Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

VI. Abschnitt. Von den konformen oder orthomorphen Abbildungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

VI. Abschnitt.

Von den konformen oder orthomorphen Abbildungen.

Ist eine Projektion ihrem Originale in den kleinsten Theilen ähnlich, so sagt man dieselbe sei eine konforme oder orthomorphe Abbildung. Wie aus der ebenen Geometrie bekannt ist sind zwei Figuren ähnlich, wenn sie gleiche Winkel haben und ihre entsprechenden Seiten in Proportion stehen. Dass ein beliebiges Kugeldreieck und seine Projektion diese Eigenschaft nicht besitzen kann, versteht sich von selbst, denn die Kugel ist keine entwickelbare Fläche, dagegen kann man beliebig viele Arten von Projektionen erhalten, bei welchen jedes unendlich kleine Kugeldreieck ABC seinem Bilde abc ähnlich ist. Ist für diesen Fall P ein Punkt im Inneren des Dreieckes und p seine Projektion, so müssen 1) die Winkel APB, APC, BPC ihren entsprechenden Projektionen apb, apc, bpc gleich sein und 2) muss die Gleichung stattfinden:

$$\frac{ap}{AP} = \frac{bp}{BP} = \frac{cp}{CP} = v$$

Man nennt den Werth v, welcher das Verhältniss zwischen dem unendlich kleinen Bilde und seinem Originale darstellt, das lineare Vergrösserungsverhältniss der Projektion. Dasselbe ist für jeden Punkt P der Kugeloberfläche ein anderes, während es für ähnliche Figuren ein constantes ist, und muss für jede Projektionsmethode besonders bestimmt werden.

Wir wollen nun die wichtigsten konformen Projektionen betrachten:

1. Die stereographische Projektionsmethode. Wie früher bewiesen wurde (siehe Seite 14) schneiden sich bei jeder stereographischen Projektion zwei beliebige Kugelkreise unter demselben Winkel wie ihre Originale auf der Kugel, und es lässt sich dieser Satz auch für zwei beliebige Curven aussprechen, welche auf der Kugel gezogen

werden. Denn denkt man sich auf jeder Curve zwei Punkte angenommen, welche ihrem Schnittpunkte sehr nahe liegen und sich links und rechts von ihm befinden, so kann man durch je drei dieser Punkte einen Kreis legen, wodurch die sich schneidenden Curvenelemente durch Kreiselemente ersetzt werden und die Tangenten im Durchschnittspunkte beider Curven mit den Tangenten der Kugelkreise zusammenfallen. Die Projektionen der letzteren schneiden sich aber unter demselben Winkel wie ihre Originale, wesshalb sich auch die Projektionen der Curven unter demselben Winkel wie die Curven selbst schneiden müssen. Jedes unendlich kleine sphärische Dreieck ABC ist daher mit seinem Bilde abc ähnlich, denn beide haben gleiche Winkel und da sich jede unendlich kleine sphärische Figur in sphärische Dreiecke zerlegen lässt, welche alle mit ihren Bildern ähnlich sind, so folgt daraus, dass diese Figur und ihr Bild ebenfalls ähnlich sein müssen. Eine jede stereographische Projektion ist daher eine conforme oder orthomorphe Abbildung.

Um das Vergrösserungsverhältniss für die stereographische Projektionsmethode zu bestimmen, denke man sich durch die Augenaxe OQ (Fig. 7 Seite 18) einen grössten Kreis QAO gelegt. Nimmt man auf diesem Kreise zwei Punkte A und H an, welche sehr nahe bei einander liegen, so hat man den Werth des Verhältnisses zu bestimmen, das man erhält, wenn man die Projektion von AH d. h. die Linie ah mit ihrem Originale AH dividirt.

Ist der Abstand des Punktes A vom Gegenpunkte des Auges $AQ = \varDelta$, ferner der Abstand $HQ = \varDelta_1$, der Radius der Erde $= R$ und bezeichnen $\varDelta$ und $\varDelta_1$ die Arc. der betreffenden Winkelgrössen, so ist

$$AH = R(\varDelta - \varDelta_1)$$

ferner die Projektion $ah = Ma - Mh = R\left(\operatorname{Tg}\frac{\varDelta}{2} - \operatorname{Tg}\frac{\varDelta_1}{2}\right)$

$$ah = \frac{R \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(\varDelta - \varDelta_1)}{\operatorname{Cos}\frac{\varDelta}{2} \operatorname{Cos}\frac{\varDelta_1}{2}}$$

$$\text{und } \frac{ah}{AH} = \frac{\operatorname{Sin}\frac{\varDelta - \varDelta_1}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{\varDelta}{2} \operatorname{Cos}\frac{\varDelta_1}{2}\, 2 \, . \, \frac{\varDelta - \varDelta_1}{2}}$$

Sind nun $\varDelta$ und $\varDelta_1$ sehr wenig von einander verschieden, so ist

$$\operatorname{Cos}\frac{\varDelta}{2} \operatorname{Cos}\frac{\varDelta_1}{2} = \operatorname{Cos}^2\frac{\varDelta}{2} \text{ und } \frac{\operatorname{Sin}\frac{\varDelta - \varDelta_1}{2}}{\frac{\varDelta - \varDelta_1}{2}} = 1$$

somit die lineare Vergrösserung:

$$1)\ v = \frac{ah}{AH} = \frac{1}{2\ \mathrm{Cos}^2 \frac{\varDelta}{2}}$$

und die Flächenvergrösserung $v^2 = \frac{1}{4\ \mathrm{Cos}^4 \frac{\varDelta}{2}}$

für die Mitte der Karte ist $\varDelta = 0$ und $v = \frac{1}{2\ \mathrm{Cos}^2\ 0^0} = \frac{1}{2}$

für die Grenze der Karte ist bei der Darstellung der Halbkugel

$\varDelta = 90^0$ und $v = \frac{1}{2\ \mathrm{Cos}^2\ 45} = 1$

An den Grenzen der Karte ist alsdann das Vergrösserungsverhältniss doppelt so gross wie in der Mitte.

Da die stereographische Projektion in den kleinsten Theilen ähnlich ist, so ist das Vergrösserungsverhältniss für alle Richtungen um einen bestimmten Punkt A dasselbe, welches auch die Lage des grössten Kreises QAO ist, auf dem der Punkt A liegt.

Berechnet man für verschiedene Werthe von $\varDelta$ die entsprechenden Werthe von v nach Glch. 1, so ergeben sich für v folgende Werthe:

$\varDelta = 0^0$	30^0	45^0	60^0	90^0
$v = 0{,}5000$	0,5359	0,5858	0,6666	1

Man sieht daraus, dass das Vergrösserungsverhältniss bis zu einer Entfernung von 60^0 vom Gegenpunkte des Auges nahezu constant bleibt und daher Karten bis zu dieser Ausdehnung mit keinen grossen Fehlern behaftet sein werden.

2. Die Projektion von Mercator. Bei der Construktion einer Karte nach Mercatorsprojektion (siehe Seite 65) ging man von der Voraussetzung aus, dass die Karte in den kleinsten Theilen ähnlich sein solle. Obgleich es daher unnöthig ist noch einmal die Aehnlichkeit nachzuweisen, so kann doch eine Verallgemeinerung des Beweises der Aehnlichkeit insofern stattfinden, dass man auf der Kugel ein unendlich kleines sphärisches Curvenstück p q (Fig. 28 Seite 72) wählt, welches mit irgend einem Meridiane den Winkel $qpr = \zeta$ einschliesst, und nachweist, dass bei einer Karte nach Mercatorsprojektion die Projektion $p' q'$ dieses Curvenstückes mit der Projektion des entsprechenden Meridianes denselben Winkel bildet. Ist dieser Beweis für ein beliebiges Curvenstück geleistet, so werden für einen bestimmten Punkt der Kugel alle sphärischen Curvenelemente, welche durch diesen Punkt gehen, mit seinem Meridiane in Bild und Original

ebenfalls dieselben Winkel einschliessen und daher die Curvenelemente unter sich in Bild und Original auch gleiche Winkel bilden d. h. die Mercatorprojektion ist alsdann in den kleinsten Theilen ähnlich.

In Fig. 28 S. 72 sei qrp ein unendlich kleines sphärisches Dreieck, pr sei ein Meridianbogen, qr ein Parallelkreisbogen und pq ein unendlich kleines Curvenelement, das man sich auch durch ein Kreisbogenelement ersetzt denken kann. Ist ferner $\sphericalangle$ qpr $= \zeta$ so ergibt sich

$$\mathrm{Tg}\,\zeta = \frac{\mathrm{q\,r}}{\mathrm{p\,r}}$$

oder da $$\mathrm{qr} = \mathrm{cd}\,\mathrm{Cos}\,\varphi = \mathrm{R}\,(\mathrm{l}_1 - \mathrm{l})\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$

und $$\mathrm{pr} = \mathrm{R}\,(\varphi_1 - \varphi)$$

$$\mathrm{Tg}\,\zeta = \frac{(\mathrm{l}_1 - \mathrm{l})}{(\varphi_1 - \varphi)}\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$

In diesen Gleichungen bezeichnet $(\mathrm{l}_1 - \mathrm{l})$ den Arc. der Längendifferenz, $(\varphi_1 - \varphi)$ denjenigen der Breitendifferenz der Punkte p und q.

Ferner ist bei einer Karte nach Mercatorsprojektion die Projektion des Parallelkreisbogens qr gleich der Länge des Aequatorbogens, welcher der Längendifferenz $(\mathrm{l}_1 - \mathrm{l})$ entspricht, also für $\mathrm{R} = 1$

$$\mathrm{q'\,r'} = \mathrm{l}_1 - \mathrm{l}$$

Für die Projektion des Meridianbogens pr wurde dagegen S. 66 gefunden

$$\mathrm{p'\,r'} = \mathrm{d}\lambda = \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \text{ oder da } \mathrm{d}\,\varphi = \varphi_1 - \varphi$$

$$\mathrm{p'\,r'} = \frac{\varphi_1 - \varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \text{ und daher}$$

$$\mathrm{Tg}\,\zeta' = \frac{\mathrm{q'\,r'}}{\mathrm{p'\,r'}} = \frac{\mathrm{l}_1 - \mathrm{l}}{\varphi_1 - \varphi}\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$

Es ist also $\mathrm{Tg}\,\zeta' = \mathrm{Tg}\,\zeta$ und $\zeta' = \zeta$ d. h. die Projektion des Curvenelementes schliesst in Wirklichkeit mit dem Meridiane denselben Winkel ein, wie das Curvenelement selbst.

Um für die Merkatorprojektion das Vergrösserungsverhältniss v zu bestimmen, dividire man die Projektion eines Meridianelementes mit seinem Originale. Es ist aber für $\mathrm{R} = 1$ ein Meridianelement

$$\mathrm{pr} = (\varphi_1 - \varphi)$$

während seine Projektion $\mathrm{p'\,r'} = \frac{\varphi_1 - \varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$ somit die lineare Vergrösserung $v = \frac{p' r'}{pr} = \frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi$

und die Flächenvergrösserung

$$v^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi} = \sec^2\varphi$$

3. Lambert's konforme Kegelprojektion. Stellt man sich die Aufgabe eine conforme Kegelprojektion zu konstruiren, bei welcher die Parallelkreise durch concentrische Kreise dargestellt werden, die Meridiane aber gerade Linien sind, welche vom Centrum der Parallelkreise ausgehen und unter sich Winkel bilden, die das n fache der Winkel sind, welche die Meridiane auf der Kugel mit einander einschliessen, so hat man zunächst eine Bedingungsgleichung abzuleiten, die erfüllt sein muss, damit die Projektion conform ist. Dieselbe wird auf folgende Weise erhalten:

Es seien ab und cd (Fig. 42) die Projektionen zweier Parallelkreisbogen AB und CD, welche demselben Centriwinkel entsprechen und deren Breiten φ und φ_1 sich sehr wenig von einander unterscheiden. Sind alsdann λ und λ_1 die Längen der Punkte c und a und ist $\lambda_1 - \lambda$ ebenfalls eine verschwindend kleine Grösse, so muss als Bedingung der Conformität die Proportion stattfinden:

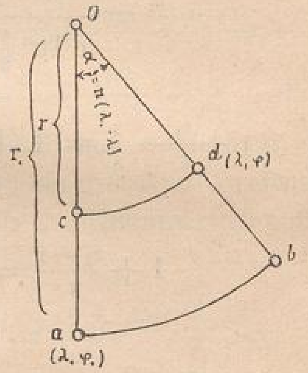

Fig. 42.

$$1)\quad \frac{ac}{cd} = \frac{AC}{CD}$$

Setzt man den Arc. von $(90^0 - \varphi) = \psi$, den Arc. von $(90^0 - \varphi_1) = \psi_1$ ferner den Arc. der Längendifferenz $= (\lambda_1 - \lambda)$ so ist:

$$AC = R(\psi_1 - \psi) \text{ und } CD = R(\lambda_1 - \lambda) \sin\psi$$

Bezeichnen ferner r_1 und r die Radien der Parallelkreise ab und cd so ist $ac = r_1 - r$, und da der Centriwinkel α, welcher dem Bogen cd entspricht, gleich dem n fachen Längenunterschiede ist, also Arc. $\alpha = n(\lambda_1 - \lambda)$, so muss

$$cd = n(\lambda_1 - \lambda)\, r \quad \text{sein}$$

und Gleichung 1) lautet;

$$\frac{r_1 - r}{n(\lambda_1 - \lambda)\, r} = \frac{\psi_1 - \psi}{(\lambda_1 - \lambda)\sin\psi}$$

Hieraus folgt:

$$2)\quad \frac{r_1 - r}{r(\psi_1 - \psi)} = \frac{n}{\operatorname{Sin}\psi}$$

welche Gleichung erfüllt sein muss, damit obige Kegelprojektion conform ist.

Dieser Bedingung wird nun Genüge geleistet, wenn man nach Lambert den Radius irgend eines Parallelkreises

$$3)\quad r = c\,\mathrm{Tg}^n\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) \text{ oder}$$

$$r = c\,\mathrm{Tg}^n\,\tfrac{1}{2}(90^0 - \varphi) \text{ oder}$$

$$3a)\quad r = c\,\mathrm{Tg}^n\,\frac{\psi}{2}$$

macht, in welcher Gleichung c irgend eine Constante bezeichnet, die durch den Massstab der Karte bestimmt ist.

Um dies zu beweisen bilde man den Quotienten:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{c\,\mathrm{Tg}^n\,\frac{\psi_1}{2}}{c\,\mathrm{Tg}^n\,\frac{\psi}{2}} = \left(\frac{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi_1}{2}}{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi}{2}}\right)^n$$

$$1 + \frac{r_1}{r} - \frac{r}{r} = 1 + \left(\frac{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi_1}{2}}{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi}{2}}\right)^n - \frac{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi}{2}}{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi}{2}} = \left(1 + \frac{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi_1}{2}}{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi}{2}} - \frac{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi}{2}}{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi}{2}}\right)^n$$

$$1 + \frac{r_1 - r}{r} = \left(1 + \frac{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi_1}{2} - \mathrm{Tg}\,\frac{\psi}{2}}{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi}{2}}\right)^n$$

Setzt man der Einfachheit wegen $\dfrac{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi_1}{2} - \mathrm{Tg}\,\frac{\psi}{2}}{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi}{2}} = x$

so ist $1 + \dfrac{r_1 - r}{r} = (1 + x)^n$

$$\frac{r_1 - r}{r} = nx + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,x^3 + \ldots.$$

Dividirt man diese Gleichung mit $\psi_1 - \psi$ so ergibt sich:

$$4)\quad \frac{r_1 - r}{r(\psi_1 - \psi)} = \frac{x}{\psi_1 - \psi}\left(n + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,x^2 + \ldots\right)$$

Es ist aber $\dfrac{x}{\psi_1 - \psi} = \dfrac{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi_1}{2} - \mathrm{Tg}\,\frac{\psi}{2}}{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi}{2}(\psi_1 - \psi)} = \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi)}{\mathrm{Tg}\,\frac{\psi}{2}(\psi_1 - \psi)\operatorname{Cos}\frac{\psi_1}{2}\operatorname{Cos}\frac{\psi}{2}}$

$$= \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi)}{2\,\frac{(\psi_1 - \psi)}{2}\operatorname{Sin}\frac{\psi}{2}\operatorname{Cos}\frac{\psi_1}{2}}$$

Ist nun $(\psi_1 - \psi)$ eine unendlich kleine Grösse, so ist

$$\frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi)}{\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi)} = 1 \text{ und } \psi_1 = \psi$$

somit $\quad \dfrac{x}{\psi_1 - \psi} = \dfrac{1}{\operatorname{Sin} \psi}$

und Gleichung 4) lautet:

$$5)\ \frac{r_1 - r}{r(\psi_1 - \psi)} = \frac{1}{\operatorname{Sin} \psi}\left(n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^2 + \ldots\right)$$

für $\psi_1 - \psi =$ einer unendlich kleinen Grösse ist aber auch

$$x = \frac{\operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2} - \operatorname{Tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{Tg} \frac{\psi}{2}}$$ eine unendlich kleine Grösse und die Summe der in obiger Gleichung mit x multiplicirten Glieder verschwindet gegenüber n, wie sich auf folgende Weise leicht beweisen lässt: Es ist

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^2 + \ldots = x\left(\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x + \ldots\right)$$

dieser Ausdruck ist kleiner als $x\left(\dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\right)$ denn es ist x eine verschwindend kleine Grösse und wenn man an seine Stelle die Einheit setzt, so muss dadurch ein grösserer Ausdruck entstehen. Setzen wir zu obigem Ausdruck in der Klammer noch die Glieder $1 + \frac{n}{1}$ hinzu, so ist

$$x\left(1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\right) > \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^2 + \ldots$$

Die Klammer links enthält die Summe der Coefficienten der Binomialreihe, welche $= 2^n$ ist, somit $2^n x > \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^2 + \ldots$

Da nun x eine verschwindend kleine Grösse ist, so ist auch $2^n x$ verschwindend klein und der rechte Theil obiger Relation eine an Null grenzende Grösse. Gleichung 5 lautet daher:

$$\frac{r_1 - r)}{r(\psi_1 - \psi)} = \frac{n}{\operatorname{Sin} \psi}$$

Diese Gleichung ist identisch mit Gleichung 2, welche die Bedingung der Conformität enthält.

Um die Constante n zu bestimmen, stelle man die Forderung, dass zwei beliebige Parallelkreise, welche die Poldistanzen ψ_1 und ψ_2 besitzen, in ihrer wahren Grösse projicirt werden. Sind alsdann r_1 und r_2 die Radien ihrer Projektionen, ferner α der gemeinschaftliche Centriwinkel ihrer Bilder und R der Radius der Erde, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$\frac{r_1 \pi \alpha}{180} = 2 R \pi \operatorname{Sin} \psi_1$$

$$\frac{r_2 \pi \alpha}{180} = 2 R \pi \operatorname{Sin} \psi_2$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\operatorname{Sin} \psi_1}{\operatorname{Sin} \psi_2}$$

oder wenn man nach Glch. 3a für r_1 und r_2 ihre Werthe setzt:

$$\left(\frac{\operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2}}{\operatorname{Tg} \frac{\psi_2}{2}}\right)^n = \frac{\operatorname{Sin} \psi_1}{\operatorname{Sin} \psi_2}$$

$$n \left(\log \operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2} - \log \operatorname{Tg} \frac{\psi_2}{2}\right) = \log \operatorname{Sin} \psi_1 - \log \operatorname{Sin} \psi_2$$

$$6) \quad n = \frac{\log \operatorname{Sin} \psi_1 - \log \operatorname{Sin} \psi_2}{\log \operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2} - \log \operatorname{Tg} \frac{\psi_2}{2}}$$

Das Vergrösserungsverhältniss v wird auf folgende Weise erhalten. Es ist $\quad v = \frac{ac}{AC} = \frac{cd}{CD}$ (siehe Fig. 41)

oder da $cd = n(\lambda_1 - \lambda) r$ und $CD = R(\lambda_1 - \lambda) \operatorname{Sin} \psi$

so ist $\quad v = \frac{n(\lambda_1 - \lambda) r}{R(\lambda_1 - \lambda) \operatorname{Sin} \psi} = \frac{n r}{R \operatorname{Sin} \psi}$

oder wenn man für r seinen Werth setzt:

$$v = \frac{n c}{R \operatorname{Sin} \psi} \operatorname{tg}^n \left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Die Flächenvergrösserung ist das Quadrat dieser Grösse. Diese Projektionsmethode rührt von dem deutschen Mathematiker Joh. Heinrich Lambert her, welcher sie in seinen Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik beschrieben hat (Berlin 1772).

Da sie nebst der Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen als Hauptvorzüge noch die Leichtigkeit der Construktion des Netzes, ferner die richtige Abbildung der Winkel (mit einziger Ausnahme der Winkel am Pole) und die Gleichheit der zwischen denselben Parallelkreisen liegenden Meridianbogen besitzt, so eignet sie sich vorzüglich zur Darstellung von Ländern von grosser Längenerstreckung. Sie wurde von der geographischen Gesellschaft in Petersburg zur Construktion der im Mai 1862 publicirten Karte des europäischen Russlandes und des Kaukasus (12 Blätter im Massstabe 1 : 1680000) welche sich von

36° bis 68° Breite erstreckt, angewandt, wobei jedoch der Abplattung der Erde Rechnung getragen wurde.

Ueber andere conforme Abbildungen siehe die berühmte Abhandlung von Gauss: „Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird," welche 1822 den Preis der Kopenhagener Akademie erlangte und im dritten Hefte von Schumachers Astronomischen Abhandlungen (Altona 1825) erschienen ist. Die allgemeine Theorie über die konformen Abbildungen findet sich auch in Gretschels Lehrbuch der Kartenprojektionen (Verlag von Friedrich Voigt, Weimar 1873) Seite 199 Kap. V., ferner in J. J. Littrow's Chorographie (Becks Universitätsbuchhandlung, Wien 1833) Seite 176.