Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Viertes Capitel. Von der Verwechselung der Coordinaten.

Viertes Capitel.

Von der Verwechselung der Coordinaten.

§. 86.

So wie die Gleichungen für die krummen Linien, die in einer Ebene liegen, durch Veränderung entweder des Anfangspunkts der Abscissen, oder der Lage der Axen, oder beyder Dinge, unzählige Formen bekommen können, so findet diese Verschiedenheit bey den gegenwärtigen Gleichungen in einem noch weit höhern Grade statt. Denn einmal können in der Ebene, in welcher zwey Coordinaten liegen, diese Coordinaten auf unzählige Arten verändert worden; und dann läßt sich auch die Ebene, welche zwey Coordinaten enthält, verändern, und auf diese Weise die vorhergehende Verschiedenheit unendlich vermehren. Ist nemlich eine Gleichung zwischen drey auf einander senkrechten Coordinaten gegeben, so läßt sich allemal eine andere Gleichung zwischen drey andern ebenfalls auf einander senkrechten Coordinaten finden, deren Lage in Ansehung der vorigen unendlich mehrmal verändert werden kann, als wenn nur zwey Coordinaten da wären, wie bey den Gleichungen für die krummen Linien.

§. 87.

Angenommen, daß zuvörderst bloß der Anfangspunkt der Abscissen x in der Axe verändert werde, und die bey-

den

den übrigen Coordinaten dieselben bleiben; so wird die neue Abscisse von der vorigen um eine beständige Größe unterschieden seyn. Es sey also die neue Abscisse $= t$, so ist $x = t \pm a$; und bringt man diesen Werth in die für die Fläche gegebene Gleichung, so bekommt man eine Gleichung zwischen den drey Coordinaten t, y und z, die zwar von der vorigen verschieden ist, aber gleichwohl eben der Fläche zugehört. Auf ähnliche Art können auch die übrigen Coordinaten y und z um beständige Größen vermehrt oder vermindert werden: und setzt man $x = t \pm a$; $y = u \pm b$; und $z = v \pm c$, so bekommt man eine Gleichung für eben die Fläche zwischen den Coordinaten t, u und v, welche selbst den vorigen parallel sind. Ob indeß diese Gleichung gleich allgemeiner ist, so ist sie doch von der gegebenen eben nicht sehr verschieden.

§. 88.

Da die drey rechtwinkligen Coordinaten, deren Gleichung die Natur der Fläche ausdruckt, auf drey auf einander senkrechte Ebenen bezogen werden, so wollen wir annehmen, daß die neue Ebene, in welcher die beyden Coordinaten x und y genommen werden, unverändert bleibe, daß aber darin eine andere gerade Linie CT, Fig. 140, zur Axe angenommen werde. Da nun die vorigen Coordinaten bey der Axe AP folgende waren, $AP = x$, $PM = y$, $QM = z$, so bleibt für die neue Axe CQ die Coordinate $QM = z$ dieselbe, die beyden übrigen aber werden $CT = t$, und $TQ = u$, wenn man QT auf die neue Axe CT senkrecht gezogen hat. Um daher die Gleichung zwischen diesen neuen Coordinaten t, u und z zu finden, ziehe man CR der vorigen Axe AP parallel, und aus C auf sie CB senkrecht, und setze $AB = a$, $BC = b$, und den Winkel

$RCT = \zeta$. Endlich ziehe man TR auf CR, und aus T auf PQ die TS senkrecht.

§. 89.

Ist dieses geschehen, so ist in dem Dreyeck TCR

$$TR = t.\sin.\zeta;\ \text{und}\ CR = t\cos.\zeta$$

in dem Dreyecke QTS aber, dessen Winkel bey Q ebenfalls $= \zeta$ ist,

$$TS = u\sin.\zeta;\ \text{und}\ QS = u.\cos.\zeta$$

Hieraus findet man

$$AP = x = CR + TS - AB = t.\cos.\zeta + u.\sin.\zeta - a;$$

und

$$QP = y = QS - TR - BC = u.\cos.\zeta - t.\sin.\zeta - b$$

Bringt man daher diese Werthe für x und y in die für die Fläche gegebene Gleichung, so bekommt man eine andere Gleichung zwischen den neuen Coordinaten t, u und z, welche ebenfalls die Natur der gegebenen Fläche ausdruckt. Diese neue Gleichung hat einen viel weitern Umfang, da in ihr drey neue willkührliche beständige Größen a, b, und der Winkel ζ befindlich sind, die in der vorigen Gleichung nicht anzutreffen waren. Auch ist sie die allgemeinste Gleichung, wenn die Ebene, worin x und y liegen, beybehalten wird.

§. 90.

Es ändere sich nunmehr auch die Ebene, in welcher x und y angenommen worden, und zwar zuvörderst so, daß die Durchschnittslinie der neuen Ebene mit der vorigen APQ, Fig. 141, in die gerade Linie AP falle, die zugleich als die Axe der neuen Coordinaten angesehen werden soll. Es sey also APT diese neue Ebene, deren Neigungswinkel gegen die vorige der Winkel QPT ist, den wir $= \iota$ setzen wollen, und aus M nach PT senkrecht MT gezogen,

welche

welche auch auf der neuen Ebene senkrecht seyn wird, und die Stelle der dritten Coordinate vertreten kann. Man setze also $AP = x$, $PT = u$; und $TM = v$, so ist, wenn wenn man TR auf PQ und TS auf QM senkrecht gezogen hat,

$$TR = u.\sin.\eta;\ PR = u.\cos.\eta;\ Ts = v.\sin.\eta;$$
$$MS = v.\cos.\eta$$

und folglich

$$PQ = y = u.\cos.\eta - v.\sin.\eta;\ \text{und}$$
$$QM = z = v.\cos.\eta - u.\sin.\eta.$$

Bringt man diese Werthe für y und z in die gegebene Gleichung, so erhält man eine zwischen den drey neuen Coordinaten x, u, und v, welche die Natur eben der Fläche ausdruckt.

§. 91.

Es falle nun der Schnitt der neuen schneidenden Ebene und der Ebene APQ in irgend eine Linie CT, und η sey der Neigungswinkel dieser Ebenen, und CT die Axe in dieser Ebene. Man suche zuvörderst eine Gleichung zwischen den Coordinaten in der Ebene APQ auf die Axe CT bezogen, welche man aus der vorhergehenden auf die Art finden wird, daß bey

$$AB = a;\ BC = b;\ TCR = \zeta;\ CT = p;\ TQ = q;$$
$$\text{und } QM = r$$
$$x = p.\cos.\zeta + q.\sin.\zeta - a;$$
$$y = q.\cos.\zeta - p.\sin.\zeta - b;\ \text{und } z = r$$

ist. Es wird aber aus dem vorhergehenden §, wenn man die neuen Coordinaten t, u und v nennt

$$p = t;\ q = u.\cos.\eta - v.\sin.\eta;\ \text{und } r = v.\cos.\eta + u.\sin.\eta,$$

und folglich

$$x = t \cdot \cos. \zeta + u \cdot \sin. \zeta \cdot \cos. \eta - v \cdot \sin. \zeta \cdot \sin. \eta - a$$
$$y = - t \cdot \sin. \zeta + u \cdot \cos. \zeta \cdot \cos. \eta - v \cdot \cos. \zeta \cdot \sin. \eta - b$$

und

$$z = u \cdot \sin. \eta + v \cdot \cos. \eta.$$

§. 92.

Nun nehme man in der neuen Ebene, in welcher die Coordinaten t und u liegen, irgend eine andere Linie zur Axe an, um die allgemeinste Gleichung für die gegebene Fläche zu bekommen. Es seyen zu dem Ende AP, PQ, QM, Fig. 140, die Coordinaten t, u und v, welche wir so eben gefunden haben, so daß AP der Durchschnitt der erwähnten Ebene mit derjenigen sey, in welcher man sich die Hauptcoordinaten x und y denkt. Es sey CT die neue Axe, auf welche die neuen allgemeinsten Coordinaten, welche wir suchen, bezogen werden, und CT = p; TQ = q; und QM = r. Außerdem sind die Linien AB und BC beständige Linien, der Winkel CTR aber sey = ϑ. Dies vorausgesetzt, so ist nach § 89.

$$t = p \cdot \cos. \vartheta + q \cdot \sin. \vartheta - AB$$
$$u = - p \cdot \sin. \vartheta + q \cdot \cos. \vartheta - BC$$

und

$$v = r.$$

Bringt man diese Werthe in die Ausdrücke des vorhergehenden §, so findet man

$$x = p(\cos. \zeta \cdot \cos. \vartheta - \sin. \zeta \cdot \cos. \eta \cdot \sin. \vartheta) + q \cdot (\cos. \zeta \cdot \sin. \vartheta + \sin. \zeta \cdot \cos. \eta \cdot \cos. \vartheta) - r \cdot \sin. \zeta \cdot \sin. \eta + f$$
$$y = - p(\sin \zeta \cdot \cos. \vartheta + \cos. \zeta \cdot \cos. \eta \cdot \sin. \vartheta) - q \cdot (\sin. \zeta \cdot \sin. \vartheta - \cos. \zeta \cdot \cos. \eta \cdot \cos. \vartheta) - r \cdot \cos. \zeta \cdot \sin. \eta + g$$

und

$$z = - p \cdot \sin. \eta \cdot \sin. \vartheta + q \cdot \sin. \eta \cdot \cos. \vartheta + r \cdot \cos. \eta \cdot + h$$

wo

wo f, g und h beständige, und aus den in die Rechnung eingeführten entstandene Linien sind.

§. 93.

Es enthält also die allgemeinste Gleichung für jede Fläche sechs beständige willkührliche Größen, die man annehmen kann wie man will, ohne daß deswegen durch die Gleichung eine andere Fläche ausgedruckt werde. So einfach aber eine Gleichung zwischen den Coordinaten x, y und z für eine Fläche seyn mag, so wird sie, wenn man daraus die allgemeinste Gleichung zwischen p, q und r macht, wegen der großen Menge der beständigen willkührlichen Größen nothwendig sehr verwickelt, insbesondere, wenn höhere Potestäten von x, y und z vorkommen. Es sind daher die Fälle selten, wo es rathsam wäre, zu der allgemeinsten Gleichung aufzusteigen. Denn wenn man gleich daraus den Vortheil ziehen könnte, daß man durch eine geschickte Bestimmung der beständigen Größe die Gleichung auf die einfachste Form zurückführte, so wird doch diese Arbeit wegen der Weitläuftigkeit des Calculs meistens sehr beschwerlich. Zur Erforschung mehrerer merkwürdigen Eigenschaften aber leistet die Verwandlung der Gleichung in die allgemeinste allerdings Nutzen.

§. 94.

So verwickelt indeß die allgemeinste Gleichung meistens ist, so ist doch die Anzahl der Dimensionen der Coordinaten in derselben der Anzahl der Dimensionen der ersten Coordinaten x, y und z gleich. Die Gleichung für die Kugel z. B. $xx + yy + zz = aa$ ist eine Gleichung von zwey Dimensionen, und die allgemeinste Gleichung enthält ebenfalls nicht mehr Dimensionen der Coordinaten p, q

und

und r. Aus diesem Grunde giebt die Anzahl der Dimensionen, welche die Coordinaten in einer Gleichung für eine Fläche haben, ein wesentliches Kennzeichen der Natur dieser Fläche, weil diese Anzahl immer dieselbe bleibt, man mag die Lage der Coordinaten verändern, wie man will. Es findet sich hier nemlich bey den Flächen eine ähnliche Beschaffenheit wie bey den Curven, wornach wir dieselben in Ordnungen getheilt haben; und es lassen sich daher die Flächen ebenfalls nach den Dimensionen ihrer Coordinaten in Ordnungen theilen. Eine Fläche der ersten Ordnung ist demnach die, deren Gleichung nur eine, eine Fläche der zweyten Ordnung die, deren Gleichung zwey Dimensionen enthalten, u. s. f.

§. 95.

Wenn man dieses mit dem vergleicht, was von der Erfindung der ebenen Schnitte jeder Fläche gelehret worden ist, so nimmt man wahr, daß die Ordnung dieser Schnitte allemal mit der Ordnung der Fläche übereinstimmt. Es sey nemlich eine Gleichung für irgend eine Fläche zwischen den Coordinaten x, y und z gegeben, die zur nten Ordnung gehöre, und die senkrechten Coordinaten eines jeden Schnittes seyen t und u. Nun haben wir oben, § 85, gesehen, daß man die Gleichung zwischen t und u findet, wenn man in der gegebenen Gleichung für die Fläche

$$x = f + t.\mathrm{cos}.\vartheta - u.\mathrm{sin}.\vartheta.\mathrm{cos}.\varphi$$

$$y = t.\mathrm{sin}.\vartheta + u.\mathrm{cos}.\vartheta.\mathrm{cos}.\varphi$$

und

$$z = u.\mathrm{sin}.\varphi$$

setzt, und es ist daher offenbar, daß die Gleichung für den Schnitt nicht mehr Dimensionen bekommen kann, als die Gleichung zwischen x, y und z hat, sondern daß allemal eben so viel Dimensionen wieder entstehen werden.

§. 96.

Es kann also die Fläche der ersten Ordnung von einer Ebene nicht anders als in einer Linie der ersten Ordnung, oder in einer geraden Linie geschnitten werden. Ferner giebt die Durchschneidung einer Fläche der zweyten Ordnung keine andere Linien als Linien der zweyten Ordnung oder Kegelschnitte, denn es gehören auch die conischen Flächen zu der zweyten Ordnung, indem ihre Gleichung

$$zz = \alpha xx + \beta yy$$

ist. Auf ähnliche Art entstehen aus der Durchschneidung einer Fläche der dritten Ordnung durch Ebenen Linien der dritten Ordnung, rc. Es kann indeß geschehen, daß eine Gleichung für einen Schnitt Divisoren zuläßt, und in diesem Falle ist der Schnitt aus zwey oder mehrern Linien von den niedrigern Ordnungen zusammengesetzt. So besteht der durch den Scheitel gehende Schnitt des Kegels aus zwey geraden Linien, die aber zusammengenommen als zu der zweyten Ordnung gehörig sich darstellen.

§. 97.

Nach dieser Bestimmung der Ordnungen der Flächen wollen wir vor allen übrigen die Flächen betrachten, welche zu der ersten Ordnung gehören. Die Gleichung, welche die Natur derselben ausdruckt, ist

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha$$

und da alle ebene Schnitte derselben gerade Linien sind, so fällt in die Augen, daß diese Fläche keine andere als eine Ebene seyn kann; denn sollte sie erhaben oder hohl seyn, so müßte sie auch krummlinige Schnitte haben. Nun giebt es zwar unter den übrigen Ordnungen ebenfalls Flächen, bey welchen gewisse Schnitte gerade Linien sind, wie z. B.

bey

bey den Cylinder dem Kegel und andern dergleichen statt finden, aber es sind doch dabey die krummlinigen Schnitte nicht ganz ausgeschlossen. Es verhält sich nemlich hier auf eine ähnliche Art, wie bey den Linien. So wie eine Linie, die von einer geraden Linie nie in mehr als in einem Punkte geschnitten werden kann, nothwendig eine gerade Linie ist, so ist auch die Fläche, welche, von einer Ebene geschnitten, jedesmal eine gerade Linie giebt, nothwendiger Weise auch selbst eine Ebene.

§. 98.

Aus der allgemeinsten Gleichung läßt sich diese Beschaffenheit aufs klärste darthun. Man mache nemlich aus der Gleichung $\alpha x + \beta y + \gamma z + a$ die allgemeinste Gleichung zwischen den Coordinaten p, q und r nach dem 92sten §. Da darin sechs neue willkührliche beständige Größen vorkommen, so ist es allemal möglich und erlaubt, dieselben so zu bestimmen, daß die Coefficienten der beyden Coordinaten p und q verschwinden, und also eine Gleichung von der Form $r = f$ übrig bleibe, welche die Natur eben der Fläche ausdruckt. Es zeigt aber diese Gleichung an, daß die gegebene Fläche der Ebene, in welcher die beyden Coordinaten p und q sind, parallel, und also selbst eine Ebene ist. Man kann es auch so einrichten, daß $r = o$ wird, und auf diese Art fällt es in die Augen, daß die Ebene, wie p und q angenommen worden, selbst die gesuchte Ebene ist.

§. 99.

Da also ausgemacht ist, daß die durch die Gleichung $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ ausgedruckte Fläche eine Ebene ist, so müssen wir die Lage derselben gegen die Ebene, worin die Coordinaten x und y angenommen werden, untersuchen.

Es sey also Fig. 142, M irgend ein Punkt dieser Fläche, und die drey Coordinaten $AP = x$, $PQ = y$ und $QM = z$. Man setze zuvörderst $z = o$, so bekommt man die Gleichung $\alpha x + \beta y = a$, welche den Schnitt der gesuchten Fläche und der Ebene APQ ausdruckt, und es ist klar, daß derselbe eine gerade Linie BCR ist, deren Lage in Rücksicht auf die Axe so beschaffen seyn wird, daß die auf der Axe AP in der Ebene senkrechte Linie $AB = \frac{\alpha}{\beta}$, und

$AC = \frac{a}{\alpha}$, und folglich

$$\text{tang.}\, ACB = \frac{\alpha}{\beta}\,;\ \sin.\, ACB = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}} \text{ und } \cos.\, ACB =$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}} \text{ ist.}$$

Nun verlängere man die QP bis sie der geraden Linie BC in R begegne, so ist wegen $CP = x - \frac{a}{\alpha}$

$$CR = \frac{x\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\beta} - \frac{a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\alpha\beta}, \text{ und}$$

$$PQ = \frac{\alpha x}{\beta} - \frac{a}{\beta}.$$

§. 100.

Man fälle aus Q auf BC die senkrechte Linie QS herab, und ziehe MS, so mißt der Winkel MSQ die Neigung der gegebenen Fläche gegen die Ebene APQ. Da also $PR = \frac{\alpha x - a}{\beta}$ ist, so ist

$$QR = \frac{\alpha x + \beta y - a}{\beta} = \frac{-\gamma z}{\beta}$$

und da der Winkel RQS den Winkel ACB gleich ist, so wird

QS

$$QS = \frac{-\gamma z}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}$$

und folglich

$$\text{tang. } QSM = \frac{-\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\gamma}, \text{ und cos. } QSM = \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$$

Es neigt sich also die gesuchte Fläche gegen die Ebene, in welcher x und y sind, unter einen Winkel, dessen tang. $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\gamma}$ ist, und auf ähnliche Art ist eben diese Fläche gegen die Ebene der Coordinaten x und z unter einen Winkel, dessen Tangente $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)}}{\beta}$ und gegen die Ebene der Coordinaten y und z unter einen Winkel, dessen Tangente $= \frac{-\sqrt{(\beta^2 + \gamma^2)}}{\alpha}$ ist, geneigt.