Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

Graphische Lösung der auf den Curs eines Schiffes sich beziehenden Aufgaben.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

der Karte darstellen, ferner trage man auf die Gerade BD die Unterschiede der wachsenden Breiten auf, die sich aus der Tabelle (Seite 68) für die Breiten von 36° bis 70° ergeben und ziehe durch die so erhaltenen Theilpunkte Parallele mit AB, welches die Parallelkreise der Karte sind.

Da die Geraden AB und BD bei der Lösung der sich auf den Curs eines Schiffes beziehenden Aufgaben als Massstäbe benutzt werden, so ist es zweckmässig dieselben von Minute zu Minute, oder wofern die Theilung zu klein wird, von 10 Minuten zu 10 Minuten einzutheilen.

Graphische Lösung der auf den Curs eines Schiffes sich beziehenden Aufgaben.

Von allen Curven, welche zwei Punkte A und B der Erdoberfläche (siehe Fig. 28) verbinden, ist der Bogen eines grössten Kreises, welcher durch diese Punkte geht, ihre kürzeste Entfernung, und wäre dieser somit der von einem Schiffe zu befolgende Weg. Ein grösster Kreis der Kugel schneidet aber, wofern er nicht mit dem Aequator identisch ist, jeden Kugelmeridian unter einem anderen Winkel, und ein Schiff, welches als Bahn den Bogen eines grössten Kreises befolgen würde, müsste seine Wegrichtung stetig ändern. Den Seefahrern dient jedoch die Bussole, welche ihnen jederzeit den Winkel gibt, den der magnetische Meridian eines Ortes mit der Längsaxe des Schiffes bildet, als Wegweiser, und das Schiff wird so gelenkt, dass seine Wegrichtung mit dem wahren Meridiane eines jeden Ortes denselben Winkel einschliesst. Man nennt diesen Winkel, welcher also während einer bestimmten oft längeren Zeit constant bleibt, den Azimutalwinkel. Die von einem Schiffe

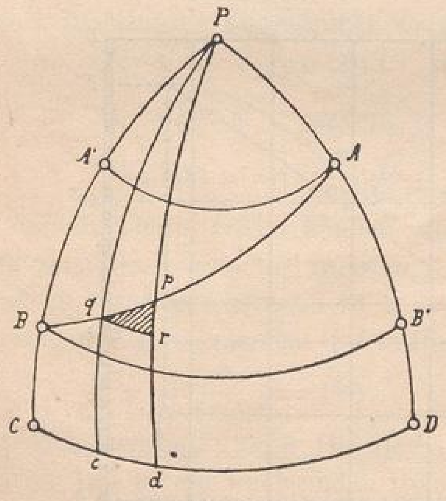

Fig. 28.

nach diesem Gesetze beschriebene Curve wird Loxodromie oder schieflaufende Linie genannt, und ist eine Curve von doppelter Krümmung. Da sie mit allen Meridianen denselben Winkel bildet, so stellt sie sich auf einer Karte, welche nach Mercatorsprojektion construirt ist (siehe Fig. 27) als gerade Linie dar.

Betrachten wir ein sphärisches Dreieck PAB (Fig. 28), welches durch den Bogen der Loxodromie und durch die Meridianbogen PA und PB zweier Orte begrenzt wird, so sind in diesem folgende Elemente zu unterscheiden:

1) Der Unterschied $P = l_1 - l_2$ der Längen der Orte A und B, oder der in der Länge durchlaufene Weg. (Der Ort A sei der Punkt der Abreise, der Ort B derjenige der Ankunft.)

2) Der Unterschied $\varphi_1 - \varphi_2$ der Breiten beider Orte, oder der in der Breite durchlaufene Weg.

3) Die Länge $a = AB$ der Loxodromie, welche in Meilen oder Minuten ausgedrückt wird.

4) Das constante Azimuth ζ, oder der Winkel, welchen die Loxodromie mit sämmtlichen Meridianen bildet.

Sind von diesen vier Elementen zwei gegeben, so können die beiden anderen berechnet oder construirt werden, und es sind daher im Ganzen sechs Aufgaben zu lösen, welche sich auf den Curs eines Schiffes beziehen.

In Fig. 28 sei AB die Loxodromie, CD der Aequator, P der Pol und $pq = \alpha$ ein unendlich kleiner Bogen der Loxodromie; um alsdann zu untersuchen, welchen Weg ein Schiff, das die loxodromische Linie befolgt, sowohl in der Länge als in der Breite durchläuft, betrachte man das unendlich kleine Dreieck pqr, in welchem der Winkel $qpr = \zeta$ gleich dem constanten Azimuthe ist. Aus demselben ergibt sich:

$$1)\ pr = qp \,.\, \mathrm{Cos}\,\zeta = \alpha\,\mathrm{Cos}\,\zeta$$

$$2)\ qr = pr\ \mathrm{Tg}\,\zeta.$$

Addirt man sämmtliche unendlich kleine Bogen pr, so erhält man den in der Breite durchlaufenen Weg:

$$AB' = \varphi_1 - \varphi_2$$

und es ist

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Sigma\,(\alpha\,\mathrm{Cos}\,\zeta)$$

oder da $\mathrm{Cos}\,\zeta$ eine Constante ist

$$(\mathrm{XLIV})\ \varphi_1 - \varphi_2 = \mathrm{Cos}\,\zeta\ \Sigma\,(\alpha) = \mathrm{Cos}\,\zeta\,.\,AB = a\,\mathrm{Cos}\,\zeta$$

Denkt man sich die Meridianbogen Pp und Pq bis zum Aequator verlängert, so ergibt sich auf diesem das Bogenelement cd, und die Summe aller dieser Bogenelemente ist der in der Länge durchlaufene Weg CD.

Ist φ die geog. Breite des Parallelkreisbogens qr, so ist:

$$qr = cd \operatorname{Cos} \varphi.$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 2) so ergibt sich:

$$cd \operatorname{Cos} \varphi = pr \operatorname{Tg} \zeta$$

$$cd = \frac{pr}{\operatorname{Cos} \varphi} \operatorname{Tg} \zeta \quad .$$

Summirt man alle diese Werthe von cd, so erhält man den in der Länge durchlaufenen Weg:

$$P = l_1 - l_2 = \operatorname{Tg} \zeta \int \frac{pr}{\operatorname{Cos} \varphi} = \operatorname{Tg} \zeta \int \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos} \varphi}$$

wenn man den unendlich kleinen Bogen pr des Meridianes mit $d\varphi$ bezeichnet. Wie oben gefunden wurde ist aber

$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos} \varphi} = \frac{1}{M} \log \operatorname{Tg} \left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) + C \text{ (siehe Seite 66 u. 67)}$$

welchen Werth wir gleich λ gesetzt haben und daher

$$\text{(XLV)} \quad P = l_1 - l_2 = \lambda \operatorname{Tg} \zeta.$$

Das Integral ist zwischen den Grenzen $\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_2$ zu nehmen, für $\varphi = \varphi_1$, sei sein Werth $= \lambda_1$, für $\varphi = \varphi_2$ gleich λ_2, dann ist:

$$\text{(XLV a)} \quad P = (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{Tg} \zeta.$$

Da in Gleichung XLV der Coefficient von $\operatorname{Tg} \zeta$ identisch ist mit den bei der Merkatorprojektion erhaltenen Zahlenwerthen der wachsenden Breiten, so können die Werthe von λ_1 und λ_2 aus der Tabelle (Seite 68) entnommen werden, und da dieselben in Minuten angegeben sind, so wird dadurch nach Glch. XLVa auch P in Minuten erhalten.

Hierauf beruht ferner die wichtige Anwendung einer Karte, welche nach Merkatorsprojektion construirt ist, zur graphischen Lösung der auf den Curs eines Schiffes sich beziehenden Aufgaben.

Aufgabe 1. In Fig. 27, Seite 76 sei P der Ort der Abreise, Q der Ort der Ankunft eines Schiffes, welches in der Richtung PQ, die mit dem Meridiane des Ortes P einen Winkel ζ bildet, einen bestimmten Weg a zurücklegt. Welches ist die Länge l_1 und die Breite φ_1 des Punktes Q, wenn die Länge l und die Breite φ des Punktes P der Abreise gegeben sind?

Auflösung. Nachdem man auf der Karte den Punkt P der Abreise markirt hat, zieht man die Gerade PQ, welche mit dem Meridiane den Winkel ζ einschliesst. Da eine Seemeile der Länge einer Bogenminute des Aequators gleich ist, so greife man auf der Geraden AB (Fig. S. 71) so viele Minuten ab, als a Seemeilen enthält, und trage diese Strecke nach Pq. Durch den Punkt q ziehe man eine Parallele qr mit AB und erhält den in der Breite durchlaufenen Weg

$$\mathrm{Pr} = \mathrm{a} \operatorname{Cos} \zeta \text{ (siehe Glch. XLIV)},$$

welcher auf AB in Minuten abgegriffen werden kann.

Zieht man ferner durch den Punkt P die Parallele PP′ und zählt auf dem Massstabe DB vom Punkte P′ ebenso viele Minuten ab, als die Gerade Pr enthält, so ist diese Länge P′R′, welche nach PR getragen wird, die graphische Darstellung des in der Breite durchlaufenen Weges. Durch R wird nun RQ parallel mit AB gezogen und auf der Geraden Pq der Ort Q der Ankunft erhalten. RQ ist der in der Länge durchlaufene Weg, denn

$$\mathrm{RQ} = \mathrm{PR} \operatorname{Tg} \zeta = (\lambda - \lambda_1) \operatorname{Tg} \zeta \text{ (siehe Glch. XLVa)}.$$

Aufgabe 2. Es sei das Azimuth ζ und die Differenz $(\varphi - \varphi_1)$ der Breiten beider Orte gegeben, man soll den vom Schiffe durchlaufenen Weg a und die Differenz $l_1 - l$ der Längen erhalten, wodurch der Punkt Q auf der Karte bestimmt ist.

Auflösung. (Fig. S. 71). Da der Punkt P der Abfahrt gegeben ist, so ziehe man durch P eine Gerade Pq, welche mit dem Meridiane des Ortes P den Winkel ζ bildet; greife alsdann auf dem Massstabe AB die Länge $\varphi - \varphi_1$ in Minuten ab und trage sie nach Pr. Durch r ziehe man mit AB die Parallele rq, wodurch der Punkt q und damit der durchlaufene Weg Pq = a erhalten wird, welcher auf AB abzugreifen ist. Im Uebrigen wird nun wie bei der vorhergehenden Aufgabe verfahren und dadurch der Punkt Q der Ankunft erhalten.

Aufgabe 3. Man kennt den Unterschied $\varphi - \varphi_1$ der Breiten beider Orte, ferner den durchlaufenen Weg a, man soll die Wegrichtung, d. h. den Winkel ζ und den Unterschied der Längen $(l_1 - l)$ beider Orte finden.

Auflösung. (Fig. S. 71). Man trage vom Punkte P aus mittelst des Massstabes AB die Minutenzahl $(\varphi - \varphi_1)$ nach Pr, ziehe rq parallel mit AB und greife auf AB soviele Minuten ab, als die Weglänge a Meilen enthält. Mit dieser Zirkelöffnung beschreibe man aus P einen Kreis, welcher den Parallelkreis rq in q schneidet. Dadurch wird die Wegrichtung PQ und der Winkel ζ erhalten und der Punkt Q der Ankunft wird bestimmt wie oben.

Aufgabe 4. Man kennt die Längen und Breiten beider Orte, also die Differenzen ($l_1 - l$) und ($\varphi - \varphi_1$) und soll den durchlaufenen Weg Pq = a, sowie den Winkel ζ erhalten.

Auflösung. (Fig. 27) Da die Punkte P und Q auf der Karte bestimmt sind, so ist auch das Dreieck PRQ bestimmt und kann

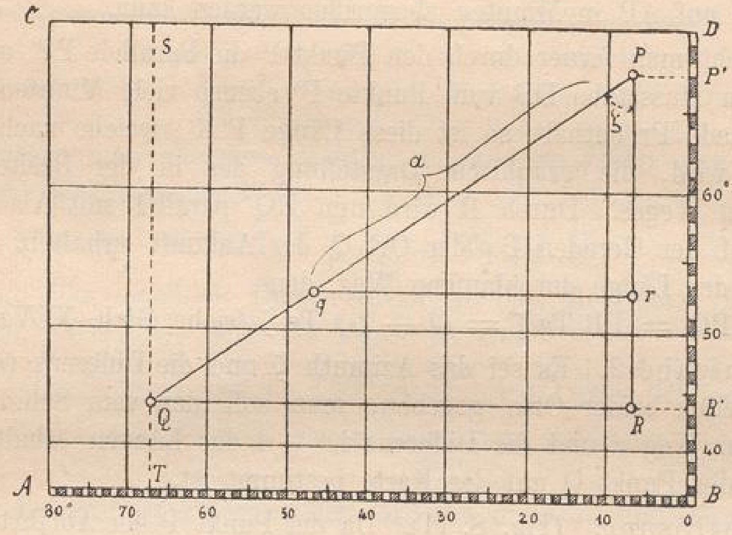

Fig. 27.

dasselbe gezeichnet werden. Zieht man daher durch die Punkte P und Q Parallele mit AB, so ergeben sich auf der Geraden BD die Theilpunkte P′ und R′ und man zählt auf dem Massstabe BD die Anzahl Minuten ab, welche zwischen P′ und Q′ liegen. Dieselbe Anzahl wird auf dem Massstabe AB abgegriffen und nach Pr getragen. Man zieht nun rq parallel mit AB und erhält die Weglänge Pq = a.

Aufgabe 5. Man kennt den Unterschied der Längen $l_1 - l$ und das Azimuth ζ und soll a sowie $\varphi - \varphi_1$ construiren.

Auflösung. (Fig. 27). Da der Ort P der Abreise gegeben ist, so ziehe man unter dem Winkel $rPq = \zeta$ die Gerade PQ, welche den Meridian des Ortes Q d. i. die Gerade ST im Punkte Q schneidet. Durch Q zieht man eine Parallele zu AB und erhält R und gleichzeitig die Anzahl Minuten, welche in der Breite durchlaufen werden und durch die Gerade PR = P′R′ dargestellt sind. Diese Minutenzahl wird wie bei der vorigen Aufgabe auf dem Massstabe AB abgegriffen und nach Pr getragen. Zieht man noch rq parallel zu AB, so ergibt sich der vom Schiff durchlaufene Weg Pq = a.

6. Aufgabe. Der Unterschied der Längen $l_1 - l$ und die Weglänge a sei gegeben, man soll ζ und $(\varphi - \varphi_1)$ den Unterschied der Breiten construiren.

Auflösung. Diese Aufgabe kann nur näherungsweise gelöst werden. Nachdem man die Meridiane PR und ST der Orte gezogen hat, wird auf dem Massstabe BD die Länge PQ abgegriffen und mit dieser Zirkelöffnung aus P, welcher als Punkt der Abreise gegeben ist, ein Kreis beschrieben, der den Meridian ST in Q schneidet. Diese Länge ist jedoch nur die näherungsweise Länge von PQ. Man ziehe nun durch Q die Gerade QR parallel mit AB und greife auf dem Massstabe AB, soviele Minuten ab, als die Gerade $PR = P'R'$ enthält, diese Minutenzahl wird nach Pr getragen und rq parallel mit AB gezogen, es ergibt sich dadurch die Länge $Pq = a$ des durchlaufenen Weges, welche gleich der gegebenen Weglänge sein muss. Stimmt die durch Construktion erhaltene Weglänge mit der gegebenen überein, so ist die Construktion richtig, im anderen Falle muss sie noch einmal wiederholt werden, wobei man je nach dem erhaltenen Werthe von a die Distanz PQ grösser oder kleiner anzunehmen hat.

Berücksichtigung der Abplattung der Erde bei der Construktion einer Karte nach Mercatorsprojektion.

Beim Entwurfe einer Karte nach Mercatorsprojektion kann auch die Abplattung der Erde berücksichtigt werden. Es sei in Fig. 29 (folgende Seite) $P_s A P_n$ der Ellipsenbogen, durch dessen Umdrehung um die Axe OY ein Rotationsellipsoid entsteht, welches die Gestalt der Erde besitzt. (Der Unterschied der Ellipsenaxen, welcher bei der Erde sehr klein ist, wurde der Deutlichkeit wegen in Fig. 29 etwas gross angenommen.) P_n sei der Nordpol der Erde, C ein beliebiger Punkt der Ellipse, dessen Coordinaten x_1 y_1 sind, ferner sei CT eine Tangente an die Ellipse, welche gleichzeitig den Horizont des Ortes C darstellt. Zieht man im Punkte C eine Normale auf die Tangente, so ist der Winkel $CNM = \varphi$ die geog. Breite des Ortes C, denn er ist gleich dem Winkel EDY, welcher die Polhöhe des Ortes C ist. Aus dem Dreiecke ODT ergibt sich $\varphi + \beta = 90^0$

$$\varphi = 90^0 - \beta.$$