Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Neunzehntes Capitel. Von den Durchschnittspunkten der Curven.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53306

Neunzehntes Capitel.

Von den Durchschnittspunkten der Curven.

§. 457.

In den vorhergehenden Capiteln haben wir uns schon mehrmals mit der Betrachtung der Umstände beschäftiget, unter welchen Curven von geraden Linien geschnitten werden, da nemlich, wo wir zeigten, daß eine Linie der zweyten Ordnung von einer geraden Linie in nicht mehr als in zwey Punkten geschnitten werden könne, daß die Linien der dritten Ordnung nicht mehr als drey, die der vierten Ordnung nicht mehr als vier Durchschnittspunkte zulassen, 2c. Da ich also in dem gegenwärtigen Capitel die Durchschnittspunkte zu bestimmen mir vorgenommen habe, welche bey zwey sich schneidenden Curven statt finden; so muß ich dabey von geraden Linien anfangen, und die Punkte anzugeben suchen, in welchen eine gegebene Curve von einer gegebenen geraden Linie geschnitten wird. Es wird nemlich auf diese Art der Weg zur Bestimmung der Durchschneidung der Curven von andern Curven gebahnt werden, welche bey der Construction der Gleichungen der höhern Grade von der größesten Wichtigkeit ist, wie solches in dem folgenden Capitel gezeigt werden soll.

§. 458.

Es sey also eine Curve AMm, Fig. 94, gegeben, deren Natur durch eine Gleichung zwischen den rechtwinkligen

Coor-

Coordinaten $AP = x$, und $PM = y$ ausgedruckt wird. Nun werde irgend eine gerade Linie BMm gezogen, und gefragt, in wie viel und in was für Punkten dieselbe die Curve AMm schneiden werde? Zur Beantwortung dieser Frage suche man die Gleichung für diese gerade Linie, und zwar ebenfalls zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y, so wie auch für eben dieselbe Axe AP und für eben den Anfangspunkt der Abscissen A. Diese Gleichung wird folgende Form

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

haben, woraus erhellet, daß, wenn $x = 0$ wird,

$$y = AD = \frac{\gamma}{\beta}$$

und wenn $y = 0$ wird

$$x = - AB = \frac{\gamma}{\alpha}$$

ist. Hiedurch lernt man nicht nur den Punkt B, wo die gerade Linie mit der Axe zusammenkommt, sondern auch den Winkel bey B, dessen Tangente $= \frac{AD}{AB} = \frac{-\alpha}{\beta}$ ist, kennen; und so ist sowohl die Curve als die gegebene gerade Linie durch Gleichungen zwischen gemeinschaftlichen Coordinaten x und y ausgedruckt.

§. 459.

Wenn die Abscissen x in beyden Gleichungen immer von gleicher Größe genommen werden, so zeigen die Applicaten y, wenn sie verschieden sind, an, wie weit die Punkte der Curve und der geraden Linie, die zu einerley Abscisse gehören, von einander entfernt sind. Wenn sich also aus beyden Gleichungen nicht mehr als ein Werth für y ergiebt, so haben die Curven und die gerade Linie daselbst einen Punkt

Punkt gemein, und es findet also an diesem Orte ein Durchschnittspunkt statt. Will man also die Durchschnittspunkte finden, so muß man in beyden Gleichungen außer den Abscissen x auch die Applicaten y gleich machen; und man hat auf diese Art zwey Gleichungen mit zwey unbekannten Größen x und y, durch deren Auflösung entweder die Abscissen x, wozu die Durchschnittspunkte gehören, oder die Applicaten y gefunden werden. Schafft man nemlich aus diesen beyden Gleichungen y weg, so bekommt man eine Gleichung, welche bloß die unbekannte Größe x in sich enthält, und die Werthe dieser Gleichung geben die Abscissen AP, Ap, deren Applicaten PM, pm durch die Durchschnittspunkte M und m gehen.

§. 460.

Da die Gleichung für die gerade Linie $\alpha x + \beta y = \gamma$ ist, so wird daraus

$$y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$$

und bringt man diesen Werth für y in die Gleichung für die Curve, so bekommt man eine Gleichung, worin bloß x enthalten ist, und deren Wurzeln alle reelle Abscissen geben, wozu Durchschnittspunkte gehören, so daß man aus der Anzahl dieser reellen Wurzeln von x, welche sich aus dieser Gleichung ergeben, auf die Menge der statt findenden Durchschnittspunkte schließen kann. Da aber in dem Werthe von $y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$ die unbekannte Größe nicht mehr als eine Dimension hat, so bekommt man durch die Substitution dieses Werthes eine Gleichung, in welcher x nicht mehr Dimensionen erhält, als vorher in der für die Curve gegebenen Gleichung x und y zusammen hatten. Es hat

also

also x entweder eben so viel Dimensionen, oder weniger, wenn durch die Substitution die höchsten Potestäten von x wegfallen.

§. 461.

Nachdem man auf diese Art die Absciſſen AP, Ap gefunden hat, welche zu den Durchschnittspunkten gehören, so lassen sich daraus die Durchschnittspunkte M und m selbst leicht bestimmen. Denn da die Applicaten in den Punkten P und p durch die Durchschnittspunkte gehen, so dürfen nur die Punkte bemerkt werden, wo diese Applicaten die gerade Linie BMm schneiden. Es könnten auch die Punkte bemerkt werden, wo diese Applicaten der Curve AMm begegnen; aber da eine Applicate der Curve öfters in mehrern Punkten begegnet, so würde es ungewiß seyn, welcher von den Punkten der Curve zugleich ein Durchschnittspunkt wäre. Diese Unbequemlichkeit vermeidet man, wenn man die Durchschnittspunkte nach der geraden Linie BMm beurtheilt, indem von derselben keine Applicate in mehr als in einem Punkte geschnitten werden kann. Ereignet es sich aber, daß zwey Werthe von x einander gleich werden, so fallen die beyden Durchschnittspunkte M und m in einen zusammen, und in diesem Falle berührt entweder die gerade Linie BM die Curve, oder schneidet sie in einem doppelten Punkte.

§. 462.

Wenn nach der Wegschaffung von y die dadurch entstehende Gleichung, wodurch x bestimmt wird, keine reelle Wurzel hat, so ist dieses ein Kennzeichen, daß die Curve von der geraden Linie BMm nirgends berührt oder geschnitten wird. Dagegen geben die reellen Wurzeln dieser Gleichung, (so viel ihrer seyn mögen) eben so viel Durchschnittspunkte an, weil zu jeder reellen Abscisse eine reelle Applicate der geraden Linie BMm gehört, und, da diese Applicate der Applicate der Curve gleich ist, daselbst nothwendig ein Durchschnittspunkt seyn muß. Dieses muß deswegen sorgfältig gemerkt werden, weil, wenn zwey Curven sich schneiden, die einzelnen reellen Wurzeln nicht eben so viel Durchschnittspunkte anzeigen. Der Grund hiervon wird bald klar werden, wenn wir zwey Curven betrachten, und die Durchschnittspunkte, die bey ihnen statt finden, aufsuchen werden.

§. 463.

Es seyen also, Fig. 95, zwey sich schneidende Curven von irgend einer Art, MEm und MFm beschrieben, und um die Durchschnittspunkte derselben zu bestimmen, sey die Natur einer jeden Curve durch eine Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y, die auf einerley Axe AB und auf denselben Anfangspunkt der Abscisse bezogen werden, ausgedruckt. Nimmt man also die Abscissen x für beyde Curven gleich, so werden da, wo es Durchschnittspunkte giebt, auch die Applicaten y gleich werden. Wenn man daher aus den beyden gegebenen Gleichungen der Curven y wegschafft, und so eine neue Gleichung macht, die bloß x als eine unbekannte Größe enthält: so werden alle Durchschnittspunkte M, m, m, so viel ihrer seyn mögen, durch die reellen Wurzeln dieser Gleichung angezeigt werden. Es werden nemlich die Abscissen AP, Ap, Ap, ꝛc., welche zu den Durchschnittspunkten M, m, $\bar{m}$, ꝛc. gehören, die Werthe von x seyn, die es aus der gedachten Gleichung bekommt.

§. 464.

Hat man aber die Abscissen AP, Ap, ꝛc. gefunden, welche zu den Durchschnittspunkten gehören, so ist es hier so leicht nicht als vorhin, die Durchschnittspunkte selbst zu bestimmen. Denn wenn in jeder Curve eine und dieselbe Abscisse mehrere Applicaten hat; und dies findet statt, wenn in beyden Curven y eine vielförmige Funktion von x ist: so muß man aus dieser doppelten Menge der Applicaten diejenigen aussuchen, welche einander gleich sind; und dieses Aufsuchen ist ein desto beschwerlicheres Geschäfte, je mehrere Werthe der Applicate y in jeder Curve hat. Indeß kann man diese Schwierigkeit dadurch heben, daß man bey der Wegschaffung die Applicate y aus den beyden gegebenen Gleichungen diejenige zu Hülfe nimmt, worin y durch x bestimmt wird. Man lernt nemlich aus dieser Gleichung, wie groß die Applicate aus dem Punkte P bis nach dem Durchschnittspunkte für einen jeden gefundenen Werth von x sey, und man hat dabey nicht nöthig, die Natur der einen oder auch beyder Curven weiter zu erwägen.

§. 465.

Es sey die eine Curve eine Parabel, welche durch die Gleichung

$$yy - 2xy + xx - 2ax = 0;$$

und die andere ein Kreis, welcher durch die Gleichung:

$$yy + xx - cc = 0$$

ausgedruckt werde. Um y wegzubringen, subtrahire man zuvörderst die erste Gleichung von der zweyten, wo denn der Rest seyn wird

$$2xy + 2ax - cc = 0; \text{ und folglich } y = \frac{cc - 2ax}{2x}.$$

Hieraus sieht man schon, daß zu jedem Werthe von x, den man bekommen kann, reelle Werthe von y gehören werden. Man setze also den gefundenen Werth von y in die eine Gleichung, so findet man

$$c^4 - 4accx + 4(aa - cc)xx + 4x^4 = 0$$

und die reellen Wurzeln dieser Gleichung geben die wahren Durchschnittspunkte an. Gesetzt c sey $= 2a$, und folglich

$$4a^4 - 4a^3x - 3aaxx + x^4 = 0$$

so ist die eine Wurzel dieser Gleichung $x = 2a$, und nachdem man sie ausgezogen hat, so bleibt die Gleichung

$$x^3 + 2axx + aax - 2a^3 = 0$$

übrig, die noch eine reelle Wurzel giebt. Die Applicate aber, die zu beyden Wurzeln gehört, findet man aus der Gleichung

$$y = \frac{2aa - ax}{x};$$

zu der ersten nemlich $x = 2a$ gehört $y = 0$, so daß der Durchschnittspunkt in der Axe selbst liegt.

466.

Wenn also zwey Gleichungen zwischen x und y so beschaffen sind, daß man durch die Wegschaffung von y eine rationale y gleiche Funktion von x findet, so erhellet hieraus, daß alsdann eine jede reelle Wurzel von x aus der letzten Gleichung (nachdem y ganz weggebracht worden ist) einen wahren Durchschnittspunkt geben werde. Aber wenn man beym Eliminiren keine rationale Funktion von x, die y gleich ist, findet, so kann es sich ereignen, daß dann nicht alle reelle Wurzeln aus der letzten Gleichung wahre Durchschnittspunkte geben. Denn der Werth von x kann bisweilen so groß werden, daß dazu in keiner Curve eine reelle Applicate möglich ist; und doch darf man in diesem

Falle den Calcul keines Fehlers beschuldigen. Denn da zu dergleichen Abscissen in beyden Curven imaginäre Applicaten gehören, und die imaginären Größen eben so wohl als die reellen einander gleich oder ungleich seyn können: so ist kein Grund da, warum nicht diese imaginären Applicaten einander gleich seyn, und so auf einen imaginären Durchschnittspunkt führen sollten.

§. 467.

Um dies deutlicher zu machen, seyn Fig. 96. über derselben Axe BAE die Parabel EM für die Parameter $= 2a$, und außer ihr der Kreis AmB mit dem Halbmesser $= c$ beschrieben, so daß $AE = b$, und also die Unmöglichkeit der Durchschnittspunkte zum voraus offenbar sey. Man lasse A den Anfangspunkt der Abscissen, und die Abscissen nach E zu positiv, nach B aber hin negativ seyn, und dabey habe man folgende Gleichungen; für die Parabel

$$yy = 2ax - 2ab$$

und für den Kreis

$$yy = -2cx - xx.$$

Schafft man nun, um die Durchschnittspunkte zu finden, y weg, so erhält man sogleich

$$xx - 2(a + c)x - 2ab = 0$$

und daraus ergeben sich zwey reelle Werthe von x

$$x = -a - c \pm \sqrt{((a + c)^2 + 2ab)}$$

wovon der eine negativ, der andere positiv ist, und doch findet kein Durchschnittspunkt statt. Es giebt nemlich so wohl die Parabel als der Kreis für diese beyden Abscissen imaginäre Applicaten, die aber, in was für einem Grade sie auch imaginär seyn mögen, doch einander gleich sind. Es wird aber, wenn man diesen Werth von x gebraucht

$$y = \sqrt{(-2aa - 2ac - 2ab \pm 2a\sqrt{(aa + 2ac + cc + 2ab)})}$$

welches allerdings ein imaginärer Ausdruck ist.

§. 468.

Es erhellet aus diesem Beyspiele, daß es auch imaginäre Durschnittspunkte der Curven gebe, die, ob sie gleich keine Durchschnittspunkte sind, doch eben sowohl durch den Calcul herausgebracht werden, als die reellen. Und daher schließt man aus der Zahl der reellen Wurzeln von x aus der letzten Gleichung nicht sogleich mit Recht auf die Anzahl der wirklichen Durchschnittspunkte; denn es kann die Anzahl jener reellen Wurzeln größer seyn, als die Anzahl dieser Durchschnittspunkte, ja es kann von diesen letztern gar keinen geben, wenn man auch zwey oder mehr reelle Werthe von x findet. Indeß macht jeder Durchschnittspunkt eine reelle Wurzel von x in der letzten Gleichung nothwendig; und daher wird es zum wenigsten immer so viel reelle Wurzeln von x in dieser Gleichung geben, als Durchschnittspunkte statt finden; wenn gleich die Menge jener reellen Wurzeln auch größer seyn kann. Ob aber einem jeden reellen Werthe von x ein reeller Durchschnittspunkt zugehöre oder nicht, erkennt man bald, wenn man den zugehörigen Werth von y sucht. Denn ist dieser Werth reell, so giebt es auch einen reellen Durchschnittspunkt, und ist er imaginär, so ist solches auch dieser.

§. 469.

Diese Ausnahme oder dieser Unterschied zwischen der Anzahl der reellen Wurzeln von x und der Menge der reellen Durchschnittspunkte findet also bloß statt, wenn entweder in beyden Gleichungen die Applicate y allenthalben nur gerade Dimensionen hat, und also die Hauptaxe zugleich der

der Durchmesser beyder Curven ist; oder wenn beyde Gleichungen so beschaffen sind, daß bey der Wegbringung von yy auch zugleich y aus der Rechnung wegfällt, und folglich y durch keine rationale Funktion von x ausgedruckt werden kann. Ist z. B. die eine Gleichung

$$yy - xy = aa$$

und die andere

$$y^4 - 2xy^3 + x^3y = bbxx$$

so bringe man, da aus der ersten $(yy - xy)^2 = a^4$, oder $y^4 - 2xy^3 = a^4 - xxyy$ wird, diesen Werth in die andere Gleichung. Dadurch wird

$$a^4 - xxyy + x^3y = bbxx$$

oder

$$yy - xy = \frac{a^4 - bbxx}{xx} = aa$$

und folglich

$$xx = \frac{a^4}{aa + bb}$$

und

$$x = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa + bb)}}$$

Es scheint also ein doppelter Durchschnittspunkt da zu seyn; allein ob beyde reell sind oder nicht, muß man aus dem Werthe von y schließen, welchen man aus der Gleichung

$$yy - xy = aa$$

findet. Es wird aber daraus

$$yy = \frac{\pm aay}{\sqrt{(aa + bb)}} + aa$$

und da die Wurzeln dieser Gleichung insgesammt reell sind, so ist klar, daß es hier vier Durchschnittspunkte giebt, so daß zu jeder Absciſſe

 x =

$$x = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa + bb)}}$$

zwey reelle Durchschnittspunkte gehören.

§. 470.

Wenn aber weder die Axe der Durchmesser beyder Curven ist, noch der Fall statt findet, daß bey der Wegbringung der höhern Potestäten von y auch y gänzlich wegfällt: so zeigen, weil man dann auf eine rationale Funktion von x, die y gleich ist, kommt, die einzelnen Wurzeln der letzten Gleichung eben so viel wahre Durchschnittspunkte an, so daß in diesen Fällen weiter keine Vorsicht nöthig ist. Es geschiehet dieses, wenn die eine Curve in eine gerade Linie übergeht, wie wir vorhin gesehen haben, oder wenn ihre Applicate durch eine einförmige Funktion von x ausgedruckt wird; denn alsdann hat keine Abscisse eine imaginaire Applicate, und es müssen folglich die einzelnen Wurzeln von x wahre Durchschnittspunkte anzeigen. Meistens aber pflegt man, wenn auch y in beyden Gleichungen mehrere Dimensionen hat, bey der Wegschaffung von y auf eine Gleichung zu kommen, worin der Werth von y durch eine rationale und folglich einförmige Funktion von x ausgedruckt wird.

§. 471.

So oft es sich aber ereignet, daß einige von den Durchschnittspunkten, welche man durch den Calcul findet, imaginär werden, so geschiehet solches nicht bloß in den Fällen, wenn keine Curve eine reelle Applicate hat, die zu der gefundenen Abscisse gehöre: wie dies der Fall bey dem vorhergehenden Exempel von einer Parabel und einem Kreise war: sondern es lassen sich selbst Beyspiele geben, wo die eine Curve für alle Abscissen reelle Applicaten giebt, und

doch

doch zu den einzelnen Wurzeln von x keine Durchschnittspunkte gehören. Dergleichen ist die Linie der dritten Ordnung, die durch die Gleichung ausgedruckt wird:

$$y^3 - 3ayy + 2aay - 6axx = 0$$

die für alle Abscissen reelle Applicaten giebt, und zwar dreyfache, wenn x kleiner ist als $\frac{1}{3}a\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$. Wenn mit dieser Curve eine Parabel verbunden wird, deren Gleichung

$$yy - 2ax = 0$$

ist, so giebt es keine reelle Applicate, wenn x negativ ist, und es kann folglich auch zu den negativen Abscissen x kein Durchschnittspunkt gehören.

§. 472.

Man schaffe y weg, so verwandelt sich die erste Gleichung, da die zweyte $yy = 2ax$ giebt, in folgende:

$$2axy - 6aax + 2aay - 6axx = 0$$

und daher wird

$$y = \frac{6aax + 6axx}{2aa + 2ax} = 3x.$$

Da aber jene Gleichung durch $y - 3x$ theilbar ist, so erhält man, wenn man dividirt, folgende von y befreyte Gleichung:

$$2aa + 2ax = 0$$

und daraus fließt

$$x = -a.$$

Es sollte also der Durchschnittspunkt der Curve zu der Abscisse $x = -a$ gehören, die in der Parabel keine reelle Applicate hat; in der andern Linie der dritten Ordnung aber wird, wenn man $x = -a$ setzt

$$y^3 - 3ayy + 2aay - 6a^3 = 0$$

und daraus erhält man eine reelle Applicate $y = 3a$, und zwey imaginäre Werthe von y, die in der Gleichung $yy + 2aa = 0$ enthalten sind. An diesen Orten werden nemlich diese imaginäre Applicaten den imaginären Applicaten der Parabel an denselben Stellen gleich, und so ergeben sich zwey imaginäre Durchschnittspunkte. Man erhält aber auch zwey reelle Durchschnittspunkte aus dem Faktor der obigen Gleichung $y - 3x = 0$, aus welcher $9xx - 2ax = 0$ wird. Zuerst findet sich also in dem Anfangspunkte der Absciſſen, wo für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, ein Durchschnittspunkt, und der andere gehört zu der Absciſſe $x = \frac{2a}{9}$, wo $y = 3x = \frac{2a}{3}$ ist.

§. 473.

Hier sind wir also auf imaginäre Durchschnittspunkte gestoßen, ob sich gleich bey der Wegschaffung von y die Gleichung $2axy - 6aax + 2aay - 6axx = 0$ ergab, worin y nur eine Dimension hat, so daß daraus y durch eine rationale Funktion von x ausgedruckt zu werden scheint, welches wir vorhin als ein Kennzeichen der Abwesenheit der imaginären Durchschnittspunkte angegeben haben. Und in der That würden auch keine imaginäre Durchschnittspunkte da seyn können, wenn diese Gleichung keine Divisoren hätte. Allein da hier die Gleichung, worin die Applicate y nicht mehr vorkommt, durch die Division gefunden worden ist, so ist solches eben so viel, als ob y durch keine rationale Funktion von x ausgedruckt werden könnte. So oft nemlich eine solche Gleichung in Faktoren aufgelöset werden kann, so oft muß man bey der Beurtheilung auf jeden einzelnen Faktor besonders Rücksicht nehmen; und daher kommt es, daß der eine auf imaginäre Durchschnittsschnittspunkte führen kann, da bey dem andern dergleichen gar nicht vorkommen.

§. 474.

Nach diesen Betrachtungen wollen wir die Art und Weise bey jeden zwey gegebenen Curven die Durchschnittspunkte derselben zu bestimmen, genauer betrachten; und da diese Untersuchung von der Wegbringung der einen Coordinate y abhängt, so brauchen wir dabey bloß auf die Dimensionen, welche sie in beyden Gleichungen hat, Rücksicht zu nehmen. Diese Wegbringung von y wird nemlich auf einerley Art unternommen, die andere Coordinate x mag sich, in welcher Beschaffenheit sie wolle, in beyden Gleichungen befinden. Es seyen also P, Q, R, S, T, 2c. so wie auch p, q, r, s, t, 2c. rationale Funktionen von x, und die Gleichungen, wodurch beyde Curven, deren Durchschnittspunkte gesucht werden, zuvörderst

I.

$$P + Qy = 0$$

II.

$$p + qy = 0$$

Multiplicirt man die erste von diesen Gleichungen durch p, und die andere durch P, so erhält man in der Differenz der durch diese Multiplication entstehenden Gleichungen folgende, worin y nicht mehr vorkommt,

$$pQ - Pp = 0$$

Jede von den reellen Wurzeln dieser Gleichung, worin bloß die unbekannte Größe x, mit bekannten verbunden, vorkommt, giebt einen Punkt in der Axe an, worüber ein Durchschnittspunkt befindlich ist; und für einen jeden für x gefundenen Werth erhält man aus den gegebenen Gleichungen den reellen Werth

$y =$

$$y = \frac{-P}{Q} = \frac{-p}{q}$$

welcher den Durchschnittspunkt anzeigt. Wenn daher die Applicate y in beyden Curven durch eine rationale oder einförmige Funktion von x ausgedruckt wird, so finden keine imaginären Durchschnittspunkte statt.

§. 475.

Nun werde die Applicate y der einen Curve durch eine einförmige Funktion von x ausgedruckt, wie vorhin, die Applicate der andern Curve aber durch eine zweyförmige; so daß sey

I.

$$P + Qy = 0$$

II.

$$p + qy + ryy = 0.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung durch p, und die andere durch P, und zieht darauf die gefundenen Gleichungen von einander ab, so wird, nachdem man durch y dividirt hat,

III.

$$pQ - Pq - Pry = 0$$

oder

$$(Pq - pQ) + Pry = 0.$$

Nun multiplicire man die erste durch Pr, und die dritte durch Q, und subtrahire: so bekommt man folgende von y befreyte Gleichung:

$$PPr - PQq + pQQ = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung geben die Abscissen, die zu den Durchschnittspunkten gehören, und da zu denselben reelle Applicaten, nemlich

$$y = \frac{-P}{Q} = \frac{pQ - Pq}{Pr}$$

gehören, so sind diese Durchschnittspunkte reell.

§. 476.

§. 476.

Es sey wie vorhin die Applicate der einen Curve einer einförmigen Funktion x gleich, die Applicate der andern Curve aber werde durch eine cubische Gleichung ausgedruckt, oder sey eine dreyförmige Funktion von x; und also die beyden gegebenen Gleichungen folgende:

I.

$$P + Qy = 0$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Multiplicirt man die erste von diesen Gleichungen durch p und die andere durch P, so erhält man, nachdem man subtrahirt, und durch y dividirt hat,

III.

$$(Pq - pQ) + Pry + Psyy = 0$$

und wenn man hierin anstatt y den Werth desselben $y = \frac{-P}{Q}$ setzt, und die Brüche wegschafft,

$$PQQq - pQ^3 - P^2Qr + P^3s = 0$$

oder

$$Q^3p - PQ^2q + P^2Qr - P^3s = 0.$$

Eben diese Gleichung findet man sogleich, wenn man in der zweyten Gleichung statt y seinen Werth aus der ersten Gleichung $\frac{-P}{Q}$ setzt. Alle reelle Wurzeln von x aus dieser letzten Gleichung führen demnach, da zu jeder aus der ersten Gleichung reelle Applicaten $y = \frac{-P}{Q}$ gehören, auf eben so viel wahre Durchschnittspunkte.

§. 477.

Auf ähnliche Art schafft man y leicht weg, wenn die Applicate y der einen Curve durch eine Gleichung von vier

oder

oder mehr Dimensionen ausgedruckt wird, die Applicate der andern Curve aber eine einförmige oder rationale Funktion von x bleibt. Es seyen nemlich die beyden gegebenen Gleichungen

I.

$$P + Qy = 0$$

II.

$$p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0.$$

Da aus der ersten Gleichung $y = \frac{-P}{Q}$ ist, so erhält man wenn man diesen Werth in die andere Gleichung bringt, folgende Gleichung zwischen x und bekannten Größen:

$$Q^4p - PQ^3q + P^2Q^2r - P^3Qs + P^4t = 0.$$

Die reellen Wurzeln von x aber aus dieser Gleichung geben eben so viel wahre Durchschnittspunkte, weil man für jede Abscisse x aus der ersten Gleichung eine reelle Applicate y nemlich $y = \frac{-P}{Q}$ erhält.

§. 478.

Nun werde die Applicate y einer jeden Curve durch eine quadratische Gleichung, und zwar zuvörderst durch eine reine, ausgedruckt, und es sey also

I.

$$P + Ryy = 0$$

II.

$$p + ryy = 0$$

gegeben. Hieraus findet man durch die Wegbringung von yy sogleich

$$Pr - Rp = 0$$

aber die reellen Wurzeln dieser Gleichung zeigen nur dann wahre Durchschnittspunkte an, wenn die gefundenen Werthe von

von x so beschaffen sind, daß $\frac{-P}{R}$ oder $\frac{-p}{r}$ eine positive Größe wird. In diesem Falle bekommt nemlich die Applicate y, weil $yy = \frac{-P}{R} = \frac{-p}{r}$ ist, einen doppelten Werth, einen positiven und einen negativen; und es gehört daher zu jedem für die Abscisse x aus der Gleichung $Pr - Rp = 0$ gefundenen Werthe ein doppelter Durchschnittspunkt, der von der Axe auf beyden Seiten gleich weit entfernt ist. Dieses kann auch nicht anders seyn, weil die Axe zugleich der Durchmesser beyder Curven ist. Wenn aber ein Werth von x aus der Gleichung $Pr - Rp = 0$ den Ausdrücken $\frac{-P}{R} = \frac{-p}{r}$ einen negativen Werth ertheilt, so wird y imaginär, und also die Durchschnittspunkte ebenfalls.

§. 479.

Ferner befinde sich in beyden gegebenen quadratischen Gleichungen auch das zweyte Glied, welches y enthält, und die Gleichungen selbst seyen folgende:

I.

$$P + Qy + Ryy = 0$$

II.

$$p + qy + ryy = 0$$

Um die unbekannte Größe y aus diesen Gleichungen wegzuschaffen, multiplire man die erste durch p und die andere durch P, subtrahire darauf, und dividire durch y: so wird

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y = 0$$

Dann multiplicire man die erste Gleichung durch r und die letzte durch R, und subtrahire, so wird

IV.

$$(Pr - Rp) + (Qr - Rq)y = 0$$

Da nun aus diesen beyden Gleichungen

$$y = \frac{Qp - Pq}{Pr - Rp} = \frac{Rp - Pr}{Qr - Rq}$$

wird, so ist

$$(Qp - Pq)(Qr - Rq) + (Pr - Rp)^2 = 0$$

oder

$$P^2r^2 - 2PRpr + R^2p^2 + Q^2pr - PQqr - QRpq + PRq^2 = 0.$$

Die reellen Wurzeln dieser Gleichung geben eben so viel wahre Durchschnittspunkte, wenn zu einem jeden Werthe von x die Applicate aus der Gleichung III. und IV. einen reellen Werth bekommt. Indeß kann es sich auch ereignen, daß die Durchschnittspunkte imaginär werden, wenn nemlich die Gleichungen III. und IV. Faktoren haben, so daß aus ihnen durch die Division eine von y befreyte Gleichung hergeleitet werden kann. Denn alsdann muß man diese Gleichung anstatt der letzten substituiren, und zu den für x daraus gefundenen Werthen aus den ersten Gleichungen die zugehörigen Werthe von y suchen. Sind nun diese imaginär, so ist solches ein Kennzeichen, daß die Durchschnittspunkte imaginär sind.

§. 480.

Es sey die Applicate y in der einen Curve eine zweyförmige, in der andern aber eine dreyförmige Funktion von x; oder die gegebenen Gleichungen beyder Curven folgende:

I.

$$P + Qy + Ryy = 0$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Man

Man multiplicire die erste von diesen Gleichungen durch p und die andere durch P, und subtrahire; so wird

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + Psyy = 0$$

welche Gleichung mit der ersten verbunden den Fall wieder giebt, den wir in dem vorhergehenden § untersucht haben, so daß, was da p, q, r war, hier $Pq - Qp$, $Pr - Rp$, und Ps ist. Man findet also hier

$$y = \frac{PQq - QQp - PPr + PRp}{PPs - PRq + QRp}$$

und

$$y = \frac{PRq - QRp - PPs}{PQs - PRr + RRp}.$$

Hieraus wird

$$0 = (PRq - QRp - PPs)^2 + (PQs - PRr + RRp)$$
$$(PQq - Q^2p - P^2r + PRp)$$

und diese Gleichung entwickelt, so findet man

$$\left.\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad + 3P^2QRps \\ \qquad - 2P^3Rqs + P^2R^2qq - PQR^2pq \\ P^4s^2 - P^3Qrs + P^2Q^2qs - PQ^3Rps + Q^2R^2p^2 \\ \qquad + P^3Rrr - P^2QRqr + PQ^2Rpr - Q^2R^2p^2 \\ \qquad\qquad - 2P^2R^2pr + PR^3pp \end{array}\right\} = 0$$

und da das letzte Glied verschwindet, so ist die ganze Gleichung durch P theilbar, und so bekommt man:

$$\left.\begin{array}{l} + P^3s^2 - 2P^2Rqs - P^2Qrs + 3PQRps + PQ^2qs \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - Q^3ps + R^3p^2 \\ + P^2Rr^2 - PQRqr - 2PR^2pr + Q^2Rpr + PR^2q^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - QR^2pq. \end{array}\right\} = 0$$

Aus den reellen Wurzeln dieser Gleichung lernt man die Durchschnittspunkte kennen, wenn zu ihnen reelle Werthe von y gefunden werden können.

§. 481.

Nun seyen die Gleichungen für beyde Curven cubisch, und folgende;

I.

$$P + Qy + Ryy + Sy^3 = 0$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Man multiplicire die erste durch p, und die andere durch P, und subtrahire, so erhält man

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + (Ps - Sp)yy = 0.$$

Ferner multiplicire man die erste durch s, und die andere durch S, und subtrahire, so wird

IV.

$$(Sp - Ps) + (Sq - Qs)y + (Sr - Rs)yy = 0.$$

Vergleicht man nun diese beyden Gleichungen mit den beyden im 479sten § untersuchten, so wird

$$\begin{array}{l|l} P = Pq - Qp & p = Sp - Ps \\ Q = Pr - Rp & q = Sq - Qs \\ R = Ps - Sp & r = Sr - Rs \end{array}$$

und bringt man diese Werthe in die letzte Gleichung, so bekommt man

$$\begin{aligned} &(Pq-Qp)^2(Sr-Rs)^2 - 2(Pq-Qp)(Ps-Sp)(Sp-Ps) \\ &(Sr-Rs) + (Ps-Sp)^2(Sp-Ps)^2 + (Pr-Rp)^2(Sp-Ps) \\ &(Sr-Rs) - (Pq-Qp)(Pr-Rp)(Sq-Qs)(Sr-Rs) - \\ &(Pr-Rp)(Ps-Sp)(Sp-Ps)(Sq-Qs) + (Pq-Qp) \\ &(Ps-Sp)(Sq-Qs)^2 = 0. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung sind sieben Glieder, die insgesammt durch $Sp - Ps$ theilbar sind, das erste nur und das fünfte nicht. Verbindet man aber diese Glieder, so haben sie zwey Faktoren, nemlich $(Pq - Qp)(Sr - Rs)$ und $(Pq - Qp)$

$(Sr - Rs) - (Pr - Rp)(Sq - Qs)$, und wenn man diesen letzten auflöset, so wird er

$$= PQrs + RSpq - PRqs - QSpr$$

und folglich

$$= (Sp - Ps)(Rq - Qr)$$

Es lassen sich also das erste und fünfte Glied in folgenden Ausdruck

$$(Pq - Qp)(Sr - Rs)(Sp - Ps)(Rq - Qr)$$

zusammenziehen, der ebenfalls durch $Sp - Ps$ theilbar ist, und es entsteht daher die Gleichung:

$$0 = (Pq - Qp)(Sr - Rs)(Rq - Qr) + 2(Pq - Qp)(Sp - Ps)(Sr - Rs) + (Sp - Ps)^3 + (Pr - Rp)^2 (Sr - Rs) + (Pr - Rp)(Sp - Ps)(Sq - Qs) - (Pq - Qp)(Sq - Qs)^2$$

die, entwickelt, giebt,

$$S^3p^3 - 3PS^2p^2s + P^2Sr^3 + 2PR^2prs - P^2Rr^2s + P^2Qrss + PRSqqr - P^3s^3 + 3P^2Sps^2 - R^3p^2s - 2PRSpr^2 + R^2Sp^2r - RS^2p^2q - Q^2Rprs - PR^2qqs - PQSqrr + PQRqrs + 3PS^2pqr - 3P^2Sqrs + PQSprs + Q^2Sprr + QR^2pqs - QRSpqr - 3PQRpss + 3QRSpps - PRSpqs + 2P^2Rqss + 2PQSqqs - PS^2q^3 - PQ^2qss - 2QS^2ppr - 2Q^2Spqs + Q^3pss + QS^2pqq = 0.$$

§. 482.

Damit dieser Weg, y aus zwey höhern Gleichungen wegzuschaffen, deutlicher werde, so wollen wir annehmen, daß beyde Gleichungen zum vierten Grade gehören

I.

$$P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + Ty^4 = 0$$

II.

$$p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0$$

Multiplicirt man die erste Gleichung durch p, und die letzte durch P, so findet man, nachdem man subtrahirt hat,

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + (Ps - Sp)y^2 + (Pt - Tp)y^3 = 0$$

Multiplicirt man ferner die erste Gleichung durch t, und die zweyte durch T, so ergiebt sich durch eine ähnliche Subtraction

IV.

$$(Pt - Tp) + (Qt - Tq)y + (Rt - Tr)y^2 + (St - Ts)y^3 = 0$$

Nun setze man der Kürze wegen

$Pq - Qp = A$	$Pt - Tp = a$	$Sq - Qs = \alpha$
$Pr - Rp = B$	$Qt - Tq = b$	$Rq - Qr = \beta$
$Ps - Sp = C$	$Rt - Tr = c$	
$Pt - Tp = D$	$St - Ts = d$	

wo man bemerken muß, daß nicht nur $a = D$, sondern auch

$$Ad - Cb = (Pt - Tp)(Sp - Qs) = D\alpha$$
$$Ac - Cb = (Pt - Tp)(Rq - Qr) = D\beta$$

ist. Gebraucht man nun diese Werthe in der dritten und vierten Gleichung, so wird

III.

$$A + By + Cyy + Dy^3 = 0$$

IV.

$$a + by + cyy + dy^3 = 0$$

Nun multiplicire man wieder diese Gleichungen durch d und D, und subtrahire, so bekommt man

V.

$$(Ad - Da) + (Bd - Db)y + (Cd - Dc)y^2 = 0$$

Ferner multiplicire man eben diese Gleichungen durch a und A, und subtrahire darauf, so wird

VI.

$$(Ab - Ba) + (Ac - Ca)y + (Ad - Da)y^2 = 0$$

Nun

Nun setze man der Kürze wegen

$Ab - Ba = E$	$Ad - Da = e$	
$Ac - Ca = F$	$Bd - Db = f$	$Cb - Bc = \zeta$
$Ad - Da = G$	$Cd - Dc = g$	

so ist $G = e$; und $Eg - Ff = G\zeta$, so daß $Eg - Ef$ durch G theilbar ist. Hierdurch erhält man diese Gleichungen:

V.

$$E + Fy + Gyy = o$$

VI.

$$e + fy + gyy = o$$

und daraus leitet man durch eine ähnliche Operation ab

VII.

$$(Ef - Fe) + (Eg - Ge)y = o$$

VIII.

$$(Eg - Ge) + (Fg - Gf)y = o.$$

Endlich setze man nochmals der Kürze wegen

$Ef - Fe = H$	$Eg - Ge = h$
$Eg - Ge = I$	$Fg - Gf = i$

so daß $I = h$ ist. Dann hat man

VII.

$$H + Iy = o$$

VIII.

$$h + iy = o$$

und daraus findet man endlich folgende von y befreyte Gleichung:

$$Hi - Ih = o.$$

Setzt man nun in diese Gleichung nach und nach die vorhergehenden Werthe wieder, so bekommt man dadurch eine Gleichung, worin bloß die Funktionen P, Q, R, 2c. p, q, r, 2c. aus den ersten Gleichungen befindlich sind. Es ist aber die Gleichung zwischen E, F, G, e, f, g, durch

 $G = e$,

G = e, und die Gleichung zwischen A, B, C, D, a, b, c, d, wozu man nachher kommt, durch $D^2 = a^2$ theilbar, und es enthält daher in der am Ende gefundenen Gleichung jedes Glied nicht mehr als acht Buchstaben, vier große und vier kleine. Auf diese Art kann man nun aus jeden zwey Gleichungen die unbekannte Größe y, ihre Dimensionen mögen so hoch steigen als sie wollen, wegschaffen, und eine Gleichung finden, worin bloß x vorkommt.

§. 483.

Ob gleich diese Methode aus zwey Gleichungen eine unbekannte Größe wegzuschaffen allgemein gebraucht werden kann, so will ich doch noch einen andern Weg hinzufügen, wobey man nicht so viel Substitutionen nöthig hat. Es seyen also folgende zwey Gleichungen von unbestimmten Dimensionen gegeben

I.

$$Py^m + Qy^{m-1} + Ry^{m-2} + Sy^{m-3} + \text{rc.} = 0$$

II.

$$py^n + qy^{n-1} + ry^{n-2} + sy^{n-3} + \text{rc.} = 0$$

und es werde verlangt, daraus eine Gleichung zu finden, worin y nicht mehr enthalten sey. Zu dieser Absicht multiplicire man die letzte Gleichung durch

$$Py^{k-n} + Ay^{k-n-1} + By^{k-n-2} + Cy^{k-n-3} + \text{rc.}$$

worin k — n willkührliche Buchstaben A, B, C, rc. vorkommen; und die erste durch

$$py^{k-m} + ay^{k-m-1} + by^{k-m-2} + cy^{k-m-3} + \text{rc.}$$

worin k — m willkührliche Buchstaben a, b, c, rc. enthalten sind. Dann setze man beyde Produkte einander gleich, so daß sich alle Glieder, worin sich Potestäten von y finden, einander aufheben, und die letzten Glieder, die y nicht enthalten, die gesuchte Gleichung geben. Die höch-

sten

sten Potestäten heben sich hierbey schon von selbst auf, indem dieselben in beyden Produkten Ppy^k sind, und es bleiben daher nur $k - 1$ Glieder übrig, zu deren Destruction eben so viel willkührliche Buchstaben zu bestimmen sind. Da nun die Anzahl aller eingeführten willkührlichen Größen $= 2k - m - n$ ist, und dieselbe $= k - 1$ seyn soll, so wird $k = m + n - 1$.

§. 484.

Man multiplicire demnach die erste Gleichung durch folgende unbestimmte Größe:

$$py^{n-1} + ay^{n-2} + by^{n-3} + cy^{n-4} + \text{etc.}$$

die zweyte aber durch folgende:

$$Py^{m-1} + Ay^{m-2} + By^{m-3} + Cy^{m-4} + \text{etc.}$$

Macht man hierauf die einzelnen Glieder, welche ähnliche Potestäten von y enthalten, einander gleich, so entstehen folgende Gleichungen:

$$Pp = Pp$$
$$Pa + Qp = pA + qP$$
$$Pb + Qa + Rp = pB + qA + rP$$
$$Pc + Qb + Ra + Sp = pC + qB + rA + sP$$
$$\text{etc.}$$

Solcher Gleichungen erhält man aber, wenn man die erste $Pp = Pp$ mitrechnet, an der Zahl $m + n$, und wenn man daraus die willkührlichen Buchstaben A, B, C, etc. a, b, c, etc. bestimmt, so bleiben in der letzten Gleichung bloß die Buchstaben P, Q, R, etc. p, q, r, etc. zurück, und es geschiehet daher auf diese Art dem Verlangten ein Genüge.

§. 485.

Es läßt sich aber diese Bestimmung der willkührlichen Buchstaben leichter bewerkstelligen, wenn man die Hälften

 einer

einer jeden Gleichung neuen unbestimmten Größen α, β, γ, rc. gleich setzt, wie solches durch das folgende Beyspiel deutlich werden wird.

Es seyen diese beyden Gleichungen gegeben:

I.

$$Py^2 + Qy + R = 0$$

II.

$$py^3 + qy^2 + ry + s = 0$$

Man multiplicire die erste durch $py^2 + ay + b$, und die andere durch $Py + A$, so bekommt man

$$Pp = Pp$$

$$Pa + Qp = pA + qP = \alpha$$

$$Pb + Qa + Rp = qA + rP = \beta$$

$$Qb + Ra = rA + sP$$

$$Rb = sA$$

Uebergeht man nun die erste identische Gleichung, so erhält man aus der zweyten

$$a = \frac{\alpha - Qp}{P}$$

$$A = \frac{\alpha - qP}{p}$$

Aus der dritten hingegen findet man

$$b = \frac{\beta}{P} - \frac{Qa}{P} - \frac{Rp}{P} = \frac{\beta}{P} - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2p}{P^2} - \frac{Rp}{P}$$

und

$$\beta = \frac{\alpha q}{p} - \frac{qqP}{p} + rP$$

so daß, wenn man diesen Werth von β gebraucht,

$$b = \frac{\alpha q}{Pp} - \frac{qq}{p} + r - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2p}{P^2} - \frac{Rp}{P}$$

oder

b =

$$b = \frac{\alpha(Pq - Qp)}{P^2p} + \frac{(Q^2p^2 - P^2q^2)}{P^2p} + \frac{(Pr - Rp)}{P}$$

wird. Durch die Substitution dieses Werthes aber findet man aus der vierten Gleichung

$$\frac{\alpha Q(Pq - Qp)}{P^2p} - \frac{Q(Pq - Qp)(Qp + Pq)}{P^2p} + \frac{Q(Pr - Rp)}{P} +$$

$$\frac{\alpha R}{P} - \frac{RQp}{P} = \frac{\alpha r}{p} - \frac{Prq}{p} + Ps$$

oder, wenn man mit P^2p multiplicirt,

$$\alpha Q(Pq - Qp) + \alpha P(Rp - Pr) - Q(Pq - Qp)(Pq + Qp) +$$

$$PQp(Pr - 2Rp) + (P^3qr - P^3ps = 0$$

Es wird also

$$\alpha = \frac{P^2Qq^2 - Q^3pp - P^2Qpr + 2PQRp^2 - P^3qr + P^3ps}{PQq - Q^2p + PRp - P^2r}$$

Die letzte Gleichung aber giebt

$$\frac{\alpha R(Pq - Qp)}{P^2p} - \frac{R(P^2q^2 - Q^2p^2)}{P^2q} + \frac{R(Pr - Rp)}{P} =$$

$$\frac{\alpha S}{p} - \frac{Pqs}{p}$$

und daraus findet man

$$\alpha = \frac{P^2Rq^2 - Q^2RP^2 - P^2Rpr + PR^2p^2 - P^3qs}{PRq - QRp - P^2s}$$

Dieser doppelte Werth von α giebt nun die gesuchte Gleichung, die am Ende eben die Form giebt, die wir oben §. 480 für eben diesen Fall gefunden haben