Zweytes Capitel.

Von den Schnitten der Flächen, wenn Ebenen durch sie gelegt werden.

§. 26.

So wie sich Linien in Punkten schneiden, so thun die Flächen solches in Linien, geraden entweder oder krummen. Eine Ebene schneidet eine Ebene in einer geraden Linie, wie aus der Elementar-Geometrie bekannt ist; wenn aber eine Kugel von einer Ebene geschnitten wird, so ist der Schnitt ein Kreis. Kennt man die Linien, in welchen Flächen von gegebenen Ebenen geschnitten werden, so hat man daran ein Hülfsmittel zur Kenntniß der Flächen selbst; denn man lernt dadurch auf einmal unzählige Punkte der Fläche kennen, da hingegen nach der im vorhergehenden Capitel beschriebenen Methode die einzelnen Werthe der veränderlichen Größe z nur einzelne Punkte derselben zu erkennen geben.

§. 27.

Da wir die Flächen auf drey auf einander senkrechte Ebenen beziehen, so müssen wir vor allen Dingen die Durchschnittslinien der Flächen mit diesen Ebenen betrachten. Nimmt man also zuvörderst die Ebene APQ, Fig. 121, welche durch die veränderlichen Größen $AP = x$, und $AQ = y$ bestimmt wird, (indem die dritte veränderliche Größe z die Entfernung der Fläche von dieser Ebene an-

zeigt)

zeigt) so fällt in die Augen, daß man, wenn man $z = o$ setzt, die Punkte der Fläche finden werde, welche in der Ebene APQ selbst liegen; und es giebt daher die übrigbleibende Gleichung zwischen x und y die Linie, in welcher die Fläche von der Ebene APQ geschnitten wird. Auf ähnliche Art druckt, wenn man $y = o$ setzt, die Gleichung zwischen x und z die Durchschnittslinie der Fläche und der Ebene APR, und wenn man $x = o$ setzt, die zwischen y und z die Durchschnittslinie der Fläche und der Ebene AQR aus.

§. 28.

Ich habe schon vorhin berührt, daß die Oberfläche einer Kugel, die den Mittelpunkt in A hat, und deren Halbmesser $= a$ ist, durch die Gleichung $xx + yy + zz = aa$ ausgedruckt werde; und ich will daher dieses Beyspiel zur Erläuterung gebrauchen. Es sey also $z = o$, so druckt die Gleichung $xx + yy = aa$ den Kugelschnitt, der von der Ebene APQ erzeugt wird, aus, und man sieht, daß derselbe ein Kreis ist, der den Mittelpunkt in A, und den Halbmesser $= a$ hat. Auf ähnliche Art ist, wenn man $y = o$ setzt, der Kugelschnitt, welchen die Ebene APR macht, ein Kreis, der durch die Gleichung $xx + zz = aa$ ausgedruckt wird; und wenn man $x = o$ setzt, so giebt die Gleichung $yy + zz = aa$ einen gleichen Kreis für den durch die Ebene AQR hervorgebrachten Kugelschnitt. Dies sind bekannte Dinge, da, wenn eine Kugel von einer Ebene geschnitten wird, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht, der Schnitt allemal ein größter Kreis ist, der mit der Kugel gleichen Halbmesser hat.

§. 29.

Nicht schwerer ist es, die Durchschnittslinien zu bestimmen, welche durch Ebenen gemacht werden, die einer von jenen

jenen Haupt-Ebenen parallel sind. Man denke sich eine Ebene, die der Ebene APQ parallel sey, und von ihr um die Weite = h abstehe; so werden alle Punkte der Fläche, deren Entfernung von eben der Ebene APQ, welche Entfernung durch die veränderliche Größe z ausgedruckt wird, = h ist, in dieser parallelen Ebene liegen, und also eine Durchschnittslinie bilden. Für diese Durchschnittslinie hat man daher eine Gleichung, wenn man in der Gleichung für die Fläche z = h setzt; denn man bekommt dadurch eine Gleichung zwischen den Coordinaten x und y, welche die Natur der Durchschnittslinie ausdruckt. Auf ähnliche Art lassen sich die Schnitte bestimmen, welche durch Ebenen, welche der APR oder AQR parallel sind, erzeugt werden, und es würde überflüssig seyn, das Gesagte bey ihnen zu wiederholen.

§. 30.

Wenn also in der Gleichung für eine Fläche zwischen den drey Coordinaten x, y und z eine dieser Coordinaten z einer beständigen Größe h gleich gesetzt wird, so entsteht ein Durchschnitt der Fläche und einer Ebene, welche der Ebene APQ parallel ist, und von ihr um die Entfernung = h absteht. Legt man demnach dem Buchstaben h nach und nach alle mögliche Werthe, die positiven nicht nur, sondern auch die negativen, bey, so erhält man alle Durchschnittslinien der Fläche und der Ebenen, welche der Ebene APQ parallel sind; und da die ganze Fläche durch dergleichen parallele Ebenen in unendliche viele Theile getheilt wird, und man auf die gedachte Art alle Durchschnittslinien kennen lernt: so wird man auch durch alle diese Durchschnittslinien mit der Fläche selbst bekannt. Alle diese Durchschnittslinien sind nemlich in einer einzigen Gleichung zwischen den Coordinaten x und y, die eine unbestimmte beständige Größe in sich faßt, enthalten, und es sind daher alle diese Durchschnittslinien entweder ähnliche oder verwandte in einer Gleichung enthaltene Linien.

§. 31.

Es werden also alle Schnitte der Fläche, die der Ebene APQ parallel sind, einander gleich seyn, und von den Ebenen APR und AQR auf gleiche Art geschnitten werden, wenn die Gleichung zwischen x und y so beschaffen ist, daß sie unverändert bleibt, h mag einen Werth bekommen, was für einen man will. Dies kann aber nicht geschehen, wofern nicht die veränderliche Größe z, statt welcher h gesetzt worden, in der Gleichung für die Fläche gänzlich fehlt. Wenn also die dritte veränderliche Größe z ganz aus der Gleichung für die Fläche wegfällt, so sind alle der Ebene APQ parallele Schritte einander gleich, und ihre Natur wird durch die Gleichnng für die Fläche selbst ausgedruckt, indem dieselbe bloß die beyden veränderlichen Größen x und y enthält. Auf ähnliche Art stimmen, wenn in der Gleichung für die Fläche entweder x oder y fehlt, alle der Ebene AQR oder APR parallele Schritte mit einander überein.

§. 32.

Eine solche Fläche läßt sich daher nicht nur sehr leicht denken, sondern selbst construiren und körperlich darstellen. Denn angenommen, daß in der Gleichung die veränderliche Größe z fehle, und man also bloß eine Gleichung zwischen den beyden Coordinaten AP = x, und AQ = PM = y habe, so beschreibe man darnach in der Ebene APQ eine Curve BMD, Fig. 122. Dann stelle man sich vor, daß eine

eine unbegrenzte, auf dieser Ebene selbst senkrecht bleibende gerade Linie nach der Curve BMD sich bewege, so wird dieselbe bey ihrer Bewegung die Fläche beschreiben, welche durch die Gleichung ausgedruckt wird. Wenn also die Linie BMD ein Kreis ist, so wird die auf diese Art entstandene Fläche die Oberfläche eines geraden, wenn aber BMD eine Ellipse ist, die eines schiefen Cylinders. Wenn die Linie BMD keine continuirliche, sondern eine aus mehrern geraden und eine geradlinige Figur bildenden Linie zusammengesetzte Linie ist, so wird die gedachte Fläche eine prismatische.

§. 33.

Da diese Gattung der Flächen alle cylindrische und prismatische Flächen unter sich begreift, so pflegt man sich auch die cylindrische oder prismatische zu nennen; die Arten derselben aber werden durch die ebene Figur BMD bestimmt, aus welcher sie auf die beschriebene Art entstanden sind; so wie daher auch die Figur BMD die **Basis** heißt. So oft daher in der Gleichung für eine Fläche eine von den drey veränderlichen Größen x, y und z fehlt, so oft ist die Fläche, welche durch diese Gleichung ausgedruckt wird, entweder eine cylindrische, oder eine prismatische. Wenn aber zwey veränderliche Größen y und z zugleich fehlen, so wird x eine beständige Größe, und die Linie BMD verwandelt sich in eine gerade Linie, welche auf der Axe AD senkrecht ist; woher denn die Fläche eine Ebene wird, die auf der Ebene APQ senkrecht steht.

§ 34.

Nach dieser Gattung der Flächen verdient vorzüglich diejenige bemerkt zu werden, welche man aus den homogenen

nen Gleichungen zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und z, oder alsdann erhält, wenn diese drey veränderliche Größen allenthalben eine und dieselbe Anzahl von Dimensionen haben, wie z. B. wenn $zz = mxz + xx + yy$ ist. Aus diesen Gleichungen werden nemlich alle Schnitte, wenn die schneidende Ebene einer von den Hauptebenen parallel ist, einander ähnliche Figuren. Denn legt man der veränderlichen Größe z einen beständigen Werth h bey, so ist offenbar, daß die Gleichung

$$hh = mhx + xx + yy$$

wenn man für h nach und nach andere Werthe annimmt, unzählige einander ähnliche Figuren unter sich begreife, deren Parameter der h gleich oder proportional sind. Da also diese Schnitte nicht bloß einander ähnlich sind, sondern auch in dem Verhältnisse der Entfernungen von der Ebene APQ wachsen, so sind die Linien, welche aus dem Punkte A durch die homogenen Punkte der Schnitte gezogen werden, gerade Linien.

§. 35.

Ist also eine solche homogene Gleichung zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und z gegeben, so ertheile man der z den Werth $AR = h$, und TSsMm, Fig. 123, sey in einer Ebene, welche der APQ durch den Punkt R parallel gelegt worden, so daß sie durch die Gleichung zwischen x und y ausgedruckt werde, und $RV = x$ und $VM = y$ sey. Ist nun dieser eine Schnitt TSsMm beschrieben, so stelle man sich vor, daß sich durch den Umfang desselben eine unbegrenzte gerade Linie bewege, die stets durch den Punkt A gehe, so wird diese gerade Linie die Fläche beschreiben, welche in der Gleichung enthalten ist. Dabey fällt in die Augen, daß, wenn TSsMm ein Kreis ist,

ist, welcher den Mittelpunkt in R hat, ein gerader, wenn aber R nicht der Mittelpunkt ist, ein schiefer Kegel entstehen werde; ist aber jene Figur geradlinig, so ergeben sich Pyramiden von allerley Art. Aus diesem Grunde wollen wir die Flächen, welche in dieser Art der Gleichungen enthalten sind, conische oder pyramidalische nennen.

§. 36.

Wenn also die Gleichung zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und z homogen, und also die dadurch ausgedruckte Fläche conisch oder pyramidalisch ist, so erhellet nicht nur hieraus, daß alle Schnitte, die einer Hauptebene APQ parallel gemacht worden, einander ähnlich sind, und daß ihre Parameter sich wie die Entfernungen der Schnitte von dem Scheitel A verhalten, sondern es werden auch aus gleichem Grunde alle Schnitte, welche entweder der Ebene APR, oder der Ebene AQR parallel sind, eben diese Eigenschaft haben, daß sie ähnliche Figuren sind, und daß sich ihre homologen Seiten wie ihre Entfernungen von A verhalten. Unten wird aber gezeigt werden, daß alle dergleichen Körperschnitte, die entweder einander, oder irgend einer Ebene durch den Scheitel A parallel liegen, auch einander ähnlich, und ihre Parameter den Entfernungen vom Scheitel A proportional sind.

§. 37.

Von einem weitern Umfange ist die Gattung der Flächen, welche wir jetzt betrachten wollen. Es sey Z irgend eine Funktion von z, und eine Gleichung zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und Z gegeben. Es werde $Z = H$, wenn man $z = h$ setzt. Da man in diesem Falle eine homogene Gleichung zwischen x, y und H erhält, so werden alle Schnitte, die der Ebene APQ parallel sind, einander ähnlich seyn, ihre Parameter aber werden sich nicht wie die Entfernungen h, sondern wie die Funktionen davon, H, verhalten. Es sind daher auch die Linien, welche durch die homologen Punkte dieser Schnitte gezogen werden, keine gerade Linien, sondern Curven, die von der Funktion Z abhangen. Auch folgt hier nicht, daß die Schnitte, die einer andern Ebene parallel sind, einander ähnlich seyen.

§. 38.

In dieser Gattung sind die beyden vorhergehenden Arten enthalten. Denn wird $Z = z$ oder $Z = \alpha z$, so entstehen, weil die Gleichung zwischen x, y und z homogen ist, conische Flächen. Eben dieses geschiehet, wenn $Z = \alpha + \beta z$ ist, nur mit dem Unterschiede, daß die Spitze des Kegels nicht in den Punkt A selbst fällt; ist nemlich $Z = \frac{b - z}{b}$, so steht die Spitze des Kegels von A um die Weite b ab. Setzt man $b = \infty$, so geht die conische Figur in eine cylindrische über, und es wird $Z = 1$. Es haben daher die Gleichungen für die cylindrischen Flächen die Beschaffenheit, daß die veränderlichen Größen x, und y mit der beständigen 1 allenthalben dieselbe Anzahl von Dimensionen geben. Es mag aber die Gleichung zwischen x und y beschaffen seyn, wie sie will, so kann man allemal, wenn z nicht darin vorkommt, durch die Einheit die Homogeneität herstellen, und es druckt daher, wie wir bereits oben gezeigt haben, jede Gleichung, worin eine veränderliche Größe fehlt, eine cylindrische Fläche aus.

§. 39.

Unter den Körpern, bey welchen alle Schnitte, die einer von den Hauptebenen APQ parallel sind, einander ähnlich werden, sind vorzüglich diejenigen zu merken, bey welchen diese Schnitte Kreise sind, welche den Mittelpunkt in eben der geraden und auf APQ senkrechten Linie AR haben. Dergleichen Körper lassen sich drechseln, und man nennt sie daher gedrehte Körper. Die allgemeine Gleichung für dieselben ist $ZZ = xx + yy$; denn man mag der veränderlichen Größe z, um $Z = H$ zu erhalten, einen Werth beylegen, was für einen man will, so bekommt man allemal für den Schnitt, welcher der Ebene APQ parallel ist, die Gleichung $HH = xx + yy$, und dies ist eine Gleichung für einen Kreis, der den Halbmesser $= H$, und den Mittelpunkt in der geraden Linie AR hat. Wenn $ZZ = zz$ ist, so entsteht ein gerader Kegel; ist $ZZ = aa$, ein Cylinder; und ist $ZZ = aa - zz$, eine Kugel, und dies sind die vornehmsten Arten der Körper, die sich durchs Drehen erzeugen lassen.

§. 40.

Nun wollen wir die Körper betrachten, deren auf der Axe AP senkrechte Schnitte PTV, Fig. 124, insgesammt Dreyecke sind, deren Spitzen T in der der Axe AP parallelen geraden Linie DT liegen. Es sey AVB die Basis dieses Körpers, oder ein Schnitt von ihm, der in der Ebene APQ gemacht worden, und irgend eine Curve. Läßt man die Entfernung der geraden Linie DT von der Axe AB, oder $AD = C$ seyn, und setzt man, wie bisher, die drey veränderlichen Größen $AP = x$, $PQ = y$ und $QM = z$; so wird PV eine Funktion von x: setzt man aber $PV = P$, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke VQM und VPT

$$P : c = P - y : z$$

oder

$$z = c - \frac{cy}{P}$$

Für diese Körper ist daher $\frac{c - z}{y}$ gleich einer Funktion von x; und es unterscheiden sich dieselben von den conischen, daß sie sich in eine geradlinige Spitze DT endigen, da solches die conischen in einen Punkt thun. Ist AVB ein Kreis, so entsteht der Körper, den Wallis ausführlich untersucht, und den kegelförmigen Keil genannt hat.

§. 41.

Es seyen, wie vorhin, alle auf der Axe AB senkrechte Schnitte PTV, Fig. 125, Dreyecke, welche bey P einen rechten Winkel haben, deren Scheitel T aber irgend eine Curve AT bilden, und die Basis sey die Figur AVB. Setzt man die drey veränderlichen Größen $AP = x$, $PQ = y$ und $QM = z$, so ist in der Curve AVB die gerade Linie PV eine Funktion von x, die wir $= P$ annehmen wollen; und PT ebenfalls eine Funktion von x, die $= Q$ seyn mag. Dies vorausgesetzt, ist

$$P : Q = P - y : z$$

und also

$$z = Q - \frac{Qy}{P}, \text{ oder } Pz + Qy = PQ$$

oder

$$\frac{z}{Q} + \frac{y}{P} = 1, \text{ oder eine beständige Größe.}$$

Wenn also die beyden veränderlichen Größen y und z nirgends mehr als eine Dimension ausmachen, so gehört der Körper zu der Gattung, welche wir hier beschrieben haben.

§. 42.

§. 42.

Da wir also diejenigen Körper betrachtet haben, wobey die Schnitte, die der einen Hauptebene parallel gemacht werden, insgesammt einander ähnlich sind: so wollen wir uns nun zu solchen wenden, wobey diese Schnitte wenigstens mit einander verwandte Figuren, oder solche werden, deren Applicaten proportional sind, wenn man die Abscissen homolog nimmt. Es seyen die drey Hauptschnitte eines solchen Körpers ABC, ACD und ABD, Fig. 126, so daß alle der ACD parallele Schnitte verwandte Figuren werden. Man setze die Grundlinie $AC = a$ und die Höhe $AD = b$, und dabey sey, nachdem man die Coordinaten $Aq = p$ und $qm = q$ gemacht hat, q irgend eine Funktion von p. Nun denke man sich einen parallelen Schnitt PTV, und setze die Entfernung $AP = x$, so ist die Basis PV eine Funktion von x, die wir $= P$, und die Höhe PT eine Funktion von x, die wir $= Q$ annehmen wollen. Setzt man daher $PQ = y$ und $QM = z$, so ist wegen der Verwandtschaft

$$a : p = P : y; \text{ und } b : q = Q : z$$

oder

$$y = \frac{Pp}{a}; \text{ und } z = \frac{Qq}{b}.$$

§. 43.

Wenn also alle drey Hauptschnitte eines Körpers ABC, ACD und ABD gegeben sind, so läßt sich daraus die Natur des Körpers bestimmen, wenn alle dem ACD parallele Schnitte auch demselben verwandt sind. Denn man hat dadurch zuvörderst P und Q, welches Funktionen von x sind; und dann ist q eine Funktion von p, so daß durch die beyden veränderlichen Größen x und p die veränderlichen

Größen y und z bestimmt werden. Will man aber eine Gleichung zwischen den drey Coordinaten x, y und z haben, so setze man, da q eine Funktion von p, oder eine Gleichung zwischen p und q gegeben ist, in dieser Gleichung

$$p = \frac{ay}{P}, \text{ und } q = \frac{bz}{Q}$$

denn dadurch erhält man, da P und Q Funktionen von x sind, eine Gleichung zwischen den drey Coordinaten x, y und z, wodurch die Natur der zu dieser Classe gehörigen Körper bestimmt wird. Es fällt aber in die Augen, daß, wenn man $x = 0$ setzt, $P = a$ und $Q = b$ werden muß.

§. 44.

Wenn in der Gleichung für die Oberfläche die beyden veränderlichen Größen y und z allenthalben eben dieselbe Anzahl von Dimensionen haben, so sind alle auf der Axe AP senkrechte Schnitte geradlinige Figuren. Denn setzt man für x irgend eine beständige Größe, so erhält man eine homogene Gleichung zwischen y und z, welche eine oder mehrere gerade Linien anzeigt. Da nun die Anzahl der Dimensionen, welche die beyden veränderlichen Größen y und z haben, allenthalben dieselbe, und entweder eine gerade oder eine ungerade Zahl ist: so haben dieserwegen die gedachten Körper nach §. 20. auch je zwey und zwey Theile einander gleich. Es sind nemlich die Theile in der ersten und fünften, ferner in der zweyten und dritten Gegend einander gleich, und in Ansehung der übrigen braucht man nur den angeführten § zu Rathe zu ziehen.

§. 45.

Wir haben bereits mehrere Gattungen von Körpern betrachtet, wobey es unzählige geradlinige Schnitte giebt, denn

denn es gehören dahin die so eben untersuchten, und dann auch die cylindrischen und conischen Körper. Bey diesen sind die Schnitte geradlinig, welche durch die Axe gehen, jene aber erstrecken sich weiter. Es sey nemlich AKMP, Fig. 127, ein Schnitt, der auf der Axe unter dem Winkel MPV $= \phi$ stehe. Setzt man AP $= x$; PQ $= y$ und QM $= z$, so ist $\frac{z}{y} = \text{tang.}\,\phi$, und PM $= \frac{z}{\text{sin.}\,\phi}$. Soll nun KM eine gerade Linie seyn, so muß

$$\frac{z}{\text{sin.}\,\phi} = \alpha x + \beta$$

werden, wo α und β beständige Größen, die von dem Winkel ϕ abhängen, und also Funktionen von keiner Dimension von y und z sind. Es seyen R und S dergleichen Funktionen, so wird

$$x = Rz + S, \text{ oder } x = Ry + S$$

Oder wenn T eine Funktion von einer Dimension, und S eine Funktion von keiner Dimension von y und z bedeutet, so sind alle Körper von dieser Gattung in dieser allgemeinen Gleichung $x = T + S$ enthalten.

§. 46.

Es sey die Fläche, deren Natur durch eine Gleichung zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und z bestimmt worden, beschaffen, wie sie wolle, so ist es allemal leicht, einen jeden nach der Axe AP gemachten Schnitt zu bestimmen. Es sey der Winkel VPM, welchen dieser Schnitt AKMP mit der Ebene ACVP macht $= \phi$, und die gerade Linie PM $= v$, welches die Applicate des gesuchten Schnitts seyn wird; so ist

$$QM = z = v.\,\text{sin.}\,\phi; \text{ und } PQ = y = v.\,\text{cos.}\,\phi.$$

Braucht man daher in der Gleichung für die Fläche die

Werthe v. sin. ϕ, und v. cos. ϕ für y und z, so erhält man eine Gleichung zwischen den beyden veränderlichen Größen x und v, wodurch die Natur des Schnitts AKMP bestimmt wird. Auf ähnliche Art findet man alle Schnitte, welche nach einer von den beyden übrigen Hauptaxen AQ und AR Fig. 121. gemacht werden. Denn es lassen sich diese drey Axen AP, AQ und AR, von welchen die drey veränderlichen Größen x, y und z abhangen, so mit einander verwechseln, daß alles, was von der einen erwiesen worden, auch auf die übrigen angewandt werden kann.

§. 47.

Nimmt man also die Ebene APQ zur Hauptebene an, um darauf alle Schnitte der Fläche zu beziehen, so ist jeder durch eine Ebene gemachter Schnitt entweder dieser Ebene parallel oder gegen sie geneigt, und in diesem Falle wird die erweiterte Ebene des Schnittes die Ebene APQ irgendwo schneiden, und der Durchschnitt dieser Ebenen wird eine gerade Linie seyn. Im ersten Falle, wenn die Ebene des Schnittes der Ebene APQ parallel ist, lernt man die Natur dieses Schnittes kennen, wenn man der veränderlichen Größe z einen beständigen Werth ertheilt. Im letzten Falle, wenn die Ebene des Schnittes gegen die Ebene APQ geneigt ist, kann man die Natur des Schnittes bis jetzt nur dann bestimmen, wenn entweder die gerade Linie AP, oder die gerade Linie AQ die Durchschnittslinie der schneidenden Ebene und der Ebene APQ ist. Um also alle Schnitte zu finden, muß man auch jeden andern Schnitt jener zwey Ebenen betrachten.

§. 48.

Es sey die gerade Linie ES, Fig. 128, welche der Axe AP parallel ist, die Durchschnittslinie der schneidenden Ebene

Ebene und der Ebene APQ, und der Neigungswinkel QSM, den die schneidende Ebene ESM mit der Ebene APQ macht, $= \varphi$, so wie die Entfernung $AE = f$. Da

$$AP = x;\ PQ = y;\ \text{und}\ QM = z$$

ist, so wird

$$ES = x,\ \text{und}\ QS = y + f.$$

Bezieht man demnach den Schnitt auf die gerade Linie ES als auf seine Axe, so wird die Abscisse $ES = x$; und setzt man die Applicate $SM = v$, so wird, weil der Winkel $QSM = \varphi$ ist,

$$QM = z = v.\sin.\ \varphi;\ \text{und}\ SQ = y + f = v.\cos.\ \varphi$$

und folglich

$$y = v.\cos.\ \varphi - f.$$

Substituirt man daher in der Gleichung zwischen x, y und z, welche für die Fläche gegeben ist,

$$y = v.\cos.\ \varphi - f;\ \text{und}\ z = v.\sin.\ \varphi$$

so bekömmt man eine Gleichung zwischen den Coordinaten x und v für den gesuchten Schnitt ESM. Wäre ES senkrecht auf der Axe AP, so fände man, weil dann ES der andern Hauptaxe in der Ebene APQ parallel wäre, den Schnitt durch Verwechselung der veränderlichen Größen x und y auf eben die Art.

§. 49.

Nun habe der Schnitt ES, Fig. 129, in der Ebene APQ jede willkührlich angenommene Lage, und es begegne ihr die gerade Linie AE, die auf der Axe AP senkrecht ist, in dem Punkte E. Man ziehe ETX der Axe AP parallel, und setze $AE = f$, und den Winkel $TES = \vartheta$; desgleichen, nachdem man die drey veränderlichen Größen $AP = x$; $PQ = y$ und $QM = z$ angenommen hat, aus Q auf ES die senkrechte Linie QS, und endlich MS: so ist der Winkel QSM die Neigung der schneidenden Ebene gegen die Ebene APQ. Es sey QSM = ϕ und die Coordinaten des gesuchten Schnittes ES = t, und SM = v. Aus S ziehe man nach EX und QP die senkrechten Linien ST und SV; so ist

$$QM = z = v.\sin.\phi;\ QS = v.\cos.\phi$$
$$SV = v.\cos.\phi.\sin.\vartheta;\ QV = v.\cos.\phi.\cos.\vartheta$$

und dann auch

$$ST = VX = t.\sin.\vartheta;\ \text{und } ET = t.\cos.\vartheta.$$

Hieraus fließt

$$AP = x = t.\cos.\vartheta + v.\cos.\phi.\sin.\vartheta$$

und

$$PQ = y = v.\cos.\phi.\cos.\vartheta - t.\sin.\vartheta - f.$$

Substituirt man diese Werthe für x, y und z, so findet man die Gleichung für den gesuchten Schnitt.

§. 50.

Ist also eine Gleichung für einen Körper gegeben, so kann man daraus eine Gleichung für jeden ebenen Schnitt desselben erhalten. Es ist aber dabey klar, einmal, daß alle Schnitte eines Körpers algebraische Curven seyn werden, wenn die Gleichung für denselben zwischen den drey Coordinaten x, y und z eine algebraische Gleichung ist. Ferner können t und v in der Gleichung für den Schnitt, da diese Gleichung aus der für den Körper entsteht, wenn man darin

$$z = v.\sin.\phi;\ x = t.\cos.\vartheta + v.\cos.\phi.\sin.\vartheta, \text{ und}$$
$$y = v.\cos.\phi.\cos.\vartheta - t.\sin.\vartheta. - f$$

setzt, nicht mehr Dimensionen bekommen, als die drey Coordinaten x, y und z in jener Gleichung haben. Aber zu einem niedrigern Grade kann die Gleichung für den

Schnitt

Schnitt bisweilen gehören, wenn sich nemlich die höchsten Glieder nach der Substitution einander aufheben.

§. 51.

Haben also die drey veränderlichen Größen x, y und z in der Gleichung für die Fläche nicht mehr als eine Dimension, so daß die Gleichung folgende ist

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = a$$

so sind alle Schnitte dieser Fläche gerade Linien. In diesem Falle ist aber die Fläche eine Ebene, welches bey einiger Aufmerksamkeit in die Augen fällt, und unten deutlicher gezeigt werden wird; aus den Elementen aber ist bekannt, daß jede zwey Ebenen sich in einer geraden Linie schneiden. Auf ähnliche Art sieht man ein, daß alle Schnitte der Körper, deren Natur durch folgende allgemeine Gleichung ausgedruckt wird

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \zeta yz + ax + by + cz + ee = 0$$

wofern sie nicht gerade Linien sind, Linien der zweyten Ordnung seyn werden, und daß es dabey keinen Schnitt gebe, der nicht in der Gleichung vom zweyten Grade enthalten sey.