Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

3. Albers äquivalente Kegelprojektion

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

$$h = \frac{2\,R\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi)\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi)}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$$

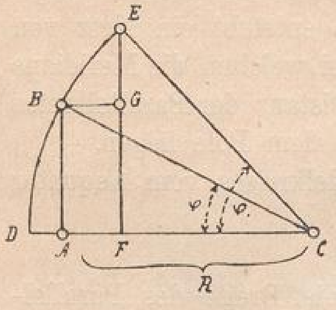

Fig. 38.

Auf dieselbe Weise kann auch die Höhe des unter dem mittleren Parallelkreise liegenden Theiles der Karte berechnet werden.

Diese Grösse wird auf folgende Weise construirt (siehe Fig. 38): Man mache $CA = R$, trage den Winkel φ im Punkte C an A C an, errichte im Punkte A eine Senkrechte A B, dann ist

$$BC = \frac{R}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$$

Beschreibt man ferner mit B C einen Kreis, trägt man den Winkel φ_1 nach D C E, und zieht man E F und B G, so ist:

$$EG = EF - FG = EF - AB$$

$$EG = CE\,\mathrm{Sin}\,\varphi_1 - BC\,\mathrm{Sin}\,\varphi = BC\,(\mathrm{Sin}\,\varphi_1 - \mathrm{Sin}\,\varphi)$$

$$EG = \frac{R}{\mathrm{Cos}\,\varphi}\,(\mathrm{Sin}\,\varphi_1 - \mathrm{Sin}\,\varphi)$$

Es ist also E G = der gesuchten Höhe h.

3. Albers äquivalente Kegelprojektion.

Bei dieser sind die Längen der Grenzkreise einer Zone, deren Breiten φ' und φ'' sind, gleich den Kreisbogen des Sectors, welcher die Zone darstellen soll, ferner ist die Oberfläche der Zone gleich der Mantelfläche des abgestumpften Kegels, welcher an die Stelle der Zone tritt.

Es ist daher:

$$2\,R\,\pi\,(R\,\mathrm{Sin}\,\varphi'' - R\,\mathrm{Sin}\,\varphi') = (R\,\pi\,\mathrm{Cos}\,\varphi' + R\,\pi\,\mathrm{Cos}\,\varphi'')\,l$$

Hieraus folgt die Länge l der Kegelkante:

$$l = \frac{2\,R\,(\mathrm{Sin}\,\varphi'' - \mathrm{Sin}\,\varphi')}{\mathrm{Cos}\,\varphi' + \mathrm{Cos}\,\varphi''}$$

oder wenn man für $(\mathrm{Sin}\,\varphi'' - \mathrm{Sin}\,\varphi')$ und $(\mathrm{Cos}\,\varphi' + \mathrm{Cos}\,\varphi'')$ ihre bekannten goniometrischen Werthe setzt und reducirt:

$$1)\quad l = 2\,R\,\mathrm{Tg}\,\frac{\varphi'' - \varphi'}{2}$$

Dieser Werth lässt sich auf folgende Weise sehr einfach construiren (s. Fig. 39). Man beschreibe mit dem Radius $OD = R$ einen Kreis, trage an OD die Winkel φ' und φ'' an, und ziehe im Mittelpunkte C des Bogens $\varphi'' - \varphi'$ eine Tangente an denselben, welche die verlängerten Radien in A und B schneidet.

Da AOB ein gleichschenkliches Dreieck ist, so ist

$$AB = 2 . AC = 2 . OC . \mathrm{Tg}\, AOC \text{ oder}$$

$$AB = 2\,R . \mathrm{Tg}. \frac{\varphi'' - \varphi'}{2} = l$$

Die Tangente AB ist also der geometrische Werth von l.

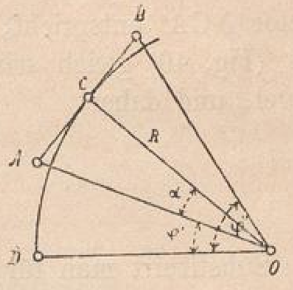

Fig. 39.

Wir wollen nun die Radien r' und r'' der äusseren Parallelkreise der Karte berechnen.

Da in der Entwicklung die Bogen, welche die äusseren Parallelkreise darstellen, demselben Centriwinkel entsprechen, so verhalten sie sich wie ihre Radien r' und r''. Diese Bogen sind aber gleich den Umfängen der Parallelkreise und daher

$$2\,R\,\pi \,\mathrm{Cos}\,\varphi' : 2\,R\,\pi\,\mathrm{Cos}\,\varphi'' = r' : r''$$

oder $\quad$ 2) $\mathrm{Cos}\,\varphi' : \mathrm{Cos}\,\varphi'' = r' : r''$

und $\quad$ 3) $r'\,\mathrm{Cos}\,\varphi'' = r''\,\mathrm{Cos}\,\varphi'$

Da nun $r' - r'' = l$ somit $r' = l + r''$, so ist

$$(l + r'')\,\mathrm{Cos}\,\varphi'' = r''\,\mathrm{Cos}\,\varphi'$$

Hieraus folgt: $r'' = \dfrac{l\,\mathrm{Cos}\,\varphi''}{\mathrm{Cos}\,\varphi' - \mathrm{Cos}\,\varphi''}$

oder wenn man für l aus Gleichung 1) den Werth und für

$$\mathrm{Cos}\,\varphi' - \mathrm{Cos}\,\varphi'' = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\varphi'' + \varphi')\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\varphi'' - \varphi')$$

den Werth setzt und reducirt:

$$4)\quad r'' = \frac{R\,\mathrm{Cos}\,\varphi''}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi'')\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi')}$$

In analoger Weise kann man in Gleichung 3) auch für $r'' = r' - l$ seinen Werth setzen und erhält alsdann den Werth:

$$5)\quad r' = \frac{R\,\mathrm{Cos}\,\varphi'}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi'')\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi')}.$$

Die Werthe von r'' und r' können auf folgende Weise construirt werden: Man trage auf die Gerade AC (Fig. 40) den Werth $AB = l$ auf, errichte in den Punkten A und B die Senkrechten $AE = \mathrm{Cos}\,\varphi'$ und $BD = \mathrm{Cos}\,\varphi''$ und ziehe

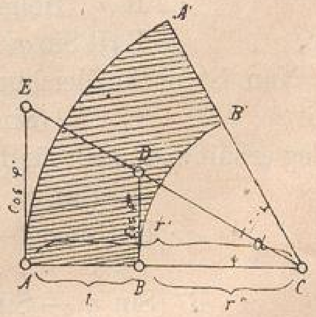

Fig. 40.

die Gerade ED, welche die Gerade AB in C schneidet, es ist alsdann $AC = r'$ und $BC = r''$.

Die Construktion stützt sich auf Proportion 2. —

Um die Grösse des Centriwinkels α zu berechnen, welcher dem Sector ACA′ entspricht, bedenke man, dass die Länge des Bogens AA′ (Fig. 40) gleich sein soll der Länge des Parallelkreises auf der Kugel, und daher

$$\frac{r' \pi \alpha}{180} = 2 R \pi \operatorname{Cos} \varphi$$

$$\alpha = \frac{360 \,.\, R \operatorname{Cos} \varphi'}{r'}$$

Substituirt man für r' seinen Werth und setzt man die Grösse

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} (\varphi' + \varphi'') \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} (\varphi'' - \varphi') = m$$

so ergibt sich $\alpha = 360\, m$, ferner ist auch nach Glch. 5

$$r' = \frac{R \operatorname{Cos} \varphi'}{m} \text{ und}$$

$$6)\quad r' m = R \operatorname{Cos} \varphi'$$

Um nun den Radius r eines beliebigen Parallelkreises zu berechnen, dessen Breite φ ist, denke man sich die Differenz der Radien, welche den Breiten φ' und φ entspricht, d. h. die Differenz $(r' - r)$ in n unendlich kleine Theile getheilt.

Ist alsdann die Länge des Meridianbogens

$$\frac{r' - r}{n} = \omega$$

so sind die Radien der aufeinanderfolgenden Parallelkreise, welche die Breiten $\varphi' \; \varphi_1 \; \varphi_2 \; \varphi_3 \; \ldots\ldots \; \varphi_{n-1} \; \varphi$ besitzen

$$r',\; r' - \omega,\; r' - 2\,\omega,\; r' - 3\,\omega,\; \ldots\ldots\; r' - (n-1)\,\omega,\; r' - n\,\omega = r$$

und da die Projektion eine äquivalente sein soll, d. h. die aufeinanderfolgenden schmalen Kugelzonen gleich den entsprechenden Kegelzonen sein sollen, so besteht für je zwei entsprechende Flächenelemente die Gleichung: Oberfläche der Kugelzone = Länge des Parallelkreisumfanges $\times$ ω oder

$$2 R \pi \,.\, \text{Höhe der Zone} = 2 R \operatorname{Cos} \varphi' \pi \omega$$

oder

$$R (R \operatorname{Sin} \varphi_1 - R \operatorname{Sin} \varphi') = R \operatorname{Cos} \varphi' \omega$$

Nun ist nach Gleichung 6) $R \operatorname{Cos} \varphi' = r' m$

somit

$$R^2 (\operatorname{Sin} \varphi_1 - \operatorname{Sin} \varphi') = r' m \omega$$

analog erhält man auch für die übrigen Flächenelemente die Gleichungen:

$$R^2 (\operatorname{Sin} \varphi_2 - \operatorname{Sin} \varphi_1) = (r' - \omega)\, m\, \omega$$

$$R^2 (\operatorname{Sin} \varphi_3 - \operatorname{Sin} \varphi_2) = (r' - 2\,\omega)\, m\, \omega$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R^2 (\operatorname{Sin} \varphi - \operatorname{Sin} \varphi_{n-1}) = (r' - (n-1)\,\omega)\, m\, \omega$$

Addirt man diese Gleichungen so ergibt sich auf der linken Seite

7) $S = R^2 (\sin\varphi - \sin\varphi')$; ferner auf der rechten Seite:

$$S = [r' + (r' - \omega) + (r' - 2\omega) + \ldots + (r' - (n-1)\omega)]\, m\,\omega$$

$$S = [n r' - (\omega + 2\omega + 3\omega + \ldots + (n-1)\omega)]\, m\,\omega$$

$$S = \left[n r' - \frac{\omega + (n-1)\omega}{2}(n-1)\right] m\,\omega$$

$$S = \left[n r' - \frac{n\omega(n-1)}{2}\right] m\,\omega$$

Nun ist $n\omega = r' - r$ somit

$$S = \left[n r' - \frac{(r'-r)(n-1)}{2}\right] m\,\omega$$

$$S = \left(r' - \frac{(r'-r)\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2}\right) n\, m\,\omega$$

für $n = \infty$ ist aber $\frac{1}{n} = 0$ und

$$S = \left[r' - \frac{(r'-r)}{2}\right](r'-r)\, m$$

8) $S = \frac{(r'^2 - r^2)\, m}{2}$

Aus Gleichung 7) und 8) folgt:

$$2 R^2 (\sin\varphi - \sin\varphi') = (r'^2 - r^2)\, m$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich 9) $r^2 = r'^2 - \frac{2 R^2}{m}(\sin\varphi - \sin\varphi')$

Setzt man an die Stelle von φ, φ'', so ist an die Stelle von r, r'' zu setzen und man erhält: $r''^2 = r'^2 - \frac{2 R^2}{m}(\sin\varphi'' - \sin\varphi')$

hieraus folgt: $r'^2 = r''^2 + \frac{2 R^2}{m}(\sin\varphi'' - \sin\varphi')$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 9, so ergibt sich

10) $r^2 = r''^2 + \frac{2 R^2}{m}(\sin\varphi'' - \sin\varphi)$

Die Werthe von r können für beliebige Werthe von φ nach Gleichung 9) oder 10) berechnet werden.

Dehnt man eine Karte bis zu dem einen Pole aus, so ist für diesen $\varphi = 90^0$ und nach Gleichung 10) der Radius des Kreises, welcher den Pol darstellt:

$$r^2 = r''^2 - \frac{2 R^2}{m}(1 - \sin\varphi'') \text{ oder}$$

$$r^2 = r''^2 - \frac{4 R^2 \sin^2 \frac{\varphi''}{2}}{m}$$

Erstreckt sich dagegen eine Karte bis zum Aequator, so ist für diesen $\varphi = 0^0$ und man erhält den Radius des Kreises, welcher den Aequator darstellt nach der Gleichung:

$$r^2 = r''^2 + \frac{2R^2 \operatorname{Sin}\varphi''}{m}$$

Sind bei einer Karte die Parallelkreise, welche in ihrer wahren Länge entwickelt werden, nicht mehr als 10^0 von einander entfernt, und sind die Grenzkreise der Karte von diesen Parallelkreisen nicht mehr als 5^0 entfernt, so erhält man eine Karte deren lineare Dimensionen mit demselben Massstabe abgegriffen werden können. In der Mitte der Karte werden die Distanzen, welche sich von Süd nach Nord erstrecken etwas vergrössert, dagegen die Distanzen die von Ost nach West gemessen werden, etwas verkleinert. Jenseit der in der wahren Grösse entwickelten Parallelkreise verhält sich die Sache gerade umgekehrt: Verkleinerung der Süd- und Norddimensionen, Vergrösserung der Ost-Westdistanzen.

Diese Projektion wurde von H. C. Albers in Lüneburg in Zachs monatlicher Korrespondenz im Nov. 1805 veröffentlicht.

4. Lambert's äquivalente Kegelprojektion.

Eine andere Projektion bei welcher die aufeinanderfolgenden unendlich schmalen Kugelzonen gleich den unendlich schmalen concentrischen Ringflächen eines Kreissectors sind, hat Joh. Heinrich Lambert in seinen Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung (Berlin 1772) gegeben. Lambert hat gefunden, dass wenn man den Radius eines Parallelkreises in der Entwicklung der Kegelfläche:

1) $r = 2R\sqrt{m}\operatorname{Sin}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$ macht, obiger Bedingung Genüge geleistet wird.

Erhebt man die Gleichung in's Quadrat, so ergibt sich:

$$r^2 = 4R^2 m \operatorname{Sin}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

und da $2\operatorname{Sin}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = 2\left(\operatorname{Sin}45^0 \operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{Cos}45^0 \operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}\right)^2$

$= 2.\operatorname{Sin}^2 45^0\left(\operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}\right)^2$ oder da $\operatorname{Sin}^2 45^0 = \frac{1}{2}$ ist

$$2\operatorname{Sin}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = \left(1 - 2\operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}\operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= (1 - \operatorname{Sin}\varphi)$$

so ist 2) $r^2 = 2R^2 m\,(1 - \operatorname{Sin}\varphi)$

Für einen Parallelkreis von der Breite φ_1 ist analog