Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Drittes Capitel. Von den Cylinder- Kegel- und Kugel-Schnitten.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53306

Drittes Capitel.

Von den Cylinder- Kegel- und Kugel-Schnitten.

§. 52.

Da diese Körper in den Elementen der Stereometrie betrachtet werden, so müssen wir auch ihre Schnitte vor der Erwägung der weniger bekannten Körper untersuchen. Was nun zuvörderst die Cylinder betrift, so giebt es davon zwey Arten, gerade und schiefe. Ein Cylinder heißt ein gerader, wenn alle seine auf der Axe senkrechte Schnitte einander gleiche Kreise sind, welche ihre Mittelpunkte in eben der geraden Linie haben. Bey einem schiefen Cylinder hingegen sind nicht die Schnitte, welche auf der Axe senkrecht, sondern diejenigen, welche gegen dieselbe unter einem gegebenen Winkel geneigt sind, Kreise; man druckt aber diese Beschaffenheit bequemer auf diese Art aus: Ein schiefer Cylinder ist ein solcher, dessen auf der Axe senkrechte Schnitte einander gleiche Ellipsen sind, deren Mittelpunkte insgesammt in der geraden Linie liegen, welche man die Axe des Cylinders nennt.

§. 53.

Es sey also ein gerader oder schiefer Cylinder gegeben, dessen Axe CD, Fig. 130, auf der Ebene der Tafel senkrecht stehe; und seine Grundfläche AEBF, oder sein Schnitt, welcher von der Ebene der Tafel gemacht wird, sey ein Kreis oder eine Ellipse. Ich will annehmen, daß diese

Grund-

Grundfläche eine Ellipse sey, die den Mittelpunkt in C, und die zugehörigen Axen AB und EF habe, weil alles das, was von einem schiefen Cylinder behauptet wird, sehr leicht auf den geraden Cylinder angewandt werden kann. Es sey also die eine Halbaxe $AC = BC = a$, und die andere $CD = CF = c$. Setzt man die drey Coordinaten $CP = x$; $PQ = y$; und $QM = z$, so ist wegen der Natur der Ellipse

$$aacc = aayy + ccxx$$

und diese Gleichung druckt zugleich die Natur des Cylinders aus, da die dritte veränderliche Größe z, weil alle der Ebene CPQ parallele Schnitte einander gleich sind, nicht mit in die Gleichung kommt.

§. 54.

Bey diesem Cylinder sind also alle der Grundfläche parallele Schnitte der Grundfläche gleich und ähnlich; und Kreise bey dem geraden, so wie Ellipsen bey dem schiefen Cylinder. Ferner sind die Schnitte, welche durch Ebenen, auf APQ senkrecht sind, gemacht werden, gerade Linien, und je zwey und zwey einander parallel; die aber da, wo die Ebene den Cylinder berührt, in eine zusammenfallen, und wenn die Ebene den Cylinder nicht trift, imaginär werden. Dieses erhellet auch aus der Gleichung. Denn wenn man entweder x, oder y, oder $x = \alpha y$ beständig annimmt, um den Schnitt der schneidenden Ebene und der Grundfläche anzuzeigen, so hat die Grundfläche zwey einfache Wurzeln. Und auf diese Art haben wir schon alle Schnitte bestimmt, welche durch Ebenen, die einer von den drey Hauptebenen parallel sind, gemacht werden.

§. 55.

Um die Natur der übrigen Schnitte zu erforschen, wollen wir annehmen, daß die schneidende Ebene und die Ebene der Grundfläche die gerade Durchschnittslinie GT erzeugen, die zuvörderst der einen zugehörigen Axe EF parallel, oder auf der andern verlängerten Axe AB in G senkrecht seyn mag. Dies vorausgesetzt, so sey die Entfernung CS $= f$, und die Neigung der schneidenden Ebene GTM gegen die Grundfläche $= \phi$. Es begegne die schneidende Ebene GTM der Axe des Cylinders in D, so wird, wenn man DG zieht, DGC $= \varphi$, und folglich

$$DG = \frac{f}{\text{cos.}\,\varphi};\ \text{und}\ CD = \frac{f.\,\text{sin.}\,\phi}{\text{cos.}\,\varphi}.$$

Zieht man aus einem Punkte des gesuchten Schnittes M die Linie MT der DG parallel, so wird, weil TQ $= f - x$ und QTM $= \varphi$ ist

$$TM = \frac{f - x}{\text{cos.}\,\varphi};\ QM = \frac{(f - x)\ \text{sin.}\,\phi}{\text{cos.}\,\phi} = z$$

Man ziehe MS der TG parallel und also senkrecht auf DG, so wird

$$MS = TG = PQ = y;\ \text{und}\ DS = \frac{x}{\text{cos.}\,\phi}.$$

§. 56.

Nun nehme man die geraden Linien DS und SM zu den Coordinaten des gesuchten Schnittes an, und setze DS $= t$ und SM $= u$; so wird

$$y = u;\ x = t.\,\text{cos.}\,\phi$$

$$\text{und weil}\ z = \frac{(f - x).\,\text{sin.}\,\phi}{\text{cos.}\,\varphi}\ \text{ist}$$

$$z = f.\,\text{tang.}\,\varphi - t.\,\text{sin.}\,\phi.$$

Man

Man bringe diese Werthe in die Gleichung für den Cylinder

$$aacc = ayy + ccxx$$

so erhält man für den gesuchten Schnitt folgende Gleichung

$$aacc = aauu + cctt\,(\cos.\,\varphi)^2$$

welche anzeigt, daß der Schnitt eine Ellipse seyn wird, welche den Mittelpunkt in D hat, und deren eine Hauptaxe in die gerade Linie DG fällt, die andere aber auf ihr senkrecht stehet. Es ist aber die Hauptaxe, welche in die gerade Linie DG fällt, (indem $u = o$ gesetzt wird) $= \frac{a}{\cos.\,\varphi}$.

Oder man ziehe BH der GD parallel, so wird $BH = \frac{a}{\cos.\,\varphi}$, die eine Halbaxe des gesuchten Schnittes, und die andere $= c = CE$.

§. 57.

Es ist also der auf diese Art entstandene Cylinderschnitt eine Ellipse, deren zugehörige Halbaxen $\frac{a}{\cos.\,\varphi}$ und c sind. Wenn daher in der Grundfläche AEBF, $AC = a$, die größere Halbaxe ist, so sind, weil $\frac{a}{\cos.\,\varphi}$ größer als a ist, die Schnitte länglichere Ellipsen als die Grundfläche. Ist aber c kleiner als a, oder ist der Schnitt GT der größern Axe der Basis parallel, so können in dem Cylinderschnitte beyde Axen einander gleich seyn, und also der Schnitt ein Kreis werden. Dieses ereignet sich, wenn $\frac{a}{\cos.\,\varphi} = c$, oder $\cos.\,\varphi = \frac{a}{c}$ ist. Da also in dem Dreyecke BCH, welches bey C rechtwinklig ist, $CBH = \varphi$ ist, so ist $\cos.\,\varphi = \frac{BC}{BH} = \frac{a}{BH}$. Wenn daher $BH = CE$ genommen wird,

so

so sind die Schnitte Kreise; und da dieses auf eine zwie- fache Weise geschehen kann, indem $BH = CE$ theils ober- halb, theils unterhalb genommen werden kann, so entste- hen zwey Reihen kreisförmiger Schnitte, welche auf der Axe CD schief stehen, und daher werden dergleichen Cy- linder schiefe Cylinder genannt.

§. 58.

Nun sey die gerade Linie GT, Fig. 131, beliebig schief gelegt, der Schnitt der schneidenden Ebene und der Grund- fläche, und auf sie aus dem Mittelpunkte der Grundfläche C die senkrechte Linie $GC = f$ herabgefällt. Man setze den Winkel $BCG = \vartheta$; und den Neigungswinkel $CGD = \varphi$, welchem der Winkel QTM gleich seyn wird, wenn man QT auf GT senkrecht zieht. Es ist daher

$$DG = \frac{f}{\cos.\varphi}; \text{ und } CD = \frac{f.\sin.\varphi}{\cos.\varphi}$$

Es sey M ein Punkt in dem gesuchten Schnitte, und aus ihm senkrecht MQ auf die Grundfläche, und von hier QP auf die Axe gefällt, so daß, wenn man $CP = x$, $QP = y$ und $QM = z$ setzt,

$$aacc = aayy + ccxx$$

werde. Ferner ziehe man auf die Durchschnittslinie GT die geraden Linien PV und QT senkrecht, so ist

$$GV = x.\sin.\vartheta;\ PV = f - x.\cos.\vartheta$$

und da der Winkel $QPW = \vartheta$ ist, so wird

$$QW = y.\sin.\vartheta;\ PW = VT = y.\cos.\vartheta; \text{ und}$$

$$QT = f - x.\cos.\vartheta + y.\sin.\vartheta.$$

Zieht man endlich MT, so wird, weil $MTQ = \varphi$ ist

$$TM = \frac{z}{\sin.\varphi}; \text{ und } QT = \frac{z.\cos.\varphi}{\sin.\varphi}$$

§. 59.

Nun ergänze man das Rechteck GSMT, und setze DS = t; SM = GT = uu: so wird

$$u = GV + VT = x.\sin.\vartheta + y.\cos.\vartheta.$$

und da $QT = f - x.\cos.\vartheta + y.\sin.\vartheta$ ist, so wird ferner

$$QT - CG = y.\sin.\vartheta - x.\cos.\vartheta,$$

und folglich

$$DS = TM - DG = \frac{y.\sin.\vartheta - x.\cos.\vartheta}{\cos.\varphi} = t$$

Da also $x.\sin\vartheta. + y.\cos.\vartheta = u$; und $y.\sin.\vartheta - x.\cos.\vartheta = t.\cos.\varphi$ ist, so hat man

$$y = u.\cos.\vartheta + t.\sin.\vartheta.\cos.\varphi; \text{ und}$$

$$x = u.\sin.\vartheta - t.\cos.\vartheta.\cos.\varphi.$$

Bringt man diese Werthe in die Gleichung $aacc = aayy + ccyy$, so bekommt man

$$aacc =$$

$$aauu(\cos.\vartheta)^2 + 2aaut.\sin.\vartheta.\cos.\vartheta.\cos.\varphi + aatt(\sin.\vartheta)^2 (\cos.\varphi)^2$$

$$ccuu(\sin.\vartheta)^2 - 2ccut.\sin.\vartheta.\cos.\vartheta.\cos.\varphi + cctt(\cos.\vartheta)^2 (\cos.\varphi)^2$$

und diese Gleichung ist eine Gleichung für eine Ellipse, welche den Mittelpunkt in D hat, und deren Coordinaten DS und SM auf den Hauptaxen nicht senkrecht sind, wofern nicht $a = c$, oder der Cylinder ein gerader Cylinder ist.

§. 60.

Um diesen Schnitt genauer kennen zu lernen, lasse man aMebf, Fig. 132, die Curve bedeuten, deren Gleichung zwischen den Coordinaten $DS = t$ und $MS = u$ gefunden worden; der Kürze wegen wollen wir dafür $aacc = \alpha uu + 2\beta tu + \gamma tt$ annehmen, so daß für den gegenwärtigen Fall

$$\alpha = aa(\cos.\vartheta)^2 + cc(\sin.\vartheta)^2$$

$$\beta = (aa - cc)\sin.\vartheta.\cos.\vartheta.\cos.\phi$$

und

$$\gamma = aa(\sin.\vartheta)^2(\cos.\phi)^2 + cc(\cos.\vartheta)^2(\cos.\phi)^2$$

ist. Die zugehörigen Hauptaxen dieses Schnittes seyen ab und ef, und nachdem man auf die eine davon die Applicate Mp gezogen, setze man Dp = p, und Mp = q, desgleichen den Winkel aDH = ζ: so wird

$$u = p.\sin.\zeta + q.\cos.\zeta; \text{ und}$$
$$t = p.\cos.\zeta - q.\sin.\zeta$$

und durch die Substitution dieser Werthe bekommt man

$$aacc =$$

$$\begin{array}{lll} +\alpha(\sin.\zeta)^2 & +2\alpha.\sin.\zeta.\cos.\zeta & +\alpha(\cos.\zeta)^2 \\ +2\beta\sin.\zeta.\cos.\zeta\;pp & \begin{matrix}+2\beta(\cos.\zeta)^2 \\ -2\beta(\cos.\zeta)^2\end{matrix}\;pq & -2\beta\sin.\zeta\cos.\zeta\;qq \\ +\gamma.(\cos.\zeta)^2 & -2\beta\sin.\zeta.\cos.\zeta. & +\gamma(\sin.\zeta)^2 \end{array}$$

§. 61.

Da diese Gleichung auf einen rechtwinkligen Durchmesser bezogen wird, so muß der Coefficient von $pq = 0$ seyn; daher denn, weil $2.\sin.\zeta.\cos.\zeta = \sin.2\zeta$; und $(\cos.\zeta)^2 - (\sin.\zeta)^2 = \cos.2\zeta$ ist

$$(\alpha - \gamma)\sin.2\zeta + 2\beta.\cos.2\zeta = 0$$

und folglich

$$\tang.2\zeta = \frac{2\beta}{\gamma - \alpha}$$

wird. Hierdurch lernt man den Winkel aDH, und folglich auch die Lage der Hauptdurchmesser kennen. Was die Halbaxen selbst betrifft, so kann man dieselben auf folgende Art bestimmen.

$$aD = \frac{ac}{\sqrt{(\alpha(\sin.\zeta)^2 + 2\beta.\sin.\zeta.\cos.\zeta + \gamma(\cos.\zeta)^2)}}$$

und

und

$$eD = \frac{ac}{\sqrt{(\alpha(\cos.\zeta)^2 - 2\beta.\sin.\zeta.\cos.\zeta + \gamma(\sin.\zeta)^2)}}$$

§. 62.

Da $2\beta = \frac{2(\gamma-\alpha).\sin.\zeta.\cos.\zeta}{\cos.\zeta^2 - \sin.\zeta^2}$ ist, so wird, wenn man diesen Werth in die gefundenen Ausdrücke bringt,

$$aD = \frac{ac\sqrt{(\cos.\zeta^2-\sin.\zeta^2)}}{\sqrt{(\gamma.\cos.\zeta^2-\alpha.\sin.\zeta^2)}} = \frac{ac\sqrt{2\cos.2\zeta}}{\sqrt{((\alpha+\gamma.).\cos.2\zeta-\alpha+\gamma)}}$$

und

$$eD = \frac{ac\sqrt{(\cos.\zeta^2-\sin.\zeta^2)}}{\sqrt{(\alpha.\cos.\zeta^2-\gamma.\sin.\zeta^2)}} = \frac{ac\sqrt{2.\cos.2\zeta}}{\sqrt{((\alpha+\gamma.\cos.2\zeta+\alpha-\gamma)}}$$

Das Produkt dieser beyden Halbaxen ist demnach

$$aD.eD = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{\sqrt{(2\alpha\gamma(1+(\cos.2\zeta)^2)-\alpha\alpha+\gamma\gamma)(\sin.2\zeta)^2)}}$$

Da nun

$$(\gamma-\alpha.).\sin.2\zeta = 2\beta.\cos.2\zeta$$

ist, so wird

$$(\alpha\alpha+\gamma\gamma)(\sin.2\zeta)^2 = 4\beta\beta(\cos.2\zeta)^2 + 2\alpha\gamma(\sin.2\zeta)^2$$

und folglich

$$aD.eD = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{\sqrt{(4\alpha\gamma(\cos.2\zeta)^2 - 4\beta\beta(\cos.2\zeta)^2)}} = \frac{aacc}{\sqrt{(\alpha\gamma-\beta\beta)}} = \frac{ac}{\cos.\phi}.$$

§. 63.

Da

$$aD^2 = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{(\alpha+\gamma).\cos.2\zeta-\alpha+\gamma}$$

und

$$eD^2 = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{(\alpha+\gamma).\cos.2\zeta+\alpha-\gamma}$$

ist,

ist, so wird

$$aD^2 + eD^2 = \frac{4aacc.(\alpha+\gamma)(\cos.2\zeta)^2}{4\alpha\gamma(\cos.2\zeta)^2 - 4\beta\beta(\cos.2\zeta)^2} = \frac{(\alpha+\gamma)aacc}{\alpha\gamma-\beta\beta}$$

und hieraus fließt

$$aD + eD = \frac{ac\sqrt{(\alpha+\gamma+2\sqrt{(\alpha\gamma-\beta\beta)})}}{\sqrt{(\alpha\gamma-\beta\beta)}}$$

und

$$aD - eD = \frac{ac\sqrt{(\alpha+\gamma-2\sqrt{(\alpha\gamma-\beta\beta)})}}{\sqrt{(\alpha\gamma-\beta\beta)}}$$

Es sind demnach die Halbaxen aD und eD die Wurzeln dieser Gleichung

$$(\alpha\gamma-\beta\beta)x^4 - (\alpha+\gamma)aaccxx + a^4c^4 = 0$$

und

$$\sqrt{(\alpha\gamma-\beta\beta)} = ac.\cos.\varphi.$$

§. 64.

Da $aD.eD = \frac{ac}{\cos.\varphi}$, und φ der Winkel ist, welchen die schneidende Ebene mit der Grundfläche macht, so fließt hieraus folgender schöne Lehrsatz:

Lehrsatz.

Wenn ein Cylinder von einer Ebene geschnitten wird, so verhält sich allemal das Rechteck der Axen des Schnittes zu dem Rechtecke der Axen der Grundflächen des Cylinders, wie die Secante des Winkels, welchen die Ebene des Schnittes mit der Ebene der Grundfläche macht, zum Radius.

Da also alle Parallelogramme um den zugehörigen Durchmessern den aus den Axen erzeugten Rechtecken gleich sind, so stehen auch jene Parallelogramme um der Grundfläche und jedem Schnitte des Cylinders in eben demselben Verhältnisse.

§. 65.

§. 65.

Es kann aber die Natur dieser schiefen Cylinderschnitte bequemer auf folgende Art bestimmt werden. Wenn die Grundfläche des Cylinders die Ellipse AEBF, Fig. 133, die Halbaxen derselben AC = BC = a; EC = CF = c; und die gerade in C auf der Grundfläche senkrechte Linie CD die Axe des Cylinders ist: so schneide den Cylinder eine Ebene, deren Durchschnittslinie mit der Ebene der Grundfläche, TH, mit der verlängerten Axe AB irgend einen schiefen Winkel mache, und auf dieselbe sey CH aus C senkrecht herabgefällt, und der Winkel GCH = ϑ. Geht also die schneidende Ebene durch den Punkt der Axe des Cylinders D, so ist, wenn man DH zieht, der Winkel CHD der Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen die Ebene der Grundfläche, welchen wir = φ setzen wollen. Macht man daher CG = f, so ist

$$GH = f.\sin.\vartheta;\ CH = f.\cos.\vartheta;$$

$$DH = \frac{f.\cos.\vartheta}{\cos.\varphi};\ \text{und}\ CD = \frac{f.\cos.\vartheta.\sin.\varphi}{\cos.\varphi}.$$

Da also das Dreyeck DCG bey C rechtwinklig ist, so wird

$$DG = \frac{f.\sqrt{(1 + \sin.\vartheta^2.\sin.\varphi^2)}}{\cos.\varphi};\ \sin DGH = \frac{\cos.\vartheta}{\sqrt{(1 + \sin.\vartheta^2.\sin.\varphi^2)}}$$

$$\cos.DGH = \frac{\sin.\vartheta.\cos.\varphi}{\sqrt{(1 + \sin.\vartheta^2.\sin\varphi^2)}}\ \text{u.}\ \text{tang}.DGH = \frac{\cos.\vartheta}{\sin.\vartheta.\cos.\varphi}.$$

§. 66.

Nun fälle man aus einem Punkte des gesuchten Schnittes M auf die Grundfläche die senkrechte Linie MQ herab, ziehe die Applicate QP, und setze CP = x, und PQ = y; so ist

$$aacc = aayy + ccxx$$

Ferner ziehe man QT der CG parallel, und auf ihr sey aus G die GR senkrecht, so ist

$$GR = y; \text{ und } QR f - x.$$

Da also der Winkel TGR = GCH = ϑ ist, so wird

$$GT = \frac{y}{\text{cos}.\vartheta}; \text{ und } TR = \frac{y.\text{sin}.\vartheta}{\text{cos}.\vartheta}$$

und folglich

$$QT = f - x + \frac{y.\text{sin}.\vartheta}{\text{cos}.\vartheta}$$

Ferner sind die Dreyecke CDG und QMT einander ähnlich, und also

$$CG : DG = QT : TM$$

und

$$CG : CG - QT = DG : DS$$

wenn man MS der GT parallel zieht. Hieraus ergiebt sich

$$DS = \frac{(x.\text{cos}.\vartheta - y.\text{sin}.\vartheta)\sqrt{(1 + \text{sin}.\vartheta^2.\text{sin}.\varphi^2)}}{\text{cos}.\vartheta.\text{cos}.\varphi.}$$

Setzt man daher DS = t und MS = u, so wird

$$x.\text{cos}.\vartheta - y.\text{sin}.\vartheta = \frac{t.\text{cos}.\vartheta.\text{cos}.\varphi}{\sqrt{(1 + \text{sin}.\vartheta^2.\text{sin}.\varphi^2)}}$$

$$\text{und } y = u.\text{cos}.\vartheta$$

woraus sich eine Gleichung zwischen t und u ergiebt, die aber noch sehr verwickelt ist.

§. 67.

Man ziehe aber anstatt der Hauptaxen der Basis den Durchmesser EF, der Durchschnittslinie TH parallel, und den zugehörigen Durchmesser AB, welcher verlängert der TH in G begegne. Setzt man, nachdem dieses geschehen, wie vorhin, CG = f; GCH = ϑ; CHD = φ; CA = CB = m; CE = CF = n; und ist QP dem Durchmesser EF parallel gezogen, und CP = x, und PQ = y angenommen

nommen worden, so daß $m^2n^2 = m^2y + n^2x^2$ ist: so wird

$$GT = MS = y$$

und

$$DS = \frac{DG.x}{CG} = \frac{x\sqrt{(1+\sin.\vartheta^2.\sin.\varphi^2)}}{\cos.\varphi}$$

Setzt man also $DS = t$, und $MS = u$, so wird

$$x = \frac{t.\cos.\varphi}{\sqrt{(1+\sin.\vartheta^2.\sin.\varphi^2)}}$$

und

$$y = u.$$

Da aber $\frac{CG}{DG} = \cos.CGD$, und also, wenn man $CGD = \eta$ setzt, $x = t.\cos.\eta$ ist, so erhält man für den gesuchten Schnitt, nach den zugehörigen Durchmessern bestimmt,

$$mmnn = mmuu + nntt.\cos.\eta^2$$

wobey der Mittelpunkt in D fällt, und der eine Halbmesser in der Richtung $DS = \frac{m}{\cos.\eta}$, und der andere $= n$ ist.

Was den Winkel GSM betrifft, unter welchem diese Durchmesser gegen einander geneigt sind, so ist

$$\text{tang}.GSM = \frac{\cos.\vartheta}{\sin\vartheta.\cos.\varphi}; \text{ und}$$

$$\cos.GSM = \frac{\sin.\vartheta.\cos.\varphi}{\sqrt{(1+\sin.\vartheta^2.\sin.\varphi^2)}} = \sin.\vartheta.\cos.\eta.$$

Auf diese Art läßt sich die Natur des gesuchten Schnittes sehr leicht erkennen.

§. 68.

Wir wenden uns nach dieser Betrachtung der Cylinderschnitte zu dem Kegel, der ein gerader oder ein schiefer seyn mag; es unterscheidet sich aber der schiefe Kegel vom geraden darin, daß die auf der Axe senkrechten Schnitte bey dem schiefen Kegel Ellipsen sind, welche ihre Mittelpunkte in der Axe des Kegels haben, dagegen eben diese Schnitte bey dem geraden Kegel Kreise sind. Es sey also $OaebfO$, Fig. 134, irgend ein Kegel, der seine Spitze in O, und zur Axe die gerade Linie Oc habe, die auf der Ebene der Tafel senkrecht seyn soll, so daß die Tafel eine durch die Spitze des Kegels O gelegte, und auf der Axe desselben Oc senkrechte Ebene vorstelle. Man ziehe durch O in der Ebene der Tafel die geraden Linien AB, EF, den Axen ab und ef eines jeden auf der Axe senkrechten Schnittes parallel; und fälle aus einem Punkte M des Schnittes $aebf$ auf die Ebene der Tafel die senkrechte Linie MQ, und aus Q auf AB die senkrechte Linie PQ herab: so ist, wenn man $OP = x$, $PQ = y$ und $QM = z$ setzt, auch die Abscisse des Abschnittes $cp = x$, und die Applicate $pM = y$; folglich, da die Axen ab, ef zu $Oc = QM = z$ ein beständiges Verhältniß haben,

$$m^2n^2zz = mmyy + nnxx$$

wenn man $ac = bc = mz$, und $ec = fc = nz$ setzt. Und dieses ist die Gleichung, welche die Natur der conischen Oberfläche zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und z ausdruckt.

§. 69.

Da also alle auf der Axe OC senkrechte Schnitte Ellipsen sind, wie aus der Gleichung $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$ (wenn man z einen beständigen Werth beylegt) erhellet: so lassen sich auf ähnliche Art leicht die Schnitte finden, welche entweder auf der geraden Linie AB, oder auf EF senkrecht stehen. Denn wird der Kegel von einer auf AB senkrechten und durch den Punkt P gelegten Ebene geschnitten,

ten, so hat man, wenn man OP = a setzt, für diesen Schnitt die Gleichung

$$m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 a^2$$

zwischen den Coordinaten Pp = z und pM = y, und es ist folglich dieser Schnitt eine Hyperbel, welche den Mittelpunkt in C hat, und deren halbe Zwergaxe = $\frac{a}{m}$, so wie die zugehörige Halbaxe = $\frac{na}{m}$ ist. Auf eben die Art findet man, daß der Schnitt, welcher auf EF senkrecht ist, eine Hyperbel ist, welche den Mittelpunkt in der geraden Linie EF hat.

§. 70.

Wenn die Ebene, von welcher der Kegel geschnitten wird, zwar auf der Ebene AEBF, Fig. 135, aber auf keiner von den Linien AB, EF senkrecht ist, so fällt es auch hier nicht schwer, den Schnitt zu bestimmen. Es schneide nemlich diese Ebene die Grundfläche AEBF in der geraden Linie BE, und zugleich sey OB = a, und OE = b. Man fälle aus einem Punkte M des Schnittes die senkrechte Linie MQ, und aus Q die Applicate QP, so daß OP = x; PQ = y, und QM = z sey: so ist wegen der Natur des Kegels

$$m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2.$$

Es ist also

$$a : b = a - x : y; \text{ oder } y = b - \frac{bx}{a}.$$

Man setze die Coordinaten des Schnittes BQ = t, und QM = z so ist

$$b : \sqrt{(aa + bb)} = y : t$$

und folglich

 y =

$$y = \frac{bt}{\sqrt{(aa + bb)}} \text{ und } a - x = \frac{at}{\sqrt{(aa + bb)}}$$

Es sey $\sqrt{(aa + bb)} = c$, so ist

$$y = \frac{bt}{c} \text{ und } x = a - \frac{at}{c}$$

und man erhält folgende Gleichung zwischen t und z

$$m^2n^2c^2z^2 = m^2b^2tt + n^2a^2cc - 2nnaact + nnaatt,$$

Man setze $t - \frac{nnaac}{m^2b^2 + n^2a^2} = GQ = u$, indem BG $= \frac{nnaac}{m^2b^2 + n^2a^2}$; so wird

$$m^2n^2c^2z^2 = (m^2b^2 + n^2a^2)uu + \frac{m^2n^2a^2b^2c^2}{m^2b^2 + n^2a^2}$$

§. 71.

Es ist also dieser Kegelschnitt eine Hyperbel, welche den Mittelpunkt in G hat, und deren halbe Zwergaxe Ga $= \frac{ab}{\sqrt{(m^2b^2 + n^2a^2)}}$, so wie die halbe zugehörige Axe $= \frac{mnabc}{m^2b^2 + n^2a^2}$ ist. Die Asymptoten dieser Hyperbel aber, welche die Axe Ga in dem Punkte G schneiden werden, machen mit der Axe Ga einen Winkel, dessen Tangente $= \frac{mnc}{\sqrt{(n^2b^2 + n^2a^2)}}$ ist. Soll also die Hyperbel eine gleichseitige werden, so muß

$$m^2n^2a^2 + m^2n^2b^2 = m^2b + n^2a^2$$

oder

$$\frac{b}{a} = \text{tang. } OBE = \frac{n\sqrt{(mm - 1)}}{m\sqrt{(1 - nn)}}$$

seyn. Wofern also nicht $\frac{mm - 1}{1 - nn}$ größer als o ist, so kann

auf

auf diese Art keine gleichseitige Hyperbel entstehen. Bey einem geraden Kegel, wo $m = n$ ist, ist die Tangente des Winkels, welchen die Asymptoten mit der Axe des Schnittes einschließen, $= m$, und der Winkel = dem Winkel aOc.

§. 72.

Nun sey der Schnitt schief, doch so, daß sein Schnitt BT, Fig. 136, mit der Ebene AEBF auf der geraden Linie AB senkrecht stehe. Man setze $OB = f$, und den Neigungswinkel der Ebene gegen die Ebene der Grundfläche, oder den Winkel $OBC = \varphi$, daß also diese schneidende Ebene in dem Punkte C durch die Axe des Kegels OC gehe. Hiedurch erhält man

$$BC = \frac{f}{\cos.\varphi};\ \text{und}\ OC = \frac{f.\sin.\varphi}{\cos.\varphi}$$

Ferner ziehe man aus einem Punkte M des gesuchten Schnittes die Linie MT auf BT, und auf die Grundfläche die Linie MQ, so wie aus Q die Linie QP auf OB senkrecht, und setze $OP = x$; $PQ = y$, und $QM = z$, um

$$m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2z^2$$

zu bekommen. Endlich mache man die Coordinaten für den Schnitt $BT = t$, und $TM = u$, so ist, weil $QTM = \varphi$

$$QM = z = u.\sin.\varphi;\ \text{und}\ TQ = u.\cos.\varphi = f = x$$

woher denn

$$y = t : z = u.\sin.\varphi;\ \text{und}\ x = f - u.\cos.\varphi$$

und also

$$m^2n^2u^2.\sin.\varphi^2 = m^2t^2 + n^2(f - u.\cos.\varphi)^2$$

wird.

§. 73.

Setzt man $BC = \frac{f}{\cos.\varphi} = g$, so daß $f = g.\cos.\varphi$ wird, so ist $x = (g - u)\cos.\varphi$, und man erhält für den Kegelschnitt

m²

$$m^2n^2u^2.\sin.\phi^2 = m^2t^2 + n^2g^2.\cos.\phi^2 - 2n^2gu.\cos.\phi^2 + n^2u^2.\cos.\phi^2$$

Man setze

$$u - \frac{g.\cos.\phi^2}{\cos.\phi^2 - m^2.\sin.\phi^2} = SG = s$$

ziehe MS der BT parallel, und nehme

$$BG = \frac{g.\cos.\phi^2}{\cos\phi^2 - m^2\sin.\phi^2} = \frac{f.\cos.\phi}{\cos.\phi^2 - m^2.\sin.\phi^2} = \frac{f.\cos.\phi}{1-(1+m^2).\sin.\phi^2}$$

so daß die Coordinaten $GS = s$ und $SM = t$ werden. Alsdann bekommt man folgende Gleichung:

$$m^2tt + nn(\cos\phi^2 - m^2.\sin.\phi^2)ss - \frac{mmnnff\sin.\phi^2}{(\cos.\phi^2 - m^2.\sin.\phi^2)} = 0$$

und es ist daher die Curve ein Kegelschnitt, welcher den Mittelpunkt in G hat, und zwar eine Parabel, wenn der Punkt G unendlich weit fortrückt, welches geschiehet, wenn $\tang.\phi = \frac{1}{m}$, oder die gerade Linie BC der Seite des Kegels Oa parallel wird. In diesem Falle wird

$$mmtt + nnff - 2nnfu.\cos.\phi = 0$$

und der Scheitel der Parabel fällt in G, wenn man $BG = \frac{f}{2\cos.\phi}$ nimmt, und der Parameter ist $\frac{2nnff.\cos.\phi}{mm}$.

§. 74.

Da der Schnitt eine Parabel wird, wenn $\cos.\phi^2 - m^2.\sin.\phi^2 = 0$ ist: so ist offenbar, daß derselbe eine Ellipse seyn wird, wenn $\cos.\phi^2$ größer als $m^2\sin.\phi^2$, oder $\tang.\phi$ größer als $\frac{1}{m}$ ist; und in diesem Falle kommt die

gerade

gerade Linie BC oben mit der entgegengesetzten Seite des Kegels Oa zusammen. Da also $BG = \frac{g}{1 - m^2 \text{ tang. } \phi^2}$ ist, so ist BG größer als BC, indem G der Mittelpunkt des gesuchten Schnitts ist. Es ist also die Halbaxe dieses Schnitts in der Richtung $BC = \frac{mf. \sin. \phi}{\cos. \phi^2 - m^2. \sin. \phi^2}$, und die zugehörige Halbaxe $= \frac{nf. \sin. \phi}{\sqrt{(\cos. \phi^2 - m^2 \sin. \phi^2)}}$ und der halbe Parameter $= \frac{nn}{m} f. \sin. \phi$. Es wird daher der Schnitt ein Kreis seyn, wenn $m = n\sqrt{(\cos. \phi^2 - m^2. \sin \phi^2)}$ oder $mm = nn - nn(1 + mm) \sin. \phi$ ist; und daher wird

$$\sin. \phi = \frac{\sqrt{(nn - mm)}}{n\sqrt{(1 + mm)}} = \sin. OBC$$

und

$$\cos. \phi = \frac{m\sqrt{(1 + nn)}}{n\sqrt{(1 + mm)}}$$

Wofern also n nicht größer ist als m, so kann keiner von diesen Schnitten ein Kreis seyn.

§. 75.

Wenn $m^2 \sin. \phi^2$ größer als $\cos. \phi^2$, oder tang. ϕ größer als $\frac{1}{m}$ ist, so daß die gerade Linie BC und die gegenüberstehende Seite des Kegels Oa oben aus einander fahrende Linien sind: so ist der Schnitt eine Hyperbel, deren halbe Zwergaxe $= \frac{mf. \sin. \phi}{-\cos. \phi^2 + m^2 \sin. \phi^2}$ die halbe zugehörige Axe $= \frac{nf. \sin. \phi}{\sqrt{(m^2 \sin. \phi^2 - \cos. \phi^2)}}$, der halbe Parameter $= \frac{nn}{m} f. \sin. \phi$, und die Tangente des Winkels, unter

wel-

welchem die Asymptoten die Axe in dem Mittelpunkte schneiden $= \frac{n}{m} \sqrt{(m^2 \sin. \varphi^2 - \cos. \varphi^2)}$ ist. Es wird folglich die Hyperbel gleichseitig seyn, wenn

$$m^2 n^2. \sin. \varphi^2 - n^2 \cos. \varphi^2 = m^2 = (mm + 1)$$

$$nn \sin. \varphi^2 - nn = mm$$

oder

$$\sin. \varphi = \frac{\sqrt{(mm + nn)}}{n\sqrt{(1 + mm)}} \text{ und } \cos. \varphi = \frac{m\sqrt{(nn-1)}}{n\sqrt{(1 + mm)}}$$

ist. Wofern also n nicht größer als 1 ist, so kann durch diesen Schnitt keine gleichseitige Hyperbel entstehen.

§. 76.

Wenn der Kegel ein gerader Kegel, oder $m = n$ ist, so lassen sich alle Schnitte auf die von uns untersuchten beziehen, weil die Lage der geraden Linie AB von unserer Willkühr abhängt. Was aber den schiefen Kegel betrift, so müssen wir noch die Schnitte untersuchen, welche von einer Ebene, die gegen die gerade Linie AB irgend eine schiefe Neigung hat, gemacht worden. Es sey daher BR, Fig. 137, ein Durchschnitt der schneidenden Ebene mit der Ebene der Grundfläche. Man setze $OB = f$, den Winkel $OBR = \vartheta$, und den Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen die Grundfläche $= \varphi$: so ist, wenn man aus O nach BR die OR senkrecht zieht,

$$OR = f. \sin. \vartheta; \text{ und } BR = f. \cos. \vartheta$$

Zieht man ferner in der schneidenden Ebene die gerade Linie RC, so ist, da der Winkel $ORC = \varphi$,

$$RC = \frac{f. \sin. \vartheta}{\cos. \varphi}; \text{ und } OC = \frac{f. \sin. \vartheta. \sin. \varphi}{\cos. \varphi}$$

Wird nun der auf der Axe des Kegels OC senkrechte Schnitt auf der Ebene der Grundfläche entworfen, so fallen seine beyden

den Hauptaxen nach AB und EF, und verhalten sich gegen einander wie m : n.

§. 77.

In dieser Projection des Schnittes ziehe man den Durchmesser ef der BR parallel, so ist der Winkel B,O e = ϑ, und dabey sey a O,b die Lage des zugehörigen Durchmessers. Man setze den Halbmesser O a = μ, und O e = ν, so ist

$$\mu = \frac{\sqrt{(m^4 \sin.\vartheta^2 + n^4.\cos.\vartheta^2)}}{\sqrt{(m^2.\sin.\vartheta^2 + n^2.\cos.\vartheta^2)}}$$

$$\nu = \frac{mn}{\sqrt{(m^2.\sin.\vartheta^2 + n^2.\cos.\vartheta^2)}}$$

und

$$\text{tang. BOb} = \frac{mn\,.\cos.\vartheta}{mm\,.\sin.\vartheta}$$

Es ist folglich von diesem Winkel

$$\text{der Sinus} = \frac{nn.\cos.\vartheta}{\sqrt{(m^4.\sin.\vartheta^2 + n^4.\cos.\vartheta^2)}}$$

und

$$\text{der Cosinus} = \frac{mm.\sin.\vartheta}{\sqrt{(m^4.\sin.\vartheta^2 + n^4.\cos.\vartheta^2)}}$$

Da nun der Winkel ObR = ϑ + BOb ist, so wird

$$\sin.\,\text{ObR} = \frac{m^2.\sin.\vartheta^2 + n^2.\cos.\vartheta^2}{\sqrt{(m^4.\sin.\vartheta^2 + n^4.\cos.\vartheta^2)}}$$

und

$$\cos.\,\text{ObR} = \frac{(mm - nn).\sin.\vartheta.\cos.\vartheta^2}{\sqrt{(m^4.\sin.\vartheta^2 + n^4.\cos.\vartheta^2)}}$$

und dabey ist

$$\mu\nu = \frac{mn\sqrt{(m^4.\sin.\vartheta^2 + n^4.\cos.\vartheta^2)}}{mm,\sin.\vartheta^2 + nn,\vartheta^2}$$

§. 78.

Da also $OR = f.\sin.\vartheta$ ist, so wird

$$Ob = \frac{OR}{\sin.\ ObR} = \frac{f.\sin.\vartheta\sqrt{(m^4.\sin.\vartheta^2 + n^4.\cos\vartheta^2)}}{m^2.\sin.\vartheta^2 + n^2.\cos.\vartheta^2}$$

und

$$Rb = \frac{(mm - nn)\,f.\sin.\vartheta.\cos.\vartheta}{m^2.\sin.\vartheta^2 + n^2.\cos.\vartheta^2}$$

und da das Dreyeck CbR bey R rechtwinklig ist, so ist

$$\text{tang.}\ CbR = \frac{m^2.\sin.\vartheta^2 + n^2.\cos.\vartheta^2}{(m^2 - n^2)\sin.\vartheta.\cos.\vartheta.\cos.\varphi}$$

wodurch der Winkel CbR bekannt wird. Nun fälle man aus einem Punkte des Schnittes M auf die gerade Linie RT die MT der Cb parallel, und aus M nach Cb die MS der RT parallel, setze $bT = MS = t$, und $bS = TM = u$, und betrachte diese Linien als schiefwinklige Coordinaten des gesuchten Schnittes, indem tang. bSM $= \frac{m^2.\sin.\vartheta^2 + n^2.\cos.\vartheta^2}{(m^2 - n^2)\sin.\vartheta.\cos.\vartheta.\cos.\varphi}$ ist. Es erhellet also, daß diese Cordinaten bey einem geraden Kegel rechtwinklig werden, weil dabey $m = n$ ist.

§. 79.

Aus dem Punkte M des Schnittes fälle man auf die Ebene AEBF die senkrechte Linie MQ herab, so wird TQ dem Durchmesser ab parallel; auch ziehe man aus Q die Ordinate QP dem andern Durchmesser ef parallel. Setzt man nunmehr $OP = x$; $PQ = y$; und $QM = z$, so ist wegen der Natur des Kegels

$$m^2\nu^2 z^2 = \mu^2 y^2 + \nu^2 x^2.$$

Denn wenn man sich durch M einen der Grundfläche parallelen Schnitt des Kegels gedenkt, so sind die Durchmesser desselben die den geraden Linien ab und ef parallel sind,

μ^2

μz und νz. Da man aber die Catheten des rechtwinkligen Dreyecks COb, oder OC und Ob kennt, so ist die Hypothenuse Cb =

$$\frac{f.\sin.\vartheta\sqrt{(m^4.\sin\vartheta^2 + n^4.\cos.\vartheta^2 - (m^2-n^2)^2\sin\vartheta^2.\cos.\vartheta^2\sin.\varphi^2)}}{(m^2.\sin.\vartheta^2 + n^2\cos.\vartheta^2)\cos.\varphi}$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke TMQ und bCO ist

$$TM(u) : TQ(Ob - x) : QM(z) = bC : Ob : OC$$

folglich

$$x = Ob - \frac{Ob.u}{Cb};\ z = \frac{OC.u}{Cb};\ \text{und } y = t$$

also

$$\mu^2\nu^2.OC^2.u^2 = \mu^2.Cb^2.t^2 + \nu^2.Ob^2(Cb - u)^2$$

§. 80.

Entwickelt man diese Gleichung, so bekommt man

$$0 = \mu^2.Cb^2.tt + \nu^2(Ob^2 - \mu^2.OC^2)uu - 2\nu^2.Ob^2.Cb.u + \nu^2.Ob^2.Cb^2$$

und wenn man darin $u - \frac{Ob^2.Cb}{Ob^2 - \mu^2 OC^2} = s$ setzt, oder

$$bG = \frac{Ob^2.Cb}{Ob^2 - \mu^2.OC^2} = \frac{Cb}{1-(\mu^2.\sin.\vartheta^2 + n.\cos.\vartheta^2)\tang\varphi^2}$$

und GS = s annimmt: so ist G der Mittelpunkt des Kegelschnitts, der durch folgende Gleichung zwischen den Coordinaten t und s ausgedruckt wird,

$$\mu^2.Cb^2.tt + \nu^2(Ob^2 - \mu^2.OC^2)ss = \frac{\mu^2\nu^2.Ob^2.OC^2.Cb^2}{Ob^2 - \mu^2.OC^2}$$

und dessen halbe Axe $= \frac{\mu.Ob.OC.Cb}{Ob^2 - \mu^2 OC^2}$, die zugehörige halbe Axe $= \frac{\nu.Ob.OC}{\sqrt{(Ob^2 - \mu^2.OC^2)}}$, und der halbe Parameter $= \frac{\nu\nu.Ob.OC}{\mu.Cb}$ ist. Uebrigens erhellet, daß die

Curve, wenn tang. φ kleiner als $\frac{1}{\sqrt{(m^2 . \sin \vartheta^2 + n^2 . \cos \vartheta^2)}}$ oder tang. φ kleiner als $\frac{\nu}{mn}$ ist, eine Ellipse, wenn tang. $\varphi = \frac{\nu}{mn}$, eine Parabel, und wenn tang. φ größer als $\frac{\nu}{mn}$ ist, eine Hyperbel seyn wird.

§. 81.

Der dritte Körper, dessen von einer Ebene gemachte Schnitte wir hier untersuchen wollen, ist die Kugel, von welcher aus der Elementar-Geometrie bekannt ist, daß alle ebene Schnitte derselben Kreise sind. Damit indessen die Methode, aus jeder für einen Körper gegebenen Gleichung jeden Schnitt desselben zu finden, deutlicher werde, so will ich hier eben das analytisch vortragen, was man sonst synthetisch zu lehren pflegt. Es sey also, Fig. 138, C der Mittelpunkt der Kugel, und durch denselben gehe die Ebene der Tafel, so daß der durch diese Ebene gemachte Schnitt ein größter Kreis sey, der den Halbmesser CA = CB = r habe, welcher zugleich der Halbmesser der Kugel seyn wird. Ferner sey die gerade Linie DT der Durchschnitt der schneidenden Ebene mit jener Ebene der Tafel, und auf ihr aus dem Mittelpunkte C die gerade Linie CD = f senkrecht, der Neigungswinkel aber = φ.

§. 82.

Es sey M irgend ein Punkt in dem gesuchten Schnitte, und aus demselben auf die Ebene der Tafel MQ, so wie von hier auf die zur Axe angenommene CD die QP senkrecht,

recht. Setzt man nun die Coordinaten $CP = x$, $PQ = y$, und $QM = z$, so ist wegen der Natur der Kugel

$$xx + yy + zz = aa.$$

Man ziehe aus M auch auf DT eine senkrechte Linie MT, so wird der Winkel MTQ der Neigungswinkel der schneidenden Ebene und der Ebene der Grundfläche seyn, welchen wir $= \varphi$ gesetzt haben. Betrachtet man daher DT und MT als die Coordinaten des gesuchten Schnittes, und setzt $DT = t$, und $TM = u$, so wird

$$MQ = u.\sin.\varphi, \text{ und } TQ = u.\cos.\varphi$$

und folglich

$$CP = x = f - u.\cos.\varphi;\ PQ = y = t;\text{ und}$$
$$QM = z = u.\sin.\varphi.$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man folgende Gleichung für den gesuchten Kugelschnitt:

$$ff - 2fu.\cos.\varphi + uu + tt = aa.$$

§. 83.

Es erhellet, daß dies eine Gleichung für einen Kreis ist. Denn setzt man $u - f.\cos.\varphi = s$, so wird

$$ff.\sin.\varphi^2 + ss + tt = aa$$

und es ist folglich der Halbmesser des Schnittes $= \sqrt{(aa - ff.\sin.\varphi^2)}$. Wenn also aus D, der Applicate TM parallel, die Linie Dc gezogen, und auf sie die senkrechte Linie Cc aus dem Mittelpunkte herabgefällt wird: so ist, wegen $CD = f$, und $CDc = \varphi$

$$Dc = f.\cos.\varphi;\text{ und } Cc = f.\sin.\varphi.$$

Da daher die Coordinaten s und t auf den Mittelpunkt bezogen werden, so ist c der Mittelpunkt des Schnitts, und $\sqrt{(CB^2 - Cc^2)}$ der Radius desselben, wie aus den Elementen bekannt ist. Auf ähnliche Art aber lassen sich auch alle durch Ebenen gemachte Schnitte aller Körper, deren Natur durch eine Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen ausgedruckt ist, erforschen.

§. 84.

Damit indeß diese Operation noch deutlicher werde, so sey ein Körper gegeben, dessen Natur durch eine Gleichung zwischen den drey Coordinaten $AP = x$; $PQ = y$ und $QM = z$, Fig. 139, ausgedruckt werde; wovon die beyden ersten in der Ebene der Tafel liegen, die dritte z aber darauf senkrecht stehen mag. Ferner werde dieser Körper durch eine Ebene geschnitten, die mit der Ebene der Tafel die Linie DT gemein habe, und deren Neigungswinkel $= \varphi$ sey. Man setze $AD = f$, und den Winkel $ADE = \vartheta$, so ist, wenn man aus A nach DE die senkrechte Linie AE zieht,

$$AE = f.\sin.\vartheta; \text{ und } DE = f.\cos.\vartheta.$$

Hierauf ziehe man aus einem Punkte des gesuchten Schnittes M auf DT die MT senkrecht, und verbinde Q und T durch QT: so ist der Winkel $MTQ = \varphi$. Nimmt man daher $DT = TM$ zu den Coordinaten des gesuchten Schnittes und setzt man $DT = t$, und $TM = u$, so wird

$$QM = u.\sin.\varphi; \text{ und } TQ = u.\cos.\varphi$$

§. 85.

Aus T fälle man auf die Axe AD die Linie TV senkrecht, so ist wegen $TDV = \vartheta$,

$$TV = t.\sin.\vartheta; \text{ und } DV = t.\cos.\vartheta$$

Da ferner der Winkel $TQP = \vartheta$ ist, so wird

$$PV = u.\sin.\vartheta.\cos.\varphi; \text{ und } PQ - TV = u\cos.\vartheta.\cos.\varphi$$

Hier-

Hieraus lassen sich die Coordinaten x, y und z durch t und u auf folgende Art bestimmen:

$$AP = x = f + t.\cos\vartheta - u.\sin.\vartheta.\cos.\varphi$$

$$PQ = y = \quad t.\sin.\vartheta. + u.\cos.\vartheta.\cos.\varphi$$

und

$$QM = z = u.\sin.\varphi$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung zwischen x, y und z, welche für den Körper gegeben ist, so bekommt man eine Gleichung zwischen t und u, oder den Coordinaten des gesuchten Schnittes, dessen Natur also dadurch bekannt wird. Es stimmt aber diese Methode mit der fast überein, welche wir oben §. 50 gebraucht haben.