Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Sechstes Capitel. Von den Durchschnitten zweyer Flächen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53306

Sechstes Capitel.

Von den Durchschnitten zweyer Flächen.

§. 131.

In dem Vorhergehenden ist bereits die Methode beschrieben worden, die Natur des Durchschnitts zu erforschen, der aus der Durchschneidung einer Fläche von einer Ebene entsteht. Da nemlich die Curve, welche der Durchschnitt bildet, ganz in der schneidenden Ebene liegt, so haben wir in dieser Ebene zwey Coordinaten angenommen, dadurch die Natur des Durchschnitts bestimmt, und so die ganze Untersuchung aufs Bekannte zurückgeführt. Wenn aber die schneidende Fläche keine Ebene ist, so kann man auch, da alsdann der Durchschnitt nicht in eine Ebene fällt, die Natur desselben nicht durch zwey Coordinaten ausdrucken, sondern es ist eine andere Methode nöthig, um diese Durchschnitte auf die Art durch Gleichungen zu bestimmen, daß ein jeder Punkt derselben bekannt sey.

§. 132.

Es kann aber die Lage der Punkte, die nicht in einer Ebene liegen, bestimmt werden, wenn man drey auf einander senkrechte Ebenen zu Hülfe nimmt, und die Entfernungen eines jeden Punktes von diesen drey Ebenen angiebt. Es sind daher drey veränderliche Größen nöthig, um die Natur einer Curve, die nicht in einer Ebene liegt, aus-

auszudrucken, so daß bey willkührlicher Annahme der einen die beyden übrigen bestimmte Werthe bekommen. Hierzu reicht also eine Gleichung zwischen jenen drey Coordinaten nicht hin, indem diese die Natur der ganzen Fläche ausdrucken würde; sondern man hat zwey Gleichungen nöthig, durch welche, wenn die eine veränderliche Größe einen bestimmten Werth bekommt, zugleich die Werthe der beyden übrigen bestimmt werden.

§. 133.

Man druckt daher die Natur einer Curve, die nicht in einer Ebene liegt, am bequemsten durch zwey Gleichungen zwischen drey veränderlichen Größen x, y und z aus, welche drey auf einander senkrechte Coordinaten vorstellen. Vermittelst solcher zwey Gleichungen können zwey veränderliche Größen durch die dritte bestimmt werden, indem sowohl y als z einer Funktion von x gleich seyn wird. Auch kann man nach Gefallen eine von den veränderlichen Größen eliminiren, und also drey Gleichungen machen, deren jede nur zwey veränderliche Größen enthält, eine nemlich zwischen x und y, die andere zwischen x und z, und die dritte zwischen y und z. Von diesen drey Gleichungen ergiebt sich die dritte aus den beyden übrigen von selbst, so daß man, wenn man die Gleichungen zwischen x und y, und zwischen x und z hat, die dritte zwischen y und z durch die Elimination von x findet.

§. 134.

Es sey also eine krumme Linie, die nicht in eine Ebene falle, gegeben, und M, Fig. 148, sey ein Punkt in ihr. Man nehme nach Belieben die drey auf einander senkrechte Axen AB, AC und AD an, so daß dadurch die drey auf ein-

einander senkrechte Ebenen, ABC, BAD und CAD bestimmt werden. Ferner fälle man aus dem Punkte der Curve M auf die Ebene BAC die senkrechte Linie MQ herab, und ziehe aus dem Punkte Q auf die Axe AD die gerade Linie QP senkrecht, so sind AP, QP und QM die drey Coordinaten, durch welche die Curve bestimmt ist, wenn man dazwischen zwey Gleichungen hat. Es sey also $AP = x$, $PQ = y$ und $QM = z$, und aus den beyden zwischen x, y und z gegebenen Gleichungen mache man durch die Elimination eine Gleichung, welche bloß x und y enthalte: so wird diese Gleichung die Lage des Punktes Q in der Ebene BAC bestimmen, und alle auf die beschriebene Art aus dem Punkte M entstandenen Punkte Q werden die Curve EQF geben, deren Natur durch die Gleichung zwischen x und y ausgedruckt wird.

§. 135.

Auf diese Art läßt sich die Natur der Curve EQF aus zwey zwischen den drey Coordinaten gegebenen Gleichungen leicht erkennen; es entsteht aber diese Curve, wenn man aus den Punkten M der gesuchten Curve die senkrechten Linien MQ auf die Ebene BAC herabfällt, und man pflegt dieselbe die Projection der Curve GMH in der Ebene BAC zu nennen. So wie aber die in der Ebene BAC entworfene Projection gefunden wird, wenn man die veränderliche Größe z eliminirt: so kann man auch die Projection eben dieser Curve in der Ebene BAD oder CAD finden, wenn man entweder y oder x wegschafft. Eine Projection reicht indeß nicht hin, die Natur der Curve GMH zu erkennen; wenn man aber für jeden Punkt Q die senkrechten Linien $QM = z$ kennt, so läßt sich die Curve GMH sehr leicht aus der Projection EQF construiren. Hierzu wird erfordert, daß man

außer

außer der Gleichung zwischen x und y, wodurch die Natur der Projection ausgedruckt wird, eine Gleichung zwischen z und x, oder zwischen z und y, oder auch zwischen x, y und z habe, um daraus die Länge des Perpendikels QM = z für einen jeden Punkt Q zu erkennen.

§. 136.

Da die Gleichung zwischen z und x die Projection der Curve GMH in der Ebene BAD, die Gleichung zwischen z und y aber die Projection in der Ebene CAD, und die Gleichung zwischen x, y und z die Fläche ausdruckt, in welcher die Curve GMH liegt: so erhellet einmal, daß durch zwey Projectionen der Curve GMH in zweyen Ebenen diese Curve selbst bekannt werde. Ferner ist klar, daß ein gleiches statt finde, wenn außer der Fläche, in welcher die Curve liegt, noch eine Projection derselben in einer Ebene gegeben ist. Denn errichtet man aus den Punkten der Projection die senkrechten Linien QM, so giebt ihr Durchschnitt mit der Fläche die gesuchte Curve GMH.

§. 137.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über die Erforschung der Natur einer jeden Curve, die nicht in einer Ebene liegt, ist es nicht schwer, den Durchschnitt jeder zwey Flächen zu bestimmen. Denn so wie der Durchschnitt zweyer Ebenen eine gerade Linie ist, so ist der Durchschnitt zweyer Flächen überhaupt, entweder eine gerade oder eine krumme Linie, und diese liegt entweder in einer Ebene oder nicht. Er mag indeß beschaffen seyn, wie er wolle, so gehören alle seine Punkte zu beyden Flächen, und er muß daher in den Gleichungen für beyde Flächen enthalten seyn. Wenn also beyde Flächen durch Gleichungen zwischen drey Coordinaten ausgedruckt werden, die auf eben dieselben drey auf einander senkrechte Hauptebenen, oder auf eben dieselben drey auf einander senkrechte Axen AB, AC, AD bezogen werden: so drucken diese beyden Gleichungen zusammen die Natur des Schnittes aus.

§. 138.

Sind also zwey Flächen gegeben, welche sich schneiden, so muß man die Natur einer jeden durch eine Gleichung zwischen drey Coordinaten ausdrucken, welche auf einerley Hauptaxen bezogen werden, wodurch man zwey Gleichungen zwischen x, y und z von der Art bekommt, daß die Gleichung, welche man daraus durch die Elimination der einen dieser veränderlichen Größe erhält, die Projection des Durchschnitts in der Ebene ausdruckt, welche die beyden übrigen veränderlichen Größen enthält. Auf diese Art läßt sich daher auch der Schnitt einer jeden Fläche von einer Ebene erforschen. Denn da die allgemeine Gleichung für die Ebenen $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$ ist, so bekommt man, wenn man den Werth von z, der aus dieser Gleichung entspringt, oder $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ in die Gleichung für die Fläche bringt, eine Gleichung für die Projection des Schnittes in der Ebene der Coordinaten x und y. Es giebt aber auch zugleich die Gleichung $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ die Größe des Perpendikels QM für einen jeden Punkt Q.

§. 149.

Ereignet es sich, daß die Gleichung für die Projection unmöglich wird, wie z. B. wenn man $xx + yy + aa = 0$ fände: so ist dieses ein Kennzeichen, daß die beyden Flächen

sich

sich nirgends schneiden. Wenn aber die Gleichung auf einen Punkt führt, oder die Projection in einen Punkt verschwindet: so ist auch der Durchschnitt ein Punkt, und es berühren sich daher beyde Flächen in einem Punkte, welchen man also aus der Gleichung kennen lernen kann. Es giebt aber außerdem auch eine Berührung in einer Linie, wenn sich beyde Flächen in unzähligen Punkten berühren, und diese Berührungslinie ist entweder gerade oder krumm. Jenes findet statt, wenn eine Ebene einen Cylinder oder einen Kegel berührt, da hingegen der gerade Kegel von einer Kugel innerhalb in einem Kreise berührt wird. Diese Berührungslinie erkennt man aus der Gleichung, wenn man daraus für die Projection eine Gleichung erhält, welche zwey gleiche Wurzeln hat, weil die Berührung nichts anders ist, als das Zusammenfallen zweyer Durchschnitte.

§. 140.

Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir annehmen, daß eine Kugel von einer Ebene geschnitten werde. Ferner sey die Gleichung für die Kugel, nach dem Mittelpunkte eingerichtet,

$$zz + yy + xx = a$$

und die Gleichung für die Ebene in jeder Lage,

$$\alpha z + \beta y + \gamma x = f.$$

Da aus dieser letzten Gleichung $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ wird, so erhält man folgende Gleichung zwischen x und y für die Projection:

$$0 = ff - \alpha^2 a^2 - 2\beta f y - 2\gamma f x + (\alpha^2 + \beta^2)y^2 + 2\beta\gamma xy + (\alpha^2 + \gamma^2)xx$$

wovon erhellet, daß sie eine Gleichung für eine Ellipse ist, wenn

wenn sie reell ist. Wird sie imaginär, so wird die Kugel nirgends von der Ebene berührt; und verschwindet die Ellipse in einen Punkt, so berühren sich die Kugel und die Ebene. Um diesen Fall zu finden, suche man

$$y = \frac{bf - b\gamma x \pm \alpha\sqrt{(a^2(\alpha^2 + \beta)^2 - f^2 + 2\gamma fx - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)xx)}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

wo es weder einen Berührungspunkt noch einen Durchschnitt giebt, wenn f einen solchen Werth hat, daß die Wurzel-Größen nicht reell werden können.

§. 141.

Setzt man $f = a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$, so wird

$$\gamma = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha x\sqrt{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} \mp \alpha\gamma a\sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

und diese Gleichung kann nicht reell seyn, wofern nicht

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} \text{ und } y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$$

ist. Ist daher $f = a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$ so berührt die Ebene, welche durch die Gleichung $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$ ausgedruckt wird, die Kugel, und man findet den Berührungspunkt, wenn man

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}};\ y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}};\text{ und}$$

$$z = \frac{\alpha a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$$

nimmt.

§. 142.

Hieraus läßt sich eine allgemeine Regel herleiten, durch welche man in den Stand gesetzt wird, zu beurtheilen, ob eine Fläche von einer Ebene, oder einer andern Fläche berührt werde oder nicht. Hat man nemlich aus beyden Gleichungen

chungen eine veränderliche Größe weggeschafft, so muß man untersuchen, ob die dadurch erhaltene Gleichung in einfache Faktoren aufgelöset werden kann oder nicht. Denn hat sie zwey einfache imaginäre Faktoren, so giebt es einen Berührungspunkt, welchen man kennen lernt, wenn man jeden Faktor $= 0$ setzt. Hat sie hingegen zwey reelle und einander gleiche Faktoren, so berühren sich die Flächen in einer geraden Linie. Hat sie endlich zwey nicht einfache gleiche Faktoren, oder ist sie durch ein Quadrat theilbar, so giebt ihre Wurzel, $= 0$ gesetzt, die Projection der Linie, welche durch die Berührung entsteht. Hieraus erhellet auch, daß sich die Flächen, wenn die gedachte Gleichung vier imaginäre Faktoren hat, in zwey Punkten berühren.

§. 143.

Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir die Berührung eines Kegels und einer Kugel untersuchen, deren Mittelpunkt in der Axe des Kegels liegt. Es ist aber die Gleichung für die Kugel:

$$zz + yy + xx = aa$$

und die für den Kegel, wenn man den Scheitel des Kegels um f von dem Mittelpunkte der Kugel entfernt annimmt:

$$(f - z)^2 = mxx + nyy$$

Schafft man y weg, so wird

$$(f - z)^2 = naa - nzz + (m - n)xx$$

die Gleichung für die Projection des Durchschnitts in der Ebene der Coordinaten x und z. Es sey zuvörderst der Kegel ein gerader, oder $m = n$, so wird

$$z = \frac{f \pm \sqrt{(n(1 + n)aa - nff)}}{1 + n}$$

Wenn also $f = a\sqrt{(1 + n)}$ ist, so ist zwiefach $z = \frac{a}{\sqrt{(1 + n)}}$

und es giebt eine Berührungslinie, nemlich den Kreis, dessen Projection in der Ebene, welche durch die Axe geht, eine gerade auf der Axe senkrechte Linie ist.

§. 144.

Für den schiefen Kegel, wo m und n ungleich sind, scheint die Gleichung allemal einen Durchschnitt zu geben, da doch öfters keiner statt findet. Denn wenn m größer ist als n, so erhält man zwar allezeit eine reelle Gleichung für die Projection, allein die Realität der Projection zieht nicht immer die Realität des Durchschnitts nach sich. Denn soll der Durchschnitt reell seyn, so ist dazu nicht genug, daß bloß die Projection, sondern es müssen auch die von der Projection nach dem Durchschnitte gezogenen Perpendikel reell seyn. Ob also gleich jede reelle Curve reelle Projectionen hat, so darf man doch nicht von der Realität der Projection auf die Realität der gesuchten Curve schließen. Diese Regel muß man stets vor Augen behalten, damit man von der Realität der Gleichungen für die Projectionen keinen falschen Gebrauch mache.

§. 145.

Man vermindert diese Unbequemlichkeit, wenn man die Projection in der Ebene der Ordinaten x und y sucht. Denn da in dieser Ebene kein Punkt ist, dem nicht ein Punkt in der conischen Fläche zugehöre: so wird, wenn die Projection reell ist, auch allemal der Durchschnitt reell. Da also

$$z = \sqrt{(aa - xx - yy)}$$

ist, so wird aus der andern Gleichung

$$f - \sqrt{(aa - xx - yy} = \sqrt{(mxx + nyy)}$$

oder

$$aa + ff - (1+m)xx - (1+n)yy = 2f\sqrt{(aa - xx - yy)}$$

und ferner

$$\left.\begin{array}{l} (aa-ff)^2 \left.\begin{array}{l} -2aa-ff) \\ -2(aa-ff)m \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} -2aa-ff) \\ -2aa-ff)n \end{array}\right\} y^2 + \\ (1+m)^2x^4 + 2(1+m)(1+n)x^2y^2 + (1+n)^2y^4 \end{array}\right\} = 0$$

und daher wird

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{aa - ff + n(aa+ff) - (1+m)(1+n)xx \pm}{(1+n)^2} \\ \dfrac{2f}{(1+n)^2}\sqrt{(n(1+n)aa - nff + (m-n)(1+n)xx} \end{array}\right\} = y^2$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{aa - ff + m(aa+ff) - (1+m)(1+n)yy \pm}{(1+m)^2} \\ \dfrac{2f}{(1+m)^2}\sqrt{(m(1+m)aa - mff + (n-m)(1+m)yy} \end{array}\right\} = x^2$$

§. 146.

Soll also die gefundene Gleichung Faktoren haben, so muß

$$ff = (1+n)aa; \text{ oder } ff = (1+m)aa$$

seyn. Im ersten Falle wird

$$yy = \frac{naa - (1+m)xx}{1+n} \pm \frac{2fx\sqrt{(m-n)}}{(1+n)\sqrt{(1+n)}}$$

wo, wenn m kleiner als n ist, nothwendig

$$x = 0;\ y = \pm a\sqrt{\frac{n}{1+n}},\ \text{und } z = \frac{a}{\sqrt{(1+n)}}$$

seyn

seyn muß. Es giebt also zwey Berührungspunkte, die von der Axe des Kegels auf beyden Seiten gleich weit entfernt sind. Wenn aber m größer als n ist, so muß man die andere Gleichung

$$xx = \frac{maa - (1+n)yy}{1+m} \pm \frac{2fy\sqrt{(n-m)}}{(1+m)\sqrt{(1+m)}}$$

nehmen, die nicht reell seyn kann, wenn nicht $y = 0$ ist, in welchem Falle $x = \pm a\sqrt{\frac{m}{1+m}}$, und $z = \frac{a}{\sqrt{(1+m)}}$ wird. Alsdann giebt es zwey andere Berührungspunkte, indem die Berührung in dem Theile des Kegels geschieht, wo diese Punkte am nächsten zusammenfallen. Auf ähnliche Art läßt sich die Berührung in allen einzelnen Fällen beurtheilen.

§. 147.

Die leichteste Art aber, die berührenden Ebenen jeder Art der Flächen zu finden, läßt sich aus der oben erklärten Methode, die Tangenten der Curven zu finden, herleiten. Es sey die Natur der Fläche, deren Berührungsebenen gesucht werden, durch eine Gleichung zwischen den drey Coordinaten $AP = x$; $PQ = y$; und $QM = z$, Fig. 149, ausgedruckt, und daraus die Lage der Ebene, welche die Fläche in dem Punkte M berührt, zu bestimmen. Wird die Fläche von irgend einer durch M gehenden Ebene geschnitten, so muß die Tangente des dadurch entstandenen Schnittes für den Punkt M in der berührenden Ebene liegen. Wenn man also die Tangenten zweyer solcher Schnitte für den Punkt M gefunden hat, so muß die Ebene, welche durch diese beyden Tangenten bestimmt wird, auch die Fläche in dem Punkte M bezeichnen.

§. 148.

Es werde also zuvörderst die Fläche von einer auf der Ebene APQ senkrechten Ebene geschnitten, und zwar nach der geraden der Axe AP parallen Linie QS. Ferner sey auf ähnliche Art ein Schnitt durch M senkrecht auf die Ebene APQ aber nach der Linie QP, welche auf der Axe AP perpendiculär ist; oder es sey der erste Schnitt auf der Axe AB, und der andere auf der Axe AP senkrecht. Es sey EM der erste Schnitt, dessen Tangente MS, welche der QS in dem Punkte S begegnet, gesucht werde, so daß QS die Subtangente sey. Der andere Schnitt sey die Curve FM, seine Tangente MT, und die Subtangente QT. Hat man diese gefunden, so wird die Ebene SMT die Fläche in dem Punkte M berühren. Zieht man also die ST, so giebt dieselbe den Durchschnit der berührenden Ebene mit der Ebene APQ; und wenn man aus Q auf ST die senkrechte Linie QR zieht, so verhält sich QR zu QS wie der Radius zur Tangente des Winkels MRQ, unter welchem die berührende Ebene gegen die Ebene APQ geneigt ist.

§. 149.

Angenommen, daß die Subtangenten $QS = s$, und $QT = t$ nach der oben erklärten Methode gefunden seyen; so wird

$$PT = t - y; \; PX = s - \frac{sy}{t}; \text{ und also}$$

$$AX = x + \frac{sy}{t} - s.$$

Man lernt also hierdurch den Punkt X kennen, in welchem die gerade Linie ST die Axe AP schneidet, und da AXS $=$ TSQ ist, so ist die Tangente dieses Winkels $= \frac{t}{s}$, und

dadurch

dadurch wird die Lage des Schnitts der berührenden Ebene mit der Ebene APQ bekannt. Da ferner $ST = \sqrt{(ss + tt)}$ ist, so wird $QR = \frac{st}{\sqrt{(ss+tt)}}$, und dividirt man damit die QM, so bekommt man die Tangente des Neigungswinkels $MRQ = \frac{z\sqrt{(ss+tt)}}{st}$. Zieht man außerdem MN senkrecht auf MR, so ist diese Linie sowohl auf der berührenden Ebene als auf der Fläche selbst in dem Punkte M senkrecht, und man erkennt ihre Lage aus $QN = \frac{zz\sqrt{(ss+tt)}}{st}$. Man ziehe aus N auf die Axe AP die NV senkrecht, so wird, weil $QNV = QST$ ist, $PV = \frac{zz}{t} = QW$; und $NW = \frac{zz}{t}$. Wenn daher auf diese Art die Lage des Punktes N in der Ebene APQ bestimmt wird, so steht die gerade Linie NM auf der Fläche senkrecht.

§. 150.

Wie der Durchschnitt zweyer Flächen durch Projectionen erforscht werden müsse, ist bereits oben gezeigt worden; jetzt wollen wir untersuchen, zu was für einer Ordnung die Projection gehöre, wenn solche nach der Ordnung der Fläche bestimmt werden soll. Zuvörderst also geben zwey Flächen der ersten Ordnung oder zwey Ebenen für den Durchschnitt und seine Projection eine Linie der ersten Ordnung. Dann haben wir auch gesehen, daß diese Projection nicht über die zweyte Ordnung aufsteigen kann, wenn die eine Fläche zur zweyten, die andere zur ersten Ordnung gehört. Eben so ist offenbar, daß eine Projection nicht zu einer höhern, als der dritten Ordnung gehören werde, wenn die eine

Fläche

Fläche eine Fläche der dritten, und die andere eine Fläche der ersten Ordnung ist, u. s. w. Wenn aber beyde Flächen zur zweyten Ordnung gehören, so wird die Projection des Durchschnitts entweder zur vierten oder zu einer niedrigern Ordnung gehören, und überhaupt ist die höchste Ordnungszahl der Projection mn, wenn die Ordnungszahl der einen Fläche m, und die der andern n ist.

§. 151.

Wenn keine von den sich schneidenden Flächen eine Ebene ist, so ist ihr Durchschnitt meistens eine Curve, die nicht in einer Ebene liegt; doch kann auch der ganze Schnitt in einer Ebene sich befinden, und dieses geschiehet, wenn die Gleichungen beyder Flächen zusammengenommen eine Gleichung, wie $\alpha z + \beta y + \gamma z = f$ in sich enthalten. Um zu beurtheilen, ob dieses seyn werde, bestimme man aus beyden Gleichungen die beyden veränderlichen Größen z und y durch die dritte x, und dabey werde $z = P$, und $y = Q$, wo P und Q Funktionen von x sind. Dann überlege man, ob es eine Zahl n gebe, wobey sich in $P + nQ$ alle Potestäten von x bis auf die erste x und die beständigen Glieder einander aufheben. Ist dieses, und ist $P + nQ = mx + k$ so liegt der Schnitt in einer Ebene, und diese Ebene wird durch die Gleichung $z + ny = mx + k$ ausgedruckt.

§. 152.

Es seyen z. B. zwey Flächen der zweyten Ordnung, ein gerader Kegel, $zz = xx + yy$, und eine elliptisch hyperbolische Fläche des zweyten Geschlechts $zz = xx + 2yy - 2ax - aa$ gegeben. Da hieraus $xx + 2yy - 2ax - aa = xx + yy$ wird, so ist $y = \sqrt{(2ax + aa)}$ und $z = x + a$; und diese letzte Gleichung zeigt schon an, daß der ganze Schnitt in Einer Ebene liegen werde, deren Lage durch die Gleichung $z = x + a$ bestimmt wird. Auf diese Art lassen sich eine Menge von Aufgaben, die Natur der Flächen betreffend, auflösen. Reicht indeß das Bisherige nicht hin, so ist dazu die Analysis des Unendlichen erforderlich, wozu die gegenwärtigen Bücher den Weg bahnen.