 3\ cm$

c) $e = 275 \cdot 8\ cm$, $a = 28 \cdot 4\ cm$

Anmerkung. $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

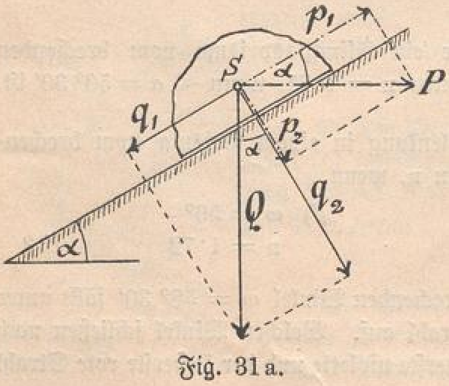


Fig. 31 a.

19. Auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel α liegt eine Last Q, an welcher eine Kraft P in horizontaler Richtung (nach Fig. 31 a) wirkt. Der Reibungskoëffizient der Last gegen die schiefe Ebene sei f.

Wie groß ist die in der Gleitrichtung wirkende bewegende Kraft $\mathfrak{P} = p_1 - q_1$?

Wie groß ist der Normaldruck $N = q_2 + p_2$?

Wie groß ist die Reibung $R = N.f$?

Wird der Körper gleiten oder durch Reibung festsitzen?

a) $\alpha = 25^0\,10'$
$Q = 72{\cdot}5$ *kg*
$P = 32{\cdot}5$ *kg*
$f = 0{\cdot}65$

b) $\alpha = 37^0$
$Q = 65$ *kg*
$P = 45$ *kg*
$f = 0{\cdot}16$

c) $\alpha = 17^0$
$Q = 75$ *kg*
$P = 35$ *kg*
$f = 0{\cdot}42$

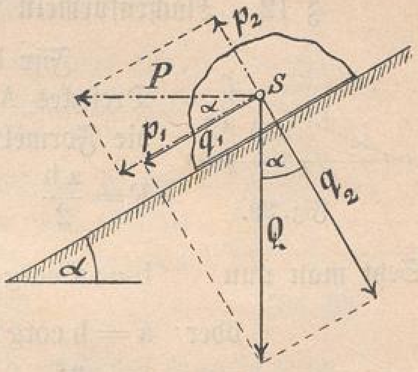


Fig. 31 b.

20. Welche Resultate ergeben sich wenn die Kraft P nach links (Fig. 31 b) wirkt?

Anmerkung. Jetzt ist $\mathfrak{P} = p_1 + q_1$ und $N = q_2 - p_2$.

Resultate.

1. *a)* 1274·4 *m*
b) 4·17 *m*

2. *a)* 84·178 **HP.**
b) $10^0\,41'\,47''$

3. *a)* $17'\,11''$
$34'\,23''$
$1^0\,25'\,56''$
b) $4^0\,45'\,49''$
$11^0\,18'\,35''$
c) $22^0\,46'\,57''$
$25^0\,38'\,27''$
$29^0\,40'\,58''$
$30^0\,57'\,50''$
d) *α)* $4^0\,33'$
β) $4^0\,9'\,40''$
γ) $4^0\,43'\,52''$
δ) $3^0\,54'\,7''$

4. *a)* $P = 35{\cdot}15$ *kg*
$N = 63{\cdot}41$ *kg*
$R = 26{\cdot}63$ *kg*
b) $P = 122{\cdot}69$ *kg*
$N = 257{\cdot}235$ *kg*
$R = 38{\cdot}585$ *kg*

5. 73·4 *m*

6. $r = 341{\cdot}86$ *Ml.*
$R = 788{\cdot}03$ *Ml.*
$u = 2148$ *Ml.*
$U = 4951{\cdot}4$ *Ml.*

7. 92·804 *Ml.*

8. 309·39 *m*

9. $AL = 11348$ *m*
$RL = 13016$ *m*

10. 19047 *m*

11. *a)* 9·8084 *m*
b) 9·8182 *m*
c) 9·8294 *m*
d) 9·78 und 9·831

12. $\beta = 36^0\,21'\,18''$
$\gamma = 33^0\,38'\,42''$
$\delta = 58^0\,8'\,26''$
$\varphi = 53^0\,28'\,26''$

12 a. $\alpha = 61^0\,33'\,25''$
$\varphi = 53^0\,6'\,50''$

13. $\beta = 26^0\,49'\,24''$
$\gamma = 31^0\,10'\,36''$
$\delta = 62^0\,16'\,48''$
$\varphi = 54^0\,46'\,48''$

13 a. *α)* $38^0\,55'\,40''$
β) $43^0\,15'\,20''$

14. $4^0\,20'\,47''$

15. $\alpha \geqq 48^0\,32'\,36''$

16. 618 *m*
841 *m*
2328 *m*

17. *α)* 0·4723 *Dyn.*
β) 0·4592 *Dyn.*
γ) 0·4410 *Dyn.*

18. *a)* $1^0\,42'\,30''$
b) $3^0\,23'$
c) $2^0\,56'\,22{\cdot}5''$

19. *a)* $\mathfrak{P} = -1{\cdot}417$ *kg*
$N = 79{\cdot}438$ *kg*
$R = 51{\cdot}635$ *kg*
b) $\mathfrak{P} = -3{\cdot}179$ *kg*
$N = 78{\cdot}993$ *kg*
$R = 12{\cdot}639$ *kg*
c) $\mathfrak{P} = 11{\cdot}543$ *kg*
$N = 81{\cdot}956$ *kg*
$R = 34{\cdot}422$ *kg*
Der Körper sitzt fest, weil $\mathfrak{P} < R$ ist.

20. *a)* $\mathfrak{P} = 60{\cdot}245$ *kg*
$N = 51{\cdot}796$ *kg*
$R = 33{\cdot}667$ *kg*
b) $\mathfrak{P} = 75{\cdot}057$ *kg*
$N = 24{\cdot}829$ *kg*
$R = 39{\cdot}726$ *kg*
c) $\mathfrak{P} = 55{\cdot}399$ *kg*
$N = 61{\cdot}490$ *kg*
$R = 25{\cdot}826$ *kg*
Der Körper gleitet, weil $\mathfrak{P} > R$ ist.

§ 12. Flächenformeln für das rechtwinklige Dreieck.

Für den Flächeninhalt F des rechtwinkligen Dreieckes ABC (Fig. 32) ergibt die Planimetrie die Formeln:

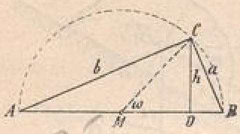


Fig. 32.

$$F = \frac{a\,b}{2} \qquad F = \frac{c\,.\,h}{2}$$

Setzt man nun $b = a \operatorname{cotg} A$ $\qquad h = \frac{c}{2} \sin\omega$, oder weil

oder $a = b \operatorname{cotg} B$, $\qquad \sphericalangle\,\omega = 2A$ ist, (warum?)

so erhält man: $\mathbf{F = \frac{a^2}{2} \operatorname{\mathbf{cotg}} A}$ $\qquad h = \frac{c}{2} \sin(2A)$,

$$\mathbf{F = \frac{b^2}{2} \operatorname{\mathbf{cotg}} B} \qquad \mathbf{F = \frac{c^2}{4} \sin(2A)} \quad {}^{*)}$$

D. h. 1. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist gleich dem halben Quadrate einer Kathete, multipliziert mit dem cotangens des dieser Kathete gegenüberliegenden Winkels.

2. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist gleich dem vierten Teile des Quadrates der Hypotenuse, multipliziert mit dem sinus des doppelten kleineren Spitzwinkels.

Übungsbeispiele.

Man berechne die Flächen der durch folgende Angaben bestimmten rechtwinkligen Dreiecke:

1. $a = 8{\cdot}75\ m$, $\sphericalangle A = 38^0\,15'$ 2. $b = 8{\cdot}8\ dm$, $\sphericalangle A = 40^0\,45'\,10''$ 3. $c = 34{\cdot}52\ m$, $\sphericalangle A = 57^0\,20'$ 4. $c = 81{\cdot}95\ cm$, $\sphericalangle A = 56^0\,53'\,9''$

Man berechne die Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes, von welchem gegeben sind:

5. $F = 50\ m^2$, $\sphericalangle A = 31^0$ 6. $F = 2558\ m^2$, $\sphericalangle B = 25^0\,20'$ 7. $F = 5418\ m^2$, $\sphericalangle A = 71^0\,30'\,28''$ 8. $F = 5655\ m^2$, $\sphericalangle B = 56^0\,30'$.

Resultate.

1. $48{\cdot}56\ m^2$ 2. $3336{\cdot}6\ dm^2$ 3. $270{\cdot}72\ m^2$ 4. $1536{\cdot}5\ cm^2$

5. $a = 7{\cdot}7515\ m$, $b = 12{\cdot}9007\ m$, $c = 15{\cdot}0503\ m$
6. $a = 103{\cdot}955\ m$, $b = 49{\cdot}214\ m$, $c = 115{\cdot}016\ m$
7. $a = 180\ m$, $b = 60{\cdot}2\ m$, $c = 189{\cdot}8\ m$
8. $a = 86{\cdot}52\ m$, $b = 130{\cdot}72\ m$, $c = 156{\cdot}76\ m$

---

*) Hier ist unter A der kleinere Spitzwinkel des Dreieckes verstanden. Aus den in § 22 angestellten Betrachtungen ergibt sich übrigens, daß sin (2 B) und sin (2 A) gleich sind.

Das gleichschenklige Dreieck

§ 13. läßt sich durch die Höhe in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegen und auf diese zurückführen.

Zieht man (Fig. 33) die Grundlinie b, den Schenkel s, die Höhe h, die Winkel A und C (2α) und den Flächeninhalt F in Betracht, so ergeben sich zur Auflösung folgende Gleichungen:

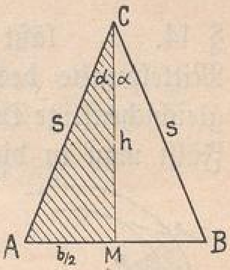


Fig. 33.

$$\frac{b}{2} = s \cos A = s \sin\frac{C}{2} \qquad b = 2s \cos A = 2s \sin\alpha$$

$$\frac{b}{2} = h \operatorname{cotg} A = h \operatorname{tg}\frac{C}{2} \qquad b = 2h \operatorname{cotg} A = 2h \operatorname{tg}\alpha$$

$$h = s \sin A \quad F = \frac{b\,.\,h}{2} = h\,s \cos A = h^2 \operatorname{cotg} A = \frac{b^2}{4} \operatorname{tg} A = \frac{s^2}{2} \sin C$$

Wir wollen folgende sechs Fälle der Auflösung hervorheben.

Gegeben	Zu suchen	Lösung	Übungsbeispiel	Resultate
b, $\sphericalangle A$	s	$h = \frac{b}{2}.\operatorname{tg}A$	$b = 8{\cdot}06\ m$	$s = 5{\cdot}65\ m$
	h	$s = \frac{b}{2} : \cos A$	$\sphericalangle A = 44^0 29' 53''$	$h = 3{\cdot}96\ m$
s, $\sphericalangle A$	b	$b = 2s.\cos A$	$s = 48{\cdot}75\ cm$	$b = 81{\cdot}95\ cm$
	h	$h = s.\sin A$	$\sphericalangle A = 32^0 47' 50''$	$h = 26{\cdot}40\ cm$
h, $\sphericalangle C$	b	$b = 2h.\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}\right)$	$h = 60{\cdot}9\ m$	$b = 40\ m$
	s	$s = h : \cos\left(\frac{C}{2}\right)$	$\sphericalangle C = 36^0 21' 40''$	$s = 64{\cdot}1\ m$
b, s	$\sphericalangle A$	$\cos A = \frac{b}{2s}$	$b = 222\ mm$	$A = 80^0 43' 45''$
	h	$h = s.\sin A$	$s = 689\ mm$	$h = 680\ mm$
b, h	$\sphericalangle A$	$\operatorname{tg} A = \frac{2h}{b}$	$b = 117{\cdot}2\ cm$	$A = 57^0 50' 23''$
	s	$s = h : \sin A$	$h = 93{\cdot}2\ cm$	$s = 110{\cdot}095\ cm$
h, s	$\sphericalangle A$	$\sin A = \frac{h}{s}$	$h = 493\ cm$	$A = 60^0 45' 33''$
	b	$b = 2s \cos A$	$s = 565\ cm$	$b = 552\ cm$

Für alle Fälle ist $\sphericalangle \alpha = 90^0 - A$ und $\sphericalangle A = 90^0 - \frac{C}{2}$.

Das reguläre Polygon

§ 14. läßt sich, indem man die Endpunkte einer Seite mit dem Mittelpunkte des Polygons verbindet, auf das hiedurch entstehende gleichschenklige Dreieck (das sogenannte Bestimmungsdreieck) zurückführen. Fällt man in diesem Dreiecke (A B O in Fig. 34) die Höhe O M, so

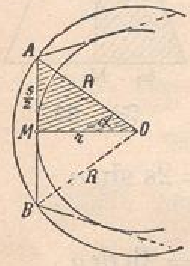


Fig. 34.

ist im rechtwinkligen Dreiecke A M O

die halbe Polygonsseite $\frac{s}{2} = \mathrm{A\,M}$,

der Radius des umschriebenen Kreises $\mathrm{R} = \mathrm{O\,A}$,

der Radius des eingeschriebenen Kreises $\mathrm{r} = \mathrm{O\,M}$,

und der Winkel $\mathrm{A\,O\,M} = \alpha = \frac{180^0}{n}$,

wenn n die Seitenzahl des Polygons bedeutet.

Aus diesem Dreiecke ergeben sich die Gleichungen:

$$s = 2\,R \sin \alpha \qquad\qquad s = 2\,r \operatorname{tg} \alpha$$

$$R = \frac{s}{2 \sin \alpha} \qquad\qquad r = \frac{s}{2} \operatorname{cotg} \alpha$$

Übungsbeispiele.

1. Einem Kreise vom Radius 57·5 *mm* werden ein reguläres Neuneck, Zehneck, Fünfzehneck eingeschrieben, einem zweiten Kreise vom Radius 4·83 *m* ein reguläres Zwölfeck, Sechzehneck und Zwanzigeck umgeschrieben. Es sind die Seiten dieser Polygone zu berechnen.

2. Man stelle eine allgemeine Formel auf, nach welcher aus der Seite s und der Eckenzahl n eines regulären Polygons die Radien seines eingeschriebenen und umschriebenen Kreises berechnet werden können.

3. Nach diesen Formeln berechne man die besagten Radien für ein reguläres Fünfeck, Siebeneck und Achtzehneck, wenn $s_5 = 32{\cdot}5$ *cm*, $s_7 = 75{\cdot}28$ *cm* und $s_{18} = 0{\cdot}585$ *m* ist.

4. Wie groß ist der Umfang des einem Kreise eingeschriebenen und des umschriebenen regulären 360ecks, wenn $r = \frac{1}{2}$, $(d = 1)$ gesetzt wird? Welche Zahl ergibt sich annähernd aus den übereinstimmenden Ziffern der gefundenen Werte?

Resultate.

1. $s_9 = 39{\cdot}3327$ *mm* $\quad s_{10} = 35{\cdot}537$ *mm* $\quad s_{15} = 23{\cdot}91$ *mm*
$u_{12} = 2{\cdot}5884$ *m* $\quad u_{16} = 1{\cdot}9215$ *m* $\quad u_{20} = 1{\cdot}53$ *m*

2. $\mathrm{r} = \frac{\mathrm{s}}{2} . \mathrm{cotg}\left(\frac{180^0}{\mathrm{n}}\right)$, $\quad \mathrm{R} = \frac{\mathrm{s}}{2 \sin\left(\frac{180^0}{\mathrm{n}}\right)}$

3. $\mathrm{r} = 22 \cdot 366\ cm$ $\quad \mathrm{r} = 78 \cdot 16\ cm$ $\quad \mathrm{r} = 1 \cdot 65885\ m$
$\mathrm{R} = 27 \cdot 6456\ cm$ $\quad \mathrm{R} = 86 \cdot 75\ cm$ $\quad \mathrm{R} = 1 \cdot 68446\ m$

4. $\mathrm{U} = 3 \cdot 1415$ $\quad \mathrm{U} = 3 \cdot 1416.$ $\quad$ Die Zahl π.

Der Rhombus

§ 15. läßt sich durch seine beiden Diagonalen in vier kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegen und auf diese zurückführen. (Fig. 35.)

Wir wollen folgende Fälle, in denen die Seite s, die Diagonalen ($AC = \delta_1$, $BD = \delta_2$), die Winkel $A = 2\alpha$ und $B = 2\beta$ in Rechnung kommen, herausgreifen. Dabei ist stets

$\sphericalangle \alpha = 90 - \sphericalangle \beta \qquad \sphericalangle A = 180 - \sphericalangle B$

$\alpha = \frac{A}{2} \qquad \beta = \frac{B}{2}$

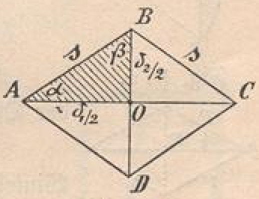


Fig. 35.

Gegeben	Zu suchen	Allgemeine Lösung	Übungsbeispiel	Resultate
s	δ_1	$\delta_1 = 2\,\mathrm{s}\cos\alpha$	$\mathrm{s} = 59 \cdot 38\ m$	$\delta_1 = 101 \cdot 656\ m$
$\sphericalangle A$	δ_2	$\delta_1 = 2\,\mathrm{s}\sin\alpha$	$\sphericalangle A = 62^0\,16'$	$\delta_2 = 61 \cdot 403\ m$
δ_1	s	$\mathrm{s} = \frac{\delta_1}{2} : \cos\alpha$	$\delta_1 = 125 \cdot 8\ dm$	$\mathrm{s} = 96 \cdot 687\ dm$
$\sphericalangle A$	δ_2	$\delta_2 = \delta_1 \operatorname{tg}\alpha$	$\sphericalangle A = 98^0\,50'$	$\delta_2 = 146 \cdot 86\ dm$
δ_2	s	$\mathrm{s} = \delta_2 : 2\sin\alpha$	$\delta_2 = 73 \cdot 5\ cm$	$\delta_1 = 85 \cdot 302\ cm$
$\sphericalangle A$	δ_2	$\delta_1 = \delta_2 . \operatorname{cotg}\alpha$	$\sphericalangle A = 81^0\,30'$	$\mathrm{s} = 56 \cdot 30\ cm$
δ_1	$\sphericalangle \alpha$	$\cos\alpha = \frac{\delta_1}{2\mathrm{s}}$	$\delta_1 = 225 \cdot 25\ m$	$\sphericalangle A = 100^0\,17'\,40''$
s	δ_2	$\delta_2 = \delta_1 \operatorname{tg}\alpha$	$\mathrm{s} = 175 \cdot 75\ m$	$\delta_2 = 269 \cdot 85\ m$
δ_1	s	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\delta_2}{\delta_1}$	$\delta_1 = 135 \cdot 5\ cm$	$\sphericalangle A = 67^0\,4'\,4''$
δ_2	$\sphericalangle A$	$\mathrm{s} = \delta_1 : 2\cos\alpha$	$\delta_2 = 89 \cdot 8\ cm$	$\mathrm{s} = 81 \cdot 278\ cm$

Vermischte Beispiele.

1. Wie groß ist der brechende Winkel ω eines Glasprismas (Fig. 29), wenn $AB = 35$ *mm*, $AC = BC = 45{\cdot}5$ *mm* ist?

2. Wie groß ist der Zentriwinkel ω in einem Kreise vom Radius $r = 65{\cdot}54$ *cm*, wenn die zugehörige Sehne 100 *cm* mißt? Wie groß sind die Flächeninhalte des zugehörigen Sektors und Segmentes?

3. Der Schwerpunktsabstand OS (Fig. 36) eines Kreisbogens (aus Draht) ist nach der Proportion

$$OS : r = \text{Sehne } \overline{AB} : \text{arc } \widehat{AB}$$

zu bestimmen, wenn $r = 71{\cdot}56$ *cm* und der Zentriwinkel $AOB = \omega = 110^\circ\ 25'$ ist.

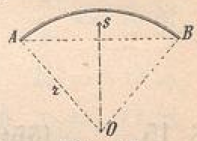


Fig. 36.

4. An einer plankonvexen (plankonkaven) Linse (Fig. 37 a, und 37 b) wurden folgende Abmessungen gefunden:

$AB = 43{\cdot}5$ *mm* ($65{\cdot}5$ *mm*)
$MP = 5{\cdot}75$ *mm* ($7{\cdot}25$ *mm*)

Wie groß ist der Krümmungsradius r und der Öffnungswinkel $AOB = \omega$?*)

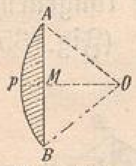


Fig. 37 a.

Fig. 37 b.

5. Wie groß ist die Resultierende R zweier gleicher, unter einem Winkel $\omega = 61^\circ\ 30'$ zusammenwirkender Kräfte $P = 52{\cdot}8$ *kg*?

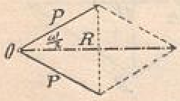


Fig. 38.

6. An den beiden symmetrischen Seilstücken ac und bc (Fig. 39), welche unter einem Winkel $u = 37^\circ\ 22\frac{1}{2}'$ gegen die Horizontale geneigt sind, hängt vertikal eine Last $Q = 125{\cdot}5$ *kg*. Wie groß ist die Spannung in jedem Seilstücke?

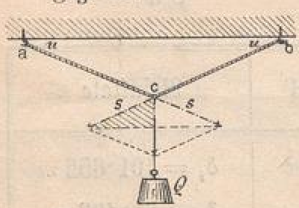


Fig. 39.

7. *a)* Wie groß sind die Spannungen in den beiden, unter demselben Winkel $\alpha = 25^\circ\ 30'$ gegen die Vertikale geneigten Konstruktionsteilen ac und bc (Fig. 40), wenn im Punkte c eine vertikale Belastung $Q = 785{\cdot}5$ *kg* wirkt?

Dieselbe Aufgabe ist für folgende Angaben zu lösen:

b) $Q = 212{\cdot}5$ *kg* $\alpha = 31^\circ\ 10'$ *c)* $Q = 2730$ *kg* $\alpha = 51^\circ$

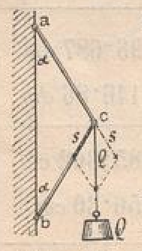


Fig. 40.

8. *a)* Zwei im ebenen Gelände führende geradlinige Bahnstrecken MA und NB (Fig. 41), welche den Winkel $\omega = 78^\circ\ 20\frac{1}{2}'$ mit einander einschließen, sollen durch einen Kreisbogen vom Radius $R = 275$ *m* verbunden werden. Man berechne die „Tangentenlängen" PA und PB und die Entfernung des Bogenscheitels S von dem Winkelpunkte P.

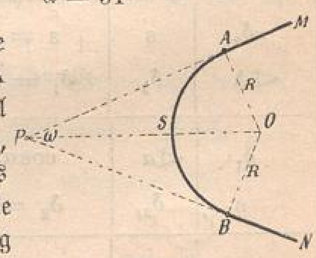


Fig. 41.

*) Setzt man $AM = s$ und $PM = h$, so ist ($\Delta\, OMA$) ... $r^2 = (r - h)^2 + s^2$, woraus zunächst r zu berechnen ist.

8. *b)* Wie groß muß in vorstehender Aufgabe der Radius R werden, wenn $\omega = 110^0\,20'$ ist und wenn örtlicher Verhältnisse halber die Bogenmitte S von P eine Entfernung von 95 *m* haben muß?

Anleitung: $PO - OS = PS$.

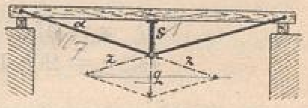


Fig. 42.

9. Von der gleichmäßig verteilten Belastung Q eines einfach armierten Trägers (Fig. 42) überträgt sich auf die vertikale Stütze S der Vertikaldruck $q = \frac{5}{8}$ Q. Wie groß wird die Zugspannung z in den schmiedeeisernen Zugstangen sein, wenn diese unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt sind?

Welchen Durchmesser δ müssen diese Zugstangen erhalten, wenn auf 1 mm^2 Querschnitt 7 *kg* zulässige Beanspruchung gerechnet werden?

a) $Q = 4780$ *kg* $\quad$ *b)* $Q = 5050$ *kg*
$\sphericalangle\, \alpha = 10\frac{1}{2}^0$ $\quad$ $\sphericalangle\, \alpha = 12^0\,20'$

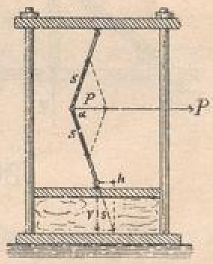


Fig. 43.

10. An einer einfachen Kniepresse (Fig. 43) wirkt eine horizontale Kraft P, während die Schenkel der Presse mit der Horizontalen den Winkel α einschließen.

Man berechne:

1. Die Druckspannung s in den Schenkeln,
2. den Horizontalschub h,
3. den vertikalen Preßdruck v

für folgende Angaben:

a) $P = 25{\cdot}5$ *kg* $\quad$ *b)* $P = 18{\cdot}75$ *kg*
$\sphericalangle\, \alpha = 88^0\,25'$ $\quad$ $\sphericalangle\, \alpha = 89^0$.

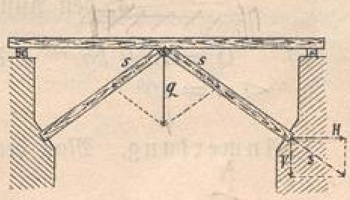


Fig. 44.

11. Von der gleichmäßig verteilten Gesamtbelastung Q eines einfachen Sprengwerks (Fig. 44), dessen Streben unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt sind, entfällt auf die Mitte der vertikale Druck $q = \frac{5}{8}$ Q. Man berechne den Druck s in den Streben, den Horizontalschub h und den Vertikaldruck v für folgende Angaben:

a) $Q = 4680$ *kg* $\quad$ *b)* $Q = 1564$ *kg*
$\sphericalangle\, \alpha = 50^0$ $\quad$ $\sphericalangle\, \alpha = 47^0$

Anmerkung. Man beachte die Kongruenz der zu bildenden Kräftedreiecke.

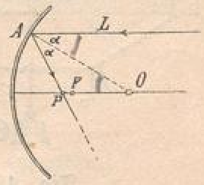


Fig. 45.

12. Auf einen sphärischen Hohlspiegel vom Radius r fällt parallel zur Achse ein Lichtstrahl L (Fig. 45) unter dem

Winkel α (gegen sein Einfallslot OA) und schneidet als reflektierter Strahl die Achse im Punkte P. Wie weit ist dieser Punkt vom theoretischen Brennpunkte F entfernt? $\left(\mathrm{OF} = \frac{r}{2}\right)$.

a) $r = 45 \cdot 75\ cm$ $\quad$ *b)* $r = 205\ cm$

$\sphericalangle \alpha = 20^0\ 10'$ $\quad$ $\sphericalangle \alpha = 5^0\ 10'$.

Anleitung: Δ OAP ist gleichschenklig. (Warum?)

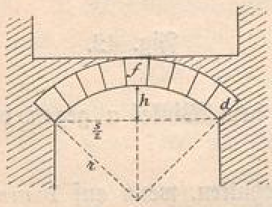


Fig. 46.

13. Ein flaches Tonnengewölbe (Fig. 46) hat eine Spannweite $s = 3 \cdot 5\ m$, eine Pfeilhöhe $h = \frac{1}{8}\ s$ und eine Stärke $d = 30\ cm$. Wie groß ist die Stirnfläche f des Gewölbes und wie viel *kg* wiegt das laufende Meter desselben, wenn das spezifische Gewicht $\sigma = 2 \cdot 75\ [1 \cdot 65]$ ist? (Siehe Anleitung zur Aufgabe 4.)

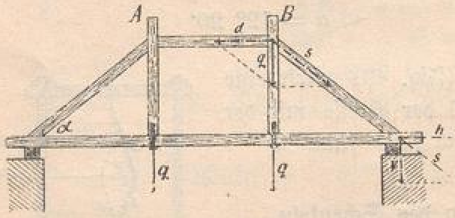


Fig. 47.

14. Von der gleichmäßig verteilten Belastung Q eines doppelten Hängewerkes wird auf jede der beiden Hängesäulen (A und B, Fig. 47) ein vertikaler Druck $q = \frac{11}{30}\ Q$ übertragen.

Man bestimme:

1. den Druck d im Spannriegel,
2. den Strebendruck s,
3. die Zugspannung h im Hauptbalken,
4. den Auflagerdruck v.

a) $Q = 7050\ kg$ $\quad$ *b)* $Q = 6150\ kg$ $\quad$ *c)* $Q = 8175\ kg$

$\sphericalangle \alpha = 40^0$ $\quad$ $\sphericalangle \alpha = 35^0$ $\quad$ $\sphericalangle \alpha = 48^0$

Anmerkung. Man beachte die Kongruenz der zu bildenden Kräftedreiecke.

15. Ein Stab AB ist mit seinen Enden an zwei gleich lange, unter den Winkeln α gegen den Horizont geneigten Seilstücken (Fig. 48) befestigt. An der Mitte des Stabes ist ein Gewicht Q angehängt. Wie groß sind die Seilspannungen s und die Zugspannung z im Stabe, wenn das Gewicht des Stabes q ist?

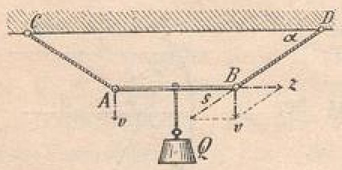


Fig. 48.

a) $Q = 245\ kg$ $\quad$ *b)* $Q = 300\ kg$

$q = 80 \cdot 8\ kg$ $\quad$ $q = 75 \cdot 5\ kg$

$\sphericalangle \alpha = 58^0\ 45'$ $\quad$ $\sphericalangle \alpha = 65^0\ 15'$

Anleitung: Die Gesamtlast $(Q + q)$ zerlegt sich in zwei gleiche Parallelkomponenten $v = \frac{Q + q}{2}$, welche nach den Richtungen des Seiles und Stabes zu zerlegen sind.

16. Welche Winkel α und β bilden die äußeren und die inneren gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise von den Radien R und r und der Zentraldistanz a mit der Zentrallinie, wenn $R = 75$ *cm*, $r = 35$ *cm* und $a = 225$ *cm* ist?

Wie lang sind die zwischen den Berührungspunkten liegenden Abschnitte der beiden Tangenten?

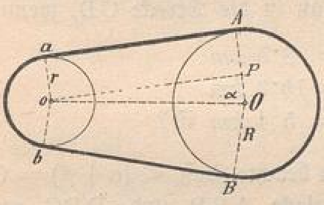


Fig. 49 a.

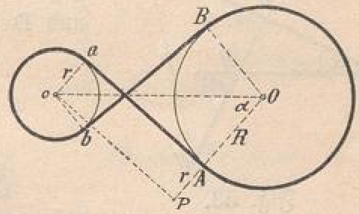


Fig. 49 b.

17. Zwei Riemenscheiben (Fig. 49 a und 49 b) von den Radien $R = 56$ *cm* und $r = 26$ *cm* und der Zentraldistanz $a = 335$ *cm* sollen durch einen Treibriemen verbunden werden. Wie lang muß dieser Riemen sein, wenn die beiden Scheiben

a) im selben Sinne (Fig. 49 a)
b) im entgegengesetzten Sinne (Fig. 49 b)

rotieren sollen?

18. Von der gleichförmig verteilten Gesamtbelastung Q eines doppelt armierten Trägers (Fig. 50) wird auf jede Stütze der Vertikaldruck $q = \frac{11}{30}$ Q übertragen. Man berechne die Zugspannungen z_1 und z_2 in den Zugstangen und die für letztere erforderlichen Durchmesser (zulässige Beanspruchung für 1 mm^2 Querschnitt = 7 *kg*) für folgende Annahmen:

a) $Q = 4775$ *kg* *b)* $Q = 6750$ *kg*
$\sphericalangle \alpha = 10\frac{1}{2}^0$ $\sphericalangle \alpha = 12\frac{1}{2}^0$

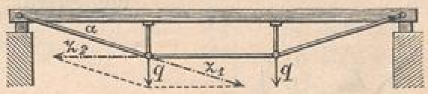


Fig. 50.

19. Wie lang muß ein straff gespannter Riemen sein, welcher in der durch Figur 51 angegebenen Weise um die drei Scheiben M, P, N geführt wird, wenn $R = 25$ *cm*
$r = 20$ *cm*
$\varrho = 12$ *cm*
und $MP = PN = 80$ *cm* ist?

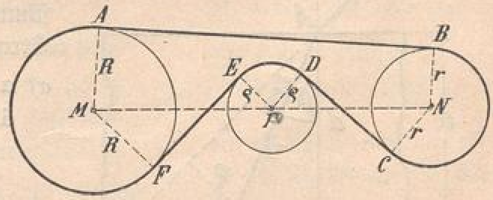


Fig. 51.

(Die Scheibenmittelpunkte M, P und N liegen in einer Geraden.)
(Anleitung: Siehe Aufgaben 16, 17.)

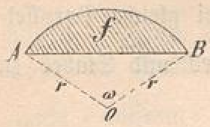


Fig. 52.

20. Wie groß ist die Fläche f eines Kreissegmentes (Fig. 52) in einem Kreise vom Radius r = 45·5 *cm*, wenn der zugehörige Zentriwinkel $\omega = 80^0$ ist?

(Anleitung: f = Sektor AOB — Δ AOB.)

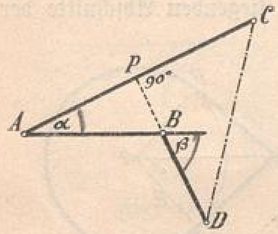


Fig. 53.

21. Von der geradlinigen Straße, welche die Orte A und B verbindet, zweigen bei A und B zwei geradlinige Straßen unter den Winkeln $\alpha = 32^0$, $\beta = 58^0$ Fig. 53) nach links und rechts ab, welche zu den Orten C und D führen. Wie groß ist die Strecke CD, wenn:

AB = 8·5 *km*
AC = 15·3 *km*
BD = 5·4 *km* ist?

(Anleitung: Man beachte, daß $\sphericalangle (\alpha + \beta) = 90^0$, daß also die Hilfsdreiecke ABP und DPC rechtwinklig sind.)

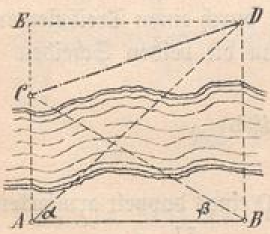


Fig. 54.

22. Wie groß ist (Fig. 54) die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte C und D, wenn

$AB = a = 1357·5\ m$
$\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA = 90^0$
$\sphericalangle DAB = \alpha = 53^0\ 15'\ 30''$
$\sphericalangle CBA = \beta = 27^0\ 35'\ 15''$ ist?

(Anleitung: Man berechne BD und CA und dann aus dem rechtwinkligen Hilfsdreiecke CDE (DE ∥ AB) die Strecke CD.)

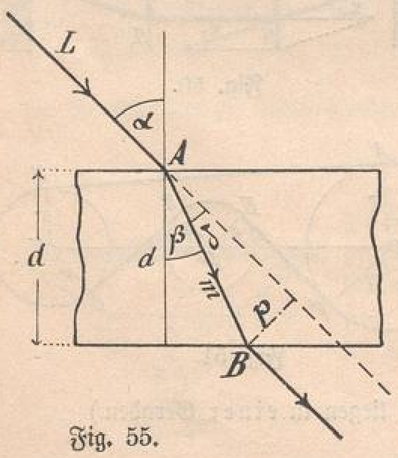


Fig. 55.

23. Ein Lichtstrahl L fällt unter einem Winkel α (Fig. 55) auf eine planparallele Glasplatte von der Dicke d und dem Brechungsexponenten n. Man bestimme die Parallelverschiebung p des Strahles.

a) $\alpha = 68^0\ 10'$ *b)* $\alpha = 56^0\ 20'$
d = 38·5 *mm* d = 45 *mm*
n = 1·51 n = 1·53

Wie groß ist die Plattendicke d, wenn:

c) $\alpha = 64^0$ *d)* $\alpha = 58^0$
n = 1·53 n = 1·53
p = 20·9 *mm* p = 17·33 *mm* ist?

$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$

$m = \frac{d}{\cos \beta}$

24. Auf eine plankonvexe Linse (Fig. 55 a) vom Krümmungshalbmesser $r = 75\,mm$ und dem Brechungsindex $n = 1{\cdot}51$ fällt ein Parallelstrahl P auf, der den Abstand h von der Achse besitzt. In welcher Entfernung $CF = x$ wird der gebrochene Strahl P' die Achse schneiden, wenn

a) $h = 15\,mm$
b) $h = 10\,mm$
c) $h = 5\,mm$ ist?

Anmerkung. Nach dem Brechungsgesetze ist

$$\sin\beta = n \sin\alpha$$

und $\delta = \beta - \alpha$.

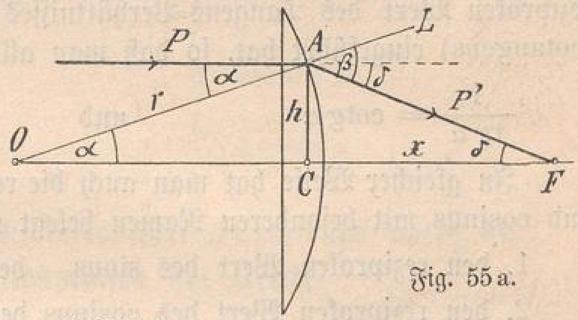


Fig. 55 a.

Resultate.

1. $45^0\ 14'\ 24''$

2. $\sphericalangle\,\omega = 99^0\ 26'\ 22''$
$F = 3727{\cdot}56\ cm^2$
$f = 1608{\cdot}8\ cm^2$

3. $60{\cdot}99\ cm$

4. *a)* $r = 44{\cdot}011\ mm$
$\sphericalangle\,\omega \doteq 59^0\ 14'$
b) $r = 77{\cdot}595\ mm$
$\sphericalangle\,\omega = 49^0\ 55'\ 47''$

5. $90{\cdot}75\ kg$

6. $103{\cdot}4\ kg$

7. *a)* $435{\cdot}145\ kg$
b) $124{\cdot}17\ kg$
c) $2169\ kg$

8. *a)* $PA = 337{\cdot}53\ m$
$PS = 160{\cdot}37\ m$
b) $R = 435{\cdot}188\ m$

9. *a)* $z = 8197\ kg$
$\delta = 38{\cdot}61\ mm$
b) $z = 7388\ kg$
$\delta = 36{\cdot}66\ mm$

10. *a)* $s = 461{\cdot}5\ kg$
$h = 12{\cdot}75\ kg$
$v = 461{\cdot}3\ kg$
b) $s = 537{\cdot}2\ kg$
$h = 9{\cdot}375\ kg$
$v = 537{\cdot}1\ kg$

11. *a)* $s = 1909\ kg$
$h = 1227\ kg$
$v = 1462{\cdot}5\ kg$
b) $s = 668{\cdot}2\ kg$
$h = 455{\cdot}8\ kg$
$v = 488{\cdot}75\ kg$

12. *a)* $14{\cdot}94\ mm$
b) $4{\cdot}16\ mm$

13. $f = 1{\cdot}1373\ m^2$
$G = 3127{\cdot}5\ kg$
$[G = 1876{\cdot}5\ kg]$

14. *a)* $d = h = 3081\ kg$
$s = 4021\ kg$
$v = q$
b) $d = h = 3220\ kg$
$s = 3931\ kg$
$v = q$
c) $d = h = 2699\ kg$
$s = 4033\ kg$
$v = q$

15. *a)* $s = 190{\cdot}5\ kg$
$z = 98{\cdot}85\ kg$
b) $s = 206{\cdot}74\ kg$
$z = 86{\cdot}55\ kg$

16. $\sphericalangle\,\alpha = 10^0\ 14'\ 25''$
$\sphericalangle\,\beta = 29^0\ 16'\ 3''$
$AB = 221{\cdot}41\ cm$
$CD = 196{\cdot}27\ cm$

17. *a)* $930{\cdot}3\ cm$
b) $947{\cdot}8\ cm$

18. *a)* $z_1 = 9608\ kg$
$z_2 = 9447\ kg$
$\delta_1 = 41{\cdot}8\ mm$
$\delta_2 = 41{\cdot}45\ mm$
b) $z_1 = 11435\ kg$
$z_2 = 11164\ kg$
$\delta_1 = 45{\cdot}61\ mm$
$\delta_2 = 45{\cdot}06\ mm$

19. $\widehat{AF} = 91{\cdot}342\ cm$
$\widehat{BC} = 70{\cdot}437\ cm$
$\widehat{ED} = 10{\cdot}708\ cm$
$AB = 159{\cdot}921\ cm$
$EF = 70{\cdot}930\ cm$
$DC = 73{\cdot}322\ cm$
$L = 476{\cdot}66\ cm$

20. $f = 425{\cdot}9\ cm^2$

21. $CD = 12{\cdot}789\ km$

22. $CE = 1109{\cdot}2\ m$
$CD = 1753{\cdot}03\ m$

23. *a)* $24{\cdot}58\ mm$ *c)* $36\ mm$
b) $21{\cdot}28\ mm$ *d)* $35\ mm$

24. *a)* $141{\cdot}74\ mm$
b) $144{\cdot}72\ mm$
c) $146{\cdot}48\ mm$

Die reziproken Werte des sinus und cosinus.

§ 16. Wir haben bereits in § 2 bemerkt, daß man für den reziproken Wert des Tangens-Verhältnisses einen besonderen Namen (cotangens) eingeführt hat, so daß man allgemein zu setzen hat:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha}$$

In gleicher Weise hat man auch die reziproken Werte des sinus und cosinus mit besonderen Namen belegt und nennt:

1. den reziproken Wert des sinus den Cosecans (cosec.)
2. den reziproken Wert des cosinus den Secans (sec.);

somit:
$$\frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha \qquad \text{und} \qquad \sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}$$
$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha \qquad \qquad \cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}$$

Im rechtwinkligen Dreiecke (Fig. 5) bedeutet daher:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{gegenüberlgd. Kathete}}$$
$$\sec \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{anliegende Kathete}}$$

Anmerkung. Da $\sin \alpha = \cos (90^0 - \alpha)$ und $\cos \alpha = \sin (90^0 - \alpha)$ ist, so ist auch

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos (90^0 - \alpha)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sin (90^0 - \alpha)}$$

oder: $\operatorname{cosec} \alpha = \sec (90^0 - \alpha)$ und $\sec \alpha = \operatorname{cosec} (90^0 - \alpha)$, woraus zu ersehen ist, daß das im § 3 Gesagte auch für secans und cosecans Giltigkeit besitzt.

Übungsbeispiele.

Man führe in folgenden Ausdrücken sinus und cosinus ein:

a) $\sec x + \operatorname{cosec} x$ *b)* $\frac{1}{\sec \alpha} - \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}$

c) $\sin \alpha \operatorname{cosec} \alpha$ *d)* $\cos \beta \sec \beta$

e) $\sin \alpha (1 - \operatorname{cosec} \alpha)$ *f)* $\cos x (1 + \sec x)$

g) $\frac{1 - \sec \alpha}{1 + \sec \alpha}$ *h)* $\frac{\operatorname{cosec} x + 1}{\operatorname{cosec} x - 1}$

Resultate.

a) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}$ *b)* $\cos\alpha - \sin\alpha$

c) *e)* $\dfrac{1}{\sin\alpha - 1}$ *d)* *f)* $\dfrac{1}{\cos x + 1}$

g) $\dfrac{\cos\alpha - 1}{\cos\alpha + 1}$ *h)* $\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

Darstellung der goniometrischen Funktionen durch die Funktionslinien am Kreise.

§ 17. Als Mittel zu dieser Darstellung benützen wir einen Kreis (Fig. 56), versehen mit zwei auf einander senkrechten unbegrenzten Tangenten tt' und ss' und einen Maßstab, d e s s e n L ä n g e n e i n h e i t d u r c h d e n R a d i u s d e s K r e i s e s g e b i l d e t w i r d.

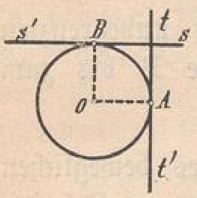


Fig. 56.

tt' heißt die unbegrenzte Tangentenlinie, ss' die unbegrenzte Cotangentenlinie.

Den zu untersuchenden Winkel legen wir stets so als Zentriwinkel in den Kreis, daß der eine (feste) Schenkel des Winkels in die feste Lage OA kommt, während der andere (bewegliche) Schenkel eine mit der Größe des Winkels veränderliche Lage annimmt.

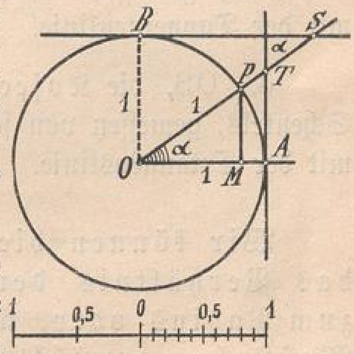


Fig. 57.

Bringen wir beispielsweise (Fig. 57) den Winkel $\alpha = 35^0$ in die besprochene Lage, so wissen wir bereits nach § 3, daß die Maßzahlen der Funktionslinien

PM OM AT und BS unmittelbar den
sinus cosinus tangens und cotangens des Winkels α angeben.

Nun ergibt sich aber nach § 16 aus dem

$\triangle$ OAT . . . . $\sec\alpha = \dfrac{OT}{OA}$, nach Abmessung $\dfrac{1{\cdot}22}{1} = 1{\cdot}22$,

$\triangle$ OBS . . . $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{OS}{OB}$, „ „ $\dfrac{1{\cdot}74}{1} = 1{\cdot}74$, so daß wir erkennen, daß die Strecken OT und OS durch ihre Maßzahlen direkt den secans bezw. den cosecans des Winkels angeben.

Wir haben nunmehr im ganzen sechs Funktionslinien, u. zw. ist:

1. **PM, die Sinuslinie,** das vom Endpunkte des beweglichen Radius OP auf den festen Radius OA gefällte Perpendikel.

2. **OM, die Cosinuslinie,** die Projektion des beweglichen Radius auf den festen Radius, gemessen von O aus.

3. **AT, die Tangenslinie,** der Abschnitt der unbegrenzten Tangentenlinie, gemessen von ihrem Anfangspunkte A bis zum Schnitte T mit dem beweglichen Schenkel.

4. **BS, die Cotangenslinie,** der Abschnitt der unbegrenzten Cotangentenlinie, gemessen von ihrem Anfangspunkte B bis zum Schnitte S mit dem beweglichen Schenkel.

5. OT, die Secanslinie, der Abschnitt des beweglichen Schenkels, gemessen von seinem Anfangspunkte O bis zum Schnitte mit der Tangentenlinie.

6. OS, die Kosecanslinie, der Abschnitt des beweglichen Schenkels, gemessen von seinem Anfangspunkte O bis zum Schnitte mit der Cotangenslinie.

Wir können die Funktionen auch definieren als das Verhältnis der gleichnamigen Funktionslinien zum Radius oder, wenn der Radius zur Einheit des Maßstabes gewählt wird, als die Maßzahlen der an diesem Maßstabe abgemessenen gleichnamigen Funktionslinien.

Diese Definitionen decken sich, so lange wir nur Spitzwinkel betrachten, vollständig mit den in § 2 gegebenen Erklärungen, sind aber auch für Winkel über 90° anwendbar, wovon wir später Gebrauch machen werden.

Beziehungen zwischen den sechs Funktionen eines und desselben Winkels.

§ 18. Nach § 16 ist:

$$\mathbf{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\mathbf{tg}\,\alpha} \quad \text{oder} \quad \mathbf{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mathbf{cotg}\,\alpha}$$

$$\mathbf{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\mathbf{sin}\,\alpha} \quad \text{oder} \quad \mathbf{sin}\,\alpha = \frac{1}{\mathbf{cosec}\,\alpha} \qquad \text{(I.)}$$

$$\mathbf{sec}\,\alpha = \frac{1}{\mathbf{cos}\,\alpha} \quad \text{oder} \quad \mathbf{cos}\,\alpha = \frac{1}{\mathbf{sec}\,\alpha}$$

Zu diesen Reziprozitätsbeziehungen treten noch einige andere hinzu, welche wir aus den durch die Funktionslinien und den Radius gebildeten rechtwinkligen Dreiecken erhalten, wenn wir auf dieselben den Pythagoräischen Lehrsatz in folgender Form anwenden: Das (arithmetische) Quadrat der Hypotenusen-Maßzahl ist gleich der Summe aus den Quadraten der beiden Katheten-Maßzahlen.

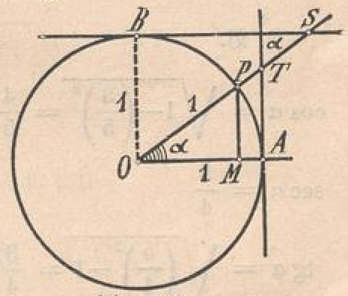


Fig. 58.

Setzen wir $r = 1$, so sind die Maßzahlen der Funktionslinien (Fig. 58) gleich den entsprechenden Funktionen des Winkels α und wir erhalten aus:

$\triangle$ OPM .... $\mathbf{sin}^2\alpha + \mathbf{cos}^2\alpha = 1$*) .. $\left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \\ \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \end{array} \right.$

$\triangle$ OAT .... $\mathbf{sec}^2\alpha - \mathbf{tg}^2\alpha = 1$.... $\left\{ \begin{array}{l} \sec\alpha = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha} \\ \mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{\sec^2\alpha - 1} \end{array} \right.$ (II.)

$\triangle$ OBS ....$\mathbf{cosec}^2\alpha - \mathbf{cotg}^2\alpha = 1$... $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{cosec}\,\alpha = \sqrt{1 + \mathrm{cotg}^2\alpha} \\ \mathrm{cotg}\,\alpha = \sqrt{\mathrm{cosec}^2\alpha - 1} \end{array} \right.$

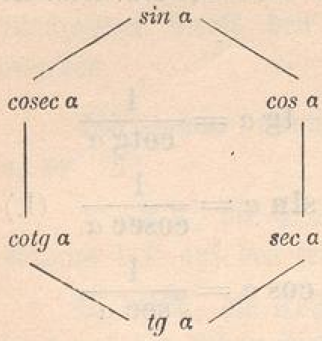
Endlich ergibt sich noch aus dem Dreiecke OPM:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OM}} \qquad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{PM}}$$

oder durch Übergang auf die Maßzahlen:

$$\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\mathbf{sin}\,\alpha}{\mathbf{cos}\,\alpha} \qquad \mathbf{cotg}\,\alpha = \frac{\mathbf{cos}\,\alpha}{\mathbf{sin}\,\alpha} \qquad \text{(III.)}$$

*) Man schreibt: $\sin^2\alpha$ statt $(\sin\alpha)^2$
$\cos^2\alpha$ statt $(\cos\alpha)^2$ u. s. f.



Auf Grund der mit (I) und (II) bezeichneten Beziehungen lassen sich die sechs Funktionen eines und desselben Winkels nach nebenstehendem Schema so gruppieren, daß sich aus jeder Funktion die beiden benachbarten nach (I und II) berechnen lassen.

Ist eine Funktion des Winkels α bekannt, so kann man demnach alle übrigen Funktionen dieses Winkels berechnen.

Man benutze dabei das vorstehende Schema, indem man, von der gegebenen Funktion ausgehend, entweder nach beiden Richtungen oder nur nach einer Richtung den Kreis durchläuft.*)

Z. B.

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3}$$

$$\sec\alpha = \frac{5}{4} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2-1} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1} = \frac{3}{4} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$$

Übungsbeispiele.

Gegeben:

1. $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$
2. $\sin\alpha = 0{\cdot}8$
3. $\cos\beta = 0{\cdot}3$
4. $\operatorname{cosec}\gamma = \sqrt{\frac{a+1}{a}}$
5. $\operatorname{tg} 45^0 = 1$
6. $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{1}{m-1}}$
7. $\operatorname{cotg} y = 3$
8. $\operatorname{cosec} z = 3$

Man bestimme die übrigen Funktionen dieser Winkel.

---

*) Die Formeln III können oft mit Vorteil angewendet werden, wenn aus einer gegebenen Funktion nicht alle übrigen Funktionen, sondern nur eine derselben berechnet werden soll. Doch ist der dadurch erzielte Vorteil zu gering, um ausführlich darauf einzugehen. Dagegen werden uns die Formeln III nach anderer Richtung wichtige Dienste leisten.

9. Folgende Ausdrücke zu vereinfachen:

a) $\sec\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha$ *b)* $\operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$ *c)* $\sec\alpha : (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)$

d) $\dfrac{\operatorname{cotg}\alpha - 1}{\operatorname{cosec}\alpha}$ *e)* $(a + a\operatorname{tg}^2\alpha) \cdot \cos\alpha$ *f)* $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha}$

10. Man stelle Formeln auf, nach denen tangens und cotangens nur durch den sinus oder durch den cosinus ausgedrückt erscheinen.

Resultate.

1. $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ u. s. f.

2. $\cos\alpha = 0{\cdot}6$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ u. s. f.

3. $\sin\beta = \frac{1}{10}\sqrt{91}$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}\sqrt{91}$ u. s. f.

4. $\sin\gamma = \sqrt{\frac{a}{a+1}}$ $\cos\gamma = \sqrt{\frac{1}{a+1}}$ $\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{a}$ u. s. f.

5. $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ u. s. f.

6. $\cos x = \sqrt{\frac{m-1}{m}}$ $\sin x = \frac{1}{\sqrt{m}}$ u. s. f.

7. $\sin y = \frac{1}{10}\sqrt{10}$ $\cos y = \frac{3}{10}\sqrt{10}$ u. s. f.

8. $\operatorname{cotg} z = \sqrt{8}$ $\cos z = \frac{1}{3}\sqrt{8}$ u. s. f.

9. *a)* $\operatorname{cosec}\alpha$ *b)* $\sec\alpha$ *c)* $\sin\alpha$

d) $\cos\alpha - \sin\alpha$ *e)* $\dfrac{a}{\cos\alpha}$ *f)* $\sin\alpha + \cos\alpha$

10. $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$$

Goniometrische Gleichungen.

§ 19. Ist ein Winkel dadurch bestimmt, daß eine zwischen zwei oder mehreren seiner Funktionen giltige Gleichung gegeben ist, so nennt man diese eine goniometrische Gleichung. Um sie zu lösen, führe man zunächst jene Funktionen auf eine einzige Funktion des fraglichen Winkels zurück, berechne dieselbe und bestimme sodann den zugehörigen Winkel:

Z. B.

$\sec\alpha = 4\cos\alpha$	$2\sin\alpha = 2 - \cos\alpha$	$3\sin x = 2\cos x$
$\alpha = ?$	$2\sin\alpha - 2 = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{3}$
$\frac{1}{\cos\alpha} = 4\cos\alpha$	$4\sin^2\alpha - 8\sin\alpha + 4 = 1 - \sin^2\alpha$	$\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$
$1 = 4\cos^2\alpha$	$\sin^2\alpha - \frac{8}{5}\sin\alpha + \frac{3}{5} = 0$	$x = 33^0\,41'\,24''$
$\cos\alpha = \frac{1}{2}$	$\sin\alpha = \frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{16}{25} - \frac{15}{25}}$	
$\alpha = 60^0$	$\sin\alpha = \frac{4 \pm 1}{5}$	
	$\sin\alpha_1 = 1 \ldots \alpha_1 = 90^0$	
	$\sin\alpha_2 = \frac{3}{5} \ldots \alpha_2 = 36^0\,52'\,11''$	

Übungsbeispiele.

Folgende goniometrische Gleichungen aufzulösen:

1. $743\cos x = 398\sec x$	7. $5{\cdot}3\sin x = 6{\cdot}5\cos x$
2. $9\operatorname{tg} y = 49\operatorname{cotg} y$	8. $5\cos y = 7\sin y$
3. $\operatorname{cosec}\alpha = 10\sin\alpha$	9. $58{\cdot}76\sin\psi = 38{\cdot}62\cos\psi$
4. $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{\cdot}5$	10. $5\sin x = 2\operatorname{tg} x$*)
5. $3\sec\varphi = 1 + 3\operatorname{tg}\varphi$	11. $3{\cdot}5\cos x = 1{\cdot}25\operatorname{cotg} x$
6. $5\operatorname{cotg} y = \underset{\sin\alpha}{5\operatorname{cosec}} y - 4$	12. $\frac{5{\cdot}7\sin x}{4{\cdot}3\cos x} = 5{\cdot}8\operatorname{cotg} x$

$\frac{5\cos}{\sin} = \frac{5}{\sin} - 4$

$5\cos = 5 - 4\sin$

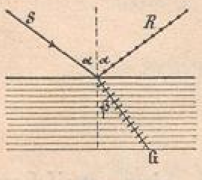


Fig. 59.

13. Von einem Lichtstrahl (Fig. 59), der aus Luft in Glas vom Brechungsexponenten $n = 1{\cdot}536$ übertritt, wird ein Teil reflektiert, ein anderer Teil nach dem Brechungsgesetze: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ gebrochen. Wie groß muß der Einfallswinkel α gewählt werden, damit der reflektierte und der gebrochene Strahl auf einander senkrecht stehen? (Maximale Polarisation.) (Anleitung: $\alpha + \beta = 90^0$.)

*) Man setze $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und kürze die Gleichung durch $\sin x$.

Resultate.

1. $x = 42^0 57' 18''$	5. $\varphi = 53^0 7' 49''$	9. $\psi = 33^0 18' 53''$
2. $y = 66^0 48' 5''$	6. $y = 77^0 19' 11''$	10. $x = 66^0 25' 18''$
3. $\alpha = 18^0 26' 6''$	7. $x = 50^0 48' 23''$	11. $x = 20^0 55' 29''$
4. $x = 60^0$	8. $y = 35^0 32' 16''$	12. $x = 64^0 26' 57''$
	13. $\alpha = 56^0 56' 2''$	

Funktionen stumpfer und erhabener Winkel.

§ 20. Die in dem § 17 enthaltenen Definitionen der Funktionslinien und der Funktionen lassen sich, wie wir dort bereits angedeutet haben, unmittelbar auch auf stumpfe und erhabene Winkel übertragen.

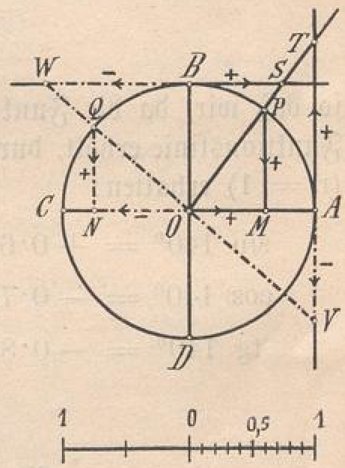


Fig. 60.

Dabei müssen wir jedoch wohl beachten, daß — gemäß den in § 17 festgesetzten Zählungen — an jeder Funktionslinie nicht nur deren Länge, sondern auch ihr Richtungssinn in Betracht kommt.

Dieser Richtungssinn ist in Fig. 60 an den Funktionslinien der Winkel AOP $= 54^0$ und AOQ $= 140^0$ durch Pfeile angedeutet.

Bezeichnen wir die für Spitzwinkel sich ergebenden Pfeilrichtungen durchwegs als positiv (+), so müssen wir entgegengesetzte Pfeilrichtungen als negativ (—) auffassen.

Eine einfache Betrachtung ergibt sodann folgende Zeichen-Regeln:

1. Die Sinus- und Tangenslinie sind positiv oder negativ, je nachdem sie oberhalb oder unterhalb des horizontalen Durchmessers (AC) liegen.

2. Die Cosinus- und Cotangenslinie sind positiv oder negativ, je nachdem sie rechts oder links vom vertikalen Durchmesser (B D) liegen.

3. Die Secans- und Cosecanslinie sind positiv oder negativ, je nachdem sie auf dem beweglichen Schenkel selbst oder auf der Rückwärtsverlängerung desselben liegen.

So ist z. B. für den $\sphericalangle AOQ = 140^0$ die Sinuslinie QN positiv,
die Cosinuslinie ON negativ,
die Tangenslinie AV negativ,
die Cotangenslinie BW negativ,
die Secanslinie OV negativ,
die Cosecanslinie OW positiv,

so daß wir, da die Funktion auch das Vorzeichen der entsprechenden Funktionslinie erhält, durch Abmessung nach dem beigefügten Maßstabe ($r = 1$) erhalten:

$$\sin 140^0 = +0{\cdot}64\ldots \qquad \operatorname{cotg} 140^0 = -1{\cdot}19\ldots$$

$$\cos 140^0 = -0{\cdot}76\ldots \qquad \sec 140^0 = -1{\cdot}31\ldots$$

$$\operatorname{tg} 140^0 = -0{\cdot}84 \qquad \operatorname{cosec} 140^0 = +15{\cdot}6.$$

Grenzwerte der Funktionen.

§ 21. Wir schicken voraus: Durch die beiden auf einander senkrechten Durchmesser A C und B D zerfällt die Zeichen-Ebene in Quadranten, die wir in der Reihenfolge von A B C D (Fig. 61) mit I, II, III, IV bezeichnen wollen. Die Radien O A, O B, O C und O D nennen wir kurzweg Quadrantenhalbmesser. Wir lassen den Winkel alle Werte von 0° bis 360° durchlaufen, indem wir den beweglichen Schenkel zunächst mit dem festen Schenkel O A zusammenfallen lassen und ersteren dann im entgegengesetzten Sinne der Uhrzeigerbewegung drehen. Das Vorzeichen und die numerischen Werte, welche die einzelnen Funktionen hiebei annehmen, erhalten wir durch eine einfache Betrachtung und Abmessung der Funktionslinien.

Die Grenzwerte der Funktionen ergeben sich für jene Winkel (0°, 90°, 180°, 270°, 360°), bei denen der bewegliche Schenkel einen Quadrantenhalbmesser durchschreitet.

Die Resultate der leicht durchzuführenden Betrachtung sind in untenstehender Tabelle zusammengefaßt.

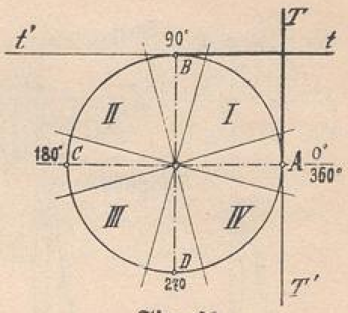


Fig. 61.

Funktion	0°	I. Qu.	90°	II. Qu.	180°	III. Qu.	270°	IV. Qu.	360°	Grenzen:
sin.	$-0+$	$+$	$+1+$	$+$	$+0-$	$-$	$-1-$	$-$	$-0+$	$+1 \cdot\cdot 0 \cdot\cdot -1$
cos.	$+1+$	$+$	$+0-$	$-$	$-1-$	$-$	$-0+$	$+$	$+1+$	$+1 \cdot\cdot 0 \cdot\cdot -1$
tg.	$-0+$	$+$	$\pm\infty$	$-$	$-0+$	$+$	$\pm\infty$	$-$	$-0+$	$+\infty \cdot\cdot 0 \cdot\cdot -\infty$
cotg.	$+\infty$	$+$	$+0-$	$-$	$\mp\infty$	$+$	$+0-$	$-$	$\mp\infty$	$+\infty \cdot\cdot 0 \cdot\cdot -\infty$
sec.	$+1+$	$+$	$\pm\infty$	$-$	$-1-$	$-$	$\mp\infty$	$+$	$+1+$	$+\infty \cdot\cdot\cdot +1$ $-1 \cdot\cdot\cdot -\infty$
cosec.	$+\infty$	$+$	$+1+$	$+$	$\pm\infty$	$-$	$-1-$	$-$	$\mp\infty$	$+\infty \cdot\cdot\cdot +1,$ $-1 \cdot\cdot\cdot -\infty$

Anmerkung 1. Die Werte von tangens, cotangens, secans und cosecans zeigen einen merkwürdigen Verlauf.

Der tangens z. B. ist bei 0° selbst gleich Null, wächst hierauf, bis er in unendlicher Nähe von 90° unendlich groß ($+\infty$) wird. In dem Augenblicke aber, da der bewegliche Schenkel den Radius OB (90°) durchschreitet, wird der tangens negativ und ist bei einer unendlich kleinen Überschreitung von 90° numerisch gleich ∞. Der Wert für tangens springt also beim Durchschreiten von 90° plötzlich von $+\infty$ auf $-\infty$, was in der Tabelle durch die Bezeichnung $\pm\infty$ dargestellt ist. Überall, wo diese oder die Bezeichnung $\mp\infty$ sich wiederholt, findet eine entsprechende sprungweise Veränderung des betreffenden Funktionswertes statt.

Anmerkung 2. Dort, wo beiderseits des Funktionswertes ein Vorzeichen gesetzt ist, findet eine stetige (nicht sprungweise) Änderung des Funktionswertes statt.

Anmerkung 3. Man kann die Veränderungen, welche die Funktionswerte erleiden, wenn der Winkel von 0° bis 360° anwächst, auch graphisch, mit Hilfe eines rechtwinkligen Koordinatensystems, darstellen. Zu diesem Zwecke trägt man auf der Achse OX (Fig. 62) 360 gleiche Teile auf, welche die graphische Darstellung der Winkelgrade bilden,*) und in senkrechter Richtung (als Ordinate) für jeden einzelnen Grad den ihm entsprechenden Funktionswert. (Positive Funktionswerte sind nach oben, negative nach unten aufzutragen.)

---

*) Richtiger ist es, die in 360° geteilte Abszissenachse als Abwickelung des Kreisumfanges ($r = 1$) anzusehen. Siehe § 41.

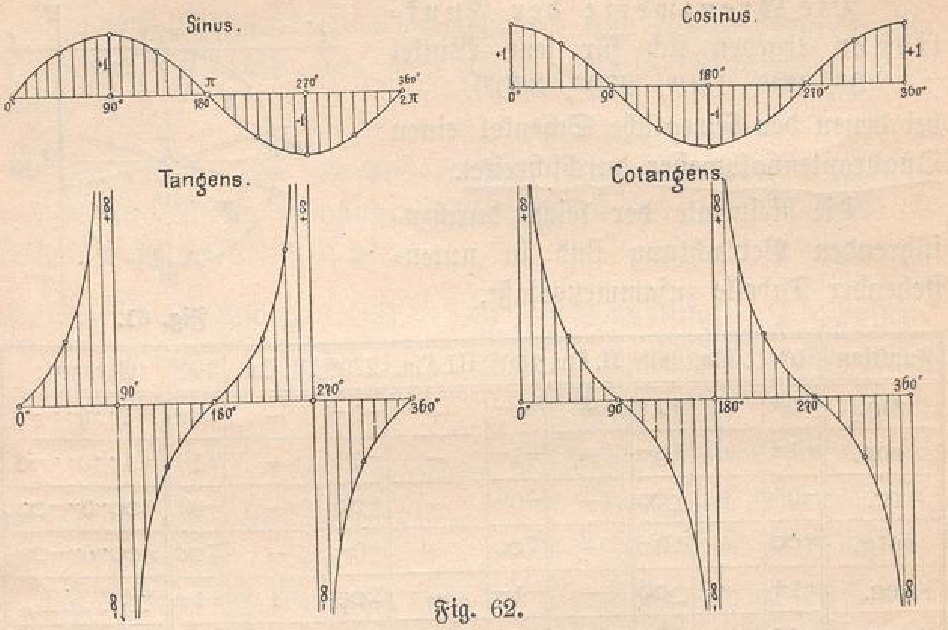


Fig. 62.

Übungsbeispiele.

1. $x = a \cos 180^0 + 2\, a \sin 90^0 - b \operatorname{tg} 360^0$
2. $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 90^0} - 3 \sin 180^0 + 5\, \dfrac{\cos 360^0}{\sin 270^0}$
3. $z = a \operatorname{tg} 45^0 - 2\, b \sin 270^0 + a \cos 180^0 + b \sec 180^0$
4. $u = a \sin 90^0 + (a - b) \cos 180^0 + b \sin 270^0$
5. Welchen Wert nehmen folgende Ausdrücke an, wenn man darin
$\sphericalangle\, \alpha = 90^0$ setzt?

$$a = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$
$$b = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$
$$c = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \; {}^{*)}$$
$$d = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

6. Welchen Wert erhalten vorstehende Ausdrücke für $\alpha = 180^0$?

Resultate.

1. $\mathbf{x = a}$
2. $\mathbf{y = -5}$
3. $\mathbf{z = b}$
4. $\mathbf{u = 0}$

5. $\mathbf{a = \cos \beta}$
$\mathbf{b = \mp \sin \beta}$
$\mathbf{c = \mp \operatorname{cotg} \beta}$
$\mathbf{d = 1}$

6. $\mathbf{a = \mp \sin \beta}$
$\mathbf{b = - \cos \beta}$
$\mathbf{c = \pm \operatorname{tg} \beta}$
$\mathbf{d = \infty}$

---

*) Für $\alpha = 90^0$ dividiere man zunächst Zähler und Nenner durch $\operatorname{tg} \alpha$.

Zurückführung der Funktionen stumpfer und erhabener Winkel auf die Funktionen der Spitzwinkel.

§ 22. Während bei stumpfen und erhabenen Winkeln das Vorzeichen der Funktionen nach dem in § 20 angegebenen Regeln besonders bestimmt werden muß, lassen sich die numerischen Werte derselben auf die in der Tabelle enthaltenen Funktionswerte der Spitzwinkel zurückführen.

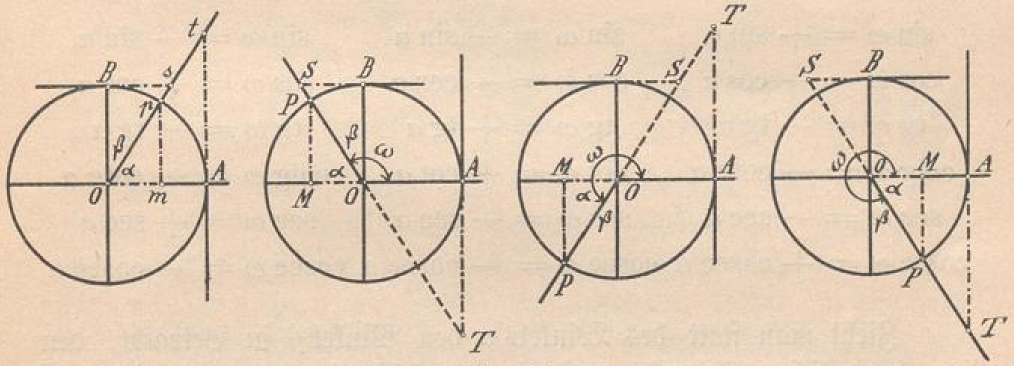


Fig. 63.

$\omega = 180^0 - \alpha$ $\qquad \omega = 180^0 + \alpha$ $\qquad \omega = 360^0 - \alpha$

In den vorstehenden Figuren sind in den gleichen Darstellungskreis die Winkel α, $(180 - \alpha)$, $(180 + \alpha)$ und $(360 - \alpha)$ nebst ihren Funktionslinien verzeichnet. Es ergeben sich hiebei kongruente, bezw. sich deckende rechtwinklige Dreiecke, u. zw. ist:

$$OPM \cong Opm \qquad OAT \cong OAt \qquad OBS \cong OBs$$

woraus folgt:

$$\begin{array}{lll} PM = pm & AT = At & BS = Bs \\ OM = Om & OT = Ot & OS = Os \end{array}$$

Wir sehen also, daß in allen drei, in obiger Figur dargestellten Fällen jede Funktionslinie des Winkels ω gleich ist der gleichnamigen Funktionslinie des Winkels α u. zw. ist dabei α jener Spitzwinkel, den der bewegliche Schenkel des Winkels ω mit dem nächstliegenden horizontalen Quadrantenhalbmesser bildet.

Was von den Funktionslinien gilt, gilt auch von deren Maßzahlen, also von den Funktionen selbst, und wir erhalten somit folgenden Satz:

Jede Funktion des Winkels ω ist numerisch gleich **derselben** Funktion jenes Winkels, den der bewegliche Schenkel mit dem nächstgelegenen **horizontalen** Quadrantenhalbmesser einschließt.

Unter Berücksichtigung des Vorzeichens ergibt sich somit unmittelbar für:

$\omega = 180^0 - \alpha$	$\omega = 180^0 + \alpha$	$\omega = 360^0 - \alpha$
$\sin \omega = + \sin \alpha$	$\sin \omega = - \sin \alpha$	$\sin \omega = - \sin \alpha$
$\cos \omega = - \cos \alpha$	$\cos \omega = - \cos \alpha$	$\cos \omega = + \cos \alpha$
$\operatorname{tg} \omega = - \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \omega = + \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \omega = - \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{cotg} \omega = - \operatorname{cotg} \alpha$	$\cot \omega = + \cot \alpha$	$\operatorname{cotg} \omega = - \operatorname{cotg} \alpha$
$\sec \omega = - \sec \alpha$	$\sec \omega = - \sec \alpha$	$\sec \omega = + \sec \alpha$
$\operatorname{cosec} \omega = + \operatorname{cosec} \alpha$	$\operatorname{cosec} \omega = - \operatorname{cosec} \alpha$	$\operatorname{cosec} \omega = - \operatorname{cosec} \alpha$

Zieht man statt des Winkels α den Winkel β in Betracht, den der bewegliche Schenkel mit dem nächstgelegenen vertikalen Quadrantenhalbmesser bildet, so sieht man aus Fig. 63, daß stets $\beta = 90^0 - \alpha$ ist, daß also jede Funktion von α gleich ist der sinnverwandten Funktion des Winkels β. Daher läßt sich obenstehende Regel in folgender Weise umformen.

Jede Funktion des Winkels ω ist numerisch gleich der **sinnverwandten** Funktion jenes Spitzwinkels, den der bewegliche Halbmesser mit dem nächstgelegenen **vertikalen** Quadrantenhalbmesser einschließt.

Es ergibt sich somit nach Fig. 63 für:

$\omega = 90^0 + \beta$	$\omega = 270^0 - \beta$	$\omega = 270^0 + \beta$
$\sin \omega = + \cos \beta$	$\sin \omega = - \cos \beta$	$\sin \omega = - \cos \beta$
$\cos \omega = - \sin \beta$	$\cos \omega = - \sin \beta$	$\cos \omega = + \sin \beta$
$\operatorname{tg} \omega = - \operatorname{cotg} \beta$	$\operatorname{tg} \omega = + \operatorname{cotg} \beta$	$\operatorname{tg} \omega = - \operatorname{cotg} \beta$
$\operatorname{cotg} \omega = - \operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{cotg} \omega = + \operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{cotg} \omega = - \operatorname{tg} \beta$
$\sec \omega = - \operatorname{cosec} \beta$	$\sec \omega = - \operatorname{cosec} \beta$	$\sec \omega = + \operatorname{cosec} \beta$
$\operatorname{cosec} \omega = + \sec \beta$	$\operatorname{cosec} \omega = - \sec \beta$	$\operatorname{cosec} \omega = - \sec \beta$

Das im vorstehenden Gelehrte läßt sich in folgenden Sätzen zusammenfassen:

Funktion $(180^0 \pm \delta)$ **Funktion** $(360^0 \pm \delta)$ } **ist numerisch gleich derselben Funktion des Winkels** δ.

Funktion $(90^0 \pm \delta)$ **Funktion** $(270^0 \pm \delta)$ } **ist numerisch gleich der sinnverwandten Funktion des Winkels** δ.

Beispiele.

$$\sin 157^0\,20' = \left\{\begin{array}{l} = \sin(90^0 + 67^0\,20') = + \cos 67^0\,20' \\ = \sin(180^0 - 22^0\,40') = + \sin 22^0\,40' \end{array}\right\} = + 0{\cdot}38537$$

$$\operatorname{cotg} 333^0\,50' = \left\{\begin{array}{l} = \operatorname{cotg}(360^0 - 26^0\,10') = - \operatorname{cotg} 26^0\,10' \\ = \operatorname{cotg}(270^0 + 63^0\,50') = - \operatorname{tg} \quad 63^0\,50' \end{array}\right\} = - 2{\cdot}03526$$

Da sich insbesondere bei solchen stumpfen oder erhabenen Winkeln, die mit Minuten und Sekunden gegeben sind, jener Spitzwinkel leichter berechnen läßt, den der bewegliche Schenkel mit dem nächst vorangehenden Quadrantenhalbmesser bildet, so empfiehlt sich zur Bestimmung der Funktionen überspitzer Winkel folgender Vorgang:

Man bestimmt zunächst den „Überschußwinkel" des gegebenen Winkels gegen den nächst vorhergehenden Quadrantenhalbmesser. Ist dieser Halbmesser horizontal, so ist jede Funktion des gegebenen Winkels numerisch gleich derselben Funktion des Überschußwinkels. Ist dagegen jener Halbmesser vertikal, so ist jede Funktion des gegebenen Winkels numerisch gleich der sinnverwandten Funktion des Überschußwinkels.

Das Vorzeichen der betreffenden Funktion ist nach den in § 20 angegebenen Regeln besonders zu bestimmen.

Beispiele.

$\sin 139^0\,15'\,20'' = + \cos 49^0\,15'\,20'' = + 0{\cdot}65268$
bezogen auf . . . . 90^0

$\cos\ 99^0\,20'\,30'' = - \sin\ 9^0\,20'\,30'' = - 0{\cdot}16232$
bezogen auf . . . . 90^0

$\operatorname{tg} 217^0\,28'\,45'' = + \operatorname{tg}\ 37^0\,28'\,45'' = + 0{\cdot}76675$
bezogen auf . . . . 180^0

$\cos 341^0\,30'\,40'' = + \sin 71^0\,30'\,40'' = + 0{\cdot}94838$
bezogen auf . . . . 270^0

Mit Rücksicht auf die trigonometrische Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes ist besonders das Bestimmen von sinus und cosinus stumpfer Winkel zu üben, wobei festzuhalten ist:

$$\sin\omega = +\cos(\omega - 90^\circ) = +\sin(180^\circ - \omega)$$
$$\cos\omega = -\sin(\omega - 90^\circ) = -\cos(180^\circ - \omega)$$

§ 23. Nach § 22 haben die vier Winkel α, $(180^\circ - \alpha)$, $(180^\circ + \alpha)$, und $(360^\circ - \alpha)$ numerisch gleiche Funktionen, die für je zwei dieser Winkel auch bezüglich des Vorzeichens übereinstimmen.

Daraus folgt, daß zu jedem Funktionswerte zwei zwischen 0° und 360° gelegene Winkel gehören, die man im allgemeinen folgendermaßen findet. Man sucht zunächst in der Tafel jenen Spitzwinkel α auf, der dem numerischen Werte der vorliegenden Funktion entspricht.

Diesem numerischen Werte entsprechen aber außer dem Winkel α noch die Winkel $(180 - \alpha)$, $(180 + \alpha)$ und $(360 - \alpha)$. Von diesen vier Winkeln hat man nun jene zwei zu nehmen, welche dem vorliegenden Funktionswerte auch bezüglich seines Vorzeichens entsprechen.

Ist z. B. aus $\sin\varphi = -0{\cdot}52250$ der Winkel φ zu bestimmen, so findet man nach dem angegebenen Vorgange:

$$\alpha = 31^\circ\,30'$$

Von den Winkeln $(180 - \alpha)$, $(180 + \alpha)$ und $(360 - \alpha)$ haben nur die beiden letztgenannten einen negativen sinus.

Somit ist

$$\varphi_1 = 180^\circ + \alpha = 211^\circ\,30'$$
$$\varphi_2 = 360^\circ - \alpha = 328^\circ\,30'$$

Beispiele.

1. $\sin x = +0{\cdot}79158 \ldots\ldots\ldots \alpha = 52^\circ\,20'$ $\quad x_1 = \alpha = 52^\circ\,20'$
   $x_2 = 180^\circ - \alpha = 127^\circ\,40'$

2. $\cos x = -0{\cdot}45917 \ldots\ldots\ldots \alpha = 62^\circ\,40'$ $\quad x_1 = 180^\circ - \alpha = 117^\circ\,20'$
   $x_2 = 180^\circ + \alpha = 242^\circ\,40'$

3. $\log\mathrm{tg}\, u = 9{\cdot}40478 - 10 \ldots \alpha = 14^\circ\,15'$ $\quad u_1 = \alpha = 14^\circ\,15'$
   $u_2 = 180^\circ + \alpha = 194^\circ\,15'$

Übungsbeispiele.

Man bestimme x aus folgenden Gleichungen:

1. $\sin x = -0·61107$ 2. $\cos x = -0·99390$ 3. $\operatorname{tg} x = -0·47341$

4. $\operatorname{cotg} x = -0·55812$ 5. $\lg \sin x = 9·55826-10$ 6. $\lg \operatorname{tg} x = 0·72078-1$

7. $\sin x = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$ 8. $\cos x = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$ 9. $\operatorname{tg} x = 1-\sqrt{5}$

10. $5 \sin x = 8 \cos x$ 11. $\sin x - \cos x = 0·5$ 12. $5·63 \cos x + 3·75 \sin x = 0$

Resultate.

1. $x_1 = 217^0 40'$ $x_2 = 322^0 20'$	2. $x_1 = 173^0 40'$ $x_2 = 186^0 20'$	3. $x_1 = 154^0 40'$ $x_2 = 334^0 40'$
4. $x_1 = 119^0 10'$ $x_2 = 299^0 10'$	5. $x_1 = 21^0 12'$ $x_2 = 158^0 48'$	6. $x_1 = 27^0 44'$ $x_2 = 207^0 44'$
7. $x_1 = 43^0\ 4'\ 46''$ $x_2 = 136^0\ 55'\ 14''$	8. $x_1 = 111^0\ 28'\ 14''$ $x_2 = 248^0\ 31'\ 46''$	9. $x_1 = 128^0\ 58'\ 25''$ $x_2 = 308^0\ 58'\ 25''$
10. $x_1 = 57^0\ 59'\ 40''$ $x_2 = 237^0\ 59'\ 40''$	11. $x_1 = 65^0\ 42'\ 18''$ $x_2 = 204^0\ 17'\ 52''$	12. $x_1 = 123^0 40'$ $x_2 = 303^0 40'$

Das schiefwinklige Dreieck.

§ 24. Fassen wir zunächst nur die Seiten und Winkel eines Dreieckes als Bestimmungsstücke desselben auf, so ergeben sich — entsprechend den vier Kongruenzsätzen — vier Hauptfälle der Dreiecksbestimmung.

Es kann nämlich das Dreieck bestimmt sein:

1. durch eine Seite und zwei Winkel,

2. durch zwei Seiten und den der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel,

3. durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel,

4. durch alle drei Seiten.

Für die Auflösung des Dreiecks genügen, streng genommen, in allen vier Fällen zwei Lehrsätze, welche unter den Namen Sinussatz und Cosinussatz bekannt sind und die wir in folgendem ableiten wollen.

* auch Projektionssatz oder Carnot'scher Lehrsatz genannt.

§ 25. **Sinus-Satz: In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten wie die sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.**

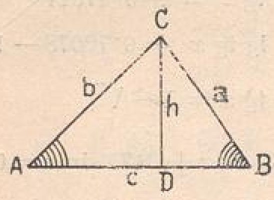


Fig. 64.

$$\mathbf{a : b = \sin A : \sin B}$$

Ableitung: Fällt man in dem Dreiecke ABC die Höhe CD, so ergibt sich aus

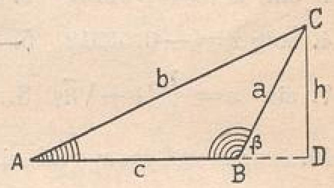


Fig. 65.

$\triangle ADC \ldots\ldots h = b \cdot \sin A$

$\triangle BDC \ldots\ldots h = a \cdot \sin B$*)

folglich: $a \sin B = b \sin A$

oder $a : b = \sin A : \sin B$

Ebenso würde folgen $b : c = \sin B : \sin C$

und $c : a = \sin C : \sin A$

oder, zusammengefaßt, $\mathbf{a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C}$ (A)

Dieser Satz, der Sinussatz oder die Sinusregel des schiefwinkligen Dreieckes genannt, genügt zur vollständigen Auflösung des Dreieckes in den beiden ersten Bestimmungsfällen.

Beispiele.

Es sind folgende Dreiecke aufzulösen:

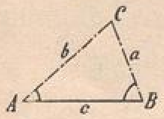


Fig. 66.

1. $c = 525{\cdot}5\ m$
$\sphericalangle A = 39^0\ 10'\ 30''$
$\sphericalangle B = 62^0\ 25'\ 10''$

$180^0 - (A + B) = \sphericalangle C = 78^0\ 24'\ 20''$

$a : c = \sin A : \sin C$

$b : c = \sin B : \sin C$

$$a = \frac{c}{\sin C} \sin A = \mathbf{338{\cdot}87}\ m$$

$$b = \frac{c}{\sin C} \sin B = \mathbf{475{\cdot}48}\ m$$

2. $a = 583{\cdot}5\ cm$
$b = 357{\cdot}8\ cm$
$\sphericalangle A = 71^0\ 15'$

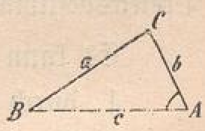


Fig. 67.

$\sin B : \sin A = b : a$

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

Daraus $\sphericalangle B = \mathbf{35^0\ 29'\ 50''}$

$\sphericalangle C = 73^0\ 15'\ 10''$

und $c : a = \sin C : \sin A$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \mathbf{590{\cdot}06}\ cm$$

---

*) Im stumpfwinkligen Dreiecke ist $h = a \sin \beta = a \sin (180 - B) = a \sin B$.

Anmerkung. Die im vorstehenden Beispiele 1 vorkommenden Gleichungen

$$a = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin A \qquad\qquad b = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin B$$

lassen sich auch unmittelbar nach folgender, leicht zu merkenden Regel aufstellen:

Eine unbekannte Seite wird gefunden, wenn man die bekannte Seite durch den sinus ihres gegenüberliegenden Winkels dividiert und mit dem sinus des der unbekannten Seite gegenüberliegenden Winkels multipliziert.

Beispiel.

Gegeben:

$a = 164\ m$
$\sphericalangle B = 32^0\ 40'$
$\sphericalangle C = 30^0\ 30'$
$\sphericalangle A = 116^0\ 50'$

Es ist

$$b = \frac{a}{\sin A} \sin B \qquad\qquad c = \frac{a}{\sin A} \sin C$$

Logarithmische Ausrechnung:

$$2{\cdot}21484$$
$$-\,(9{\cdot}95052 - 10)$$

$2{\cdot}26432$	. . . . . $2{\cdot}26432$
$+\,9{\cdot}73219 - 10$	$+\,9{\cdot}70547 - 10$
$\log b = 1{\cdot}99651$	$\log c = 1{\cdot}96979$
b = 99·2 *m*	**c = 93·28** *m*

2,21484
+9.73219-10
11,94703-10
-9.9505 +10
Num 1,9965

Übungsbeispiele.

Man löse folgende Dreiecke auf:

1. $a = 356{\cdot}7\ m$, $\sphericalangle A = 81^0\ 10'$, $\sphericalangle B = 37^0\ 20'$
2. $b = 459{\cdot}8\ m$, $\sphericalangle A = 32^0\ 15'\ 17''$, $\sphericalangle B = 73^0\ \ 5'\ 38''$
3. $a = 538\ m$, $b = 716\ m$, $\sphericalangle B = 69^0\ 10'$
4. $a = 689{\cdot}56\ dm$, $c = 575{\cdot}85\ dm$, $\sphericalangle A = 78^0\ 5'\ 20''$

5. Wie groß sind die Spannungen in den Konstruktionsteilen ac und bc der in Fig. 68, 69 skizzierten Eisenkonstruktionen, wenn die vertikale Belastung Q und die Neigungswinkel α und β der beiden Streben folgende Werte haben:

a) $Q = 2375\ kg$, $\alpha = 81^0$, $\beta = 36^0$ *b)* $Q = 325\ kg$, $\alpha = 41^0$, $\beta = 28^0$

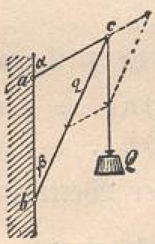


Fig. 68.

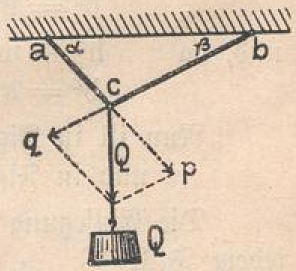


Fig. 69.

6. An einem Punkte O wirkt eine Kraft $P = 235{\cdot}7\ kg$; man bringe eine zweite Kraft Q an, so daß Q gegen P unter 63^0 geneigt ist und die Resultierende R beider Kräfte $350\ kg$ werde. Wie groß ist Q?

Resultate.

1. $\mathfrak{b} = 218 \cdot 92\ m$
   $\mathfrak{c} = 317 \cdot 24\ m$

2. $\mathfrak{a} = 256 \cdot 47\ m$
   $\mathfrak{c} = 463 \cdot 41\ m$

3. $\sphericalangle A = 44^0\ 36'\ 32''$
   $\mathfrak{c} = 701 \cdot 07\ m$

4. $\sphericalangle C = 54^0\ 47'\ 49''$
   $\mathfrak{b} = 516 \cdot 36\ dm$

5. Nach Fig. 68.
   a) $\mathfrak{p} = 1974\ kg$
   $\mathfrak{q} = 3317\ kg$
   b) $\mathfrak{p} = 678 \cdot 27\ kg$
   $\mathfrak{q} = 947 \cdot 82\ kg$

   Nach Fig. 69.
   a) $\mathfrak{p} = 2156 \cdot 5\ kg$
   $\mathfrak{q} = 416 \cdot 97\ kg$
   b) $\mathfrak{p} = 307 \cdot 37\ kg$
   $\mathfrak{q} = 262 \cdot 73\ kg$

6. $\mathfrak{Q} = 172 \cdot 99\ kg$

§ 26. Die Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes in den beiden im § 24 unter 3) und 4) genannten Bestimmungsfällen kann durch folgenden Satz bewerkstelligt werden:

Cosinussatz. Das Quadrat einer Seite ist gleich der Summe aus den Quadraten der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen Seiten ~~und~~ mal dem Cosinus ihres eingeschlossenen Winkels.

$$\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{c}^2 - 2\,\mathfrak{a}\mathfrak{c} \cos B.$$

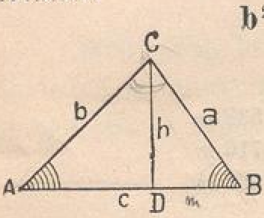


Fig. 70 a.

Beweis: Macht man im $\triangle ABC$ (Fig. 70)

$$CD \perp AB$$

und bezeichnet man BD mit $\mathfrak{m}$, CD mit $\mathfrak{h}$,

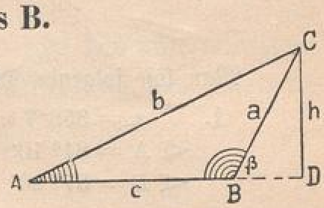


Fig. 70 b.

so ist $\quad \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{h}^2 + (\mathfrak{c} \mp \mathfrak{m})^2$ *)

$$\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{h}^2 + \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{c}^2 \mp 2\,\mathfrak{c}\mathfrak{m}$$

und, da $\quad \mathfrak{h}^2 + \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{a}^2 \quad$ ist,

$$\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{c}^2 \mp 2\,\mathfrak{c}\mathfrak{m}.$$

Nun ist in Fig. 70 a . . . $\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \cos B$

und in Fig. 70 b . . . $\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \cos \beta = -\,\mathfrak{a} \cos B.$

Die Einsetzung dieser Werte in die Gleichung für $\mathfrak{b}^2$ ergibt in jedem Falle

$$\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{c}^2 - 2\,\mathfrak{a}\mathfrak{c} \cos B$$

Ebenso ist . . $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 - 2\,\mathfrak{a}\mathfrak{b} \cos C \qquad$ (B)

und . . $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - 2\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \cos A$

*) Das doppelte Vorzeichen bezieht sich auf die beiden Figuren.

Dieser Satz genügt, um aus zwei Seiten und deren eingeschlossenem Winkel die dritte Seite zu berechnen.

Beispiel.

Folgendes Dreieck ist aufzulösen:

$b = 45\ cm$

$c = 70\ cm$

$\sphericalangle A = 50^0$

$$a = \sqrt{45^2 + 70^2 - 2 \times 45 \times 70 \times \cos 50^0}$$
$$a = \sqrt{2025 + 4900 - 4049{\cdot}577}$$
$$a = \sqrt{2875{\cdot}423} = \mathbf{53{\cdot}62}\ cm$$

Der noch fehlende Winkel B ergibt sich nun nach dem Sinussatze:

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A \; . \; . \; . \; . \; \sphericalangle B = \mathbf{40^0\ \ 0'\ 24''}$$

und $\quad 180^0 - (A + B) = \sphericalangle C = \mathbf{89^0\ 59'\ 36''}$

Übungsbeispiele.

Aus folgenden Stücken eines Dreieckes die unbekannte Seite zu berechnen:

1. $a = 73\ m$, $b = 115\ m$, $\sphericalangle C = 46^0\ 20'$
2. $b = 485\ m$, $c = 698\ m$, $\sphericalangle A = 118^0\ 20'$
3. $a = 95\ m$, $c = 65\ m$, $\sphericalangle B = 100^0$

Resultate.

1. $c = 83{\cdot}43\ m$ 2. $a = 1021{\cdot}65\ m$ 3. $b = 124{\cdot}07\ m$

Berechnung der Winkel aus den drei Seiten.

§ 27. Löst man die Gleichungen B der Reihe nach bezüglich der darin vorkommenden Winkel auf, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b} \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

D. h. der Cosinus eines Dreieckswinkels ist gleich der Summe der Quadrate der beiden den Winkel einschließenden Seiten, vermindert um das Quadrat der ihm gegenüberliegenden Seite, das Ganze dividiert durch das doppelte Produkt der einschließenden Seiten.

In dieser Form dient der Satz dazu, aus den drei Seiten die Winkel des Dreiecks zu berechnen.

Beispiel.

$a = 6\,m$
$b = 5\,m$
$c = 7\,m$

$$\cos A = \frac{25 + 49 - 36}{70} = 0{\cdot}54286 \ldots \sphericalangle A = \mathbf{57^0\ 7'\ 18''}$$

$$\cos B = \frac{36 + 49 - 25}{84} = 0{\cdot}71428 \ldots \sphericalangle B = \mathbf{44^0\ 24'\ 55''}$$

$$\cos C = \frac{36 + 25 - 49}{60} = 0{\cdot}20000 \ldots \sphericalangle C = \mathbf{78^0\ 27'\ 47''}$$

Übungsbeispiele.

Man löse folgende Dreicke auf:

1. $a = 9\,m$	2. $a = 20\,cm$	3. $a = 51\,m$
$b = 7\,m$	$b = 30\,cm$	$b = 58\,m$
$c = 5\,m$	$c = 40\,cm$	$c = 41\,m$

4. Unter welchem Winkel ω müssen zwei Kräfte $P = 5\,kg$ und $Q = 8\,kg$ zusammenwirken, damit ihre Resultierende $R = 10\,kg$ betrage?

Resultate.

1. $\sphericalangle A = 95^0\ 44'\ 21''$	2. $\sphericalangle A = 28^0\ 57'\ 18''$	3. $\sphericalangle A = 59^0\ 4'\ 40''$
$\sphericalangle B = 50^0\ 42'\ 12''$	$\sphericalangle B = 46^0\ 34'\ 5''$	$\sphericalangle B = 77^0\ 19'\ 10''$
$\sphericalangle C = 33^0\ 33'\ 27''$	$\sphericalangle C = 104^0\ 28'\ 38''$	$\sphericalangle C = 43^0\ 36'\ 10''$

4. $\omega = 82^0\ 5'\ 49''$

§ 28. Aus den vorstehenden Beispielen ist ersichtlich, daß der Sinussatz (A) und der Cosinussatz (B und C) in allen vier Bestimmungsfällen zur Auflösung des Dreieckes genügen.

Jedoch zeigt sich bei der Anwendung des Cosinussatzes in seinen beiden Formen (B und C) der Übelstand, daß die zu berechnenden Ausdrücke nicht logarithmisch brauchbar sind und deshalb bei mehrziffrigen Angaben zu weitläufigen Nebenrechnungen führen.

Der Cosinussatz wird daher nur dann mit Vorteil anzuwenden sein, wenn die bekannten Stücke durch einfache Zahlen gegeben sind.

Um auch bei komplizierteren Angaben durch rasch ausführbare Rechnungen zur Auflösung des Dreieckes zu gelangen, wollen wir noch zwei weitere Sätze ableiten.

Tangentialsatz. **Die Differenz zweier Dreiecksseiten verhält sich zur Summe derselben Seiten, wie der tangens der halben Differenz der gegenüberliegenden Winkel zum tangens der halben Summe derselben Winkel.**

Z. B. $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) : (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{tg}\,\dfrac{\mathbf{A}-\mathbf{B}}{2} : \mathbf{tg}\,\dfrac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{2}$

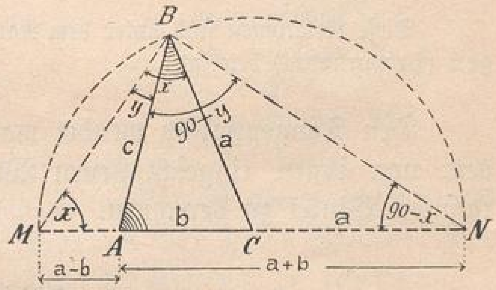


Fig. 71.

Ableitung. Macht man in Fig. 71

$CM = CN = CB = a,$

so ist $AM = a-b$

und $AN = a+b,$

ferner: $\sphericalangle x + \sphericalangle y = \sphericalangle A$ . . . . . (Außenwinkel) *)

$\sphericalangle x - \sphericalangle y = \sphericalangle B$ . . . . . $(\sphericalangle MBC = \sphericalangle x)$

daher: $\sphericalangle\, x = \dfrac{A+B}{2}$ und $\sphericalangle y = \dfrac{A-B}{2}$.

Ferner ist $\sphericalangle\, MBN = 90^0$, folglich

$\sphericalangle\, ANB = 90^0 - x$ und $\sphericalangle\, ABN = 90^0 - y$.

Nach dem Sinussatze folgt nun aus dem Dreiecke ABN

$(a+b) : c = \sin(90^0 - y) : \sin(90^0 - x)$

oder $(a+b) : c = \cos y : \cos x$ . . . . (I)

Aus dem Dreiecke AMB ergibt sich:

$(a-b) : c = \sin y : \sin x$ . . . . (II)

Aus diesen beiden Proportionen folgt durch gliedweise Division (II : I)

$$\frac{a-b}{a+b} : 1 = \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} x$$

oder $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) : (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{tg}\,\dfrac{\mathbf{A}-\mathbf{B}}{2} : \mathbf{tg}\,\dfrac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{2}$, (D)

welche Proportion mit ihren zyklischen Umsetzungen den Inhalt des Tangentialsatzes bildet.

*) $\sphericalangle CMB = \sphericalangle CBM = x$ $\sphericalangle ABM = y$.

Setzt man in den Proportionen (I) und (II) die für x und y gefundenen Werte ein, so erhält man die Proportionen:

$$(a + b) : c = \cos \frac{A - B}{2} : \cos \frac{A + B}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (M_1)$$

$$(a - b) : c = \sin \frac{A - B}{2} : \sin \frac{A + B}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (M_2)$$

Diese Relationen sind unter dem Namen der Mollweideschen Gleichungen (Proportionen) bekannt.

Den Tangentialsatz wendet man an, um aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel zunächst die beiden unbekannten Winkel zu berechnen.

Beispiel.

$$a = 352{\cdot}5\,m$$
$$b = 577{\cdot}5\,m$$
$$\sphericalangle C = 85^0\ 30'\ 30''$$

Man erhält:

$$(b - a) : (b + a) = \operatorname{tg} \frac{B - A}{2} : \operatorname{tg} \frac{B + A}{2} \quad {}^{*)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B - A}{2} = \frac{b - a}{b + a} \cdot \operatorname{tg} \frac{B + A}{2} \qquad \frac{180^0 - C}{2} = \frac{B + A}{2} = 47^0\ 14'\ 45''$$

$$\operatorname{tg} \frac{B - A}{2} = \frac{225}{930} \operatorname{tg} 47^0\ 14'\ 45'' \qquad \text{daraus: } \frac{B - A}{2} = 14^0\ 39'\ 53''$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich durch Addition und Subtraktion: $\sphericalangle B = 61^0\ 54'\ 38''$, $\sphericalangle A = 32^0\ 34'\ 52''$

Die Seite c berechnet man nun nach dem Sinussatze:

$$c = a \cdot \frac{\sin C}{\sin A} = \mathbf{652{\cdot}59}\ m.$$

Übungsbeispiele.

Mit Hilfe des Tangentialsatzes folgende Dreiecke aufzulösen:

1.	2.	3.
$a = 371\ m$	$b = 21{\cdot}5\ m$	$a = 3{\cdot}71\ m$
$b = 220\ m$	$c = 37{\cdot}6\ m$	$c = 2{\cdot}2\ m$
$\sphericalangle C = 125^0\ 30'$	$\sphericalangle A = 125^0\ 30'$	$\sphericalangle B = 54^0\ 30'$

*) Bei Ansetzung der Proportion setze man stets die größere Seite vor die kleinere, um das Auftreten negativer Größen zu vermeiden. Siehe § 40.

4. Zwei Kräfte P = 112 *kg* und Q = 74 *kg* wirken unter einem Winkel w = 61° auf einen Punkt. Wie groß ist ihre Resultierende R und welche Winkel schließt sie mit den Kraftrichtungen ein?

Resultate.

1. $\sphericalangle A = 34^{\circ}\, 44'\, 48''$
   $\sphericalangle B = 19^{\circ}\, 45'\, 12''$
   $c = 529{\cdot}94\ m$
2. $\sphericalangle B = 19^{\circ}\, 15'\, 47''$
   $\sphericalangle C = 35^{\circ}\, 14'\, 13''$
   $a = 53{\cdot}055\ m$
3. $\sphericalangle A = 89^{\circ}\ 8'\ 6''$
   $\sphericalangle C = 36^{\circ}\, 21'\, 54''$
   $b = 3{\cdot}0207\ m$
4. $R = 161{\cdot}42\ kg$
   $\sphericalangle \alpha = 37^{\circ}\, 21'\, 44''$
   $\sphericalangle \beta = 23^{\circ}\, 38'\, 16''$

§ 29. Wir wollen jetzt noch einen Satz ableiten, welcher uns in Stand setzt, aus den drei Seiten die drei Winkel des Dreieckes durch logarithmische Rechnung zu finden.

Wir verzeichnen zu diesem Zwecke in dem Dreiecke ABC die Winkelhalbierungslinien, den eingeschriebenen Kreis O und die Berührungsradien ϱ, wodurch jede Dreiecksseite in je zwei Stücke (m, n, p) geteilt wird.

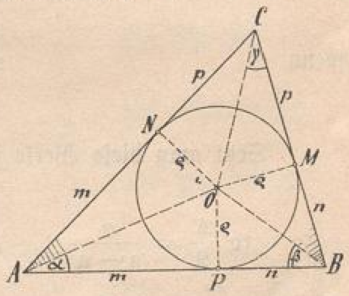


Fig. 72.

Es ist dann unmittelbar aus der Figur zu entnehmen:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\varrho}{m} \qquad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\varrho}{n} \qquad \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\varrho}{p}$$

Nun ist aber $\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}$ *)

---

*) Es ist $\triangle BCO + \triangle ACO + \triangle ABO = \triangle ABC$

oder $a \cdot \frac{\varrho}{2} + b \cdot \frac{\varrho}{2} + c \cdot \frac{\varrho}{2} = F$

$$\varrho \cdot \frac{a+b+c}{2} = F$$

und wenn wir den halben Umfang $\frac{a+b+c}{2} = s$ setzen, mit Benützung der Heron'schen Formel $\varrho\, s = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}$$

und zur Berechnung von m, n und p ergibt sich unmittelbar aus der Figur

$$m + n = c$$

$$n + p = a$$

$$p + m = b,$$

woraus, wenn man je in einer Gleichung die Zeichen ändert und dann alle drei addiert, folgt:

$$p = \frac{a + b - c}{2} = s - c$$

$$n = \frac{a - b + c}{2} = s - b$$

$$m = \frac{b + c - a}{2} = s - a,$$

wenn $s = \frac{a + b + c}{2}$ den halben Umfang bedeutet.

Setzt man diese Werte in obige Gleichungen ein, so erhält man

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\varrho}{s - a} \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\varrho}{s - b} \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\varrho}{s - c}$$

oder: $$\mathbf{tg\,\frac{A}{2} = \frac{1}{s - a}\sqrt{\frac{(s - a)\ (s - b)\ (s - c)}{s}}}$$

ebenso: $$\mathbf{tg\,\frac{B}{2} = \frac{1}{s - b}\sqrt{\frac{(s - a)\ (s - b)\ (s - c)}{s}}}$$

$$\mathbf{tg\,\frac{C}{2} = \frac{1}{s - c}\sqrt{\frac{(s - a)\ (s - b)\ (s - c)}{s}}}$$

Diese Formeln sind für die logarithmische Rechnung sehr bequem, da sie nur die Aufsuchung von vier Logarithmen erfordern. Außerdem haben sie den Vorteil, wegen der großen Sekundendifferenzen, welche der tangens im ganzen Quadranten besitzt, recht genaue Resultate zu liefern.

Beispiel.

$$\begin{aligned} a &= 58{\cdot}73\,m \\ b &= 64{\cdot}58\,m \\ c &= 70{\cdot}35\,m \\ \hline s &= \frac{193{\cdot}66}{2} \\ s &= 96{\cdot}83 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{*)}\, s-a &= 38{\cdot}10 & \log(s-a) &= 1{\cdot}58092 \\ s-b &= 32{\cdot}25 & \log(s-b) &= 1{\cdot}50853 \\ s-c &= 26{\cdot}48 & \log(s-c) &= 1{\cdot}42292 \\ & & &\overline{\;4{\cdot}51237} \\ & & \log s &= 1{\cdot}98601 \\ & & &\overline{\;2{\cdot}52636 : 2} \\ & & \log \varrho &= 1{\cdot}26318 \end{aligned}$$

$$\log\varrho - \log(s-a) = \log \operatorname{tg}\frac{A}{2} = 9{\cdot}68226 - 10 \ldots \mathbf{\frac{A}{2} = 25^0\ 41'\ 36{\cdot}4''}$$

$$\log\varrho - \log(s-b) = \log \operatorname{tg}\frac{B}{2} = 9{\cdot}75465 - 10 \ldots \mathbf{\frac{B}{2} = 29^0\ 36'\ 50''}$$

$$\log\varrho - \log(s-c) = \log \operatorname{tg}\frac{C}{2} = 9{\cdot}84026 - 10 \ldots \mathbf{\frac{C}{2} = 34^0\ 41'\ 33{\cdot}3''}$$

Probe: $\mathbf{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 89^0\ 59'\ 59{\cdot}7''}$

Die Summe der halben Winkel weicht also nur um $0{\cdot}3''$ von dem richtigen Werte (90^0) ab. Dieser kleine Fehler ist aus der Ungenauigkeit der Tafelwerte und der Korrekturen zu erklären.

Wir berechnen nunmehr die ganzen Winkel und erhalten

$\mathbf{\sphericalangle A = 51^0\ 23'\ 13''} \quad \mathbf{\sphericalangle B = 59^0\ 13'\ 40''} \quad \mathbf{\sphericalangle C = 69^0\ 23'\ 7''}$.

Übungsbeispiele.

Man löse die Aufgaben in § 27 mittels obiger Formeln auf.

Wiederholungsbeispiele.

Folgende Dreiecke sind aufzulösen:

1. $c = 777{\cdot}5\ m$, $\sphericalangle A = 48^0\,35'$, $\sphericalangle B = 63^0\,28'$

2. $a = 253{\cdot}7\ m$, $b = 187{\cdot}5\ m$, $\sphericalangle A = 105^0$

---

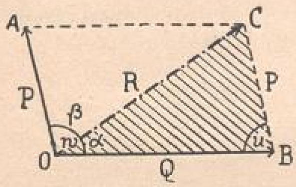
*) Die Summe der drei Werte $(s-a)$, $(s-b)$ und $(s-c)$ muß gleich s sein. (Warum?)
Es kann demnach schon hier eine Probe vorgenommen werden.

3. $a = 75 \cdot 25\, m$
$b = 51 \cdot 75\, m$
$\sphericalangle C = 71^0 15' \, 45''$

4. $b = 59 \cdot 25\, m$
$c = 87 \cdot 56\, m$
$\sphericalangle A = 53^0 25'$

5. $a = 85 \cdot 25\, cm$
$b = 53 \cdot 15\, cm$
$c = 71 \cdot 6\, cm$

6. $a = 7\, m$
$b = 9\, m$
$c = 6\, m$



7. Wie groß ist die Resultierende zweier, unter einem Winkel w zusammenwirkender Kräfte P und Q, wenn

a) $P = 125\, kg$, $Q = 75\, kg$, $w = 70^0$
b) $P = 51\, kg$, $Q = 40\, kg$, $w = 60^0$
c) $P = 153\, kg$, $Q = 65\, kg$, $w = 120^0$ ist?

8. Unter welchem Winkel w müssen zwei Kräfte P und Q zusammenwirken damit ihre Resultierende $= R$ werde, wenn

a) $P = 65\, kg$, $Q = 34\, kg$, $R = 93\, kg$
b) $P = 63\, kg$, $Q = 15\, kg$, $R = 57\, kg$
c) $P = 375\, kg$, $Q = 218\, kg$, $R = 425\, kg$ ist?

Resultate.

1. $a = 629 \cdot 07 m$ $\quad b = 750 \cdot 52\, m$ $\quad \sphericalangle C = 67^0 57'$
2. $\sphericalangle B = 45^0 33' 04 \cdot 5''$ $\quad \sphericalangle C = 29^0 26' 55 \cdot 5''$ $\quad c = 129 \cdot 13\, m$
3. $\sphericalangle A = 68^0 50' 40 \cdot 5''$ $\quad \sphericalangle B = 39^0 53' 34 \cdot 5''$ $\quad c = 76 \cdot 412\, m$
4. $\sphericalangle C = 84^0 15' 43''$ $\quad \sphericalangle B = 42^0 19' 17''$ $\quad a = 70 \cdot 664\, m$
5. $\sphericalangle A = 84^0 50' 41''$ $\quad \sphericalangle B = 38^0 23' \, 5''$ $\quad \sphericalangle C = 56^0 46' 16''$
6. $\sphericalangle A = 50^0 58' 38''$ $\quad \sphericalangle B = 87^0 16' 16''$ $\quad \sphericalangle C = 41^0 45' \, 8''$
7. *a)* $R = 166 \cdot 32\, kg$ $\quad$ *b)* $R = 79\, kg$ $\quad$ *c)* $R = 133\, kg$
8. *a)* $\omega = 42^0 19' 21''$ $\quad$ *b)* $\omega = 120^0$ $\quad$ *c)* $\omega = 92^0 38' 18''$

§ 30. Kennt man von einem Dreiecke zwei Seiten und den der **kleineren** Seite gegenüberliegenden Winkel, so können bei der Auflösung drei verschiedene Fälle eintreten.

Sind z. B. von dem Dreiecke ABC (Fig. 73), in welchem $b < c$ ist, die Seiten b und c, sowie der $\sphericalangle B$ gegeben, so erhält man

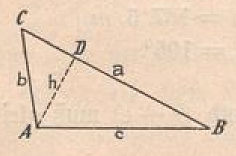


Fig. 73.

$$\sin B : \sin C = b : c$$

$$\sin C = \frac{c \, . \sin B}{b}$$

1. Fall. $b > c \sin B$. Dann ist $\sin C < 1$ und man erhält zwei Auflösungen C_1 und $C_2 = 180 - C_1$, deren keine den gemachten Voraussetzungen (Angaben) widerspricht. In diesem Falle gibt es zwei Dreiecke, welche den Angaben entsprechen.

2. Fall. $b = c \sin B$. Dann ist $\sin C = +1$, und man erhält bloß eine Auflösung. ($\sphericalangle C = 90^0$.)

3. Fall. $b < c \sin B$. Dann ist $\sin C > 1$, was unmöglich ist; d. h. es gibt kein Dreieck von den gegebenen Stücken.

Berücksichtigt man, daß im $\triangle ABD \ldots c \sin B = h$ ist, so lassen sich die drei Fälle auch so anschreiben:

1. $b > h$ 2. $b = h$ 3. $b < h$

und es läßt sich leicht auch durch Konstruktion des verlangten Dreieckes die Bedeutung der obigen drei Fälle klarlegen.

Beispiel.

$a = 355{\cdot}5\,m$ $b = 498{\cdot}5\,m$ $\sphericalangle A = 34^0\,10'$

Aus $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ folgt:

$\sphericalangle B_1 = 51^0\,57'\,13''$ $\sphericalangle B_2 = 128^0\,2'\,47''$

$\sphericalangle C_1 = 93^0\,52'\,47''$ $\sphericalangle C_2 = 17^0\,47'\,13''$

und $c = \frac{a}{\sin A} \sin C$

$c_1 = 631{\cdot}56\,m$ $c_2 = 193{\cdot}37\,m$

Übungsbeispiele.

Folgende Dreiecke sind aufzulösen:

1. $a = 57{\cdot}4\,m$, $b = 41{\cdot}1\,m$, $\sphericalangle B = 41^0$
2. $a = 572\,m$, $c = 293\,m$, $\sphericalangle C = 29^0\,29'\,14''$
3. $a = 53{\cdot}5\,m$, $b = 26{\cdot}75\,m$, $\sphericalangle B = 30^0$
4. $a = 98{\cdot}25\,cm$, $b = 47{\cdot}75\,cm$, $\sphericalangle B = 40^0\,30'$

Resultate.

1. $A_1 = 66^0\,23'$ $A_2 = 113^0\,37'$; $C_1 = 72^0\,37'$ $C_2 = 25^0\,23'$; $c_1 = 59{\cdot}786\,m$ $c_2 = 26{\cdot}855\,m$
2. $A_1 = 73^0\,56'$ $A_2 = 106^0\,4'$; $B_1 = 76^0\,34'\,46''$ $B_2 = 44^0\,26'\,46''$; $b_1 = 578{\cdot}99\,m$ $b_2 = 416{\cdot}82\,m$
3. $A = 90^0$ $c = 46{\cdot}332\,m$
4. **Das Dreieck ist unmöglich.**

Flächenformeln.

§ 31. Bevor wir die trigonometrische Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes abschließen, wollen wir noch zwei Formeln aufstellen, welche uns gestatten, die Fläche des Dreieckes

1. aus zwei Seiten und ihrem eingeschlossenen Winkel oder

2. aus einer Seite und den drei Winkeln

unmittelbar zu berechnen.

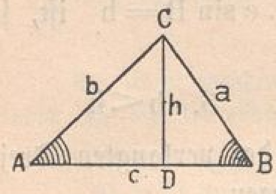


Fig. 74.

Bezeichnet man die Fläche des Dreieckes ABC (Fig. 74) mit F, die Höhe CD mit h, so ist

$$F = \frac{c\,h}{2}$$

Da nun ($\triangle ADC$)....$h = b \sin A$, so ergibt sich

$$F = \frac{b\,c \sin A}{2} \qquad \text{(I)}$$

Setzt man nach dem Sinussatze: $b = c\,\frac{\sin B}{\sin C}$ in die vorstehende Formel ein, so erhält man

$$F = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C} \qquad \text{(II)}$$

D. h. I. Die Fläche eines Dreieckes ist gleich dem halben Produkte zweier Seiten, mal dem Sinus ihres eingeschlossenen Winkels, und:

II. Die Fläche eines Dreieckes ist gleich dem Quadrate einer Seite, multipliziert mit dem Sinus der beiden ihr anliegenden Winkel, dividiert durch den doppelten Sinus des gegenüberliegenden Winkels.

Übungsbeispiele.

Man berechne die Flächen folgender Dreiecke:

1. $a = 5{\cdot}83\ m$ $b = 3{\cdot}95\ m$ $\sphericalangle C = 61^\circ 30'$	2. $a = 59{\cdot}62\ cm$ $c = 75{\cdot}83\ cm$ $\sphericalangle B = 105^\circ 20' 6''$	3. $b = 405{\cdot}3\ m$ $c = 295{\cdot}8\ m$ $\sphericalangle A = 98^\circ 4' 30''$
4. $a = 38{\cdot}8\ m$ $\sphericalangle B = 75^\circ 45'$ $\sphericalangle C = 29^\circ 4' 8''$	5. $b = 95{\cdot}6\ cm$ $\sphericalangle B = 68^\circ 39' 18''$ $\sphericalangle A = 80^\circ 3' 38''$	6. $c = 4{\cdot}36\ m$ $\sphericalangle A = 77^\circ 58' 55''$ $\sphericalangle B = 44^\circ 45' 37''$

Ein Dreieck aufzulösen, von welchem gegeben sind:

7. $F = 34938 \cdot 54\ cm^2$, $a = 284 \cdot 4\ cm$, $b = 274 \cdot 5\ cm$

8. $F = 1549 \cdot 26\ dm^2$, $c = 66 \cdot 3\ dm$, $\sphericalangle A = 59^0\ 2'\ 21''$

9. $F = 4650\ m^2$, $\sphericalangle A = 137^0\ 40'\ 39''$, $\sphericalangle B = 14^0\ 15'$

Resultate.

1. $10 \cdot 119\ m^2$ 2. $2180\ cm^2$ 3. $59350\ m^2$

4. $366 \cdot 67\ m^2$ 5. $2509 \cdot 5\ cm^2$ 6. $7 \cdot 7827\ m^2$

7. $c = 294 \cdot 3\ cm$, $\sphericalangle A = 59^0\ 52'\ 46''$, $\sphericalangle B = 56^0\ 36'\ 5''$

8. $a = 60 \cdot 4\ dm$, $b = 54 \cdot 5\ dm$, $\sphericalangle B = 50^0\ 41'\ 33''$

9. $a = 232 \cdot 5\ m$, $b = 85\ m$, $c = 162 \cdot 5\ m$

Vermischte Beispiele.

1. Man bestimme die Entfernungen AC und BC (Fig. 75) des unzugänglichen Punktes C von den Endpunkten A und B der gemessenen Standlinie m aus folgenden Angaben:

a) $m = 846 \cdot 5\ m$, $\sphericalangle B = 122^0\ 13'\ 20''$, $\sphericalangle A = 17^0\ 33'\ 44$

b) $m = 459 \cdot 8\ m$, $\sphericalangle A = 32^0\ 15'\ 17''$, $\sphericalangle B = 73^0\ 5'\ 38''$

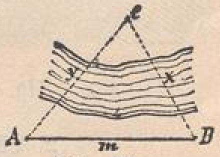


Fig. 75.

2. Man berechne die gegenseitige Entfernung der durch ein Gebäude gedeckten Punkte A und B (Fig. 76) aus folgenden Angaben:

a) $a = 429 \cdot 5\ m$, $b = 587 \cdot 5\ m$, $\sphericalangle P = 73^0\ 15'\ 18''$

b) $a = 235 \cdot 7\ m$, $b = 173\ m$, $\sphericalangle P = 153^0$

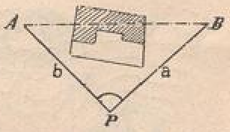


Fig. 76.

3. Wie groß sind die Winkel α, β, γ, welche die Schnuren in Fig. 77 bei hergestelltem Gleichgewichte einschließen werden, wenn:

a) $P = 21\ kg$, $Q = 24\ kg$, $R = 39\ kg$

b) $P = \ 8 \cdot 86\ kg$, $Q = \ 5 \cdot 78\ kg$, $R = 10 \cdot 24\ kg$ ist?

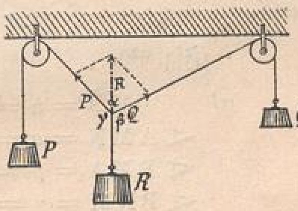


Fig. 77.

4. Wie groß müssen im vorstehenden Falle die Verhältnisse P : Q : R gewählt werden, damit: $\sphericalangle \alpha = \ 82^0\ 5'\ 48''$
$\sphericalangle \beta = 127^0\ 35'\ 24''$
$\sphericalangle \gamma = 150^0\ 18'\ 48''$ werde?

(Anleitung: Man setze R = 1.)

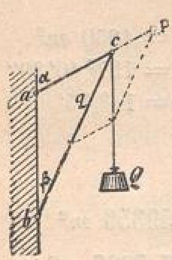


Fig. 78.

5. An einem Wandkrane (Fig. 78) wirkt bei c die vertikale Belastung Q. Wie groß sind die in den Konstruktionsteilen a c und b c entstehenden Zug- und Druckspannungen (p und q) wenn:

a)	$Q = 377{\cdot}5\ kg$	*b)*	$Q = 825\ kg$
	$\sphericalangle\ \alpha = 65^0$		$\sphericalangle\ \alpha = 48^0$
	$\sphericalangle\ \beta = 35^0$		$\sphericalangle\ \beta = 33^0$ ist?

6. Die Spitze S des Schafberges (Fig. 79) erscheint von zwei mit S in derselben Vertikalebene gelegenen Uferpunkten A (Unterach) und B (Steinbach) des Attersees unter den Höhenwinkeln $\alpha = 15^0\ 38'\ 18''$ und $\beta = 7^0\ 25'\ 18''$. Wie hoch liegt S über dem Spiegel des Attersees, wenn die Entfernung $AB = 5380\ m$ und die Instrumentenhöhe $i = 1{\cdot}55\ m$ ist?

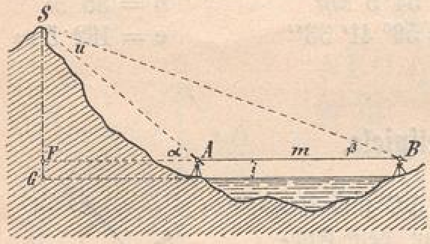


Fig. 79.

Anleitung:

1. Lösung. $FB - FA = m$

$$SF(\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha) = m$$

und $$SF = \frac{m}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha}$$

2. Lösung. $$FS = AS\sin\alpha = \frac{m}{\sin u}\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha$$

wobei $\sphericalangle\ u = \alpha - \beta$ ist.

7. Zwei Kräfte P und $Q = P + 50\ kg$ wirken unter dem Winkel $w = 60^0$ zusammen und ergeben die Resultierende $R = 2P$. Wie groß sind die Kräfte?

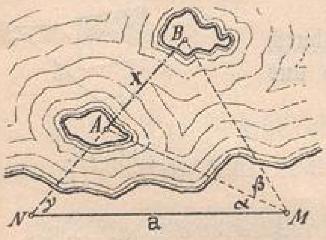


Fig. 80.

8. Um die gegenseitige Entfernung x zweier unzugänglicher Punkte A und B (Fig. 80) zu ermitteln, hat man den in der Verlängerung von AB liegenden Punkt N und einen zweiten Punkt M festgelegt und sodann gemessen:

a)	$MN = a = 225{\cdot}8\ m$	*b)*	$a = 1356\ m$
	$\sphericalangle\ AMN = \alpha = 37^0\ 10'\ 20''$		$\sphericalangle\ \alpha = 29^0\ 25'\ 30''$
	$\sphericalangle\ BMA = \beta = 31^0\ 20'\ 30''$		$\sphericalangle\ \beta = 34^0\ 40'\ 20''$
	$\sphericalangle\ BNM = \gamma = 65^0\ 33'\ 15''$		$\sphericalangle\ \gamma = 80^0\ 29'\ 45''$

Wie groß ist die Entfernung x?

Anleitung: $\Delta\, NAM \ldots\, AM = \dfrac{a}{\sin NAM}\cdot\sin\gamma \ldots\ \sphericalangle\ NAM = 180^0 - (\alpha+\gamma)$

und $\Delta\, ABM \ldots\, x = \dfrac{AM}{\sin NBM}\cdot\sin\beta \ldots\ \sphericalangle\ NBM = 180^0 - (\alpha+\beta+\gamma)$

folglich: $$x = \frac{a\,.\sin\beta\,.\sin\gamma}{\sin NAM\,.\sin NBM}$$

9. Zur Bestimmung der gegenseitigen Entfernungen x, y und z der drei unzugänglichen Punkte A, B und C (Fig. 81) wurden zwei Punkte M und N festgelegt, welche in den Verlängerungen der Strecken AC und BC liegen und sodann durch direkte Messung gefunden:

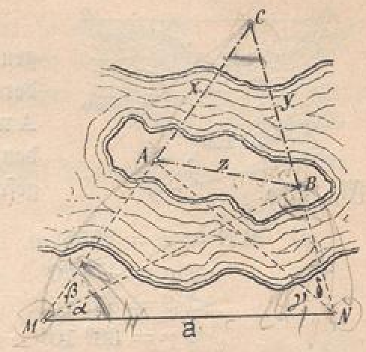


Fig. 81.

a) MN $= 556 \cdot 5\ m$ | *b)* a $= 1788\ m$
$\alpha = 31^0\ 25'\ 20''$ | $\alpha = 31^0\ 25'\ 13''$
$\beta = 40^0\ 11'\ 30''$ | $\beta = 37^0\ 16'\ 20''$
$\gamma = 27^0\ \ 9'\ 50''$ | $\gamma = 23^0\ 34'\ 30''$
$\delta = 48^0\ 10'\ 10''$ | $\delta = 34^0\ 17'\ 10''$

Anleitung: Die Strecken x und y bestimme man so wie das x in der vorhergehenden Aufgabe und berechne sodann aus dem Dreiecke ABC die Strecke z.

10. Zwei in derselben Horizontalebene gelegene Orte A und B (Fig. 82) sollen durch eine geradlinige Bahnstrecke verbunden werden. Zwischen A und B befindet sich ein Berg, so daß die Gerade AB nicht direkt abgesteckt werden kann. Deshalb wurde ein Hilfspunkt P so gewählt, daß folgende Stücke direkt gemessen werden konnten:

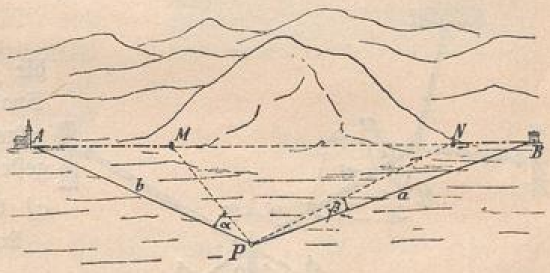
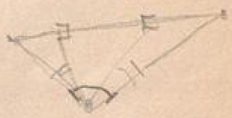


Fig. 82.



$$PA = b = 2875\ m$$
$$PB = a = 3205\ m$$
$$\sphericalangle APB = 98^0\ 15'\ 30''$$

Man berechne daraus, um die Trassierung von A und B aus vornehmen zu können, die Winkel A und B, ferner die Entfernung AB.

Nach durchgeführter Absteckung wurden der Anfangs- und Endpunkt M und N des durch den Berg zu führenden Einschnittes (oder Tunnels) markiert und von P aus anvisiert, wobei sich folgende Winkel ergaben:

$$\sphericalangle APM = \sphericalangle \alpha = 25^0\ 2'\ 30'', \quad \sphericalangle BPN = \sphericalangle \beta = 26^0\ 2'\ 35''.$$

Wie lang wird der Einschnitt (der Tunnel)?

Man löse dieselbe Aufgabe für folgende Angaben:

a) a $= 3567\ m$ | *b)* a $= 1088\ m$
b $= 2275\ m$ | b $= 975\ m$
$\sphericalangle APB = 104^0\ 10'\ 20''$ | $\sphericalangle APB = 97^0\ 35'\ 30''$
$\sphericalangle \alpha = 23^0\ 4'\ 25''$ | $\sphericalangle \alpha = 21^0\ 15'\ 20''$
$\sphericalangle \beta = 31^0\ 25'\ 45''$ | $\sphericalangle \beta = 25^0\ 0'\ 10''$

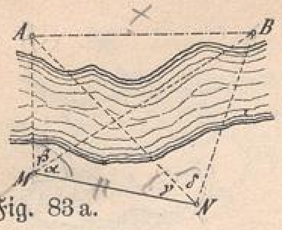


Fig. 83 a.

11. Man ermittle die gegenseitige Entfernung AB = x der unzugänglichen Punkte A und B (Fig. 83) aus folgenden, durch direkte Messung gefundenen Angaben:

Fig. 83 b.

a)	b)
MN = a = 2555 *m*	MN = a = 2815 *m*
$\sphericalangle\, \alpha = 47^0\ 20'$	$\sphericalangle\, \alpha = 32^0\ 16'\ 20''$
$\sphericalangle\, \beta = 55^0\ 15'$	$\sphericalangle\, \beta = 38^0\ 25'\ 10''$
$\sphericalangle\, \gamma = 38^0\ 10'$	$\sphericalangle\, ANM = \sphericalangle\, \gamma = 115^0\ 29'\ 30''$
$\sphericalangle\, \delta = 61^0\ 25'$	$\sphericalangle\, BNM = \sphericalangle\, \delta = 109^0\ 47'\ 40''$
(Nach Fig. 83 a.)	(Nach Fig. 83 b.)

Anleitung: Man berechne aus den Dreiecken MNB und MNA die Seiten MA und MB und sodann aus dem Dreiecke ABM die Seite AB = x.

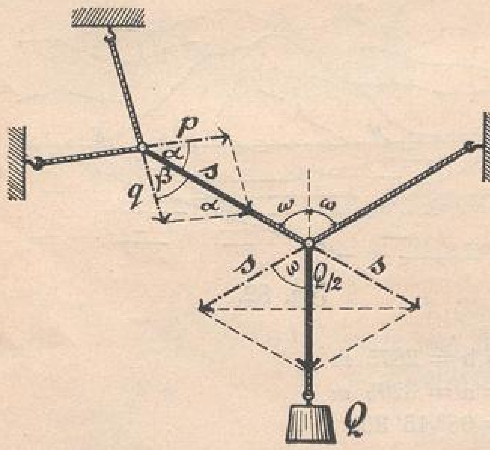


Fig. 84.

12. Wie groß sind die durch die Belastung Q hervorgerufenen Spannungen s, p und q in den einzelnen Teilen der in Fig. 84 dargestellten Seilverbindung, wenn:

a)	b)
Q = 44·5 *kg*	Q = 340 *kg*
$2\omega = 115^0$	$2\omega = 125^0$
$\alpha = 38^0$	$\alpha = 35^0$
$\beta = 32^0$	$\beta = 28^0$ ist?

13. An einem in Fig. 85 skizzierten Drehkrane, dessen Gestalt durch die Winkel α, β, γ bestimmt ist, hängt eine Last Q. Man berechne die in den Streben herrschenden Spannungen s, u, p, ferner die horizontalen und vertikalen Komponenten H, h, $\mathfrak{H}$, V und v.

$\sphericalangle\, \alpha = 38^0$
$\sphericalangle\, \beta = 38^0$
$\sphericalangle\, \gamma = 29^0$
Q = 6750 *kg*

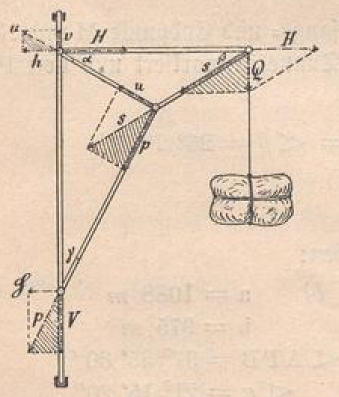


Fig. 85.

Anleitung: Man zerlege die Kraft Q nach nebenstehendem Schema und benütze die in der Figur schraffierten Kräftedreiecke.

$$Q \begin{cases} H \\ s \begin{cases} u \begin{cases} v \\ h \end{cases} \\ p \begin{cases} V \\ \mathfrak{H} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Probe: V — v = Q
(warum?)

14. Eine geradlinige Straße (Fig. 86) führt in ebenem Gelände von einem Orte A über B nach C. Von den beiden letztgenannten Orten zweigen wiederum geradlinige Straßen nach zwei Orten D und E ab.

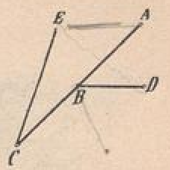


Fig. 86.

Man berechne die Entfernung DE für folgende Angaben:

a) BC = 3·5 *km*	*b)* BC = 7 *km*
$\sphericalangle$ DBA = 55°	$\sphericalangle$ ABD = 130°
$\sphericalangle$ ECA = 30°	$\sphericalangle$ ACE = 35°
CE = 6·575 *km*	CE = 4 *km*
BD = 4·225 *km*	BD = 3 *km*

15. Vom Rudolfsturme C (bei Hallstadt) (Fig. 87), dessen Höhe über dem Spiegel des Hallstädter Sees h = 386 *m* ist, erscheint die Spitze des Sarsteins unter einem Höhenwinkel $\alpha = 11^\circ\,37'\,30''$, das Spiegelbild unter einem Tiefenwinkel $\beta = 19^\circ\,16'\,30''$. Wie groß ist die absolute Höhe des Sarsteins, wenn der Spiegel des Hallstädter Sees eine Meereshöhe von 494 *m* besitzt?

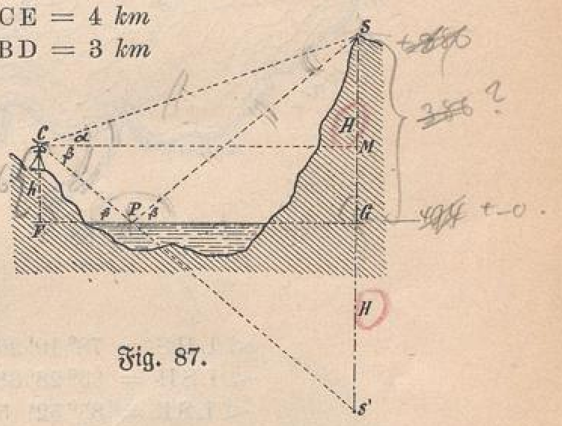


Fig. 87.

Anleitung. 1. Lösung. Aus Δ CMS folgt: $CM = (H - h)\operatorname{cotg}\alpha$
aus Δ CMS' folgt: $CM = (H + h)\operatorname{cotg}\beta$

Aus der Gleichstellung dieser Werte ergibt sich

$$H = h \cdot \frac{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta}$$

2. Lösung. Aus den ähnlichen Dreiecken PFC und PGS folgt:

$$H : h = SP : CP \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I})$$

Da in Δ CPS.... $\sphericalangle PCS = \beta + \alpha$ und $\sphericalangle CSP = \beta - \alpha$ ist, so ergibt sich nach dem Sinussatze:

$$SP : CP = \sin(\beta + \alpha) : \sin(\beta - \alpha) \ldots\ldots (\mathrm{II})$$

Aus (I) und (II) erhält man $H = h \cdot \dfrac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}$.

16. Von einem Punkte, dessen Höhe h über dem Spiegel eines Sees bekannt ist, erscheint eine Wolke unter dem Höhenwinkel α, ihr Spiegelbild im See unter dem Tiefenwinkel β. Man berechne die Höhe der Wolke über dem Seespiegel für folgende Angaben:

a) h = 153·8 *m*	*b)* h = 175 *m*	*c)* h = 83·75 *m*
$\sphericalangle\beta = 25^\circ\,14'\,40''$	$\sphericalangle\beta = 19^\circ\,10'$	$\sphericalangle\beta = 31^\circ\,20'$
$\sphericalangle\alpha = 17^\circ\,40'\,25''$	$\sphericalangle\alpha = 16^\circ\,45'$	$\sphericalangle\alpha = 26^\circ\,30'$

17. Von zwei passend gewählten Uferpunkten des Bodensees bei Bregenz (B) und Hard (H) (Fig. 88), deren Entfernung BH = 4612·5 m früher bestimmt wurde, erschien der Hafenturm von Lindau (L) unter den Visurwinkeln:

$$BHL = 71^0\,51'\,40''$$
$$HBL = 60^0\,35'\,50''$$

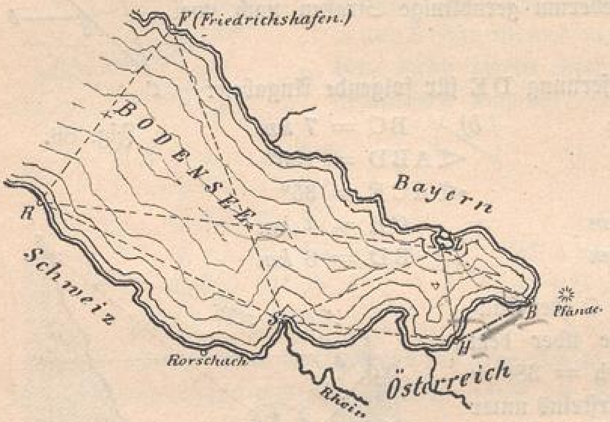


Fig. 88.

Ferner wurde vom Rheinspitz S (Rheinmündung) und von einem Uferpunkte bei Romanshorn (R) nach den entsprechenden Punkten visiert. Dadurch ergaben sich folgende Winkel:

$\sphericalangle LHS = 78^0\,10'\,26''$ $\quad\sphericalangle FSR = 40^0\,54'\,46''$

$\sphericalangle LSH = 33^0\,28'\,38''$ $\quad\sphericalangle LRS = 19^0\,35'\,54''$

$\sphericalangle LSF = 85^0\,52'\,\ \,5''$ $\quad\sphericalangle FRS = 79^0\,54'\,46''$

Aus diesen Angaben berechne man die Entfernungen: BL, LH, HS, SL, RS, RL, RF, SF und FL.

18. Von zwei Uferpunkten des Bodensees: Lindau (L) und Mehrerau (M) (Fig. 89) wurde nach der Spitze des Pfänders (P) visiert und es ergaben sich folgende Winkel:

a) Horizontalwinkel $\begin{cases} FML = \alpha = 123^0\,57'\,8'' \\ FLM = \beta = \ \ 27^0\,13'\,8'' \end{cases}$

b) Vertikalwinkel $\begin{cases} FMP = \varphi = 8^0\,30'\,31'' \\ FLP = \psi = 4^0\,42'\,57'' \end{cases}$

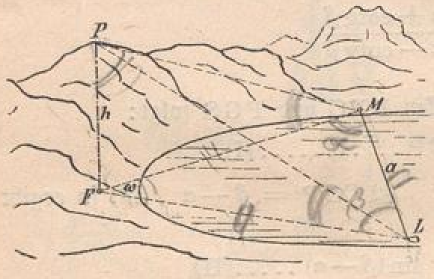


Fig. 89.

Die Entfernung ML = a wurde mit 4665 m bestimmt. Man berechne aus diesen Angaben die Höhe h des Pfändergipfels über dem Bodensee.

Anleitung: Aus dem Dreieck MLF berechne man die Seiten FM und ML nach dem Sinussatze, sodann aus den rechtwinkligen Dreiecken FMP und FLP die Höhe h. Man erhält auf diesem Wege:

$$h = \frac{a \sin \beta \operatorname{tg} \varphi}{\sin \omega} \quad \text{und} \quad h = \frac{a \sin \alpha \operatorname{tg} \psi}{\sin \omega}$$

Aus den beiden Resultaten ist das Mittel zu nehmen.

19. Von zwei auf demselben Meridian SN und in gleicher Seehöhe liegenden Orten A und B (Fig. 90), deren Entfernung 47·75 *km* [67·5 *km*] beträgt, wurde ein Meteor (M) im Augenblicke seines Erlöschens beobachtet, und es wurden zur Bestimmung seines Ortes folgende Winkel gemessen:

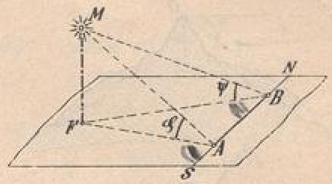


Fig. 90.

1. Horizontalwinkel: (Azimut) $\begin{cases} SAF = 142^0\,20' & [130^0\,30'] \\ SBF = 140^0 & [112^0\,40'] \end{cases}$

2. Vertikalwinkel: (Höhen) $\begin{cases} FAM = \varphi = 5^0\,30' & [27^0\,20'] \\ FBM = \psi = 5^0\,45' & [32^0] \end{cases}$

Man berechne die Höhe des Meteors.

20. Vom „Signal de Bougis" (S), einem 512 *m* über dem Spiegel des Genfer Sees (Fig. 91) gelegenen berühmten Aussichtspunkte, erscheinen die Orte Genf und Villeneuve unter den Tiefenwinkeln $\alpha = 0^0\,49'\,56''$ und $\beta = 0^0\,40'\,42''$, während die horizontale Drehung des Fernrohres (bei Einstellung von einem Orte auf den anderen) $\omega = 105^0\,4'\,40''$ ist. Wie groß ist die direkte Entfernung der beiden Orte? (Die Erdkrümmung ist zu vernachlässigen. Die vorstehende Aufgabe bildet die Umkehrung der Aufgabe 18.)

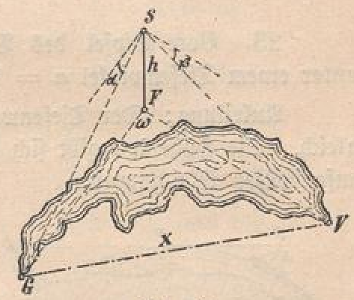


Fig. 91.

21. Vom Gipfel *A* (Fig. 92) des Schafberges, dessen Meereshöhe 1780 *m* beträgt, erscheinen drei in der Meereshöhe von 549 *m* gelegene Uferpunkte des des Abersees, u. zw. St. Gilgen (*G*), St. Wolfgang (*W*) und Strobel (*S*), unter den Tiefenwinkeln

$$\omega_1 = 13^0\,48'\,16''$$
$$\omega_2 = 14^0\,56'\,41''$$
$$\omega_3 = 9^0\,24'\,48''$$

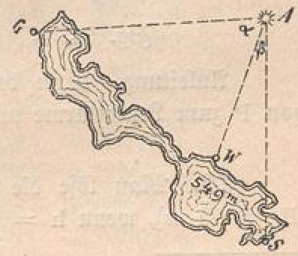


Fig. 92.

während am Horizontalkreise des Winkelmeßinstrumentes die Winkel $\alpha = \sphericalangle\, GAW = 89^0\,38'\,9''$ und

$$\beta = \sphericalangle\, WAS = 18^0\,20'\,14''$$

abgemessen wurden.

Wie viel betragen die Horizontalentfernungen *AG*, *AW* und *AS* der drei Uferpunkte vom Schafberggipfel und wie groß sind die gegenseitigen Entfernungen der Uferpunkte?

Potenz d. Punctes ???

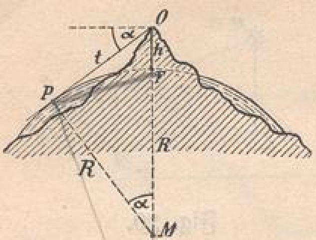


Fig. 93.

22. Ein Auge O (Fig. 93) befindet sich in der Höhe h über der Erdoberfläche, die als eine glatte Kugelfläche (Meeresspiegel) vom Radius R = 6366·75 *km* angesehen wird. Wie lang ist der Bogen (FP), welchen das Auge nach der einen Seite überblickt? Man berechne die Länge dieses Bogens für die Beobachtungspunkte:

a) Ätna . . . . h = 3313 *m*

b) Chimborasso h = 6700 *m*

Anleitung. Aus $\triangle$ MPO folgt $\operatorname{tg} \alpha = \frac{OP}{MP}$ *), und da nach dem Satze von der Potenz des Punktes

$OP = \sqrt{h(2R + h)}$ ist, so ist $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{h(2R + h)}}{R}$

23. Vom Gipfel des Vesuvs erscheint der äußerste Horizont (das Meer) unter einem Tiefenwinkel $\alpha = 1^0\ 8'\ 39''$. Wie hoch ist der Vesuv?

Anleitung: Der Tiefenwinkel und der Winkel PMO (Fig. 93) sind einander gleich. Die Höhe h ergibt sich aus den in voriger Aufgabe zur Berechnung von α aufgestellten Gleichungen.

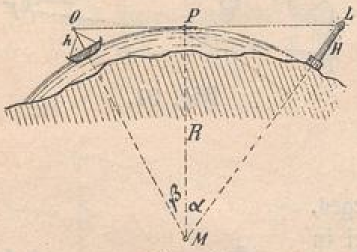


Fig. 94.

24. Das Leuchtfeuer des Leuchtturmes auf Helgoland hat eine Höhe H = 83 *m* über dem Seespiegel. Einem auf einem fernen Schiffe in der Höhe h über dem Seespiegel befindlichen Auge erscheint soeben das Licht des Leuchtturmes am äußersten Horizont. Wie weit ist das Schiff noch vom Leuchtturme entfernt, wenn

a) h = 15 *m* *b)* h = 18 *m* *c)* h = 25 *m* ist?

Anleitung. Man berechne die Winkel α und β und dann die zugehörigen von P zum Leuchtturme und zum Schiffe reichenden Kreisbögen.

25. Man löse die vorstehende Aufgabe für den Leuchtturm von Marseille (H = 60 *m*), wenn h = 13 *m* ist.

---

*) Die einfachere Formel: $\cos \alpha = \frac{R}{R + h}$ liefert bei fünfstelligen Tafeln zu ungenaue Resultate. Annähernd ist $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{2h}{R}}$

Für die Berechnung der Bogenlängen beachte man, daß sich für den Halbmesser r = 1 folgende Bogenlängen ergeben:

$1^0 = 0{\cdot}0174533 \qquad 1' = 0{\cdot}0002909 \qquad 1'' = 0{\cdot}0000048$

$\frac{T}{R+h} = \sin \alpha$

$\frac{R}{R+h} = \cos \alpha$

??? $x^2 = (R+h)^2 - R^2$

$x = \sqrt{h(2R+h)}$

Resultate.

1. *a)** CA = 1109 *m*
CB = 395·6 *m*
b) CA = 456·2 *m*
CB = 254·47 *m*

2. *a)* 619·86 *m*
b) 397·67 *m*

3. *a)* $\alpha = 60^\circ$
$\beta = 152^\circ\, 12'\, 16''$
$\gamma = 147^\circ\, 47'\, 44''$
b) $\alpha = 93^\circ\, 56'\, 50''$
$\beta = 120^\circ\, 19'\, 28''$
$\gamma = 145^\circ\, 43'\, 42''$

4. P : Q : R = 8 : 5 : 10

5. *a)* q = 684·27 *kg*
p = 433·05 *kg*
b) q = 2369 *kg*
p = 1736 *kg*

6. h = 1312·3 *m*

7. P = 165·138 *kg*
Q = 215·138 *kg*

8. *a)* 1525·5 *m*
b) 1396·7 *m*

9. *a)* x = 665·26 *m*
y = 730·02 *m*
z = 401·713 *m*
b) x = 1169·07 *m*
y = 1141·47 *m*
z = 1039·3 *m*

10. $\sphericalangle$ A = $43^\circ\, 33'\, 36''$
$\sphericalangle$ B = $38^\circ\, 10'\, 54''$
AB = 4602·66 *m*
MN = 1733·06 *m*
a) $\sphericalangle$ A = $47^\circ\, 41'\, 14''$
$\sphericalangle$ B = $28^\circ\, 8'\, 26''$
MN = 1575·3 *m*
b) $\sphericalangle$ A = $43^\circ\, 57'$
$\sphericalangle$ B = $38^\circ\, 27'\, 30''$
MN = 650·5 *m*

11. *a)* 3795 *m*
b) 5669 *m*

12. *a)* s = 41·41 *kg*
p = 23·352 *kg*
q = 27·131 *kg*
b) s = 368·16 *kg*
p = 193·98 *kg*
q = 237 *kg*

13. H = 8640 *kg*
s = 10964 *kg*
u = 4337 *kg*
p = 10770 *kg*
v = 2670 *kg*
h = 3418 *kg*
V = 9420 *kg*
$\mathfrak{H}$ = 5222 *kg*

14. *a)* DE = 6·7523 *km*
BE = 3·9525 *km*
b) DE = 4·9307 *km*
CD = 5·568 *km*

15. 1489 *m*

16. *a)* 794·9 *m*
b) 2434·5 *m*
c) 841·4 *m*

17. BL = 5941·33 *m*
LH = 5446·56 *m*
HS = 9177·36 *m*
SL = 9664·4 *m*
RS = 15953·3 *m*
RL = 23076·7 *m*
RF = 12167 *m*
SF = 18290·7 *m*
FL = 20062 *m*

18. 662·015 *m*

19. *a)* h = 91·628 *km*
(als Mittel von 91·84 und 91·416).
b) h = 104·93 *km*
(als Mittel von 104·73 und 105·13).

20. 62·5 *km*

21. AG = 5010 *m*
AW = 4612 *m*
AS = 7425 *m*
GW = 6788 *m*
WS = 3375 *m*

22. *a)* 205·343 *km*
b) 291·959 *km*

23. 1270 *m*

24. *a)* 46·332 *km*
b) 47·639 *km*
c) 50·287 *km*

25. 40·5 *km*

Erweiterung der Goniometrie.

§ 32. Es liegt wohl die Vermutung nahe, daß, wenn zwei oder mehrere Winkel zu einander in bestimmten Beziehungen stehen, auch die Funktionen dieser Winkel einen gewissen Zusammenhang besitzen werden, und wir haben dies in der Tat in mehreren Fällen (§ 22) bereits nachgewiesen.

Solche aus dem Zusammenhange der Winkel fließenden Beziehungen zwischen deren Funktionen können oft mit Vorteil zur Vereinfachung von Formeln und Rechnungen benutzt werden, und wir wollen uns deshalb in den nächsten Kapiteln mit den wichtigsten hierher gehörigen Lehrsätzen befassen.

Diese Lehrsätze bilden mit den im § 18 angegebenen Beziehungen zwischen den Funktionen eines und desselben Winkels den Inhalt der Goniometrie. Die goniometrischen Sätze sind für uns auch deshalb von großer Wichtigkeit, weil durch sie der innere (analytische) Zusammenhang einzelner für die Dreiecksberechnung aufgestellter Lehrsätze (siehe z. B. § 38) klar zu Tage tritt.

Zusammenhang zwischen den Funktionen einer Winkelsumme und den Funktionen der Einzelwinkel (Summanden).

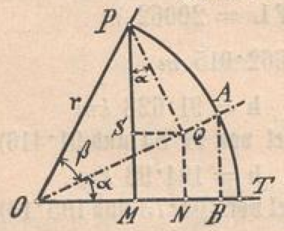


Fig. 95.

§ 33. Wir wollen zuerst aus der Fig. 95 eine Formel ableiten, welche uns in den Stand setzt, den Sinus und Cosinus der Winkelsumme $(\alpha + \beta)$ aus den gleichnamigen Funktionen der einzelnen Winkel α und β zu berechnen.

In Figur 95 ist $OA = OP = r$,

$$\sphericalangle POT = \alpha + \beta,$$

$PM = r \sin(\alpha + \beta)$ und $OM = r \cos(\alpha + \beta)$

1. Es ist $PM = SM + PS$

oder $PM = QN + PS$

oder $r \sin(\alpha + \beta) = OQ \,.\, \sin\alpha + PQ \,.\, \cos\alpha$*)

$$r \sin(\alpha + \beta) = r \cos\beta \,.\, \sin\alpha + r \sin\beta \,.\, \cos\alpha,$$

somit $\mathbf{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}$ . . . . (I)

2. Es ist $OM = ON - MN$

$$OM = ON - QS$$

oder $r(\cos\alpha + \beta) = OQ \,.\, \cos\alpha - PQ \,.\, \sin\alpha$

$$r \cos(\alpha + \beta) = r \cos\beta \,.\, \cos\alpha - r \sin\beta \,.\, \sin\alpha$$

$$\mathbf{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta} \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

Beispiel. Man erprobe die Richtigkeit dieser Formeln für $\alpha = 60^0$ und $\beta = 30^0$.

Setzt man $\beta = \alpha$, so wird $(\alpha + \beta) = 2\alpha$ und man erhält die Formeln:

$$\sin(2\alpha) = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha$$

(III) $\mathbf{\sin(2\alpha) = 2 \sin\alpha \cos\alpha}$

$$\cos(2\alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha$$

(IV) $\mathbf{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ und, da

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ und $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$,

(IVa) $\mathbf{\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha}$ $\mathbf{\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1}$ (IVb)

Diese Formeln, welche gestatten, aus dem sinus und cosinus eines Winkels die gleichnamigen Funktionen des doppelten Winkels zu berechnen, lassen sich weiter umformen, wenn man

statt $2\alpha \ldots . \alpha$ und daher statt $\alpha \ldots . \frac{\alpha}{2}$ schreibt.

---

*) $\sphericalangle QPS = \alpha$ als Normalwinkel.

Man erhält dann:

$$\text{(V)} \quad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{(VI)}$$

$$\text{(VI a)} \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \quad \text{(VI b)}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich unmittelbar

$$\text{(VII)} \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{(VIII)}$$

$$\text{und } \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Übungsbeispiele.

1. Wie groß sind $\sin 40^0$ und $\cos 40^0$, wenn
   $\sin 15^0 = 0{\cdot}25882$ und $\cos 15^0 = 0{\cdot}96593$
   $\sin 25^0 = 0{\cdot}42262$ " $\cos 25^0 = 0{\cdot}90631$ ist?

2. Wie groß sind die goniometrischen Funktionen von $(x + y)$, wenn
   $\sin x = 0{\cdot}6$ $\sin y = 0{\cdot}8$ ist?

3. Man vereinfache folgende Ausdrücke:

a) $\sin(2\alpha)\operatorname{tg}\alpha$ *b)* $(1 - \cos\alpha)\,.\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ *c)* $(1 + \cos\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

d) $\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{cotg}(2\alpha)$ *e)* $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ *f)* $\dfrac{1 - \operatorname{sos}\alpha}{1 + \cos\alpha}$

4. Man löse folgende Gleichungen auf:

a) $14\,.\sin\alpha = \dfrac{5}{\cos\alpha}$ *b)* $5{\cdot}37\sin x = \dfrac{1{\cdot}25}{\cos x}$

Auflösung: $7\,.\,2\sin\alpha\cos\alpha = 5$ *c)* $30\cos x = 11\operatorname{cosec} x$

$\sin(2\alpha) = \dfrac{5}{7}$ *d)* $\sin(2x) = 1{\cdot}5\sin x$

Daraus: $\alpha_1 = 22^0\,47'\,32{\cdot}5''$ *e)* $5\sin(2x) = 3\cos x$

$\alpha_2 = 67^0\,12'\,27{\cdot}5''$

f) $\sin(2\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ *g)* $3\sin(2\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$

Auflösung: $2\sin\alpha\,.\cos\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ *h)* $759\sin x = 325\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

$2\cos^2\alpha = 1 \quad \sin\alpha = 0$ *i)* $\operatorname{cosec} y = \sec\dfrac{y}{2}$

$\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

$\alpha_1 = 45^0 \quad \alpha_2 = 315^0 \quad \alpha_5 = 0^0$

$\alpha_3 = 135^0 \quad \alpha_4 = 225^0 \quad \alpha_6 = 180^0$

k) $\cos(2\alpha) = \frac{1}{2}\cos\alpha$

$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{2}\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{1}{2}}$

$\alpha_1 = 32^0\,32'\,3''$ $\quad \alpha_3 = 126^0\,22'\,31''$

$\alpha_2 = 360 - \alpha_1$ $\quad \alpha_4 = 360 - \alpha_3$

l) $5\cos(2\alpha) = 3\cos\alpha$

m) $\cos\frac{x}{2} : \cos x = 17 : 9$

n) $\cos(2x) = \sin x$

o) Wie groß ist der Winkel, dessen tangens sich zum sinus des doppelten Winkels verhält, wie 3 : 5?

p) Wie groß ist der Winkel, dessen cosinus gleich ist dem dreifachen cosinus des doppelten Winkels?

q) $\operatorname{tg} x = \sin x + \sin(2x)$

r) $\cos(2x) + \cos x = 1$

s) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 5\sin\alpha\cos\alpha$

t) $\sin x + \cos x = 1{\cdot}345$ *)

u) $\sin x + \cos x = 1{\cdot}414$

v) $\sin x + \cos x = 1{\cdot}2369$

w) $\sin x - \cos x = 0{\cdot}37$

Zusatz: Man verzeichne die berechneten Winkel am Kreise und erprobe an den Funktionslinien die Übereinstimmung mit den gegebenen Gleichungen.

Resultate.

1. $0{\cdot}64279$
   $0{\cdot}76604$

2. $\sin(x+y) = +1$
   $\cos(x+y) = 0$ u. s. f.
   $x + y = 90^0$

3. *a)* $2\sin^2\alpha$
   b) $\sin\alpha$
   c) $\sin\alpha$
   d) $\frac{1}{2}\cos(2\alpha)$
   e) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2\alpha)$
   f) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

4. *a)* $\alpha_1 = 22^0\,47'\,33''$
   b) $x_1 = 13^0\,52'\,23''$
   $x_2 = 76^0\;7'\,38''$
   c) $x_1 = 23^0\,35'$
   $x_2 = 66^0\,25'$
   d) $x_1 = 41^0\,24'\,35''$
   $x_2 = 318^0\,35'\,25''$
   $x_3 = 0 \quad x_4 = 180^0$
   e) $x_1 = 17^0\,27'\,27''$
   $x_2 = 162^0\,32'\,33''$
   $x_3 = 90^0$
   $x_4 = 270^0$
   f) $\alpha_1 = 45^0$ u. s. f.

---

*) Man quadriere die Gleichung und beachte, daß
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $2\sin x\cos x = \sin(2x)$ ist.

g) $\alpha_1 = 24^0\ 5'\ 41''$
$\alpha_2 = 155^0\ 54'\ 19''$
$\alpha_3 = 335^0\ 54'\ 19''$
$\alpha_4 = 204^0\ 5'\ 41''$

h) $x_1 = 124^0\ 52'\ 33''$
$x_2 = 235^0\ 7'\ 28''$
$x_3 = 0 \quad x_4 = 360^0$

i) $y_1 = 60^0 \quad y_2 = 300^0$
$y_3 = 180^0$

k) $\alpha_1 = 32^0\ 32'\ 3''$ usf.

l) $\alpha_1 = 29^0\ 12'\ 37''$
$\alpha_2 = 360 - \alpha_1$
$\alpha_3 = 124^0\ 56'\ 51''$
$\alpha_4 = 360 - \alpha_3$

m) $x_1 = 63^0\ 11'\ 50''$
$x_2 = 251^0\ 53'\ 34''$

n) $x_1 = 30^0 \quad x_2 = 150^0$
$x_3 = 270^0$

o) $x_1 = 24^0\ 5'\ 40''$
$x_2 = 155^0\ 54'\ 20''$
$x_3 = 0$
$x_4 = 360^0 - x_1$
$x_5 = 360^0 - x_2$
$x_6 = 180^0$

p) $x_1 = 37^0\ 18'\ 48''$
$x_2 = 128^0\ 57'\ 7''$
$x_3 = 360^0 - x_1$
$x_4 = 360^0 - x_2$

q) $x_1 = 60^0 \quad x_2 = 300^0$
$x_3 = 0^0 \quad x_4 = 180^0$

r) $x_1 \doteq 38^0\ 40'$
$x_2 \doteq 321^0\ 20'$

s) $\alpha_1 = 10^0\ 54'\ 3''$
$\alpha_2 = 100^0\ 54'\ 3''$

t) $x_1 \doteq 27^0$
$x_2 \doteq 63^0$

u) $x_1 \doteq 44^0$
$x_2 \doteq 46^0$

v) $x_1 = 16^0$
$x_2 = 74^0$

w) $x = 60^0\ 10'$

§ 34. Aufgabe: Man bestimme den sinus und cosinus der Winkeldifferenz ($\alpha - \beta$) aus den gleichnamigen Funktionen der Einzelwinkel α und β.

Ist $\varphi = \alpha - \beta$ so ist $\alpha = \beta + \varphi$

somit nach § 33

$$\sin\alpha = \sin\beta\cos\varphi + \cos\beta\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$
$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\varphi - \sin\beta\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Multipliziert man die Gleichung (A) mit $\cos\beta$ und die Gleichung (B) mit ($-\sin\beta$), so erhält man durch Addition der Gleichungen

$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin\varphi\,(\cos^2\beta + \sin^2\beta)$$

Addiert man aber zu der mit $\sin\beta$ multiplizierten Gleichung (A) die mit $\cos\beta$ multiplizierte Gleichung (B), so erhält man

$$\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta = \cos\varphi\,(\sin^2\beta + \cos^2\beta)$$

oder, weil $(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = 1$ und $\varphi = \alpha - \beta$ ist,

$$\mathbf{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IX)$$
$$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (X)$$

Übungsbeispiele.

1. Man berechne aus: $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

die Werte für $\sin 15^0$ und $\cos 15^0$.

2. Was ergeben die Formeln (IX) und (X) für $x = 90^0$, $x = 180^0$, $x = 270^0$, $x = 360^0$?

3. *a)* Man mache den Ausdruck $\frac{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha}$ logarithmisch brauchbar.

b) Man zeige, daß die in Aufgabe 6 (S. 70) erhaltenen beiden Lösungen identisch sind.

4. Man vereinfache folgende Ausdrücke:

a) $\sin(x+y) - \sin(x-y)$ *b)* $\frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$

c) $\sin(3x)\cos(2x) - \cos(3x)\sin(2x)$

d) $\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha) + \sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)$

5. Man bestimme die Winkel x und y aus folgenden Gleichungen:

a) $x + y = 65^0$, $\sin x \cos y = 0{\cdot}582565$ *b)* $x - y = 26^0\,30'$, $\sin x \sin y = 0{\cdot}37356$

c) $x + y = 80^0\,30'$, $\cos x \cos y = 0{\cdot}39378$ *d)* $x - y = 30^0$, $\cos x \sin y = 0{\cdot}219845$

Anleitung: In Beispiel 5a ist:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin 65^0 = 0{\cdot}90631$$

somit $0{\cdot}582565 + \cos x \sin y = 0{\cdot}90631$

und $\cos x \sin y = 0{\cdot}323745$

Subtrahiert man diese Gleichung von der gegebenen $\sin x \cos y = 0{\cdot}582565$

so erhält man $\sin x \cos y - \cos x \sin y = 0{\cdot}25882$

also $\sin(x-y) = 0{\cdot}25882$

somit nach Tabelle $x - y = 15^0$,

welche Gleichung mit der gegebenen Gleichung $x + y = 65^0$ zusammengefaßt wird.

6. Man zeige, daß die in Aufgabe 15 (S. 72) erhaltenen beiden Resultate identisch sind.

Resultate.

1. $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ $\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

2. **Vergleiche § 22.**

3. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

4. *a)* $2 \cos x \sin y$ *b)* $\operatorname{tg} x$ *c)* $\sin x$ *d)* $\cos (2\alpha)$

5. *a)* $x = 40^0$, $y = 25^0$ *b)* $x = 54^0$, $y = 27^0\ 30'$

c) $x = 66^0$, $y = 14^0\ 30'$ *d)* $x_1 = 50^0$, $y_1 = 20^0$; $x_2 = 70^0$, $y_2 = 40^0$

§ 35. Die Formeln (I) und (IX), (II) und (X) lassen sich auch in folgender Form zusammenfassen:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

Dividiert man beide Gleichungsseiten durcheinander, so erhält man:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta}$$

und wenn man Zähler und Nenner des rechtsstehenden Bruches durch $\cos\alpha \cos\beta$ dividiert:

$$\text{(XI)} \qquad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

Bildet man auf beiden Seiten der Gleichung die reziproken Werte, so erhält man:

$$\text{(XII)} \qquad \operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}$$

oder, wenn man rechts Zähler und Nenner mit $\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta$ multipliziert,

$$\text{(XIIa)} \qquad \operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}$$

Berücksichtigt man bloß die oberen Zeichen und setzt $\beta = \alpha$, also $(\alpha + \beta) = 2\alpha$, so bekommt man weiters die Formeln:

$$\text{(XIII)} \qquad \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\text{(XIV)} \qquad \operatorname{cotg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

Außer diesen Formeln, welche uns gestatten, aus dem tangens eines Winkels tangens und cotangens des doppelten Winkels zu berechnen, wollen wir noch eine Formel aufstellen, welche lehrt, aus dem cosinus eines Winkels den tangens des halben Winkels zu finden.

Aus den Formeln (VII) $\quad 1 - \cos\alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

(VIII) $\quad 1 + \cos\alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

folgt unmittelbar durch Division:

$$\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

daher
$$\mathbf{tg}\, \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\mathbf{1 - \cos\alpha}}{\mathbf{1 + \cos\alpha}}} \qquad \text{(XV)}$$

und reziprok:
$$\mathbf{cotg}\, \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\mathbf{1 + \cos\alpha}}{\mathbf{1 - \cos\alpha}}} \qquad \text{(XVI)}$$

Übungsbeispiele.

1. Man setze in Formel (XIII) und (XIV) $\alpha = 45^0$, 90^0, 135^0, 180^0 und vergleiche die erhaltenen Resultate mit § 21.

2. Man berechne aus: $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ die Werte für $\operatorname{tg} 30^0$ und $\operatorname{cotg} 30^0$.

3. Man berechne aus $\operatorname{tg} 20^0 = 0{\cdot}36397$ die Werte: $\operatorname{tg} 40^0$ und $\operatorname{cotg} 40^0$.

§ 36. Die Formeln für $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$ können auch benützt werden, um Gleichungen von der Form:

$$\mathbf{a \cos x \pm b \sin x = c}$$

durch Einführung eines Hilfswinkels aufzulösen.

Dividiert man nämlich die vorliegende Gleichung durch b, so erhält man:

$$\frac{a}{b} \cos x \pm \sin x = \frac{c}{b} \qquad \text{(A)}$$

und setzt man nun:

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

so nimmt die Gleichung (A) folgende Form an:

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \cos x \pm \sin x = \frac{c}{b}$$

$$\sin\varphi \cos x \pm \cos\varphi \sin x = \frac{c \cos\varphi}{b}$$

oder
$$\mathbf{\sin(\varphi \pm x) = \frac{c \cos\varphi}{b}},$$

während $\sphericalangle\, \varphi$ durch: $\quad \mathbf{tg}\,\varphi = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \quad$ bestimmt ist.

Beispiel.

$$52 \cos x + 37 \sin x = 48{\cdot}53$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{52}{37} \cdot \ldots \cdot \varphi = 54^0\ 34'$$

ferner ist $\sin(\varphi + x) = \frac{48{\cdot}53 \cos \varphi}{37}$, aus welcher Gleichung sich nach § 23 zwei Werte für den Winkel $(\varphi + x)$ ergeben, u. zw. ist

$$\varphi + x = 49^0\ 30' \quad \text{oder} \quad \varphi + x = 130^0\ 30'$$

und $\varphi = 54^0\ 34'$ $\qquad \varphi = 54^0\ 34'$

somit $x_1 = -5^0\ 4'$ *) $\qquad x_2 = 75^0\ 56'$

Hätte man in der obigen Gleichung (A)

$$\frac{a}{b} = \operatorname{cotg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$$ gesetzt, so hätte

man erhalten: $$\cos(\varphi \mp x) = \frac{c \sin \varphi}{b}$$

und $$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{a}{b}$$

Übungsbeispiele.

1. $5 \cos x + \sin x = 3$
2. $5 \sin x - \cos x = 2$
3. $25 \cos x + 98 \sin x = 89{\cdot}556$
4. $57{\cdot}8 \cos x + 19{\cdot}6 \sin x = 61{\cdot}0042$
5. $6{\cdot}258 \cos x - 0{\cdot}975 \sin x = 1{\cdot}4403$
6. $35{\cdot}7 \sin x - 20{\cdot}8 \cos x = 13{\cdot}9775$
7. $38{\cdot}5 \cos x - 12{\cdot}5 \sin x = 27{\cdot}09214$

8. Auf einen Körper vom Gewichte Q (Fig. 96), der gegen seine horizontale Unterlage den Reibungskoeffizienten φ besitzt, wirkt eine gegen den Schwerpunkt S gerichtete Kraft P. Wie groß muß der Neigungswinkel α dieser Kraft gegen die Vertikale mindestens sein, damit der Körper gleite?

a) $P = 50\,kg$, $Q = 60\,kg$, $\varphi = 0{\cdot}4$ $\quad$ b) $P = 80\,kg$, $Q = 50\,kg$, $\varphi = 0{\cdot}4$ $\quad$ c) $P = \frac{Q}{3}$, $\varphi = \frac{1}{4}$

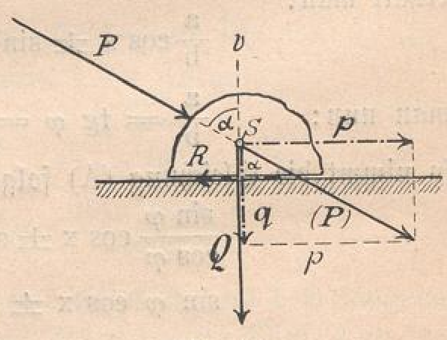


Fig. 96.

*) Über negative Winkel siehe § 40. In den Resultaten der folgenden Beispiele ist (mit Ausnahme des ersten Beispieles) nur eine Lösung angegeben.

P. sin α = (Q + P. cos α) . μ

P(sin α − μ. cos α) = Q . μ

− μ √(1 − sin² α) = a − sin α   μ² − μ² sin² α = a² − 2 a sin α + sin² α

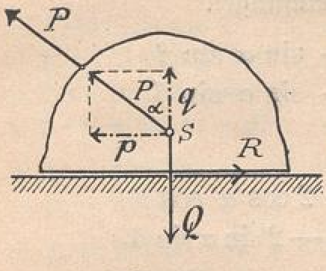


Fig. 97.

Anleitung: Den gesuchten Grenzwinkel findet man, indem man die Schubkomponente p gleich setzt der Reibung $R = (Q + q)\ \varphi$.

9. Man löse die Aufgabe 8 unter Zugrundelegung der Fig. 97 für folgende Angaben:

a) $P = 10\ kg$, $Q = 45\ kg$, $\varphi = \frac{1}{5}$ *b)* $P = 90\ kg$, $Q = 220\ kg$, $\varphi = \frac{1}{3}$ *c)* $Q = 4\ P$, $\varphi = \frac{1}{5}$

Resultate.

1. $x_1 = -42^0\ 39'\ 5''$ *)
   $x_2 = 65^0\ 16'\ 15''$
2. $x = 34^0\ 24'\ 13''$
3. $x = 47^0\ 59'\ 55''$
4. $x = 16^0\ 56'\ 54''$
5. $x \doteq 68^0$
6. $x \doteq 50^0$
7. $x \doteq 30^0$
8. *a)* $\alpha \doteq 48^0\ 16'$
   b) $\alpha = 35^0\ 13'\ 25''$
   c) $\alpha = 60^0\ 43'\ 17''$
9. *a)* $\alpha = 50^0\ 38'\ 13''$
   b) $\alpha = 32^0\ 11'\ 21''$
   c) $\alpha = 40^0\ 21'\ 37''$

§ 37. Man verwandle $(\sin\varphi \pm \sin\psi)$ und $(\cos\varphi \pm \cos\psi)$ in logarithmisch brauchbare Ausdrücke.

Aus den Gleichungen:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

folgt:

$$\text{(A)}\qquad \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\text{(B)}\qquad \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

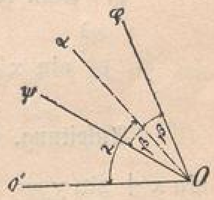


Fig. 98.

Setzt man nun $(\alpha + \beta) = \varphi$
und $(\alpha - \beta) = \psi$,

so ist $\alpha = \dfrac{\varphi + \psi}{2}$

$\beta = \dfrac{\varphi - \psi}{2}$ zu setzen (Fig. 98),

wodurch die Gleichungen (A) und (B) folgende Form annehmen:

$$\text{(XVII)}\qquad \sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi + \psi}{2}\cos\frac{\varphi - \psi}{2}$$

$$\text{(XVIII)}\qquad \sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{\varphi + \psi}{2}\sin\frac{\varphi - \psi}{2}$$

*) Siehe Fußnote auf vorstehender Seite.

In derselben Weise folgt aus den Gleichungen

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

durch Addition und Subtraktion:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cos\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha \sin\beta$$

oder nach obiger Substitution:

$$\text{(XIX)} \qquad \cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\frac{\varphi + \psi}{2}\cos\frac{\varphi - \psi}{2}$$

$$\text{(XX)} \qquad \cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\frac{\varphi + \psi}{2}\sin\frac{\varphi - \psi}{2}$$

Übungsbeispiele.

1. Man mache folgende Ausdrücke logarithmisch brauchbar:

a) $\sin(3x) \pm \sin x$ *b)* $\cos(7x) \pm \cos(3x)$

c) $\sin(x + 3y) + \sin(x + y)$ *d)* $\cos(2\alpha - \beta) + \cos\beta$

2. Man löse folgende Gleichungen auf:

a) $x + y = 70^0$, $\sin x + \sin y = 1{\cdot}11388$

b) $x - y = 15^0$, $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{4}\sqrt{6}$

Anleitung. In die Gleichung:
$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
setze man die gegebenen Werte ein und berechne daraus $(x - y)$.

Anleitung. In die Gleichung:
$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$
setze man die gegebenen Werte ein und berechne daraus $(x + y)$.

3. Man bestimme x und y aus folgenden Gleichungen:

a) $x + y = 70^0$, $\sin x + \sin y = 0{\cdot}8$

b) $x - y = 30^0$, $\sin x - \sin y = 0{\cdot}375$

c) $x - y = 20^0$, $\cos x + \cos y = 1{\cdot}84$

d) $x + y = 97^0\ 36'$, $\cos x - \cos y = -0{\cdot}238$

4. Man bestimme x und y aus folgenden Gleichungen:

a) $x + y = 40^0$, $\sin x \cos y = 0{\cdot}492405$

b) $x - y = 16^0$, $\sin x \cos y = 0{\cdot}54$

c) $x + y = 50^0$, $\sin x \sin y = 0{\cdot}11162$

d) $x - y = 20^0$, $\cos x \cos y = 0{\cdot}38302$

Resultate.

1. *a)* $2 \sin (2x) \cos x \qquad 2 \cos (2x) \sin x$
   b) $2 \cos (5x) \cos (2x) \qquad -2 \sin (5x) \sin (2x)$
   c) $2 \sin (x + 2y) \cos y$
   d) $2 \cos \alpha \cos (\alpha - \beta)$

2. *a)* $x_1 = 48^\circ 50' \qquad x_2 = y_1$ *b)* $x_1 = 45^\circ \qquad x_2 = 60^\circ$
   $y_1 = 21^\circ 10' \qquad y_2 = x_1 \qquad y_1 = 30^\circ \qquad y_2 = 45^\circ$

3. *a)* $x_1 = 80^\circ 47' \qquad x_2 = 349^\circ 13'$ *b)* $x_1 = 58^\circ 34' 40'' \qquad x_2 = 331^\circ 25' 20''$
   $y_1 = -10^\circ 47' \qquad y_2 = -279^\circ 13' \qquad y_1 = 28^\circ 34' 40'' \qquad y_2 = 301^\circ 25' 20''$
   c) $x_1 = 30^\circ 54' \qquad x_2 = 349^\circ 6'$ *d)* $x_1 = 57^\circ 54' \qquad x_2 = 219^\circ 42'$
   $y_1 = 10^\circ 54' \qquad y_2 = 329^\circ 6' \qquad y_1 = 39^\circ 42' \qquad y_2 = -122^\circ 6'$

4. *a)* $x_1 = 30^\circ \qquad x_2 = 100^\circ$ *b)* $x_1 = 34^\circ 46' 28'' \qquad x_2 = 71^\circ 13' 33''$
   $y_1 = 10^\circ \qquad y_2 = -60^\circ \qquad y_1 = 18^\circ 46' 28'' \qquad y_2 = 55^\circ 13' 33''$
   c) $x_1 = 40^\circ \qquad x_2 = 190^\circ$ *d)* $x_1 = 60^\circ \qquad x_2 = 140^\circ$
   $y_1 = 10^\circ \qquad y_2 = -140^\circ \qquad y_1 = 40^\circ \qquad y_2 = 120^\circ$

§ 38. Wir wollen noch einige der abgeleiteten Formeln benützen, um den *Zusammenhang der für die Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes aufgestellten Sätze* darzulegen.

1. Der Sinussatz für das schiefwinklige Dreieck lautet:

$$\mathbf{\sin A : \sin B = a : b} \quad \ldots \ldots \text{(I)}$$

folglich $(\sin A + \sin B) : (\sin A - \sin B) = (a + b) : (a - b)$

oder $2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} : 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} = (a + b) : (a - b)$.

Dividiert man in dieser Proportion die beiden ersten Glieder durch

$$2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

so erhält man:

$$\mathbf{tg \frac{A+B}{2} : tg \frac{A-B}{2} = (a + b) : (a - b)} \quad \ldots \ldots \text{(II)}$$

eine Proportion, in der wir den Tangentialsatz des schiefwinkligen Dreieckes erkennen.

Anmerkung. Der Zusammenhang der Proportionen I und II bleibt nach vorstehender Ableitung bestehen, auch wenn wir unter a, b, $\sphericalangle$ A und $\sphericalangle$ B nicht Dreiecksstücke verstehen. Wir können daher den allgemeinen Satz aufstellen:

Verhalten sich die sinus zweier Winkel wie zwei gegebene Größen, so verhält sich der tangens der halben Winkelsumme zum tangens der halben Winkeldifferenz wie die Summe jener Größen zur Differenz derselben.

Dieser Satz kann zur Berechnung zweier Winkel verwendet werden, wenn deren Summe (oder Differenz) und das Verhältnis ihrer sinus gegeben ist.

Beispiele.

Man bestimme x und y aus folgenden Gleichungen:

1. $x + y = 50^0$
$\sin x : \sin y = 207{\cdot}24 : 141{\cdot}76$

2. $x - y = 15^0$
$\sin x : \sin y = 695{\cdot}95 : 285{\cdot}95$

3. $x + y = 80^0$
$\sin x : \sin y = 5682 : 2931$

4. $x - y = 60^0$
$\sin x : \sin y = 8837 : 1857$

5. $x + y = 111^0$ *)
$\cos x : \cos y = 7999 : 17651$

6. $x - y = 49^0$ *)
$\cos x : \cos y = 521 : 986$

7. $x + y = 80^0$ **)
$\mathrm{tg}\, x : \mathrm{tg}\, y = 57415 : 27815$

8. $x - y = 10^0$
$\mathrm{tg}\, x : \mathrm{tg}\, y = 5238 : 3688$

9. $x + y = 103^0\, 46'$ ***)
$\mathrm{cotg}\, x : \mathrm{cotg}\, y = 127 : 6382$

10. $x - y = 37^0\, 56'$
$\mathrm{cotg}\, x : \mathrm{cotg}\, y = 2577 : 10821$

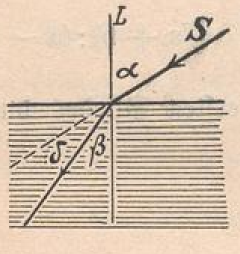


Fig. 99.

11. Auf eine Glasplatte (Fig. 99) vom Brechungsindex n fällt ein Lichtstrahl und erfährt bei der Brechung eine Ablenkung $\delta = \alpha - \beta$. Wie groß ist der Einfallswinkel α, wenn:

a) $n = 1{\cdot}53$, $\delta = 10^0$ *b)* $n = 1{\cdot}52$, $\delta = 15^0$

c) $n = 1{\cdot}52$, $\delta = 25^0$ *d)* $n = 1{\cdot}53$, $\delta = 15^0$ ist?

Brechungsgesetz: $\sin \alpha : \sin \beta = n : 1$

---

*) Aus $\cos x : \cos y = m : n$ ergibt sich $(\cos x + \cos y) : (\cos x - \cos y) = (m + n) : (m - n)$ und weiter:

$$\mathrm{tg}\, \frac{x + y}{2} \,.\, \mathrm{tg}\, \frac{x - y}{2} = \frac{n - m}{n + m}$$

**) Aus $\mathrm{tg}\, x : \mathrm{tg}\, y = m : n$ folgt durch einfache Umformung $\sin(x + y) : \sin(x - y) = (m + n) : (m - n)$

***) Aus $\mathrm{cotg}\, x : \mathrm{cotg}\, y = m : n$ folgt: $\sin(x + y) : \sin(x - y) = (n + m) : (n - m)$

Resultate.

1. $x_1 = 30^0$	$x_2 = 210^0$	2. $x_1 = 25^0$	$x_2 = 205^0$
$y_1 = 20^0$	$y_2 = -160^0$	$y_1 = 10^0$	$y_2 = 190^0$
3. $x_1 = 55^0$	$x_2 = 235^0$	4. $x_1 = 100^0$	$x_2 = 280^0$
$y_1 = 25^0$	$y_2 = -155^0$	$y_1 = 40^0$	$y_2 = 220^0$
5. $x_1 = 70^0$	$x_2 = 250^0$	6. $x_1 = 58^0\,36'\,4''$	$x_2 = 238^0\,36'\,4''$
$y_1 = 41^0$	$y_2 = -139^0$	$y_1 = 9^0\,36'\,4''$	$y_2 = 189^0\,36'\,4''$
7. $x_1 = 50^0$	$x_2 = 120^0$	8. $x_1 = x_2 = 50^0$	
$y_1 = 30^0$	$y_2 = -40^0$	$y_1 = y_2 = 40^0$	
9. $x_1 = 86^0\,22'\,6''$	$x_2 = 107^0\,23'\,54''$	10. $x = 62^0\,43'$	
$y_1 = 17^0\,23'\,54''$	$y_2 = -3^0\,37'\,54''$	$y = 24^0\,47'$	

11. *a)* $27^0\,40'$ *b)* $40^0\,2'\,49''$ *c)* $59^0\,33'\,14''$ *d)* $39^0\,38'\,49''$

2. Im § 27 stellten wir die Formel auf:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

Daraus ergibt sich:

$$1 + \cos A = \frac{2\,bc + b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} \qquad 1 - \cos A = \frac{2\,bc - b^2 - c^2 + a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2\,bc} \qquad = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)\cdot(b+c-a)}{2\,bc} \qquad = \frac{(a+b-c)\,.\,(a-b+c)}{2\,bc}$$

Setzt man nun, wie üblich: $a+b+c = 2s$,

folglich: $a+b-c = 2(s-c)$

$a-b+c = 2(s-b)$

$-a+b+c = 2(s-a)$

und für $(1 \pm \cos A)$ die aus Formel VII und VIII (§ 33) resultierenden Werte, so erhält man:

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2s\,.\,2(s-a)}{2\,bc} \qquad 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2(s-b)\,2\,.\,(s-c)}{2\,bc}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}} \qquad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}$$

Diese Formeln, welche als Ergänzung der zur Auflösung schiefwinkliger Dreiecke dienenden Sätze aufzufassen sind, gestatten die logarithmische Berechnung der Dreieckswinkel aus den drei Seiten.

Durch Division der beiden Gleichungen ergibt sich die uns bereits bekannte Formel.

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Übungsbeispiele.

Zwei Kräfte P und Q wirken unter einem Winkel ω zusammen und ergeben eine Resultierende R.

Man berechne den Winkel ω für folgende Angaben:

a) P = 235 *kg*	*b)* P = 966 *kg*	*c)* P = 3 p
Q = 175 *kg*	Q = 738 *kg*	Q = 5 p
R = 300 *kg*	R = 1400 *kg*	R = 7 p

Resultate.

a) $87^0\ 06'\ 30''$ *b)* $70^0\ 14'$ *c)* $\omega = 60^0$

Die Snellius'sche (Pothenot'sche) Aufgabe.

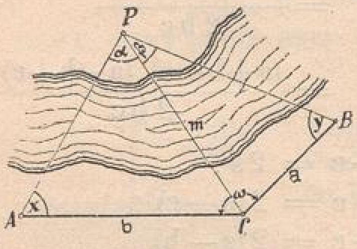


Fig. 100.

§ 39. In ebenem Gelände sind drei Punkte A, B und C (Fig. 100) festgelegt und hierauf folgende Stücke gemessen worden:

$$BC = a = 538{\cdot}5\ m$$
$$AC = b = 398{\cdot}8\ m$$
$$\sphericalangle\ ACB = \omega = 142^0\,30'$$

Die Entfernungen eines Punktes P von den Punkten A, B, C sind aus den von P aus gemessenen Winkeln:

$$APC = \alpha = 33^0\,21'$$
$$BPC = \beta = 38^0\,15'$$

zu berechnen. (Snellius 1617, Pothenot 1692.)

Lösung. Bezeichnet man PC mit m und die Winkel PAC mit x,
PBC mit y,

so erhält man zur Bestimmung von x und y:

$$\mathbf{x + y = 360^0 - (\omega + \alpha + \beta)} \ldots . \mathrm{I}$$

und aus den Dreiecken ACP und BCP

$$\sin x : \sin \alpha = m : b \qquad \sin y : \sin \beta = m : a$$

oder $$\sin x = \frac{m \sin \alpha}{b} \qquad \sin y = \frac{m \sin \beta}{a}$$

folglich $$\sin x : \sin y = \frac{\sin \alpha}{b} : \frac{\sin \beta}{a} = \frac{a}{\sin \beta} : \frac{b}{\sin \alpha}$$

Setzt man $$\frac{a}{\sin \beta} = p \quad \text{und} \quad \frac{b}{\sin \alpha} = q,$$

so erhält man $$\sin x : \sin y = p : q$$

somit nach § 38 $$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} : \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = (p-q) : (p+q)$$

$$\mathbf{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{p-q}{p+q} \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}} \ldots . (\mathrm{II})$$

In unserem Falle ist:

$$p = 869{\cdot}82 \qquad q = 725{\cdot}417 \qquad \frac{x+y}{2} = 72^0\, 57'$$

und aus Gleichung (II) . . . . $\frac{x-y}{2} = 16^0\, 26'\, 42''$

Durch Addition und Subtraktion der beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$\mathbf{\sphericalangle x = 89^0\, 23'\, 42''}$$
$$\mathbf{\sphericalangle y = 56^0\, 30'\, 18''}$$

Aus den Dreiecken ACP und BCP erhält man nun nach dem Sinussatze:

$$\mathbf{AP = 610}\ m \qquad \mathbf{BP = 725{\cdot}38}\ m \qquad \mathbf{CP = 866{\cdot}83}\ m$$

Anmerkung. Bei der Ausrechnung beachte man, daß

$$PA = q \sin u \qquad PB = p \sin v \qquad PC = q \sin x = p \sin y$$

ist, wobei $u = \sphericalangle ACP$ und $v = \sphericalangle BCP$ ist.

Übungsbeispiele.

Man löse die Aufgabe für folgende Angaben:

1. $\omega = 180^0$, $a = 1732{\cdot}4\ m$, $b = 875{\cdot}2\ m$, $\alpha = 37^0\, 15'$, $\beta = 41^0\, 23'$
2. $\omega = 180^0$, $a = 2325\ m$, $b = 1546\ m$, $\alpha = 32^0\, 25'$, $\beta = 51^0\, 47'$
3. $\omega = 180^0$, $a = 375{\cdot}8\ m$, $b = 480{\cdot}5\ m$, $\alpha = 29^0\, 35'$, $\beta = 40^0\, 19'$
4. $\omega = 160^0$, $a = 438\ m$, $b = 557\ m$, $\alpha = 42^0\, 20'$, $\beta = 37^0\, 10'$
5. $\omega = 145^0\, 17'$, $a = 1258\ m$, $b = 2754\ m$, $\alpha = 51^0\, 42'$, $\beta = 47^0\, 23'$
6. $\omega = 153^0\, 20'$, $a = 1138{\cdot}5\ m$, $b = 873{\cdot}5\ m$, $\alpha = 29^0\, 18'$, $\beta = 37^0\, 46'$

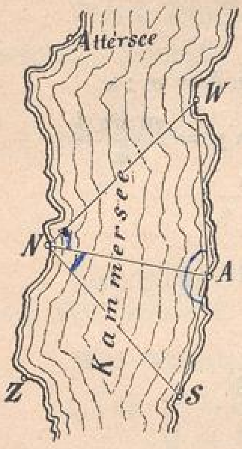


Fig. 101.

7. Am östlichen Ufer des Kammersees (Fig. 101) wurden drei Uferpunkte, bei Weyeregg (W), Alexenau (A) und See-Leithen (S) markiert, deren Entfernungen: $WA = 3000\,m$ und $AS = 1950\,m$ betrugen, während $\sphericalangle WAS = 163^0\,41'\,52''$ ermittelt wurde. Von dem am westlichen See-Ufer bei Nußdorf gelegenen Uferpunkte N wurden mittels Meßinstrumentes die Winkel: $WNA = 57^0\,28'\,10''$ und $\sphericalangle ANS = 35^0\,56'\,14''$ bestimmt.

Man berechne die Entfernungen NW, NA und NS.

8. Von einem beim Orte Attersee gelegenen Uferpunkte erscheinen die Strecken WA und AS unter den Winkeln $\alpha = 33^0\,50'\,31''$ und $\beta = 12^0\,50'\,19''$; von einem bei Zell (Z) markiertem Uferpunkte ergaben die Messungen: $\sphericalangle AZW = 30^0\,26'\,29''$, $\sphericalangle SZA = 35^0\,27'\,23''$. Man bestimme die Entfernungen der Uferpunkte Attersee und Zell von den Uferpunkten W, A und S.

Resultate.

1. $PA = 1380\ m$	2. $PA = 2849{\cdot}5\ m$	3. $PA = 880{\cdot}44\ m$
$PB = 2501{\cdot}2\ m$	$PB = 2923{\cdot}9\ m$	$PB = 525{\cdot}42\ m$
$PC = 1359{\cdot}7\ m$	$PC = 2167{\cdot}2\ m$	$PC = 560{\cdot}81\ m$
4. $PA = 822{\cdot}56\ m$	5. $PA = 1231{\cdot}3\ m$	6. $PA = 1744{\cdot}2\ m$
$PB = 703{\cdot}54\ m$	$PB = 3464\ m$	$PB = 1800{\cdot}5\ m$
$PC = 666{\cdot}45\ m$	$PC = 1706{\cdot}3\ m$	$PC = 1706{\cdot}5\ m$
7. $NW = 3412{\cdot}5\ m$	8. $AW = 2690\ m$	9. $ZW = 5358\ m$
$NA = 2685\ m$	$AA = 4833\ m$	$ZA = 3343\ m$
$NS = 3322{\cdot}5\ m$	$AS = 6340\ m$	$ZS = 2518\ m$

Funktionen negativer Winkel.

§ 40. Faßt man den Winkel als Maß der Drehung auf, welche man mit dem beweglichen Schenkel aus der Ruhelage OA vorgenommen hat, so kann man außer der Größe dieser Drehung auch noch den Richtungssinn derselben in Betracht ziehen. Bezeichnet man eine Drehung im verkehrten Sinne der Uhrzeigerbewegung als positiv (+) so wird man eine Drehung im entgegengesetzten Sinne als negativ (—) bezeichnen müssen, und man gelangt so zu dem Begriffe **positiver und negativer Winkel (Bögen).**

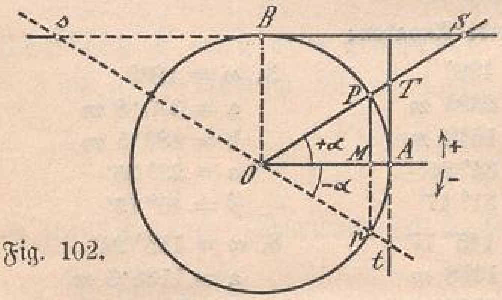


Fig. 102.

So ist z. B. in Fig. 102.... $\sphericalangle AOt = - \sphericalangle AOT$, und wenn wir letzteren mit $(+\alpha)$ bezeichnen, $\sphericalangle AOt = -\alpha$.

Aus der Fig. 102 ersieht man sofort, daß der bewegliche Schenkel des Winkels $(-\alpha)$ zusammenfällt mit dem beweglichen Schenkel des Winkels $+(360^0 - \alpha)$, daß also die beiden Winkel: $(-\alpha)$ und $(360 - \alpha)$ dieselben Funktionswerte besitzen müssen.

Es muß daher nach § 22

Funktion $(-\alpha)$ numerisch gleich derselben Funktion $(+\alpha)$ sein.
und für die einzelnen Funktionen gilt, wie man überdies aus der Figur ersieht:

$$\sin(-\alpha) = -\sin(+\alpha)$$
$$\cos(-\alpha) = +\cos(+\alpha)$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(+\alpha)$$
$$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}(+\alpha)$$

Wir wollen das Auftreten eines negativen Winkels an einem Beispiele zeigen.

Löst man das Dreieck: $a = \mathbf{35 \cdot 8}\ m$, $b = \mathbf{48 \cdot 9}\ m$, $\sphericalangle C = \mathbf{72^0\ 20'}$

mittels des Satzes: $(a - b) : (a + b) = \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} : \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$ auf,

so erhält man $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{-13 \cdot 1}{84 \cdot 7}\operatorname{tg} 53^0\ 50'$ *)

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = -0 \cdot 21158$$

D. h. $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}$ wird negativ. Da nun $\frac{A-B}{2}$ numerisch nicht größer als 90^0 sein kann, (warum?), so kann es nur negativ sein; d. h. $A < B$. Daß dies wirklich der Fall ist, erhellt aus den Angaben, nach denen $a < b$ ist.

Die weitere Lösung ergibt:

$$\frac{A-B}{2} = -11^0\ 56'\ 47'' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

und $$\frac{A+B}{2} = 53^0\ 50' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

daraus: $\sphericalangle A = \mathbf{41^0\ 53'\ 13''}$
$\sphericalangle B = \mathbf{65^0\ 46'\ 47''}$

und $c = a\frac{\sin C}{\sin A} = \mathbf{51 \cdot 09}\ m$

*) Vergleiche Notiz zu § 29.

Beispiele.

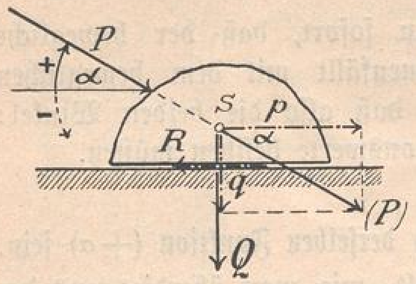


Fig. 103.

1. Wie groß muß in Fig. 103 der Winkel α sein, damit die Schubkomponente p gleich sei der Reibung $R = (Q + q)\,\varphi$. (Siehe Aufg. 8 auf S. 86.)

a) $P = 15\,kg$ *b)* $P = 25\,kg$
$Q = 76\,kg$ $Q = 66\,kg$
$\varphi = 0{\cdot}2$ $\varphi = 0{\cdot}4$

c) $P = 18\,kg$
$Q = 33{\cdot}5\,kg$
$\varphi = 0{\cdot}6$

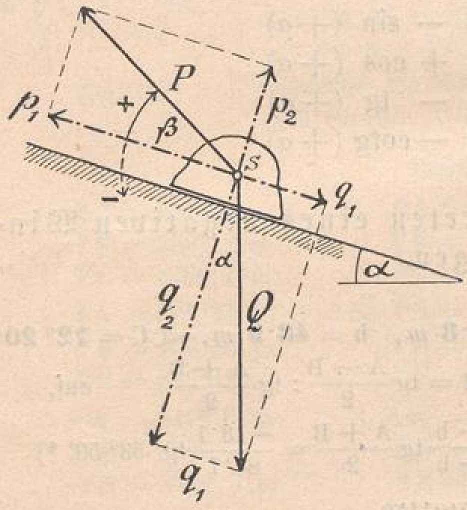


Fig. 104.

2. Auf einer schiefen Ebene (Fig. 104) vom Neigungswinkel α liegt eine Last vom Gewichte Q. Eine Kraft P soll unter einem Winkel β derart angebracht werden, daß die aus den Komponenten p_1 und q_1 resultierende Schubkraft $\mathfrak{P} = p_1 - q_1$ gleich sei der Reibung $R = (q_2 - p_2)\,\varphi$. Wie groß muß β sein, wenn

a) $P = Q$ *b)* $Q = 2P$
$\alpha = 30^0$ $\alpha = 20^0$
$\varphi = 0{\cdot}12$ $\varphi = 0{\cdot}06$

c) $P = 2Q$
$\alpha = 40^0$
$\varphi = 0{\cdot}73$

Resultate.

1. *a)* $\alpha = -\ 4^0\,50'\,35''$ *b)* $\alpha = -10^0\,27'\,25''$ *c)* $\alpha = -14^0\,12'\,19''$ *)

2. *a)* $\beta = -46^0\,18'\,50''$ *b)* $\beta = -33^0\,52'\,35''$ *c)* $\beta = -24^0\,49'\,51''$

Funktionen der Kreisbögen.

§ 41. So wie wir bisher die Funktionslinien dem Winkel α zugeordnet haben, so können wir sie auch als zu dem Bogen $\lambda = \widehat{AP}$ (Fig. 105) gehörig betrachten, welcher Bogen ja gerade so viele Bogengrade besitzt, wie der Winkel α Winkelgrade hat.

---

*) Die negativen Werte von α zeigen an, daß die Kraft P nicht, wie in Fig. 103 angenommen, nach abwärts, sondern nach aufwärts gerichtet sein muß.

Wenn z. B. in Fig. 105, in welcher der Kreishalbmesser $r = 1$ ist, der Bogen λ 54 Bogengrade hat, so können wir, indem wir die Funktionswerte von 54^0 der Tabelle entnehmen, auch schreiben:

$\sin \lambda = 0 \cdot 80902$ $\qquad$ $\operatorname{tg} \lambda = 1 \cdot 37638$

$\cos \lambda = 0 \cdot 58779$ $\qquad$ $\operatorname{cotg} \lambda = 0 \cdot 72654$

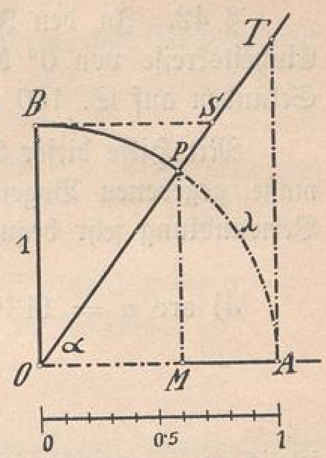


Fig. 105.

Anstatt den Bogen λ in Graden zu messen, kann man ihn auch durch seine Länge angeben. Da der Halbmesser $r = 1$ ist, so entspricht

einem Bogen von 360^0 die Bogenlänge $\lambda = \quad 2\pi \; = 6 \cdot 28318$

" " " 180^0 " " " $\pi = 3 \cdot 14159$

" " " 90^0 " " " $\frac{\pi}{2} = 1 \cdot 57080$

" " " 45^0 " " " $\frac{\pi}{4} = 0 \cdot 78540$

" " " 30^0 " " " $\frac{\pi}{6} = 0 \cdot 52360$

" " " 1^0 " " " $\frac{\pi}{180} = 0 \cdot 01745$

" " " α^0 " " " $\alpha \frac{\pi}{180} = \alpha \times 0 \cdot 01746$

Für $\alpha = 54^0$ ergibt sich demnach . . . . . $\lambda = 0 \cdot 94248$

und wir können somit nach obigem auch schreiben

$\sin 0 \cdot 94248 = 0 \cdot 80902$ $\qquad$ $\operatorname{tg} 0 \cdot 94248 = 1 \cdot 37638$

$\cos 0 \cdot 94248 = 0 \cdot 58779$ $\qquad$ $\operatorname{cotg} 0 \cdot 94248 = 0 \cdot 72654$

In gleicher Weise sind folgende Gleichungen zu erklären:

$\sin \pi = 0 \qquad \cos \pi = -1 \qquad \operatorname{tg} \pi = 0 \qquad \operatorname{cotg} \pi = \mp \infty$

$\sin \frac{\pi}{2} = +1 \quad \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = +1 \quad \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} \sqrt{3}$

§ 42. In den Jelinekschen Tafeln sind die Bogenlängen am Einheitskreise von 0^0 bis 180^0 auf S. 161—164, für Minuten und Sekunden auf S. 160 angegeben.

Mit Hilfe dieser Tafeln ist die Verwandlung eines im Gradmaße gegebenen Bogens in das Längenmaß und die umgekehrte Verwandlung sehr bequem auszuführen, wie folgende Beispiele zeigen.

a) arc $\alpha = 113^0 25' 37''$ ist im Längenmaße anzugeben.

$$\begin{array}{lr} 113^0 \ldots & 1{\cdot}97222 \\ 25' \ldots & 727 \\ 37'' \ldots & 18 \\ \hline \end{array}$$

folglich arc α, angegeben im Längenmaß, ... $\lambda = 1{\cdot}97967$

b) Ein nach Längenmaß bestimmter Bogen $\lambda = 0{\cdot}53786$ ist im Gradmaß anzugeben.

$$\begin{array}{lll} & 0{\cdot}53786 & \\ \text{Tafel} \ldots & 0{\cdot}52360 \ldots\ldots & 30^0 \\ \hline \text{Rest} \ldots & 0{\cdot}01426 & \\ \text{Tafel} \ldots & 0{\cdot}01425 \ldots\ldots & 49' \\ \hline \text{Rest} \ldots & 0{\cdot}00001 \ldots\ldots & 3'' \qquad \alpha = 30^0\, 49'\, 3'' \end{array}$$

Übungsbeispiele.

Man gebe folgende Kreisbögen im Längenmaße an:

$\alpha = 49^0\,25'$ $\quad\beta = 73^0\,12'$ $\quad\gamma = 137^0$ $\quad\delta = 235^0\,27'$
$\varphi = 23^0\,12'\,40''$ $\quad\psi = 82^0\,44'\,35''$ $\quad\omega = 125^0\,20'\,49''$ $\quad\lambda = 187^0\,6'\,36''$

Man verwandle folgende nach Längenmaß gegebene Bögen in Gradmaß.

$a = 0{\cdot}40870$ $\quad b = 1{\cdot}44513$ $\quad c = 2{\cdot}18166$ $\quad d = 3{\cdot}18203$
$m = 1{\cdot}03664$ $\quad n = 1{\cdot}23033$ $\quad p = 2{\cdot}27249$ $\quad l = 4{\cdot}28860$

Resultate.

$\alpha = 0{\cdot}86248$ $\quad\beta = 1{\cdot}27758$ $\quad\gamma = 2{\cdot}39110$ $\quad\delta = 4{\cdot}10937$
$\varphi = 0{\cdot}40511$ $\quad\psi = 1{\cdot}44414$ $\quad\omega = 2{\cdot}18772$ $\quad\lambda = 3{\cdot}26569$
$\mathbf{a} = 23^0\,25'$ $\quad\mathbf{b} = 82^0\,48'$ $\quad\mathbf{c} = 125^0$ $\quad\mathbf{d} = 182^0\,19'$
$\mathbf{m} = 59^0\,23'\,44''$ $\quad\mathbf{n} = 70^0\,29'\,34''$ $\quad\mathbf{p} = 130^0\,12'\,15''$ $\quad\mathbf{l} = 245^0\,43'\,7''$

Hat man die Länge L eines Kreisbogens vom Halbmesser r und dem Zentriwinkel α zu berechnen, so bestimmt man zunächst die dem Winkel α entsprechende Bogenlänge λ am Einheitskreise und findet dann L nach der Formel

$$L = \lambda r. \quad ^{*})$$

z. B. $r = 45 \cdot 5\ cm \qquad \alpha = 125^0\ 40' \qquad L = ?$

$$\begin{array}{rr} 125^0 \ldots\ldots & 2 \cdot 18166 \\ 40' \ldots & 1164 \\ \hline \lambda = & 2 \cdot 19330 \end{array} \qquad \begin{array}{l} L = 2 \cdot 19330 \times 45 \cdot 5 \\ L = 99 \cdot 795\ cm \end{array}$$

Übungsbeispiele.

Es ist die wirkliche Länge der durch ihr Gradmaß und ihren Halbmesser bestimmten Bögen α, γ, β, δ zu berechnen:

1. $\alpha = 67^0\ 30'$, $r = 35\ cm$
2. $\beta = 35^0\ 45'$, $r = 37 \cdot 25\ m$
3. $\gamma = 63^0\ 10'\ 20''$, $r = 225 \cdot 5\ cm$
4. $\delta = 118^0\ 47'$, $r = 4 \cdot 568\ m$

5. Wie groß ist die Entfernung zweier Orte des Äquators (Ostküste Afrikas und Westküste Borneos), deren geographische Längen $l_1 = 60^0\ 2'\ 15''$ $l_2 = 126^0\ 14'\ 25''$ sind? (Der Äquatorhalbmesser $R = 859 \cdot 43$ Meilen.)

6. Wie groß ist der Zentriwinkel, dessen zugehöriger Bogen in einem Kreise von Halbmesser $r = 35 \cdot 8\ cm$ ($25\ m$) [$34 \cdot 75\ m$] die Länge $L = 45\ cm$ ($63\ m$) $72 \cdot 25\ m$] besitzt?

7. Wie groß ist der Radius eines Kreises, in welchem der zum Zentriwinkel $\alpha = 35^0\ 47'$ ($37^0\ 45'$) [$174^0\ 35'$] gehörige Bogen die Länge $L = 32 \cdot 755\ m$ ($50\ m$) [$1 \cdot 765\ m$] besitzt?

8. Zwei in demselben Meridiane gelegene Orte A und B von gleicher Meereshöhe, deren Entfernung $l = 250 \cdot 629\ km$ [$35 \cdot 1351$ Meilen] beträgt, haben die Polhöhen $\varphi = 51^0\ 25'\ 27''$ und $\psi = 49^0\ 10'\ 15''$ [$\varphi = 39^0\ 38'\ 23''$ und $\psi = 37^0\ 17'\ 38''$]. Wie groß ergibt sich hieraus der Erdhalbmesser?

Resultate.

1. $41 \cdot 2335\ cm$	5. $993 \cdot 05$ Meilen.		
2. $23 \cdot 2425\ m$	6. $72^0\ 1'\ 12''$	($144^0\ 23'\ 9''$)	[$119^0\ 7'\ 33''$]
3. $248 \cdot 63\ cm$	7. $52 \cdot 4466\ m$	($75 \cdot 889\ m$)	[$0 \cdot 57925\ m$]
4. $9 \cdot 4702\ m$	8. $6372 \cdot 464\ km$	[858 Meilen].	

*) Es ist $L = \frac{\pi\, r}{180} \cdot \alpha = \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \cdot r = \lambda\, r$

§ 43. Hat man irgend eine Funktion eines nach § 41 im Längenmaße gegebenen Bogens zu bestimmen, so ermittle man zunächst das Gradmaß desselben und suche dann in der Tafel den zugehörigen Funktionswert.

z. B. Man bestimme $\operatorname{cotg} 2{\cdot}35807$.

Der Bogen $2{\cdot}35807$ beträgt im Gradmaße $135^0\ 6'\ 26''$
daher $\operatorname{cotg} 2{\cdot}35807 = -1{\cdot}00375$

Übungsbeispiele.

Man bestimme:

$\sin 0{\cdot}61669$	$\cos 1{\cdot}52717$	$\operatorname{tg} 2{\cdot}08858$	$\operatorname{cotg} 3{\cdot}61574$
$\sin 2{\cdot}53876$	$\cos 0{\cdot}95372$	$\operatorname{tg} 4{\cdot}50830$	$\operatorname{cotg} 1{\cdot}23854$

Resultate.

$+0{\cdot}57833$	$+0{\cdot}04362$	$-1{\cdot}75556$	$+1{\cdot}94858$
$+0{\cdot}56698$	$+0{\cdot}57865$	$+4{\cdot}83142$	$+0{\cdot}34505$

Die zyklometrischen Funktionen.

§ 44. Besitzt der sinus eines nach Längenmaß anzugebenden Bogens λ den Wert a, ist also $\sin\lambda = a$, so sagt man umgekehrt: „λ ist der arcus, dessen sinus $= a$ ist",

oder kürzer: $\lambda = \operatorname{arc}\sin a$.

Ebenso sind die Ausdrücke $\lambda = \operatorname{arc}\operatorname{tg} b$,
$\lambda = \operatorname{arc}\cos c$,
$\lambda = \operatorname{arc}\operatorname{cotg} d$ zu verstehen.

Einen Ausdruck von der vorstehenden Form nennt man eine zyklometrische Funktion der darin vorkommenden trigonometrischen Zahl.

Hat man z. B. $\lambda = \operatorname{arc}\sin 0{\cdot}53678$ zu bestimmen, so suche man zunächst den zu dem angegebenen sinus gehörigen Bogen im Gradmaße und verwandle ihn sodann in Längenmaß.

$$\sin\lambda = 0{\cdot}53678 \ldots\ \lambda = (32^0\ 27'\ 53'') = 0{\cdot}56662$$

Übungsbeispiele.

Man bestimme folgende Bögen nach Längenmaß:

$\alpha = \operatorname{arc}\sin 0{\cdot}66913$	$\beta = \operatorname{arc}\cos 0{\cdot}59716$	$\gamma = \operatorname{arc}\operatorname{tg} 0{\cdot}20648$
$\delta = \operatorname{arc}\operatorname{cotg} 0{\cdot}24933$	$\omega = \operatorname{arc}\operatorname{tg}(-4{\cdot}9894)$	$\varphi = \operatorname{arc}\cos(-0{\cdot}32597)$

Resultate.

$\alpha_1 = 0\cdot73304$	$\beta_1 = 0\cdot93084$	$\gamma_1 = 0\cdot20363$
$\alpha_2 = \pi - 0\cdot73304$	$\beta_2 = 2\pi - 0\cdot93084$	$\gamma_2 = \pi + 0\cdot20363$
$\delta_1 = 1\cdot32645$	$\omega_1 = 1\cdot76860$	$\varphi_1 = 1\cdot90283$
$\delta_2 = \pi + 1\cdot32645$	$\omega_2 = \pi + 1\cdot76860$	$\varphi_2 = 2\pi - 1\cdot90283$

Ausrechnung algebraischer Ausdrücke durch Einführung von Hilfswinkeln.

§ 45. Manchmal erweist es sich bei Ausrechnung arithmetischer Ausdrücke, in denen mehrziffrige Zahlen in einer logarithmisch nicht brauchbaren Verbindung enthalten sind, von Vorteil, einzelne darin vorkommende Größen als Funktionen eines Hilfswinkels auszudeuten und sodann den ganzen Ausdruck durch diesen Hilfswinkel auszudrücken.

Wir wollen einen solchen Vorgang an einigen Beispielen erläutern.

1. $$x = \sqrt{1 - (0\cdot52498)^2}$$

Setzt man $0\cdot52498 = \sin\varphi$, was geschehen kann, weil $0\cdot52498 < 1$ ist, so ist nach Tabelle $\varphi = 31^0\ 40'$

und $x = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \cos\varphi = \cos 31^0\ 40'$

$$x = 0\cdot85112$$

Als Probe: $x = \sqrt{1\cdot52498 \times 0\cdot47502}$

2. $$x = \sqrt{1 - \left(\frac{5\cdot387}{8\cdot564}\right)^2}$$

Setzt man $\dfrac{5\cdot387}{8\cdot564} = \cos\varphi$ *)

so ist $\varphi = 51^0\ 1'\ 19''$

und $x = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sin\varphi$

somit $x = 0\cdot7774$

*) Diese Gleichsetzung ist nur möglich, wenn der linksstehende Bruch kleiner als 1 ist. (Warum?)

3. $$x = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{48 \cdot 73}{34 \cdot 56}\right)^2}}$$

Setzt man $$\frac{48 \cdot 73}{34 \cdot 56} = \operatorname{tg} \varphi,$$

so ist: $$\varphi = 54^0\ 39'\ 20''$$

und $$x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sec \varphi} = \cos \varphi$$

somit $$x = 0 \cdot 5785$$

Übungsbeispiele.

Folgende Ausdrücke durch Einführung eines Hilfswinkels zu berechnen:

1. $x = \sqrt{1 - \left(\frac{3 \cdot 4827}{5 \cdot 683 \,.\, 0 \cdot 9852}\right)^2}$

2. $y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 5398}{9 \cdot 7325}}}$

3. $z = \sqrt{1 + \left(\frac{25 \cdot 635}{19 \cdot 628}\right)^2}$

4. $u = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{15 \cdot 6832}}}$

5. $v = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[5]{37 \cdot 84}}}$

6. $w = \frac{1 - \sqrt[3]{0 \cdot 4978}}{1 + \sqrt[3]{0 \cdot 4978}}$

Resultate.

1. $x = 0 \cdot 783$
2. $\sqrt[6]{\frac{4 \cdot 5398}{9 \cdot 7325}} = \sin \varphi \ldots . \; y = \cos \varphi = 0 \cdot 47378$
3. $z = 1 \cdot 6449$
4. $\sqrt[6]{15 \cdot 6832} = \operatorname{tg} \varphi \qquad u = \cos \varphi = 0 \cdot 53429$
5. $\sqrt[10]{37 \cdot 84} = \operatorname{tg} \varphi \qquad v = \cos \varphi = 0 \cdot 57089$
6. $\sqrt[3]{0 \cdot 4978} = \cos \varphi \ldots . \; w = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0 \cdot 11573$

Anhang.

I. Es ist selbstverständlich, daß eine Ermittelung der Funktionswerte durch Abmessungen an einer Figur nicht befriedigen kann und daß man deshalb ein Verfahren suchen mußte, die gewünschten Werte auf Grund einer mit beliebiger Genauigkeit durchzuführenden Rechnung zu erhalten. Ein solches Verfahren, um beispielsweise den sinus verschiedener Winkel zu berechnen, ergibt sich aus den planimetrischen Formeln zur Berechnung der Seiten regulärer Polygone aus dem Radius des umschriebenen Kreises. Mit Hilfe der Transformationsformel:

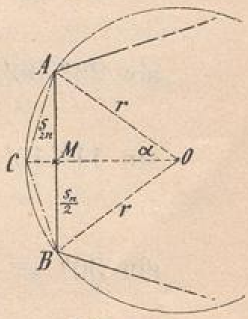


Fig. 106.

$$s_{2n} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}},$$

welche aus dem Ausdrucke für die Seite s_n (AB in Fig. 106) des regulären **n** ecks den Ausdruck für die Seite s_{2n} (AC) des regulären **2n** ecks ergibt, erhalten wir, wenn wir vom regulären Sechsecke ausgehen:

$$s_6 = r$$

$$s_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$s_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$s_{48} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

u. s. f.

Versteht man nun in Figur 106 unter $AB = s_n$ die Seite des regulären n ecks, so ist $\alpha = \frac{360^0}{2n}$

und $\sin\alpha = \frac{\frac{s}{2}}{r}$, somit nach obigen Formeln,

wenn $n = 6$, $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ .... $= 0{\cdot}50000$

$n = 12$, $\sin 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ .... $= 0{\cdot}25882$

$$n = 24, \quad \sin 7^0\, 30' = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \;\ldots\ldots = 0{\cdot}13053$$

$$n = 48, \quad \sin 3^0\, 45' = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \;. = 0{\cdot}06540$$

u. s. f.

Geht man vom regulären Vierecke und Fünfecke aus, so erhält man auf gleichem Wege:

$$\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0{\cdot}70711$$

$$\sin 22^0\, 30' = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \;\ldots\ldots\ldots = 0{\cdot}38268$$

$$\sin 11^0\, 15' = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \;\ldots\ldots = 0{\cdot}19509$$

u. s. f.

$$\sin 36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \;\ldots\ldots\ldots = 0{\cdot}58779$$

$$\sin 18^0 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) \;\ldots\ldots\ldots\ldots = 0{\cdot}30902$$

$$\sin 9^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \;\ldots\ldots = 0{\cdot}15643$$

u. s. f.

Ebenso kann man mittels der planimetrischen Formeln für die Seiten der dem Kreise umschriebenen Polygone die Werte für den tangens der betreffenden Winkel ermitteln.

Mit Hilfe der in § 18 und §§ 33, 34, 35 angegebenen Formeln lassen sich aus den schon berechneten Funktionen die übrigen Funktionen derselben Winkel und auch die Funktionen jener Winkel berechnen, welche sich durch Addition oder Subtraktion zweier bereits aufgelöster Winkel ergeben.

Auf diesem mühevollen Wege geschah in der Tat die erste Ausrechnung der Funktionen, während man heute imstande ist, mit den Hilfsmitteln der höheren Mathematik die Funktionswerte weit rascher und bequemer zu ermitteln.

II. Bei dem in §§ 7, 8, 10, 11 angegebenen Korrektionsverfahren ist vorausgesetzt, daß, wenn der Winkel um gleiche Teile springt, auch der betreffende Tabellenwert gleiche Veränderungen erfährt, daß also der Winkel und der Tabellenwert sich proportional verändern. Diese Voraussetzung ist tatsächlich nicht richtig, kann jedoch innerhalb der in der Tafel genommenen kleinen Intervalle als zutreffend angesehen werden.

III. Aus der Tabelle der Funktionen entnehmen wir:

$\sin 0^\circ 10' = 0{\cdot}00291$,*)	daher	$\log\sin 0^\circ 10' = 0{\cdot}46373 - 3$
$\sin 3^\circ 30' = 0{\cdot}06105$	„	$\log\sin 3^\circ 30' = 0{\cdot}78568 - 2$
$\sin 40^\circ 20' = 0{\cdot}64723$	„	$\log\sin 40^\circ 20' = 0{\cdot}81106 - 1$

u. s. f.

Um nun nicht die negative Charakteristik für jeden Logarithmus anschreiben zu müssen, schreibt man

statt $0{\cdot}46373 - 3 \ldots\ldots\ 7{\cdot}46373 - 10$
„ $0{\cdot}78568 - 2 \ldots\ldots\ 8{\cdot}78568 - 10$
„ $0{\cdot}81106 - 1 \ldots\ldots\ 9{\cdot}81106 - 10$ **)

und läßt, um an Platz zu ersparen, in der Tabelle die Zahl -10 weg, die der Rechner selbst anzufügen hat.

IV. Bei Ableitung der Gleichungen

$$\text{(I)} \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

und $$\text{(II)} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

haben wir (§ 33) durch die Figur 95, auf welcher die Ableitung beruht, die Voraussetzung gemacht, daß $(\alpha + \beta) < 90^\circ$ sei. Es läßt sich jedoch leicht zeigen, daß der Satz auch richtig bleibt, wenn α und β beliebig groß sind.

1. $\sphericalangle\, \alpha$ und $\sphericalangle\, \beta$ seien **Spitzwinkel**, aber $\alpha + \beta > 90^\circ$.

Setzt man (1) $\sphericalangle\, x = 90^\circ - \alpha$

(2) $\sphericalangle\, y = 90^\circ - \beta$

---

*) Genauer: $0{\cdot}0029089$.

**) In den Schlömilch'schen Tafeln steht auch:

statt $0{\cdot}53493 \ldots\ldots\ 10{\cdot}53493\ (-10)$
$2{\cdot}33215 \ldots\ldots\ 12{\cdot}33215\ (-10)$.

so ist $\quad x + y = 180^0 - (\alpha + \beta)$, $\quad$ folglich,
weil $\quad (\alpha + \beta) > 90^0$ $\quad$ vorausgesetzt wird,
$$(x + y) < 90^0,$$
daher nach § 33 ... $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
oder unter Berücksichtigung der Gleichungen (1) und (2)
$$\sin[180^0 - (\alpha + \beta)] = \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta$$
$$\mathbf{sin}\,(\alpha + \beta) = \mathbf{sin}\,\alpha\,\mathbf{cos}\,\beta + \mathbf{cos}\,\alpha\,\mathbf{sin}\,\beta$$

2. **Es seien $\sphericalangle\, \alpha$ und $\sphericalangle\, \beta$ stumpfe Winkel.**

Setzt man (1) $\sphericalangle\, \alpha = 90^0 + x$
(2) $\sphericalangle\, \beta = 90^0 + y$, $\quad$ wobei $\sphericalangle\, x$ und $\sphericalangle\, y$ der Voraussetzung gemäß spitze Winkel sein müssen, so ist:
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin[180^0 + (x + y)] = -\sin(x + y)$$
$$(3)\ \sin(\alpha + \beta) = -\sin x \cos y - \cos x \sin y$$
Nun ist aber nach § 22 in Berücksichtigung der Gleichungen (1) und (2)
$$\cos\alpha = -\sin x \qquad \sin\alpha = +\cos x$$
$$\cos\beta = -\sin y \qquad \sin\beta = +\cos y$$
Substituiert man dies in die Gleichung (3), so erhält man:
$$\mathbf{sin}\,(\alpha + \beta) = \mathbf{sin}\,\alpha\,\mathbf{cos}\,\beta + \mathbf{cos}\,\alpha\,\mathbf{sin}\,\beta$$

3. Nach dem soeben erhaltenen Resultate wird die Richtigkeit der vorstehenden Ableitung nicht gestört, wenn wir unter x und y selbst stumpfe Winkel verstehen, wenn also $\alpha > 180^0$ und $\beta > 180^0$ ist u. s. f.

In derselben Weise ist die allgemeine Giltigkeit der Formel für $\cos(\alpha + \beta)$ nachzuweisen.

Alle übrigen Formeln für die Funktionen der Winkelsumme $(\alpha + \beta)$ und der Winkeldifferenz $(\alpha - \beta)$ wurden aus den obigen Formeln (I) und (II) abgeleitet, weshalb die Erweiterung der Giltigkeitsbedingungen dieser Formeln auf jene abgeleiteten Formeln übergeht.

Prof. Hans Hartl, Lehrbuch der ebenen Trigonom