Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Fünftes Capitel. Von den Flächen der zweyten Ordnung.

Fünftes Capitel.

Von den Flächen der zweyten Ordnung.

§. 101.

Da wir also die Ordnungen der Flächen nach der Zahl der Dimensionen festgesetzt haben, welche den höchsten Potestäten der drey Coordinaten x, y und z in der Gleichung zukommen: so ist es, wenn eine algebraische Gleichung für eine Fläche gegeben wird, leicht, sogleich die Ordnung anzugeben, zu welcher diese Fläche gehört. Da nun alle Flächen der ersten Ordnung Ebenen sind, so wollen wir in dem gegenwärtigen Capitel die Flächen der zweyten Ordnung betrachten. Bey denselben findet eine weit größere Verschiedenheit statt, als bey den Linien des zweyten Grades, wovon sich jeder bey einiger Aufmerksamkeit von selbst überzeugen kann. Ich werde suchen, die verschiedenen Geschlechter dieser Ordnung deutlich vorzustellen; was aber die Flächen der höhern Ordnungen betrifft, so ist die Menge der Geschlechter und Arten bey denselben so groß, daß wir uns der Auseinandersetzung derselben gänzlich enthalten müssen.

§. 102.

Da die Natur der Flächen der zweyten Ordnung durch eine Gleichung ausgedruckt wird, in welcher die veränderlichen Größen x, y und z zu zwey Dimensionen aufsteigen, so gehören der Cylinder und Kegel, die geraden sowohl als die schie-

schiefen, deren Eigenschaften wir schon beschrieben haben, zu dieser Ordnung. Alle Flächen aber, welche dieselbe unter sich begreift, sind in folgender allgemeinen Gleichung enthalten:

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \vartheta y + \iota x + \varkappa = 0$$

Denn man mag die drey Coordinaten annehmen, wie man will, so ist die Gleichung allemal in dieser enthalten. Die verschiedenen Arten der Flächen werden also von den verschiedenen Verhältnissen abhangen, welches die Coefficienten gegen einander haben, die, obgleich eben dieselbe Fläche durch unzählige Gleichungen ausgedruckt wird, dennoch eine unendliche Menge von verschiedenen Flächen erzeugen.

§. 103.

So wie wir bey den Curven die Haupteintheilung daher genommen haben, ob dieselben sich ohne Ende fort erstreckten, oder in einem endlichen Raume enthalten waren: so lassen sich auch alle Flächen, sie mögen zu einer Ordnung gehören, zu was für einer sie wollen, ebenfalls in zwey Classen eintheilen, davon die eine diejenigen Flächen enthält, welche sich ohne Ende fort erstrecken, die andere aber diejenigen, welche in einem endlichen Raume enthalten sind. So gehören der Cylinder und Kegel zu der ersten, und die Kugel zu der zweyten Classe. Von der zweyten Classe aber giebt es keine Art, die zu einer ungeraden Ordnung gehörte. Denn da jede Fläche einer ungeraden Ordnung ebene Schnitte von eben der Ordnung hat, und die Curven der ungeraden Ordnungen sich ohne Ende fort erstrecken, so müssen sich auch die Flächen dieser Ordnungen ohne Ende ausbreiten.

§. 104.

So oft sich aber eine Fläche ohne Ende fort erstrecken soll, so muß zum wenigsten eine von den drey veränderlichen Größen x, y und z unendlich groß werden. Da es nun gleich viel ist, welche dazu angenommen wird, so wollen wir setzen, daß z unendlich wird, wenn die Fläche ohne Ende fortläuft. Bey der Untersuchung dieses ohne Ende sich verbreitenden Theils nehmen wir also $z = \infty$ an, und nun kommt es vorzüglich auf die Betrachtung des ersten Gliedes αzz an, ob dasselbe in der Gleichung vorkommt oder nicht. Ist also dieses Glied da, so verschwinden dagegen die Glieder ηz und $\varkappa$, und es entsteht für diesen ohne Ende fortlaufenden Theil die Gleichung:

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \vartheta y + \iota x = 0$$

in welcher ferner alle Glieder, die nicht unendlich groß, oder solches doch von einer niedrigern Stufe als αzz sind, verschwinden.

§. 105.

Wir wollen annehmen, daß alle Glieder, in welchen die veränderlichen Größen zwey Dimensionen haben, da seyen; denn wie auch die Fläche beschaffen seyn mag, so enthält gleichwohl ihre allgemeinste Gleichung allemal alle Glieder von den höchsten Dimensionen, und es thut daher diese Annahme der Allgemeinheit unserer jetzigen Untersuchung keinen Eintrag. Wenn aber die Glieder yz und xz da sind, so verschwinden dagegen die Glieder ϑy und ιx, und es bleibt folgende Gleichung übrig:

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0$$

aus welcher fließt:

$$z = \frac{-\beta y - \gamma x \pm \sqrt{((\beta\beta - 4\alpha\delta)yy + (2\beta\gamma + 4\alpha\varepsilon)xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)xx)}}{\alpha}$$

 und

und diese Gleichung druckt die Natur des Theils der Fläche im Unendlichen aus.

§. 106.

Wenn also eine Fläche einen Theil im Unendlichen hat, so stimmt derselbe mit dem Theile der Fläche im Unendlichen überein, welcher durch folgende Gleichung ausgedruckt wird:

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0$$

so daß diese Fläche gleichsam die Asymptote jener durch die allgemeine Gleichung ausgedruckten Fläche ist. Da aber in dieser Gleichung die drey veränderlichen Größen allenthalben zwey Dimensionen haben, so ist diese Gleichung eine Gleichung für eine conische Fläche, welche den Scheitel im Anfangspunkte der Coordinaten hat, wo zugleich alle verschwinden; und es läßt sich daher, so oft sich eine Fläche ohne Ende fort erstreckt, allemal eine conische Fläche finden, welche als ihre Asymptote betrachtet werden kann. So wie wir daher die Schenkel der Curven, die sich ohne Ende fort erstreckten, nach geradlinigen Asymptoten eingetheilt haben, so kann man die Theile der Flächen, welche sich ohne Ende verbreiten, nach conischen Asymptoten-Flächen von einander unterscheiden.

§. 107.

So oft daher die conische Asymptoten-Fläche reell ist, so oft erstreckt sich die Fläche selbst ohne Ende fort, und zwar auf die Art, daß die Theile von beyden im Unendlichen zusammenfallen; und man kann daher aus der Natur der Asymptoten-Fläche die Natur der gegebenen Fläche erkennen. Wird aber die Asymptoten-Fläche imaginär, so hat die gegebene Fläche keinen Theil im Unendlichen, sondern

ist

ist ganz in einem endlichen Raume eingeschlossen. Um also die Flächen der zweyten Ordnung, die in einem endlichen Raume eingeschlossen sind, zu erforschen, darf man nur die Fälle aufsuchen, in welchen die Gleichung für die Asymptoten-Fläche imaginär wird, und dieses geschiehet, wenn die ganze Fläche in einen Punkt verschwindet. Denn wenn sie irgend eine Ausdehnung, oder irgend einen Punkt außer dem Scheitel hätte, so müßte sie sich auch ohne Ende fort erstrecken, weil wir oben gezeigt haben, daß die ganze gerade Linie, welche durch den Scheitel und einen Punkt der Fläche gezogen wird, in der Fläche selbst liege.

§. 108.

Wenn also die conische Asymptoten-Fläche, welche durch die Gleichung

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0$$

ausgedruckt wird, in einen Punkt übergeht, so müssen alle durch den Scheitel gehende Schnitte derselben gleichfalls in diesen Punkt verschwinden. Es muß daher einmal, wenn man $z = 0$ setzt, die Gleichung $\delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx$ unmöglich seyn, wenn nicht $x = 0$, und $y = 0$ ist, und dieses geschiehet, wenn $4\delta\zeta$ größer als $\varepsilon\varepsilon$ ist. Eben dieses muß ferner geschehen, wenn man entweder $x = 0$ oder $y = 0$ setzt, und es wird also $4\alpha\delta$ größer als $\beta\beta$, und $4\alpha\zeta$ größer als $\gamma\gamma$. Wofern also in einer Gleichung für eine Fläche der zweyten Ordnung

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \vartheta y + \iota x + \varkappa = 0$$

nicht $4\delta\zeta$ größer als $\varepsilon\varepsilon$; $4\alpha\delta$ größer als $\beta\beta$; $4\alpha\zeta$ größer als $\gamma\gamma$ ist, so hat die Fläche allemal Theile, die sich ohne Ende fort verbreiten.

§. 109.

Es reichen aber diese drey Bedingungen noch nicht hin, um eine Fläche in einen endlichen Raum einzuschließen, sondern es wird noch außerdem erfordert, daß der aus der Gleichung für die Asymptote hergeleitete Werth von z imaginär werde. Dies geschieht, wenn der Ausdruck

$$(\beta\beta - 4\alpha\delta)\,yy + 2(\beta\gamma - 2\alpha\varepsilon)\,xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)\,xx$$

beständig einen negativen Werth bekommt, wenn für jede der veränderlichen Größen x und y irgend ein Werth außer 0 gesetzt wird. Da $\beta\beta - 4\alpha\delta$, und $\gamma\gamma - 4\alpha\zeta$ negative Größen sind, so findet dieses statt, wenn $(\beta\gamma + 2\alpha\varepsilon)^2$ kleiner als $(\beta\beta - 4\alpha\delta)(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)$, oder wenn $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ kleiner als $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$ ist, vorausgesetzt, daß α einen positiven Werth habe, weil wir die Gleichung durch α dividirt haben. Hat aber α einen positiven Werth, so sind, weil $4\alpha\zeta$ größer als $\gamma\gamma$, und $4\alpha\delta$ größer als $\beta\beta$, und $4\delta\zeta$ größer als $\varepsilon\varepsilon$ ist, die Coefficienten δ und ζ positiv.

§. 110.

Es wird also eine Fläche der zweyten Ordnung in einem endlichen Raume eingeschlossen seyn, wenn bey ihrer Gleichung folgende vier Bedingungen statt finden, daß nemlich

$4\alpha\zeta$ größer als $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ größer als $\beta\beta$; $4\delta\zeta$ größer als $\varepsilon\varepsilon$

und

$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ kleiner als $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$

ist. Hiernach bestimmen wir das erste Geschlecht der Flächen der zweyten Ordnung auf die Art, daß wir dazu alle Flächen rechnen, die sich nicht ohne Ende fort verbreiten, sondern in einem endlichen Raume enthalten sind. Zu diesem Geschlechte gehört daher die Kugel, deren Gleichung

$$zz + yy + xx + aa$$

ist.

ist. Denn da hier $\alpha = 1$; $\delta = 1$; $\zeta = 1$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$; $\varepsilon = 0$ ist; so geschieht dadurch allen vier gefundenen Bedingungen ein Genüge. Allgemeiner aber kann man hieher die Gleichung

$$\alpha zz + \delta yy + \zeta xx = aa$$

rechnen, welche, wenn α, δ und ζ positive Größen sind, allemal einer begrenzten Fläche zugehört, wofern nicht ein oder zwey Coefficienten verschwinden.

§. 111.

Hat man sich von der Richtigkeit dieser vier Bedingungen, wodurch eine Fläche zu einer begrenzten wird, überzeugt, so ist es, wenn eine Gleichung für eine Fläche gegeben ist, leicht zu bestimmen, ob diese Fläche ohne Ende sich erstreckende Theile haben werde oder nicht. Fehlt nemlich eine von diesen Bedingungen, so hat sie gewiß dergleichen. In diesem Falle werden aber einige Unterabtheilungen nothwendig, um die ohne Ende sich erstreckenden Theile von einander zu unterscheiden. Die erste Unterabtheilung wird also seyn, wenn

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 \text{ größer als } \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$$

ist, in welchem Falle die Fläche sich ohne Ende fort verbreiten, und eine conische Fläche zur Asymptote haben wird, wie bereits gezeigt worden ist. Dieser Fall steht dem vorhergehenden gerade entgegen, in welchem die Fläche in einem endlichen Raume enthalten war.

§. 112.

Außerdem aber giebt es gewisse Zwischenfälle, wo die Fläche, ob sie sich gleich ohne Ende verbreitet, zwischen jenen auf ähnliche Art enthalten ist, wie die Parabel zwischen der Ellipse und Hyperbel. Dieser Fall entsteht, wenn

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$$

und also

$$\alpha z = -\beta y - \gamma x + y\sqrt{(\beta\beta - 4\alpha\delta)} + x\sqrt{(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}$$

ist. Es hat also die Gleichung für die Asymptote

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0$$

zwey einfache Faktoren, die entweder reell, oder imaginär, oder einander gleich seyn werden. Diese dreyfache Verschiedenheit giebt drey Geschlechter der Flächen, die sich ohne Ende verbreiten, und so haben wir überhaupt fünf Geschlechter der Flächen der zweyten Ordnung erhalten, welche wir nun genauer untersuchen wollen.

§. 113.

Da die allgemeine Gleichung durch die Veränderung der drey Axen, welchen die Coordinaten parallel sind, auf eine einfachere Form gebracht wird, so wollen wir uns dieser Reduktion auf die Art bedienen, daß wir die Gleichung auf eine einfachere Form bringen, ohne ihren Umfang einzuschränken. Da also die allgemeine Gleichung für die Flächen der zweyten Ordnung folgende ist:

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \kappa = 0$$

so wollen wir eine Gleichung zwischen drey andern Coordinaten p, q und r suchen, welche sich in eben dem Punkte schneiden, in welchen die drey vorigen es thaten. Zu dieser Absicht setze man aus § 92.

$$x = p(\cos.k.\cos.m - \sin.k.\sin.m.\cos.n) + q(\cos.k.\sin.m + \sin.k.\cos.m.\cos.n) - r.\sin.k.\sin.n$$

$$y = -p.(\cos.k.\cos.m + \cos.k.\sin.m.\cos.n) - q(\sin.k.\sin.m - \cos.k.\cos.m.\cos.n) - r.\cos.k.\sin.n$$

und

$$z = -p\sin.m.\sin n + q.\cos.m.\sin.n + r.\cos.n$$

wo:

wodurch man die Gleichung erhält

$$App + Bqq + Crr + Dpq + Epr + Fqr + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

§. 114.

Nun lassen sich die willkührlichen Größen k, m und n so bestimmen, daß die drey Coefficienten D, C und F verschwinden. Denn obgleich die Rechnung zu weitläuftig ist, als daß diese Bestimmung jener Winkel hier wirklich gezeigt werden könnte, so muß doch der, der daran zweifeln wollte, daß die Elimination jener Coefficienten allemal zu reellen Werthen der Winkel führe, zugeben, daß wenigstens zwey Coefficienten D und C Null gleich gemacht werden können. Ist aber dieses geschehen, so kann die Lage der dritten Axe, welcher die Ordinaten r parallel sind, in der der Ordinate p parallelen Ebene leicht so verändert werden, daß auch der Coefficient F verschwindet. Denn man setze

$$q = t.\sin. i + u.\cos. i; \text{ und } r = t.\cos. i - u.\sin. i$$

so daß statt des Gliedes qr das neue Glied tu eingeführt werde: so kann dessen Coefficient vermöge des Winkels i gleich Null gemacht werden. Auf diese Art erhält die allgemeine Gleichung für die Flächen der zweyten Ordnung folgende Form:

$$App + Bqq + Crr + Gp + Hq + Ir + K = 0$$

§. 115.

Ferner lassen sich die Coordinaten durch beständige Größen so vermehren oder vermindern, daß die Coefficienten G, H und I verschwinden, und zwar wird dazu bloß die Veränderung des Anfangspunktes aller Coordinaten erfordert.

Auf diese Art lassen sich alle Flächen der zweyten Ordnung in folgende Gleichung zusammenfassen:

$$App + Bqq + Crr + K = o$$

woraus erhellet, daß jede der drey durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegten Hauptebenen die Fläche in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt. Es hat daher jede Fläche der zweyten Ordnung nicht nur eine, sondern selbst drey Diametral-Ebenen, welche sich in demselben Punkte durchkreutzen, so daß daher auch dieser Punkt ein Mittelpunkt der Fläche wird, ob er gleich in einigen Fällen unendlich weit entfernt ist. Man legt nemlich der Fläche auf ähnliche Art einen Mittelpunkt bey, als man solches bey den Kegelschnitten thut, ob derselbe gleich bey der Parabel unendlich weit entfernt ist.

§. 116.

Hat man also die allgemeine Gleichung für die Flächen der zweyten Ordnung auf die einfachste Form gebracht, so bietet die Gleichung

$$App + Bqq + Crr = aa$$

das erste Geschlecht dieser Flächen dar, wenn alle drey Coefficienten A, B und C positiv sind; und die Flächen, welche zu diesem Geschlechte gehören, sind daher nicht nur ganz in einem endlichen Raume enthalten, sondern sie haben auch insgesammt einen Mittelpunkt, in welchem sich die drey Diametral-Ebnen unter rechten Winkeln schneiden. Es sey, Fig. 143, C der Mittelpunkt dieser Figur, und CA, CB, CD die auf einander senkrechten Hauptaxen, welchen die Coordinaten p, q und r parallel sind: so sind die drey Diametral-Ebenen ABab, ADa und BDb und durch dieselben wird dieser Körper in je zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt.

§. 117.

Man setze $r = o$, so druckt die Gleichung $App + Bqq = aa$ die Natur des Hauptschnittes $ABab$ aus, der also eine Ellipse seyn wird, welche den Mittelpunkt in C, und die Halbaxen $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$, und $CB = Cb = \frac{a}{\sqrt{B}}$ hat. Setzt man $q = o$, so gehört die Gleichung $App + Crr = aa$ dem Hauptschnitte ADa zu, der aso ebenfalls eine Ellipse ist, welche den Mittelpunkt in C hat, und deren Halbaxen $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$, und $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$ sind. Setzt man endlich $p = o$, so bekommt man für den dritten Hauptschnitt BDb die Gleichung $Bqq + Crr = aa$, der daher auch eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt in C liegt, und deren Halbaxen $CB = Cb = \frac{a}{\sqrt{B}}$ und $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$ sind. Kennt man aber diese drey Hauptschnitte, oder bloß ihre Hauptaxen $CA = \frac{a}{\sqrt{A}}$; $CB = \frac{a}{\sqrt{B}}$, und $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$: so ist dadurch auch die Natur dieses Körpers bekannt. Da die drey Hauptschnitte dieses ersten Geschlechts der Flächen der zweyten Ordnung Ellipsen sind, so kann man diese Flächen Elliptoiden nennen.

§. 118.

Zu diesem Geschlechte gehören drey Arten, die vor andern zu merken sind. Die erste ist, wenn alle drey Hauptaxen CA, CB und CD einander gleich sind. In diesem Falle gehen die gedachten Hauptschnitte in Kreise, und der Körper in eine Kugel über, deren Gleichung, wie wir oben gesehen haben, $pp + qq + rr = aa$ ist. Die zweyte Art begreift die Fälle unter sich, wo zwey Hauptaxen einander

ander gleich sind. Es sey nemlich $CD = CB$, oder $C = B$, so wird der Schnitt BDb ein Kreis, und aus der Gleichung $App + B(qq + rr) = aa$ erhellet, daß alle diesem parallele Schnitte ebenfalls Kreise seyn werden. Es wird daher dieser Körper ein längliches Sphäroid, wenn AC größer als BC, und ein zusammengedrucktes, wenn AC kleiner als BC. Die dritte Art begreift endlich die Körper unter sich, wo die drey Coefficienten A, B und C ungleich sind, und diese behalten den allgemeinen Namen der Ellipsoiden.

§. 119.

Die folgenden Geschlechter der Flächen der zweyten Ordnung sind in dieser Gleichung enthalten:

$$App + Bqq + Crr = aa,$$

und zwar zuvörderst, wenn von den Coefficienten A, B und C gar keiner fehlt, und entweder einer oder zwey negativ sind. Es sey bloß der eine von ihnen negativ, wobey wir folgende Gleichung

$$App + Bqq - Crr = aa$$

betrachten wollen, bey welcher wir annehmen, daß A, B und C positive Größen bedeuten. Was den Mittelpunkt dieses Körpers, und seine Diametral-Ebenen betrift, so verhält es sich damit eben so wie vorhin. Es erhellet also, daß der erste Hauptschnitt dieses Körpers $A\mathfrak{B}ab$, Fig. 144, eine Ellipse ist, deren Halbaxen $AC = \frac{a}{\sqrt{A}}$, und $BC = \frac{a}{\sqrt{B}}$ sind. Die beyden übrigen Hauptschnitte Aq und BS aber sind Hyperbeln, welche den Mittelpunkt in C, und die halbe zugehörige Axe $= \frac{a}{\sqrt{C}}$ haben.

§. 120.

Es stellt also diese Fläche einen Trichter vor, der oben und unten nach Hyperbeln abweicht, und es hat daher dieselbe einen Kegel zur Asymptote, welcher durch die Gleichung $App + Bqq - Crr = o$ ausgedruckt wird, den Scheitel in dem Mittelpunkte C hat, und dessen Seiten die Asymptoten der Hyperbeln sind. Es steht aber dieser Asymptoten-Kegel zwischen der Fläche, und ist ein gerader, wenn $A = B$, und ein schiefer, wenn A nicht $= B$ ist. Die Axe desselben ist die gerade auf der Ebene ABa senkrechte Linie CD. Uebrigens sind alle der Axe CD senkrechte Schnitte Ellipsen, welche der Ellipse ABab ähnlich sind, so wie hingegen die, welche auf der Ebene ABab senkrecht sind, Hyperbeln; daher man auch diese Flächen elliptisch-hyperbolische nennen kann, welche ihren Asymptoten-Kegel umgeben. Diese Flächen machen also unser zweytes Geschlecht aus.

§. 121.

Bey diesem Geschlechte können wieder drey Arten von einander unterschieden werden. Die erste ist diejenige, welche entsteht, wenn $a = o$ ist, in welchem Falle die Ellipse ABab in einen Punkt verschwindet, die Hyperbeln in gerade Linien übergehen, und die Fläche selbst ganz mit ihrer Asymptote zusammenfällt. Es faßt daher diese erste Art alle gerade sowohl als schiefe Kegel unter sich, worauf man eine neue Abtheilung gründen könnte. Die zweyte Art ergiebt sich, wenn $A = B$ wird, in welchem Falle die Ellipse ABab in einen Kreis übergeht, und die Fläche selbst eine runde oder gedrehete Fläche wird. Es entsteht nemlich diese Fläche, wenn sich eine Hyperbel um ihre zuge-

hörige

hörige Axe dreht. Die dritte Art kommt mit dem Geschlechte selbst überein.

§. 122.

Das dritte Geschlecht wollen wir auf die Art bestimmen, daß dabey zwey Coefficienten der Glieder pp, qq und rr negativ werden, und es ist daher die Gleichung für dieses Geschlecht

$$App - Bqq - Crr = aa$$

Setzt man also $r = o$, so ist erste der Hauptschnitt EAFeaf, Fig. 145, eine Hyperbel, welche den Mittelpunkt in C hat, und deren Halbaxen $\frac{a}{\sqrt{A}}$ und $\frac{a}{\sqrt{B}}$ sind. Der andere Hauptschnitt, welchen man erhält, wenn man $q = o$ setzt, ist gleichfalls eine Hyperbel AQ, aq, welche eben dieselbe halbe Zwergaxe hat, deren zugehörige Halbaxe aber $= \frac{a}{\sqrt{C}}$ ist. Der dritte Hauptschnitt wird imaginär. Endlich liegt diese ganze Fläche zwischen der conischen Asymptoten-Fläche, und man kann sie daher die hyperbolisch-hyperbolische nenneu, welche in einen Asymptoten Kegel beschrieben ist. Wenn $B = C$ wird, so ist die Fläche rund, denn sie entsteht alsdenn durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre Zwergaxe, waraus man eine besondere Art machen könnte. Wenn aber $a = o$ gesetzt wird, so ergiebt sich eine conische Fläche, welche wir bereits als eine Art des vorhergehenden Geschlecht betrachtet haben.

§. 123.

Um die folgenden Glieder kennen zu lernen, wollen wir annehmen, daß einer von den Coefficienten A, B und C verschwinschwinde. Es sey also $C = 0$, so ist die § 114 gefundene allgemeine Gleichung

$$App + Bqq + Gp + Hq + Ir + K = 0$$

aus welcher man durch Vergrößerung oder Verkleinerung der Ordinaten p und q zwar die Glieder Gp und Hq, aber nicht Ir wegschaffen kann. Es bleibt also das Glied Ir in der Gleichung zurück; allein man kann vermittelst desselben das letzte Glied K wegbringen, und wir haben daher die Gleichung

$$App + Bqq = rr$$

wobey zwey Fälle zu erwägen sind. Der erste findet statt, wenn beyde Coefficienten A und B positiv sind; der andere, wenn der eine davon negativ ist. In beyden Fällen ist der Mittelpunkt der Fläche in der Axe CD befindlich, aber unendlich weit entfernt.

§. 124.

Es seyen zuvörderst beyde Coefficienten A und B positiv, so bekommt man das vierte Geschlecht, welches durch diese Gleichung:

$$App + Bqq = ar$$

ausgedruckt wird. Der erste Hauptschnitt, welcher entsteht, wenn man $r = 0$ setzt, verschwindet demnach in einen Punkt, der andere und dritte, wovon jener entsteht, wenn man $q = 0$, und dieser, wenn man $p = 0$ setzt, sind beyde Parabeln, nemlich MAm und NAn, Fig. 146. Da also bey dieser Fläche alle auf der Axe AD senkrechte Schnitte Ellipsen, die Schnitte aber, welche durch die Axe gehen, Parabeln sind, so wollen wir die Körper dieses Geschlechtes elliptisch parabolische Körper nennen. Es giebt davon zwey Arten; die eine findet statt, wenn $A = B$ ist, in welchem Falle der Körper ein runder Körper wird, und kegelförmig parabolisch heißt; die andere entsteht, wenn $a = o$ ist, und $App + Bqq = bb$ wird. Diese Art giebt Cylinder, sowohl gerade, wenn $A = B$, als schiefe, wenn A nicht $= B$ ist.

§. 125.

Das fünfte Geschlecht ist in der Gleichung

$$App - Bqq = ar$$

enthalten, und sein erster Hauptschnitt, wenn $r = o$ wird, sind zwey gerade Linien Ee und Ff, welche sich in dem Punkte A schneiden. Alle Schnitte, welche diesem parallel sind, sind Hyperbeln, welche ihre Mittelpunkte in der Axe AD haben, und zwischen den Asymptoten Ee und Ff liegen. Die beyden Ebenen, welche auf der Ebene ABC in den Linien Ee und Ff senkrecht stehen, fallen im Unendlichen mit der gegebenen Fläche zusammen, und es hat daher diese Fläche zwey sich schneidende Ebenen zu Asymptoten. Die übrigen Hauptschnitte sind Parabeln, und man kann daher die zu diesem Geschlechte gehörigen Flächen parabolisch hyperbolische nennen, die zwey Ebenen zu Asympoten haben. Eine Art davon, (wenn $a = o$ wird, so daß $App - Bqq = bb$ ist), ist der hyperbolische Cylinder, dessen auf der Axe AD senkrechte Schnitte insgesammt unter einander gleiche Hyperbeln sind. Ist überdem $b = o$ so entstehen die beyden Asymptoten-Ebenen.

§. 126.

Das sechste Geschlecht der Flächen der zweyten Ordnung endlich ist in der Gleichung enthalten:

$$App = aq$$

und diese giebt einen parabolischen Cylinder, dessen auf der Axe AB senkrechte Schnitte insgesammt einander ähnliche

und

und gleiche Parabeln sind, so daß die Scheitel derselben in die gerade Linie AD fallen, und die Axen einander parallel sind. Auf diese sechs Geschlechter lassen sich also alle Flächen der zweyten Ordnung zurückführen, so daß keine angegeben werden kann, die nicht darunter begriffen wäre. Wenn übrigens in dem letzten Geschlechte $a = o$, und also $App = bb$ ist, so giebt diese Gleichung zwey einander parallele Ebenen, die gleichsam eine Art dieses Geschlechts ausmachen. Es findet hier etwas ähnliches statt, wie bey den Linien der zweyten Ordnung, wo zwey sich schneidende gerade Linien als eine Art der Hyperbel, zwey parallele Linien aber als eine Art von Parabel betrachtet werden können.

§. 127.

Ob wir gleich diese sechs Arten aus der einfachsten Gleichung abgeleitet haben, auf welche sich die Gleichung für die Flächen der zweyten Ordnung zurückführen läßt: so ist es nunmehr dennoch leicht, bey jeder gegebenen Gleichung des zweyten Grades das Geschlecht anzuzeigen, zu welchem die Fläche gehört. Ist nemlich die Gleichung

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + k = o:$$

so muß man nach den höchsten Gliedern, worin zwey Dimensionen der veränderlichen Größen vorkommen, urtheilen, und also folgende Glieder betrachten

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx.$$

Ist darin $4\alpha\zeta$ größer als $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ größer als $\beta\beta$; $4\delta\zeta$ größer als $\varepsilon\varepsilon$, und

$$\alpha\varepsilon\varepsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta \text{ kleiner als } \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$$

so ist die Fläche in einem endlichen Raume enthalten, und gehört zu dem ersten Geschlechte der Ellipsoiden.

§. 128.

Wenn eine oder mehrere von diesen Bedingungen fehlen, und gleichwohl nicht $\alpha\varepsilon\varepsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$ ist, so gehört die Fläche entweder zum zweyten oder zum dritten Geschlechte, und ist eine hyperbolische Oberfläche, die einen Kegel zur Asymptote hat, und entweder um denselben, wie beym zweyten, oder in demselben beschrieben ist, wie beym dritten Geschlechte. Wenn aber $\alpha\varepsilon\varepsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$ ist, so kann der Ausdruck

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx$$

in zwey einfache, reelle oder imaginäre Faktoren aufgelöset werden. Im ersten Falle gehört die Fläche zu dem vierten, im andern zu dem fünften Geschlechte. Hat endlich der gedachte Ausdruck zwey gleiche Faktoren, oder ist derselbe ein Quadrat, so gehört die Fläche zu dem sechsten Geschlechte. Auf diese Art kann man sogleich beurtheilen, zu was für einem Geschlechte eine Fläche gehöre, und es findet sich bloß bey dem zweyten und dritten einige Schwierigkeit, daher man auch beyde in eins zusammenfassen könnte.

§. 129.

Auf ähnliche Art lassen sich die Flächen der dritten und der folgenden Ordnungen behandeln und in Geschlechter eintheilen. Man braucht nemlich bloß die höchsten Glieder der Gleichungen in Erwägung zu ziehen, d. h. bey den Flächen der dritten Ordnung diejenigen, worin die Coordinaten drey Dimensionen haben, und welche also sind:

$$\alpha z^3 + \beta yz^2 + \gamma y^2 z + \delta x^2 z + \varepsilon xz^2 + \zeta xyz + \text{ꝛc.}$$

Zuvörderst muß man also überlegen, ob diese Glieder zusammengenommen, oder das höchste Glied der Gleichung in einfache Faktoren aufgelöset werden kann oder nicht. Wenn diese Auflösung nicht statt findet, so hat die Fläche

einen

einen Kegel der dritten Ordnung zur Asymptote. Da aber die Natur dieses Kegels durch das höchste Glied ausgedruckt wird, wenn man dasselbe $= 0$ setzt, so giebt es mehrere dergleichen Kegel der dritten Ordnung, nach deren Verschiedenheit mehrere Geschlechter von Flächen entstehen. Denn obgleich alle Kegel der zweyten Ordnung zu einem Geschlechte gerechnet werden, indem sie entweder gerade oder schief sind, so findet doch bey der dritten Ordnung eine weit größere Mannigfaltigkeit statt.

§. 130.

Nachdem diese Geschlechter aus einander gesetzt sind, muß man die Fälle betrachten, wo das höchste Glied in einfache Faktoren, und zwar entweder in reelle oder in imaginäre aufgelöset werden kann. Es habe dasselbe zuvörderst einen und zwar reellen Faktor, so hat die Fläche eine ebene Asymptote. Der andere Faktor giebt, wenn man ihn $= 0$ setzt, entweder eine mögliche oder eine unmögliche Gleichung, und es giebt daher entweder eine einzige ebene Asymptote, oder die Fläche hat zwey Asymptoten, eine ebene, und einen Kegel der zweyten Ordnung. Sind drey Faktoren einfach, so sind, weil darunter allemal ein reeller ist, die beyden übrigen entweder ebenfalls reell oder imaginär, und daher entspringen wieder zwey neue Geschlechter. Endlich ergeben sich, wenn alle drey einfache Faktoren reell sind, noch daher zwey Geschlechter, ob davon zwey, oder ob alle drey einander gleich sind. Zu dieser Ordnung gehört übrigens keine Fläche, die sich nicht ohne Ende fort verbreitete.
