Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Sechszehntes Capitel. Von der Erfindung der Curven aus gegebenen Eigenschaften der Applicaten.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53306

Sechszehntes Capitel.

Von der Erfindung der Curven aus gegebenen Eigenschaften der Applicaten.

§. 364.

Wenn P und Q rationale Funktionen der Abscisse x sind, und die Natur einer Curve durch die Gleichung

$$yy - Py + Q = 0$$

ausgedruckt wird: so gehört zu jeder Abscisse x entweder gar keine oder eine doppelte Applicate, und dabey ist die Summe dieser Applicaten $= P$, und ihr Produkt $= Q$. Ist daher P eine beständige Größe, so ist auch die Summe der Applicaten, die zu jeder Abscisse gehören, eine beständige Größe, und die Curve mit einem Durchmesser versehen. Eben dieses findet statt, wenn

$$P = a + nx$$

ist; denn alsdann ist die gerade Linie, die durch die Gleichung

$$z = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}nx$$

ausgedruckt wird, ein Durchmesser der Curve im weitern Verstande, so daß nicht bloß rechtwinklige, sondern auch schiefwinklige Durchmesser verstanden werden. Ist hingegen Q eine beständige Größe, so ist das Rechteck zwischen jeden zwey zu einer Abscisse gehörigen Applicaten beständig, und

und es kann folglich die Axe nirgends von der Curve geschnitten werden. Wenn aber

$$Q = \alpha + \beta x + \gamma xx$$

ist, und dieser Ausdruck reelle Faktoren hat, so wird die Axe von der Curve in zwey Punkten geschnitten, und Q ist ein Vielfaches von dem Rechtecke zwischen den Theilen der Axe, und das Rechteck zwischen den Applicaten steht mit Rechtecke zwischen den Theilen der Axe in einem beständigen Verhältnisse.

§. 365.

Es kommen also diese Eigenschaften, die wir oben als Eigenschaften der Linien der zweyten Ordnung kennen gelernt haben, unzähligen andern Curven zu. So ist die beständige Größe der Rechtecke zwischen den beyden Applicaten, die zu einer Abscisse gehören, welche wir [§. 163. f.] als eine Eigenschaft der auf die Asymptote bezogenen Hyperbel gehabt haben, allen Curven gemein, die in der Gleichung $yy - Py \pm aa$ enthalten sind. So wie ferner bey den Kegelschnitten, wenn man eine gerade Linie EF, Fig. 19, welche die Curve in den beyden Punkten E und F schneidet, zur Axe annimmt, das Rechteck PM . PN zu dem Rechtecke PE . PF ein beständiges Verhältniß hat: so findet solches bey allen Curven statt, die durch die Gleichung $yy - Py + ax - nxx = 0$ ausgedruckt werden, und zwar ist $PM . PN = PE . PF$, oder $pm . pn = Ep . pF$, wenn $yy - Py = ax - xx$ ist. Es kommt also diese Eigenschaft, die man als eine Eigenschaft des Kreises in den Elementen kennen lernt, außer ihm nicht nur auch einer unzähligen Menge Curven der höhern Ordnungen zu, sondern es haben sie auch die übrigen Kegelschnitte mit ihm gemein. Denn setzt man $P = b + nx$, so begreift die

Glei-

Gleichung $yy - nxy + xx = ax + by$, welches eine Gleichung für den Kreis ist, wenn $n = o$ und der Winkel EPM ein rechter Winkel ist, auch die Ellipse, wenn nn kleiner als 4, und die Hyperbel, wenn nn größer als 4, und die Parabel, wenn $nn = 4$ ist, unter sich.

§. 366.

Hieraus folgt, daß sich in einem jedem Kegelschnitte AEBF, Fig 77, dessen Axen oder Hauptdürchmesser AB und EF sind, jede zwey gerade Linien pq und mn, die auf die Hauptaxen unter einem halben rechten Winkel gezogen worden, in h so schneiden müssen, daß $mh . nh = ph . qh$ wird. Eben dieses fließt auch aus den allgemeinen Eigenschaften der Kegelschnitte. Denn zieht man durch den Mitelpunkt C die geraden Linien PQ und MN unter einem halben rechten Winkel auf die Hauptaxen, so werden diese Linien gleich, und folglich $MC . NC = PC . QC$; und da sich alle diesen Linien gezogene parallele Linien auf eben die Art schneiden, so muß auch $mh . nh = ph . qh$ seyn. Ja, wenn nur die geraden Linien MN und PQ so gezogen worden sind, daß sie gegen einerley Hauptaxe eben dieselbe Neigung haben, oder daß $PCA = NCA$ ist, so erhellet daraus, da $CP = CN$ ist, selbst, daß alle der MN und PQ parallel gezogene gerade Linien sich so schneiden werden, daß die Rechtecke zwischen ihren Theilen gleich sind, oder $mh . hn = ph . hq$ ist.

§. 367.

Dies vorausgesetzt, wollen wir uns zur Betrachtung anderer Eigenschaften, die jeden zwey zu einer Abscisse aus der Gleichung

$$yy - Py + Q = o$$

ge-

gehörigen Applicaten zukommen, wenden. Es sey, Fig. 78, die Abscisse $AP = x$, und die dazu gehörigen Applicaten PM und PN. Sollen nun zuvörderst Curven gesucht werden, wobey $PM^2 + PN^2$ eine beständige Größe $= aa$ ist: so geschieht dieser Forderung, da

$$PM + PN = P;\ \text{und}\ PM \cdot PN = Q;\ \text{und}\ PM^2 + PN^2 = PP - 2Q$$

ist, ein Genüge, wenn

$$PP - 2Q = aa,\ \text{oder}\ Q = \frac{PP - aa}{2}$$

wird; und man hat daher für die gesuchten Curven die Gleichung

$$y'y - Py + \frac{PP - aa}{2} = 0.$$

Setzt man $P = 2nx$, so erhält man für den Kegelschnitt, wobey sich diese Eigenschaft findet,

$$yy - 2nxy + 2nnxx - \tfrac{1}{2}aa = 0$$

und dies ist eine Gleichung für eine Ellipse, wenn man die Abscissen vom Mittelpunkte aus nimmt.

§. 368.

Hieraus fließt folgende merkwürdige Eigenschaft der Ellipsen. Wenn man um irgend zwey zugehörige Halbmesser einer Ellipse AB und EF, Fig 79. ein Parallelogramm $GHIK$ beschreibt, dessen Seiten die Ellipse in A, B, E und F berühren, so theilen die Diagonalen dieses Parallelogramms GK und HI alle Sehnen MN, die dem einen Durchmesser EF parallel gezogen worden, in P und p so, daß die Summe der Quadrate $PM^2 + PN^2$ oder $pM^2 + pN^2$ stets eine und dieselbe Größe $= 2CE^2$ wird; und auf ähnliche Art ist, wenn man die Sehne RS dem andern Durchmesser AB parallel zieht, $PR^2 + PS^2 = \pi R^2 + \pi S^2 = 2CA^2$. Denn setzt man

$CA = CB = a$; und $CE = CF = b$; $CQ = t$; und $QM = u$
so wird

$$aauu + bbtt = aabb$$

Nun ist $a : b = CQ\,(t) : PQ$, und $CP : CQ$ in einem gegebenen Verhältnisse, $m : 1$. Macht man daher

$$CP = x;\ \text{und}\ PM = y;$$

so wird $x = mt$, und $y = u + \frac{bt}{a}$; oder

$$t = \frac{x}{m};\ \text{und}\ u = y - \frac{bx}{ma}$$

und durch die Substitution dieser Werthe ergiebt sich die Gleichung

$$aayy - \frac{2abxy}{m} + \frac{2bbxx}{mm} = aabb.$$

Nun sey $\frac{b}{ma} = n$, so wird

$$yy - 2nxy + 2nnxx = bb$$

und dies ist die vorhin gefundene Gleichung, welche anzeigt, daß $PM^2 + PN^2$ eine beständige Größe ist.

§. 369.

Nun seyen, Fig. 78, Curven zu suchen, wo die Summe der Würfel $PM^3 + PN^3$ eine beständige Größe ist. Da $PM + PN = P$, und $PM . PN = Q$ ist, so ist

$$PM^3 + PN^3 = P^3 - 3PQ.$$

Wenn man daher $PM^3 + PN^3 = a^3$ setzt, so wird $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$, und folglich die allgemeine Gleichung für diese Curven

$$yy - Py + \tfrac{1}{3}P^2 - \frac{a^3}{3P} = 0$$

wo für P jede rationale Funktion von x gesetzt werden kann.

Die

Die einfachste Curve, die mit dieser Eigenschaft versehen ist, ist daher eine Linie der dritten Ordnung, welche, wenn man

$$P = 3nx, \text{ und } a = 3nb$$

setzt, durch diese Gleichung ausgedruckt wird,

$$xyy - 3nxxy + 3nnx^3 - 3nnb^3 = 0$$

und zu der zweyten Art nach der oben festgesetzten Eintheilung gehört.

370.

Auf eine ähnliche Art muß man, wenn $PM^4 + PN^4$ eine beständige Größe seyn soll, da

$$PM^4 + PN^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ$$

ist, die Größe Q durch P so bestimmen, daß $P^4 - 4P^2Q + 2QQ = a^4$, oder

$$Q = PP + \sqrt{(\tfrac{1}{2}P^4 + \tfrac{1}{2}a^4)}$$

wird. Da aber sowohl P als Q rationale oder einförmige Funktionen von x seyn müssen, damit y für jede Abscisse x nicht mehr als zwey Werthe bekommen könne, so sollte diese Größe $\sqrt{(\tfrac{1}{2}P^4 + \tfrac{1}{2}a^4)}$ rational seyn; und da dieses nicht statt finden kann, so ist die Funktion Q allemal zweyförmig, und giebt daher eine vierförmige Applicate. Allein aus der Gleichung

$$yy - Py + Q = 0$$

wird

$$y = \tfrac{1}{2}P \pm \sqrt{(-\tfrac{3}{4}PP \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}P^4 + \tfrac{1}{2}a^4)})}$$

und es kann deswegen die Applicate y nicht anders möglich seyn, als wenn $\sqrt{(\tfrac{1}{2}P^4 + \tfrac{1}{2}a^4)}$ positiv genommen wird. Wenn also auch gleich Q eine zweyförmige Funktion ist, so kann dennoch die Applicate y nie mehr als zwey Werthe haben, und die Summe der Biquadrate dieser Werthe ist, dem Verlangten gemäß, eine beständige Größe.

§. 371.

Soll eine Curve die Eigenschaft haben, daß die Summe der fünften Potestäten der beyden Werthe, welche die Applicate y für jeden Werth der Absciſſe x hat, eine beständige Größe, oder $PM^5 + PN^5 = a^5$ werde: so muß

$$P^5 - 5P^3Q + 5PQ^2 = a^5$$

seyn. Da also aus der Gleichung $yy - Py + Q = 0$

$$Q = - yy + Py$$

wird, so ist

$$P^5 - 5P^4y + 10P^3yy - 10P^2y^3 + 5Py^4 = a^5$$

oder

$$(P - y)^5 + y^5 = a^5$$

Auf eben diese Art findet man, wann $PM^6 + PN^6 = a^6$ seyn soll, die Gleichung

$$(P - y)^6 + y^6 = a^6$$

und überhaupt, wenn $PM^n + PN^n = a^n$ seyn soll

$$(P - y)^n + y^n = a^n$$

wo P jede einförmige Funktion von x seyn kann. Der Grund von dieser Gleichung ist übrigens sehr leicht. Denn da die Summe beyder Applicaten $= P$ ist, so muß, wenn man die eine y setzt, die andern $P - y$ werden, und daraus ergiebt sich unmittelbar

$$(P - y)^n + y^n = a^n$$

§. 372.

Wenn man aber P anstatt Q wegschafft, indem man in die Gleichung, welche das Verhältniß von P und Q ausdrückt, $P = \frac{yy + Q}{y}$ setzt, so erhält man für $PM^n + PN^n = a^n$ diese Gleichung:

$$y^n + \frac{Q^n}{y^n} = a^n.$$

Da

Da nemlich das Produkt der Applicaten $= Q$ ist, so wird, wenn man die eine $= y$ setzt, die andere $= \frac{Q}{y}$, und daraus fließt die gefundene Gleichung ebenfalls unmittelbar. Wir haben also für die Curven, wo $PM^n + PN^n = a^n$ seyn soll, eine doppelte Gleichung, nemlich,

$$(P - y)^n + y^n = a^n; \text{ und } y^n + \frac{Q^n}{y^n} = a^n$$

Aus der letzten fließt

$$y^{2n} = a^n y^n - Q^n; \text{ und } y^n = \tfrac{1}{2} a^n \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^{2n} - Q^n)}$$

so daß

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2} a^n \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^{2n} - Q^n)})}$$

ist; welches aber bloß eine zweyförmige Funktion ist, und für jede Abscisse nicht mehr als zwey Applicaten giebt, wofern nur Q eine rationale oder einförmige Funktion von x ist. Die erste Gleichung $y^n + (P - y)^n = a^n$ hat indeß den Vorzug, daß sie weniger Dimensionen hat.

§. 373.

Es gelten aber diese Gleichungen nicht bloß, wenn n eine ganze und positive Zahl, sondern auch, wenn es eine negative Zahl oder ein Bruch ist. So findet man

wenn seyn soll	die Gleichung
$\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{1}{a}$	$aP = Py - yy$ oder $aQ - ayy = Qy$
$\frac{1}{MP^2} + \frac{1}{PN^2} = \frac{1}{a^2}$	$a^2y^2 + a^2(P-y)^2 = y^2(P-y)^2$ oder $a^2Q^2 + a^2y^4 = Q^2y^2$
$\frac{1}{PM^3} + \frac{1}{PN^3} = \frac{1}{a^3}$	$a^3y^3 + a^3(P-y)^3 = y^3(P-y)^3$ oder $a^3Q^3 + a^3y^6 = Q^3y^3$

2c.

und für die gebrochenen Exponenten

wenn seyn soll	die Gleichung
$\sqrt{PM}+\sqrt{PN}=\sqrt{a}$	$\sqrt{y}+\sqrt{(P-y)}=\sqrt{a}$ oder $y=\sqrt{ay}-\sqrt{Q}$ oder rational gemacht $yy-Py+\frac{1}{4}(a-P)^2=0$ oder $yy-(a-2\sqrt{Q})y+Q=0$
$\sqrt[3]{PM}+\sqrt[3]{PN}=\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{(P-y)}=\sqrt[3]{a}$ oder $yy-Py+\frac{1}{27a}(a-P)^3=0$ ferner $\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{\frac{Q}{y}}=\sqrt[3]{a}$ oder $yy-(a-3\sqrt[3]{aQ})y+Q=0$

rc.

Auf diese Art lassen sich also alle algebraische Curven, worin allenthalben $PM^n+PN^n=a^n$ ist, durch eine einzige allgemeine Gleichung ausdrucken, n mag eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl seyn.

§. 374.

Was wir bisher von zwey Applicaten gehabt haben, die zu einer Abscisse x gehören, das läßt sich auf ähnliche Art auf drey zu einer Abscisse gehörige Applicaten anwenden. Es ist aber die allgemeine Gleichung der Curven, die von den Applicaten in drey Punkten geschnitten werden,

$$y^3-Py^2+Qy-R=0$$

wo

wo die Buchstaben P, Q, und R einförmige Funktionen von x von jeder Art bedeuten. Nun seyen p, q und r die drey Applicaten, die zu der Abscisse x gehören. Hiervon ist zwar nur eine allemal nothwendiger Weise reell, allein wir betrachten jetzt vorzüglich die Oerter der Curven, wo alle drey Applicaten reell sind. Es ist also aus der Gleichung

$$P = p + q + r;\ Q = pq + pr + qr;\ \text{und}\ R = pqr;$$

und wenn daher eine Curve gefunden werden soll, worin entweder $p + q + r$; oder $pq + pr + qr$; oder pqr eine beständige Größe ist: so hat man nichts anders zu thun, als entweder P, oder Q, oder R zu einer beständigen Größe zu machen, so daß die beyden übrigen willkührlich bleiben.

§. 375.

Hieraus lassen sich auch Curven finden, worin $p^n + q^n + r^n$ allenthalben eine beständige Größe ist. Es ist nemlich nach dem, was in dem ersten Buche [im zehnten Capitel im 166sten §] da gewesen ist,

$$p + q + r = P$$
$$p^2 + q^2 + r^2 = P^2 - 2Q$$
$$p^3 + q^3 + r^3 = P^3 - 3PQ + 3R$$
$$p^4 + q^4 + r^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR$$
$$p^5 + q^5 + r^5 = P^5 - 5P^3Q + 5PQQ + 5PPR - 5QR$$

2c.

Ist ferner n eine negative Zahl, so setze man $z = \frac{1}{y}$, wodurch denn

$$z^3 - \frac{Qzz}{R} + \frac{Pz}{R} - \frac{1}{R} = 0$$

wird, und die Wurzeln dieser Gleichung sind $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$.

Hieraus findet man auf ähnliche Art

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{Q}{R}$$

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{Q^2 - 2PR}{RR}$$

$$\frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{r^3} = \frac{Q^3 - 3PQR + 3RR}{R^3}$$

$$\frac{1}{p^4} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{r^4} = \frac{Q^4 - 4PQ^2R + 4QRR + 2P^2R^2}{R^4}$$

rc.

Setzt man daher einen von diesen Ausdrücken einer beständigen Größe gleich, so findet man dadurch das erforderliche Verhältniß zwischen den Funktionen P, Q, und R; und wenn man darauf vermittelst dieser Gleichung aus der gegebenen

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$$

eine von den Funktionen P, oder Q, oder R wegschafft, so erhält man die Gleichung für die gesuchte Curve. Sollte z. B. eine Curve gefunden werden, worin $p^3 + q^3 + r^3 = a^3$ wäre, so müßte man

$$P^3 - 3PQ + 3R = a^3$$

setzen; und da aus $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$

$$R = y^3 - Py^2 + Qy$$

ist, so wäre

$$3y^3 - 3Py^2 + 3Qy + P^3 - 3PQ = a^3$$

die Gleichung, wodurch dem Verlangten ein Genüge geschähe.

§. 376.

Man erreicht also vermittelst der angeführten Formeln den vorgesetzten Zweck sehr leicht, n mag eine positive oder eine negative ganze Zahl seyn; aber schwerer wird es,

wenn

wenn n eine gebrochene Zahl ist. Es sey eine Curve zu zu suchen, worin

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = \sqrt{a}$$

sey. Quadrirt man beyde Hälften dieser Gleichung, so bekommt man, da $p + q + r = P$ ist,

$$P + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr} = a$$

oder

$$\frac{a - P}{2} = \sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr};$$

und wenn man hier nochmals die Quadrate sucht, so wird, da $pq + pr + qr = Q$ ist,

$$\frac{(a - P)^2}{4} = Q + 2\sqrt{p^2qr} + 2\sqrt{pq^2r} + 2\sqrt{pqr^2} =$$

$$Q + 2(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})\sqrt{pqr} = 2\sqrt{aR} + Q$$

Hieraus aber fließt

$$(a - P)^2 = 4Q + 8\sqrt{aR}, \text{ oder } Q = \frac{(a - P)^2}{4} - 2\sqrt{aR}.$$

Es sind demnach die gesuchten Curven in der Gleichung

$$y^3 - Pyy + (\tfrac{1}{4}(a - P)^2 - 2\sqrt{aR})y - R = 0$$

oder, wenn man die Irrationalität wegbringt, da $R = \frac{(aa - 2aP + PP - 4Q)^2}{64a}$ ist, in der Gleichung

$$y^3 - Pyy + Qy - \frac{(aa - 2aP + PP - 4Q)^2}{64a} = 0$$

enthalten.

§. 377.

Noch lästiger ist dieser Weg, wenn Wurzeln höherer Potestäten gegeben werden, und es wird daher eine andere Methode nothwendig, welche folgendes Beyspiel vor Augen legen mag. Es sey nemlich eine Curve zu finden, worin

$$\sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{pr} + \sqrt[3]{qr} = \sqrt[3]{a}$$

sey. Setzt man hier

$$\sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{pr} + \sqrt[3]{qr} = v$$

so wird, da $\sqrt[3]{pqr} = \sqrt[3]{R}$ ist,

$$\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} + \sqrt[3]{r^2} = \sqrt[3]{aa} - 2v, \text{ und}$$

$$p + q + r = a - 3v\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{R} = P$$

desgleichen

$$\sqrt[3]{p^2q^2} + \sqrt[3]{p^2r^2} + \sqrt[3]{q^2r^2} = v^2 - 2\sqrt[3]{aR}, \text{ und}$$

$$pq + pr + qr = Q = v^3 - 3v\sqrt[3]{aR} + 3\sqrt[3]{RR}.$$

Nachdem man so für P und Q schickliche Werthe gefunden, so ist die Gleichung für die gesuchte Curve

$$y^3 - (a - 3v\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{R})y^2 + (v^3 - 3v\sqrt[3]{aR} + 3\sqrt[3]{R^2})y - R = 0$$

worin man für v jede Funktion von x setzen kann.

§. 378.

Dieser Schwierigkeiten ungeachtet, läßt sich eine allgemeine Auflösung geben. Denn da in der Gleichung

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$$

y die drey Applicaten p, q und r vorstellt, so ist, wenn man $p = y$ setzt,

$$P = y + q + r, \text{ und } Q = qy + ry + qr$$

oder

$$q + r = P - y; \text{ und } qr = Q - y(q + r) = Q - Py + yy.$$

Hieraus fließt aber

$$q - r = \sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}$$

und es wird demnach

$$q = \tfrac{1}{2}(P - y) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}$$

und

und

$$r = \frac{1}{2}(P-y) - \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}.$$

Wenn also eine Curve gefunden werden soll, worin $p^n + q^n + r^n = a^n$ ist, so thut dieser Aufgabe folgende Gleichung

$$y^n + (\tfrac{1}{2}(P-y) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)})^n +$$
$$(\tfrac{1}{2}(P-y) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)})^n = a^n$$

ein Genüge, n mag eine ganze oder eine gebrochene Zahl bedeuten.

§. 379.

Auf eben die Art lassen sich unzählige andere Fragen, die Beschaffenheit dieser drey Applicaten betreffend, beantworten; z. B. wenn für a^n irgend eine Funktion von x angenommen wird: und dabey können auch anstatt der Summe der Potetästen andere Funktionen von p, q und r bestimmt seyn, wofern nur alles so eingerichtet bleibt, daß durch die Verwechselung dieser Größen keine Veränderung hervorgebracht wird. So lassen sich z. B. die drey Applicaten p, q und r, die zu eben derselben Absciße x gehören, dergestalt bestimmen, daß das Dreyeck, welches mit ihnen beschrieben werden kann, eine beständige Größe haben. Der Inhalt dieses Dreyecks ist nemlich

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(2ppqq + 2pprr + 2qqrr - p^4 - q^4 - r^4)}$$

und wir wollen ihn $= aa$ setzen. Da nun

$$p^4 + q^4 + r^4 = P^4 - 4P^2Q + 4PR + 2QQ$$

und

$$p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2 = Q^2 - 2PR$$

ist, so wird

$$16a^4 = 4P^2Q - 8PR - P^4$$

und

$$R = \frac{1}{2}PQ - \frac{1}{8}P^3 - \frac{2a^4}{P}.$$

und

und man hat also die Gleichung

$$y^3 - Pyy + Qy - \tfrac{1}{2}PQ + \tfrac{1}{8}P^3 + \frac{2a^4}{P} = 0$$

Wenn P einer beständigen Größe, 2b, gleich gesetzt wird, so wird außerdem auch der Umfang oder Perimeter aller dieser Dreyecke eine beständige Größe. Setzt man folglich

$$Q = mxx + nbx + kaa$$

so findet man eine Linie der dritten Ordnung, deren Gleichung

$$y^3 + mxxy - 2byy + nbxy - mbxx + kaay -$$
$$nbbx + \frac{a^4}{b} - kaab + b^3 = 0$$

ist, und die Eigenschaft hat, daß einmal die Summe der drey Applicaten p, q und r, die zu jeder Abscisse gehören, eine beständige Größe $= 2b$, und zweytens der Inhalt des zwischen den Seiten p, q und r eingeschlossenen Dreyecks allenthalben sich gleich, und $= aa$ ist.

§. 380.

Auch dient diese Methode zur Auflösung ähnlicher Aufgaben bey vier zu einer und derselben Abscisse gehörigen Applicaten; aber da hierbey weiter keine Schwierigkeit vorfällt, so wenden wir uns zu andern, die Vergleichung, nicht solcher Applicaten, die zu derselben, sondern solcher, die zu verschiedenen Abscissen gehören, betreffenden, Fragen. Es sey also das Verhältniß zu bestimmen, welches die Applicaten PM und QN, Fig. 80, zu einander haben, davon jene der Abscisse $AP = + x$, und diese der Abscisse $AQ = - x$ zugehöre. Angenommen, daß

$$y = X$$

die Gleichung für diese Curve sey, wenn X irgend eine Funktion von x bedeutet: so giebt diese Funktion X selbst

die

die Applicate PM; wenn man aber darin $-x$ für $+x$ setzt, so erhält man durch sie die andere Applicate QN. Wenn also X eine gerade Funktion von x, ($= P$) ist, so wird $QN = PM$; ist aber X eine ungerade Funktion von $x (= Q)$ so wird $QN = - PM$. Und wenn P und R gerade, Q und S hingegen ungerade Funktionen von x anzeigen, und die Gleichung für die Curve

$$y = \frac{P + Q}{R + S}$$

ist: so wird

$$PM = \frac{P + Q}{R + S}; \text{ und } QN = \frac{P - Q}{R - S}.$$

§. 381.

Nun sey eine Curve von der Art zu finden, daß $PM + QN$ eine beständige Größe, z. B. $= 2AB = 2a$ werde. Hier ist klar, daß der Aufgabe durch die Gleichung

$$y = a + Q$$

ein Genüge geschehen muß, wenn Q eine ungerade Funktion von x ist; denn es wird alsdann

$$PM = a + Q, \text{ und } QN = a - Q$$

und folglich

$$PM + QN = 2a,$$

wie verlangt worden ist. Setzt man also

$$y - a = u$$

so wird

$$u = Q$$

und dies ist eine Gleichung für eben die Curve, wenn man die gerade Linie Bp zur Axe, und den Punkt B zum Anfangspunkte der Abscissen macht, und also $Bp = x$, und $pM = u$ ist. Wenn man daher irgend eine Curve von dieser Art, MBN, Fig. 80, beschreibt, und eine gerade Linie

PQ

PQ zur Axe annimmt: so wird allemal, wenn man aus dem Mittelpunkte B die Linie BA senkrecht auf die Axe PQ herabfällt, und zu beyden Seiten gleiche Abscissen AP = AQ abschneidet, die Summe PM + QN eine beständige Größe, und = 2AB seyn.

§. 382.

Da wir aber für die Curven mit zwey um B auf beyden Seiten liegenden gleichen Theilen oben [§ 340] zwey Gleichungen gefunden haben, die für die Coordinaten x und u folgende sind.

I.

$$0 = \alpha x + \beta u + \gamma x^3 + \delta x^2 u + \varepsilon xuu + \zeta u^3 + \eta x^5 + \vartheta x^4 u + \text{etc.}$$

II.

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma xu + \delta u^2 + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 u + \eta x^2 u^2 + \vartheta xu^3 + \text{etc.}$$

so findet man, wenn man in jede dieser Gleichungen $u = y - a$ setzt, zwey allgemeine Gleichungen zwischen den Coordinaten x und y für die algebraischen Curven, die der vorhergehenden Aufgabe ein Genüge thun. Es gehört also dahin, einmal, jede durch den Punkt B gezogene gerade Linie; und dann auch jeder Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt in B liegt. Da aber in dem letzten Falle jeder Abscisse AP und AQ zwey Applicaten zukommen, (außer wenn die Curve eine Hyperbel ist, und die Applicaten der einen Asymptote parallel genommen werden) so hat man dabey zwey Paar Applicaten, die eine und dieselbe Summe geben.

§. 383.

Wenn eine Curve gefunden werden soll, worin nicht die Summe jeder zwey Applicaten PM und QN, sondern die

die Summe der Potestäten derselben von irgend einem Grade eine beständige Größe seyn soll; so findet eine ähnliche Auflösung statt. Denn soll

$$PM^n + QN^n = 2a^n$$

seyn, so ist klar, daß diese Bedingung durch die Gleichung

$$y^n = a^n + Q$$

erfüllt werde, wenn Q irgend eine ungerade Funktion von x ist. Es wird nemlich alsdann

$$PM^n = a^n + Q, \text{ und } QN^n = a^n - Q$$

und folglich

$$PM^n + QN^n = 2a^n$$

Setzt man $y^n - a^n = u$, so druckt die Gleichung $u = Q$ die Natur einer Curve aus, die für die Coordination x und y um dem Mittelpunkte B zwey wechselnde gleiche Theile hat, und wenn man daher in den Gleichungen des vorhergehenden § allenthalben $y^n - a^n$ für u schreibt, so erhält man allgemeine Gleichungen für die Curven, die der gegenwärtigen Aufgabe ein Gnüge thun.

§. 384.

Da also diese Untersuchungen keine Schwierigkeit haben, so werde verlangt, eine Curve MBN, Fig. 80, von der Art zu finden, daß das Rechteck zwischen den Applicaten $PM.QN$, welche von dem Punkte A in der Axe auf beyden Seiten in gleicher Größe genommen werden, eine beständige Größe, $= aa$ sey. Diese Aufgabe läßt mehrere besondere Auflösungen zu, und die vornehmsten davon wollen wir vor der allgemeinen vorhergehen lassen. Es sey P eine gerade, und Q eine ungerade Funktion der Abscisse $AP = x$, und die Applicate $PM = y = P + Q$, woher denn, wenn man x negativ nimmt, $QN = P - Q$ wird. Es muß demnach

$$PM \cdot QN = PP - QQ = aa, \text{ oder}$$
$$P = \sqrt{(aa + QQ)}$$

werden, und dieser Ausdruck $\sqrt{(aa + QQ)}$ ist, da er, weil QQ eine gerade Funktion von x ist, eine gerade Funktion giebt, eine brauchbare Substitution für P. Es ist also die Gleichung für die gesuchte Curve

$$y = Q + \sqrt{(aa + QQ)}$$

wo Q jede ungerade Funktion von x bedeutet,

§. 385.

Da aber das Wurzelzeichen sowohl + als — zuläßt, so gehört zu jeder Absciſſe eine doppelte Applicate, z. B zu AB

$$Q + \sqrt{(aa + QQ)}; \text{ und } Q - \sqrt{(aa + QQ)}$$

zu AQ hingegen

$$-Q + \sqrt{(aa + QQ)}; \text{ und } -Q - \sqrt{(aa + QQ)}$$

und es hat demnach die Curve um A, als dem Mittelpunkte, wechselnde gleiche Theile. Auch läßt sich die Zweydeutigkeit, die das Wurzelzeichen erzeugt, nicht dadurch aus dem Wege räumen, daß man für Q eine solche ungerade Funktion, wie $\frac{aa}{4x} - x$ setzt, daß $aa + QQ$ ein Quadrat würde; denn es würde alsdann $\sqrt{(aa + QQ} = \frac{aa}{4x} + x$ und also eine ungerade Funktion, dergleichen man aber nicht für P setzen darf. Man muß daher allemal für Q eine solche ungerade Funktion von x nehmen, wobey $aa + QQ$ kein Quadrat wird.

§. 386.

Auf ähnliche Art wird, wenn man $y = (P + Q)^n$ setzt, $QN = (P - Q)^n$ und es muß daher $(P^2 - Q^2)^n = aa$ seyn. Hieraus wird

$$P^2 = a^{\frac{2}{n}} + Q^n;\ \text{und}\ P = \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^n)}$$

und diesen Ausdruck kann man für P setzen, wofern er nur irrational ist. Man hat daher für die Curve, welche der Aufgabe ein Genüge thut, die Gleichung:

$$y = (Q + \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)})^n$$

Was aber die Construction dieser Curven betrifft, so ist dieselbe leicht. Denn beschreibt man eine Curve, die um dem Mittelpunkte A zwey wechselnde ähnliche und gleiche Theile hat, und setzt man die Applicate, die zu der Abscisse $AP = x$ gehört, $= z$: so ist z eine ungerade Funktion von x, und kann also für Q gesetzt werden. Nun fließt aber aus der gefundenen Gleichung

$$y^{\frac{1}{n}} - Q = \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)}$$

und es wird daher

$$Q = z = \frac{y^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{2}{n}}}{2y^{\frac{1}{n}}}.$$

Setzt man daher $\frac{1}{n} = m$, und in der zwischen z und x gegebenen Gleichung allenthalben $z = \frac{y^{2m} - a^{2m}}{2y^m}$: so erhält man die Gleichung für die gesuchte Curve zwischen x und y. Da wir nun zwey Gleichungen zwischen z und x gefunden haben, nemlich, entweder

$$0 = \alpha + \beta xx + \gamma xz + \delta zz + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 z + \eta x^2 z^2 + \vartheta xz^3 + \text{etc.}$$

oder

$$0 = \alpha x + \beta z + \gamma x^3 + \delta x^2 z + \varepsilon xz^2 + \zeta z^3 + \eta x^5 + \vartheta x^4 z + \text{etc.}$$

so erhält man daraus, wenn man (mit Weglassung des Divisors 2, weil man für Q jedes Vielfache von z nehmen kann) allenthalben $z = y^m - \frac{a^{2m}}{y^m}$ setzt, zwey allgemeine Gleichungen für Curven, die der Aufgabe ein Genüge thun.

§. 387.

Es sey außer P auch R eine gerade, und außer Q auch S eine ungerade Funktion von x, und dabey die Gleichung für die gesuchten Curven

$$y = \frac{P + Q}{R + S} = PM:$$

so ist

$$QN = \frac{P - Q}{R - S}, \text{ und es wird demnach } \frac{PP - QQ}{RR - SS} = aa.$$

Diese Bedingung läßt sich aber sehr leicht erfüllen, wenn man

$$y = \frac{P + Q}{P - Q}a, \text{ oder } y = \left(\frac{P + Q}{P - Q}\right)^n a$$

macht. Hierdurch wird auch die Unbequemlichkeit weggeschafft, die vorhin da war, daß zu jeder Abscisse zwey oder mehr Applicaten gehörten, und solche Curven gefunden, wo jeder Abscisse nicht mehr als eine Applicate zukommt. Die einfachste krumme Linie, die der Aufgabe ein Genüge thut, ist daher eine Linie der zweyten Ordnung, die durch die Gleichung

$$y = \frac{b + x}{b - x}a$$

ausgedruckt wird, und also eine Hyperbel. Es thut aber die Hyperbel auch der vorhin gefundenen Gleichung

$$y = Q + \sqrt{(aa + QQ)}$$

ein Genüge, wenn man $Q = nx$ setzt, indem dadurch

$$yy - 2nxy = aa$$

wird

wird; und es lassen sich daher die Bedingungen der gegenwärtigen Aufgabe auf eine doppelte Art durch die Hyperbel erfüllen.

§. 388.

Dies vorausgesetzt, so ist deutlich, daß die Gleichung für die gesuchte Curve so beschaffen seyn muß, daß dieselbe keine Veränderung leidet, wenn man darin $-x$ für x, und $\frac{aa}{y}$ für y setzt. Dergleichen Formeln sind aber

$$(y^n + \frac{a^{2n}}{y^n})P;\ \text{und}\ (y^n - \frac{a^{2n}}{y^n})Q;$$

wenn P eine gerade, und Q eine ungerade Funktion von x bedeutet. Wenn man also eine Gleichung aus einer beliebigen Anzahl solcher Ausdrücke zusammensetzt, so ist solches eine Gleichung für Curven, die der Aufgabe ein Genüge thun. Wenn daher $M, P, R, T,$ rc. gerade, $N, Q, S, V,$ rc. hingegen ungerade Funktionen von x bedeuten: so hat man folgende allgemeine Gleichung:

$$0 = M + (\frac{y}{a} + \frac{a}{y})P + (\frac{yy}{aa} + \frac{aa}{yy})R + (\frac{y^3}{a^3} + \frac{a^3}{y^3})T \text{ rc.}$$
$$+ (\frac{y}{a} - \frac{a}{y})Q + (\frac{yy}{aa} - \frac{aa}{yy})S + (\frac{y^3}{a^3} - \frac{a^3}{y^3})V \text{ rc.}$$

und multiplicirt man dieselbe durch eine ungerade Funktion von x, so gehen die geraden Funktionen von x in ungerade, und die ungeraden in gerade über. Dadurch erhält man folgende Gleichung:

$$0 = N + (\frac{y}{a} + \frac{a}{y})Q + (\frac{yy}{aa} + \frac{aa}{yy})S + (\frac{y^3}{a^3} + \frac{a^3}{y^3})V \text{ rc.}$$
$$+ (\frac{y}{a} - \frac{a}{y})P + (\frac{yy}{aa} - \frac{aa}{yy})R + (\frac{y^3}{a^3} - \frac{a^3}{y^3})T \text{ rc.}$$

Befreyet man aber diese Gleichungen von den in ihnen vorkommenden Brüchen, so ergeben sich daraus folgende zur Ordnung n gehörige:

I.

$$0 = a^n y^n M + a^{n-1} y^{n+1} (P + Q) + a^{n-2} y^{n+2} (R + S) + a^{n-3} y^{n+3} (T + V) \text{ etc.}$$
$$+ a^{n+1} y^{n-1} (P - Q) + a^{n+2} y^{n-2} (R - S) + a^{n+3} y^{n-3} (T - V) \text{ etc.}$$

II.

$$0 = a^n y^n N + a^{n-1} y^{n+1} (P + Q) + a^{n-2} y^{n+2} (R + S) + a^{n-3} y^{n+3} (T + V) \text{ etc.}$$
$$- a^{n+1} y^{n-1} (P - Q) - a^{n+2} y^{n-2} (R - S) - a^{n+3} y^{n-3} (T - V) \text{ etc.}$$

§. 389.

Es kann aber n in den Formeln $(y^n + \frac{a^{2n}}{y^n}) P$, und $(y^n - \frac{a^{2n}}{y^n}) Q$ auch ein Bruch seyn. Setzt man daher für n die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, etc., so verschwindet in den auf diese Art entstehenden allgemeinen Gleichungen die Irrationalität von selbst. Man erhält nemlich dadurch

$$0 = \frac{y + a}{\sqrt{ay}} P + \frac{y^3 + a^3}{ay\sqrt{ay}} R + \frac{y^5 + a^5}{a^2 y^2 \sqrt{ay}} T + \text{etc.}$$
$$+ \frac{y - a}{\sqrt{ay}} Q + \frac{y^3 - a^3}{ay\sqrt{ay}} S + \frac{y^5 - a^5}{a^2 y^2 \sqrt{ay}} V + \text{etc.}$$

oder

$$0 = \frac{y + a}{\sqrt{ay}} Q + \frac{y^3 + a^3}{ay\sqrt{ay}} S + \frac{y^5 + a^5}{a^2 y^2 \sqrt{ay}} V + \text{etc.}$$
$$+ \frac{y - a}{\sqrt{ay}} P + \frac{y^3 - a^3}{ay\sqrt{ay}} R + \frac{y^5 - a^5}{a^2 y^2 \sqrt{ay}} T + \text{etc.}$$

und diese Gleichungen erhalten, wenn man sie von den Brüchen befreyet, folgende Form:

$$0 = a^n y^{n+1}(P+Q) + a^{n-1} y^{n+2}(R+S) + a^{n-2} y^{n+3}(T+V) \text{ ꝛc.}$$
$$+ a^{n+1} y^n (P-Q) + a^{n+2} y^{n-1}(R-S) + a^{n+3} y^{n-2}(T-V) \text{ ꝛc.}$$

und

$$0 = a^n y^{n+1}(P+Q) + a^{n-1} y^{n+2}(R+S) + a^{n-2} y^{n+3}(T+V) \text{ ꝛc.}$$
$$- a^{n+1} y^n (P-Q) - a^{n+2} y^{n-1}(R-S) - a^{n+3} y^{n-2}(T+V) \text{ ꝛc.}$$

§. 390.

Aus diesen vier Gleichungen lassen sich nun die Curven einer jeden Ordnung, die der Aufgabe ein Genüge thun, leicht finden. Zuvörderst gehört dazu aus der ersten Ordnung die gerade Linie, welche der Axe AP parallel ist, und durch den Punkt B geht. Für die zweyte Ordnung geben die beyden ersten Gleichungen, wenn man $n = 1$ setzt,

$$\alpha a x y + y y - a a = 0;$$

man erhält nemlich diese Gleichung, da die erste keine Curve giebt, aus der zweyten, durch die Substitutionen $N = \alpha x$; $P = 1$; und $Q = 0$: die beyden andern aber geben, wenn man $n = 0$ macht,

$$y(\alpha + \beta x) \pm a(\alpha - \beta x) = 0.$$

Für die dritte Ordnung geben die beyden ersten Gleichungen, wenn man $n = 1$ setzt,

$$0 = a y(\alpha + \beta x x) + y y(\gamma + \delta x)$$
$$+ a a(\gamma - \delta x)$$

und

$$0 = \alpha a y x + y y(\gamma + \delta x)$$
$$- a a(\gamma - \delta x)$$

die beyden letzten aber, wenn man $n = 0$, und $n = 1$ setzt

$$0 = y(\alpha + \beta x + \gamma xx)$$
$$\pm a(\alpha - \beta x + \gamma xx)$$

und

$$0 = ay^2(\alpha + \beta x) + y^3$$
$$\pm a^2 y(\alpha - \beta x) \pm a^3$$

Auf eine ähnliche Art lassen sich auch die Curven der übrigen Ordnungen finden, die der Aufgabe ein Genüge thun.