Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Funfzehntes Capitel. Von den Curven, die einen oder mehr Durchmesser haben.

Funfzehntes Capitel.

Von den Curven, die einen oder mehr Durchmesser haben.

§. 336.

Wir haben oben [im fünften und sechsten Capitel] gesehen, daß alle Linien der zweyten Ordnung zum wenigsten einen rechtwinkligen Durchmesser haben, der die ganze Curve in zwey ähnliche und gleiche Theile theilt. Die Parabel nemlich hat einen solchen Durchmesser, und besteht daher aus zwey einander gleichen und ähnlichen Theilen; die Ellipse hingegen und die Hyperbel haben deren zwey, die sich im Mittelpunkte unter einem rechten Winkel schneiden, und daher giebt es bey ihnen vier einander gleiche und ähnliche Bogen oder Schenkel. Und was den Kreis betrifft, so hat derselbe, da er von jeder durch den Mittelpunkt gezogenen geraden Linie in zwey gleiche Theile getheilt wird, unzählige gleiche und ähnliche Theile, und zwar sind solches alle Bogen, die zu gleichen Sehnen gehören.

§. 337.

Diese Aehnlichkeit zweyer oder mehrerer Theile einer und derselben Curve wollen wir also jetzt genauer untersuchen, und die Curven, die zwey oder mehr einander ähnliche Theile haben, durch allgemeine Gleichungen ausdrucken. Ist daher eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten x und y gegeben, und hat man den ganzen Raum in die vier Gegenden Q, R, S und T, Fig. 68, welche durch

durch die in C sich senkrecht schneidenden geraden Linien AB, EF von einander abgesondert werden, eingetheilt: so liegt der Theil der Curve, wobey x und y positiv sind, in der Gegend Q, der aber, wobey x positiv und y negativ ist, in der Gegend R; ferner der, wobey x negativ, y aber positiv ist, in S, und der endlich, wobey x und y negativ sind, in T.

§. 338.

Es werden demnach die Theile der Curve in den Gegenden Q und R einander gleich und ähnlich seyn, wenn die Gleichung so beschaffen ist, daß sie unverändert bleibt, wenn man $-y$ für $+y$ setzt. Und da sich diese Beschaffenheit bey allen Potestäten von y, deren Exponenten gerade Zahlen sind, findet: so erhellet, daß die Theile der Curve, in den Gegenden Q und R einander gleich und ähnlich seyn werden, wenn in der Gleichung keine Potestäten von y mit ungeraden Exponenten vorkommen; und daß folglich in diesem Falle die gerade Linie AB, worauf die Abscissen CP genommen werden, ein Durchmesser der Curve seyn werde. Hiernach sind alle diese Curven, vorausgesetzt, daß sie zu den algebraischen gehören, unter folgender allgemeinen Gleichung enthalten:

$$o = \alpha + \beta x + \gamma xx + \delta y^2 + \varepsilon x^3 + \zeta xy^2 + \eta x^4 + \vartheta x^2y^2 + \iota y^4 + \text{etc.}$$

und diesen Ausdruck kann man auch auf die Art anzeigen, daß man sagt, er sey eine rationale Funktion von x und yy. Wenn also Z irgend eine rationale Funktion von x und yy ist, so druckt die Gleichung

$$Z = o$$

eine Curve aus, die von der geraden Linie AB in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt wird; und es sind daher

auch

auch die Theile der Curve in den Gegenden S und T einander gleich und ähnlich.

§. 339.

Die Theile der Curve in den Gegenden Q und S aber werden einander gleich und ähnlich seyn, wenn die Gleichung so beschaffen ist, daß sie unverändert bleibt, wenn mann $-x$ für $+x$ setzt; und wenn daher Z irgend eine rationale Funktion von xx und y ist, so druckt die Gleichung

$$Z = 0$$

eine Curve aus, die durch die gerade Linie EF in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt wird. Die allgemeine Gleichung für diese Curven ist demnach

$$0 = \alpha + \beta y + \gamma xx + \delta yy + \varepsilon xxy + \zeta y^3 + \eta x^4 + \vartheta x^2y^2 + \iota y^4 + \text{ꝛc.}$$

und aus dieser Gleichung ist der Theil der Curve in S dem Theile in Q, so wie der Theil in T dem Theile in R gleich und ähnlich.

§. 340.

Die Theile in den Gegenden Q und T aber, oder die Theile in R und S, werden einander gleich seyn, wenn die Gleichung zwischen den Coordinaten x und y so beschaffen ist, daß sie unverändert bleibt, wenn man beyde Coordinaten negativ nimmt. Es sey $Z = 0$ die Gleichung für diese Curven, so erhellet, daß diese Gleichung die angeführte Beschaffenheit haben werde, wenn Z eine Funktion von x und y von geraden Dimensionen, oder ein Aggregat irgend einer Anzahl homogener Funktionen von geraden Dimensionen ist. Wenn hingegen Z ein Aggregat irgend einer Anzahl homogener Funktionen von ungeraden Dimensionen ist, so geht Z, wenn man x und y negativ nimmt,

in

in $-Z$ über, und es wird daher, da $Z = 0$ war, auch $-Z = 0$. Hiernach findet man also eine doppelte allgemeine Gleichung für die Curven, die in den entgegengesetzten Gegenden Q und T, desgleichen in R und S, gleiche und ähnliche Theile haben. Die eine nemlich ist

$$0 = \alpha + \beta xx + \gamma xy + \delta y^2 + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta xxyy + \vartheta xy^3 + \iota y^4 + \varkappa x^6 + \text{ꝛc.}$$

und die andere

$$0 = \alpha x + \beta y + \gamma x^3 + \delta x^2 y + \varepsilon xy^2 + \zeta y^3 + \eta x^5 + \vartheta x^4 y + \iota x^3 y^2 + \text{ꝛc.}$$

§. 341.

Es sind also die Curven, die zwey einander ähnliche und gleiche Theile haben, von einer zwiefachen Gattung. Entweder liegen diese beyden Theile dergestalt auf den beyden Seiten um einer geraden Linie, daß alle auf diese Linie gezogene senkrechte Ordinaten in zwey gleiche Theile getheilt werden. In diesem Falle heißt die gedachte gerade Linie ein rechtwinkliger Durchmesser der Curve, und es gehören dahin die Gleichungen im 337 und 338sten §. Oder es befinden sich jene beyde ähnliche und gleiche Theile auf den entgegengesetzten Seiten so, daß jede durch den Punkt C gezogene gerade Linie die Curve in zwey wechselsweise einander gleiche Theile theilt, welches bey den Gleichungen des vorhergehenden § der Fall ist. Diese verschiedene Lage der gleichen Theile wollen wir nun auf die Art ausdrucken, daß wir diejenigen, die zu der ersten Art gehören, mit dem Namen, entgegengesetzt gleich, die von der andern aber mit der Benennung, wechselsweise gleich, belegen. Da es ferner bey der letzten Gattung einen Punkt C giebt, der so beschaffen ist, daß jede dadurch zu beyden Seiten nach der Curve gezogene gerade Linie in ihm in

zwey

zwey gleiche Theile getheilt wird, so kann man diesem Punkte sehr füglich den Namen Mittelpunkt geben, so daß also den Curven, die zwey wechselsweise gleiche Theile haben, ein Mittelpunkt zukommt, denen aber, wobey zwey Theile entgegengesetzt einander gleich sind, ein Durchmesser zugeschrieben werden kann.

§. 342.

Da die Gleichung $Z = 0$, wenn y in der Funktion Z keine andere als gerade Dimensionen hat, Curven ausdruckt, die einen Durchmesser AB, Fig. 68, haben; und eben diese Gleichung, wenn darin die andere Coordinate x bloß in geraden Dimensionen vorkommt, eine Gleichung für Curven mit dem Durchmesser EF ist: so müssen, wenn Z eine solche Funktion von x und y ist, daß alle Exponenten von x und y gerade Zahlen sind, AB und EF rechtwinklige Durchmesser der Curve, und also die in den Gegenden Q, R, S und T liegenden vier Theile der Curve einander gleich und ähnlich seyn. Die allgemeine Gleichung für dergleichen Curven ist daher:

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma y^2 + \delta x^4 + \varepsilon x^2 y^2 + \zeta y^4 + \eta x^6 + \vartheta x^4 y^2 + \text{etc.}$$

§. 343.

Es haben also die in dieser Gleichung enthaltene Curven zwey rechtwinklige Durchmesser AB und EF, die sich in dem Punkte C senkrecht schneiden, und es gehören dieselben insgesammt entweder zu der zweyten, oder zu der vierten, oder zu der sechsten Ordnung etc., so daß keine Linie von einer ungeraden Ordnung Curven enthält, die mit zwey Durchmessern, die sich senkrecht schnitten, versehen wären. Und da die Gleichung § 342 auch in der ersten Glei-

chung

chung im 340sten § begriffen ist, so haben jene Curven auch in C einen Mittelpunkt, so daß jede dadurch zu beyden Seiten nach der Curve gezogene gerade Linie in demselben in zwey gleiche Theile getheilt wird. Dergleichen Curven mit einem doppelten Durchmesser erhält man also aus der Gleichung $Z = 0$, wenn Z irgend eine rationale Funktion von xx und yy ist.

§. 344.

Da wir auf diese Art zu Curven mit zwey Durchmessern gelangt sind, so wollen wir nun auch Gleichungen für solche Curven suchen, die mehr als zwey Durchmesser haben. Zuvörderst ist leicht zu zeigen, daß die Durchmesser jeder Curve, die deren nur zwey hat, auf einander senkrecht seyn müssen, so daß keine Curve mit zwey Durchmessern möglich ist, die nicht in der zuletzt gefundenen Gleichung enthalten wäre. Denn wir wollen annehmen, daß eine Curve zwey Durchmesser AB und EF Fig. 69 habe, die sich in C nicht senkrecht schneiden. Da alsdann EC ein Durchmesser ist, so muß der Curve auf beyden Seiten dieser geraden Linie gleiche Beschaffenheit zukommen; und folglich, da der Theil dießeits EC die Linie AC zum Durchmesser hat, auch der Theil jenseits EC den Durchmesser GC haben, der in dem Punkte C mit EC den Winkel $GCE = ACE$ mache. Auf ähnliche Art muß, da GC ein Durchmesser ist, auch IC, wenn $GCI = GCE$ ist, ein Durchmesser von eben der Beschaffenheit als EC seyn. Ferner ist auch LC ein Durchmesser, wenn man $ICL = ICG$ macht; und so findet man, wenn man fortfährt, immer neue Durchmesser, bis der letzte mit dem ersten AC zusammenfällt, welches geschiehet, wenn der Winkel ACE zum rechten Winkel ein rationales Verhältniß hat.

§. 345.

Hat aber der Winkel ACE zum rechten Winkel kein rationales Verhältniß, so wird die Anzahl der Durchmesser unendlich groß, und die Curve ist dann ein Kreis, in welchem jede durch den Mittelpunkt gezogene gerade Linie ein rechtwinkliger Durchmesser ist; denn dergleichen Durchmesser verstehen wir hier allemal, wenn wir von Durchmessern reden, weil diese nur die Curven in zwey ähnliche und gleiche Theile theilen. Hieraus erhellet, daß keine algebraische Linie zwey einander parallele Durchmesser haben könne. Denn hätte sie zwey solche Durchmesser, so würde sie, aus den angeführten Gründen, auch unendlich viele unter einander parallele und gleichweit von einander entfernte Durchmesser haben, und also von einer geraden Linie in unendlich vielen Punkten geschnitten werden müssen. Allein diese Beschaffenheit kommt den algebraischen Linien nicht zu.

§. 346.

Wenn also eine Curve mehr als zwey Durchmesser hat, so schneiden sich dieselben insgesammt in einem und demselben Punkte C, und sind von einander unter gleichen Winkeln entfernt. Ferner sind diese Durchmesser von zwiefacher Gattung, und folgen wechselsweise auf einander, indem nemlich der Durchmesser CG von eben der Beschaffenheit ist, als der Durchmesser CA. Daher kommt die Gleichung für die Curve, wobey CG die Axe ist, mit der überein, wobey CA zur Axe angenommen wird, und die wechselnden Durchmesser CA, CG, CL, ꝛc. so wie auch CE, CI ꝛc. gehören auf gleiche Art zu der Curve. Wenn also die Anzahl der Durchmesser endlich ist, so ist der Winkel ACG ein aliquoter Theil von vier rechten Winkeln, oder ACE ein ali-

aliquoter Theil von 180°, oder der halben Peripherie, die wir $= \pi$ setzen wollen.

§. 347.

Wenn der Winkel ACE, Fig. 70, $= 90° = \frac{1}{2}\pi$ ist, so findet der vorhin schon untersuchte Fall statt, wo die Curve zwey auf einander senkrechte Durchmesser hat. Diese Curven wollen wir jetzt nochmals, aber auf einem andern Wege, untersuchen, den wir auch zur Erfindung mehrerer Durchmesser betreten können. Es habe demnach die Curve die beyden Durchmesser AB und EF. Man nehme in ihr irgend einen Punkt M an, setze, nachdem man aus dem Mittelpunkte C die gerade Linie CM gezogen hat,

$$CM = z, \text{ und } ACM = s$$

und suche eine Gleichung zwischen z und s. Da AC ein Durchmesser ist, so fällt in die Augen, daß z eine solche Funktion von s seyn muß, die unverändert bleibt, wenn man $-s$ für s setzt; denn es muß, wenn man statt des Winkels $ACM = s$ den negativen Winkel ACm nimmt, $Cm = CM$ seyn. Nun ist cos. s eine solche Funktion von s, welche durch die Substitution von $-s$ für $+s$ nicht verändert wird; und es wird daher dem gedachten Erfordernisse ein Genüge geschehen, wenn z irgend eine rationale Funktion von cos. s ist.

§. 348.

Setzt man die Abscisse $CP = x$, und die Applicate $PM = y$, so wird

$$z = \sqrt{(xx + yy)} \text{ und } \cos. s = \frac{x}{z}$$

Soll nun $Z = 0$ die Gleichung für die Curve seyn, deren Durchmesser CA ist, so muß Z eine rationale Funktion von

z und $\frac{x}{z}$, oder von z und x, oder, wegen der Rationalität, von $xx + yy$ und x seyn. Aber wenn Z eine Funktion von $xx + yy$ und x ist, so ist es auch eine Funktion von yy und x. Denn setzt man $xx + yy = u$, so wird Z eine Funktion von x und u; und setzt man ferner $u = t + xx$, so daß $t = yy$ wird: so wird Z eine Funktion von t und x, d. h. von yy und x. Wenn daher Z eine rationale Funktion von yy und x ist, so ist die gerade Linie CA ein Durchmesser der Curve: und diese Bestimmung kommt mit derjenigen durchaus überein, die wir oben [§ 338] für die Curven, denen ein Durchmesser zukommt, gefunden haben.

§. 349.

Aber die gesuchte Curve soll zwey Durchmesser AB und EF haben, woher denn der Durchmesser CB von eben der Art seyn wird, als der Durchmesser CA, § 346. Wenn man also die gerade Linie $CM = z$ auf den Durchmesser CB bezieht, so muß, weil $BCM = \pi - s$ ist, z eine solche Funktion von s seyn, die unverändert bleibt, wenn man $\pi - s$ für s setzt. Dergleichen wäre nun zwar $\sin. s$, weil $\sin. s = \sin. (\pi - s)$ ist, allein es geschiehet dadurch der vorhergehenden Bedingung kein Genüge. Man muß also einen Ausdruck suchen, der auf gleiche Art zu s, $-s$, und $\pi - s$ gehört, und ein solcher ist $\cos. 2s$, indem $\cos. 2s = \cos. -2s = \cos. 2(\pi - s)$ ist; und es ist demnach die Gleichung $Z = 0$ eine Gleichung für die Curven mit zwey Durchmessern AB und EF, wenn Z eine rationale Funktion von z und $\cos. 2s$ ist. Nun ist $\cos. 2s = \frac{xx - yy}{zz}$, und es muß daher Z eine Funktion von $xx + yy$ und $xx - yy$

oder von xx und yy seyn, wie wir vorhin [§ 342] gefunden haben.

§. 350.

Nun wollen wir zu den Curven, die drey Durchmesser AB, EF, und GH, Fig. 71, haben, fortgehen, wo sich denn [§ 346] diese Durchmesser in einem Punkte C unter den Winkeln ACE, ECG, GCB $= 60^0 = \frac{1}{3}\pi$ schneiden, und die wechselnden Durchmessern CA, CG, CF von einerley Beschaffenheit seyn werden. Setzt man daher CM $= z$, und ACM $= s$, so muß, weil GCM $= \frac{2}{3}\pi - s$ ist, die Funktion für die Curve $Z = 0$ so beschaffen seyn, daß Z eine rationale Funktion von z und einer Größe w ist, die unverändert bleibt, wenn man $-s$ oder $\frac{2}{3}\pi - s$ für s setzt. Es ist demnach $w = \cos. 3s$, weil $\cos. 3s = \cos. -3s = \cos. (2\pi - 3s)$ ist. Setzt man aber die Coordinaten CP $= x$, und PM $= y$, so wird $\cos. 3s = \frac{x^3 - 3xyy}{z^3}$, und es muß folglich Z eine rationale Funktion von $xx + yy$, und $x^3 - 3xyy$ seyn.

§. 351.

Macht man daher $xx + yy = t$, und $x^3 - 3xyy = u$, so wird die allgemeine Gleichung für die Curven mit drey Durchmessern

$$0 = \alpha + \beta t + \gamma u + \delta tt + \varepsilon tu + \zeta uu + \eta t^3 + \text{etc.}$$

und diese giebt folgende zwischen x und y

$$0 = \alpha + \beta(xx + yy) + \gamma x(xx - 3yy) + \delta(xx + yy)^2 + \text{etc.}$$

Da nun die Gleichung

$$0 = \alpha + \beta xx + \beta yy$$

dem Kreise zugehört, der als eine Curve mit unzähligen Durchmessern auch zu den Curven gerechnet werden kann, die drey Durchmesser haben: so ist die einfachste Curve mit drey Durchmessern die Linie der dritten Ordnung, die durch die Gleichung

$$x^3 - 3xyy = axx + ayy + b^3$$

ausgedruckt wird, und drey Asymptoten hat, die ein gleichseitiges Dreyeck machen, in dessen Mitte der Punkt C liegt. Die gedachten Asymptoten gehören insgesammt zu der Art $u = \frac{A}{tt}$, und die Curve nach der oben gemachten Classification zu der fünften Art.

§. 352.

Wenn die Curve vier Durchmesser AB, EF, GH und IK, Fig. 72, hat, die sich in dem Punkte C unter halben rechten Winkeln $= \frac{1}{4}\pi$ schneiden, so sind die Durchmesser CA, CG, CB und CH von einer und derselben Beschaffenheit. Wenn man daher $CM = z$ und $ACM = s$ setzt, so muß eine solche Funktion von s gesucht werden, die unverändert bleibt, wenn $-s$ oder $\frac{2}{4}\pi - s$ für s gesetzt wird. Dergleichen ist aber $\cos. 4s$, und wenn also Z eine Funktion von z und $\cos. 4s$, oder von $xx + yy$ und $x^4 - 6xxyy + y^4$ ist, so giebt die Gleichung $Z = o$ eine Curve mit vier Durchmessern. Es wird daher Z eine Funktion von t und u, wenn man $t = xx + yy$, und $u = x^4 - 6xxyy + y^4$ setzt; nimmt man aber $v = tt - u$, so wird Z eine Funktion von t und v, d. h. von $xx + yy$ und $xxyy$. Oder man kann auch Z so bestimmen, daß man sagt, es sey eine Funktion von $xx + yy$ und $x^4 + y^4$.

§. 353.

Wenn die durch die Gleichung $Z = o$ ausgedruckte Curve fünf Durchmesser haben soll, so muß Z eine Funktion

von

von z und cos. 5 s seyn. Da nun, wenn die rechtwinkligen Coordinaten x und y sind,

$$\cos. 5 s = \frac{x^5 - 10 x^3 yy + 5 x y^4}{z^5}$$

wird, so ist $Z = 0$ eine Gleichung für eine Curve mit fünf Durchmessern, wenn Z eine rationale Funktion von $xx + yy$ und $x^5 - 10 x^3 yy + 5 x y^4$ ist. Die einfachste Curve, den Kreis ausgenommen, die fünf Durchmesser hat, ist demnach eine Linie der fünften Ordnung, die durch folgende Gleichung ausgedruckt wird:

$$x^5 - 10 x^3 yy + 5 x y^4 = a(xx + yy)^2 + b(xx + yy) + c,$$

und wegen der Realität aller Faktoren des höchsten Gliedes hat diese Curve fünf Asymptoten, die durch ihre Schnitte ein reguläres Fünfeck machen, in dessen Mitte der Mittelpunkt C liegt.

§. 354.

Hieraus erhellet schon allgemein, daß eine durch die Gleichung $Z = 0$ ausgedruckte Curve n Durchmesser, davon je zwey neben einander liegende den Winkel $= \frac{\pi}{n}$ einschliessen, haben werde, wenn Z eine Funktion von z und cos. n s, oder, bey rechtwinkligen Coordinaten, irgend eine rationale Funktion von $xx + yy$, und $x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4} y^4 -$ rc. ist; oder daß die Gleichung:

$$0 = \alpha + \beta t + \gamma u + \delta tt + \varepsilon tu + \zeta uu + \eta t^3 + \vartheta ttu + \text{rc.}$$

eine Curve mit n Durchmessern geben werde, wenn

$$t = xx + yy$$

und

$$u = x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4} y^4 - \text{rc.}$$

genommen wird. Hieraus lassen sich Curven mit so viel, unter gleichen Winkeln in einem und demselben Punkte C sich schneidenden, Durchmessern, als man will finden, und dabey begreift diese Gleichung ohne Ausnahme alle algebraische Curven unter sich, die eine gegebene Anzahl von Durchmessern haben.

§. 355.

Dergleichen mit mehrern Durchmessern versehene Curven haben allemal eine doppelt so große Anzahl einander ähnlicher und gleicher Theile. So hat die Curve mit zwey Durchmessern, Fig. 70, vier ähnliche und gleiche Theile, AE BE, AF und BF; die Curve mit drey Durchmessern, Fig. 71, sechs ähnliche und gleiche Theile, AE, GE, GB, FB, FH und AH; die Curve mit vier Durchmessern, Fig. 72, acht ähnliche und gleiche Theile AE, AK, GE, GI, BI, BF, HF und HK; und auf ähnliche Art ist die Anzahl der gleichen Theile immer noch einmal so groß, als die Anzahl der Durchmesser. So wie wir aber oben [§ 338] gesehen haben, daß es Curven giebt, die zwey ähnliche und gleiche Theile aber keinen Durchmesser haben, so finden auch Curven mit mehr als zwey ähnlichen und gleichen Theilen ohne Durchmesser statt.

§. 356.

Wir wollen von zwey gleichen auf durchaus entgegengesetzten Seiten liegenden Theilen, AME, BKF, Fig. 73, anfangen, welchen Fall wir schon oben [§ 340] gehabt haben. Sollen nemlich einer Curve nicht mehr als zwey gleiche Theile zukommen, so müssen dieselben nothwendig einander entgegengesetzt seyn. Dies wird deutlich werden, wenn

wir

wir mehrere gleiche Theile betrachten. Setzt man also wieder, wie vorhin, $CM = z$, und den Winkel $ACM = s$, so ist offenbar, daß den Winkeln s und $\pi + s$ einerley Werth von z zukommen müsse; denn nimmt man $ACM = \pi + s$, so wird $z = CK$, CK aber muß $= CM$ seyn. Man muß also einen Ausdruck suchen, der den Winkeln s und $\pi + s$ gemein ist, und da $\tang. s = \tang. (\pi + s)$, so ist $\tang. s$ ein solcher. Hiernach gehört die Gleichung $Z = o$ für eine Curve, so wie wir sie jetzt betrachten, wenn Z eine Funktion von z und $\tang. s$, oder eine Funktion $xx + yy$ und $\frac{x}{y}$ ist. Macht man $\frac{x}{y} = t$, so wird $xx + yy = yy \times (1 + tt)$, und dann muß Z eine Funktion von t und $yy \times (1 + tt)$ d. h. von t und yy seyn. Hieraus ergeben sich eben die Gleichungen, die wir oben gefunden haben.

§. 357.

Damit aber die Brüche, welche in den Ausdrücken für die Tangenten vorkommen, vermieden werden, kann man zu eben diesem Behufe die Sinus und Cosinus brauchen. Denn da $\sin. 2s = \sin. 2(\pi + s)$ und $\cos. 2s = \cos. 2(\pi + s)$ ist, so kann Z auch eine rationale Funktion von z, $\sin. 2s$ und $\cos. 2s$, oder von $xx + yy$, $2xy$, und $xx - yy$ seyn. Wenn einer von den Ausdrücken $\sin. 2s$, und $\cos. 2s$ weggelassen wird, so hat die Curve außerdem auch einen Durchmesser. Es kommt also bey der gesuchten Auflösung darauf an, daß Z eine rationale Funktion von xx, yy, und xy sey, und daher entsteht denn die Gleichung:

$$o = \alpha + \beta xx + \gamma xy + \delta yy + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta x^2 y^2 + \vartheta x y^3 + \iota y^4 + \text{rc.}$$

Wenn nun die Glieder, worin x nicht enthalten ist, verschwinden, so läßt sich die ganze Gleichung durch x dividiren, und dann wird

$$0 = \beta x + \gamma y + \varepsilon x^3 \; \zeta xxy + \eta xy^2 + \vartheta y^3 + \varkappa x^5 + \text{etc.}$$

Dieses sind aber die beyden Gleichungen, welche wir oben [§ 340] gefunden haben.

§. 358.

Nun wollen wir eine Curve suchen, die nicht mehr als drey ähnliche und gleiche Theile AM, BN und DL, Fig. 74, habe, welche daher so beschaffen seyn muß, daß, wenn man aus dem Mittelpunkte C drey gerade Linien CM, CN, CL unter gleichen Winkeln gegen einander zieht, diese gerade Linien immer einander gleich werden. Setzt man also den Winkel ACM $= s$, und die gerade Linie CM $= z$, so muß die gerade Linie z durch s auf eine solche Art bestimmt werden, daß den drey Winkeln s, $\frac{2}{3}\pi + s$, und $\frac{4}{3}\pi + s$ ein, und derselbe Werth von z zukomme, indem MCN $=$ NCL $= \frac{2}{3}\pi$ ist. Nun haben diese drey Winkel die Ausdrücke sin. $3s$, und cos. $3s$ gemein. Wenn daher Z eine rationale Funktion von folgenden drey Größen, $xx + yy$; $3xxy - y^3$; und $x^3 - 3xyy$ ist, so giebt die Gleichung $Z = 0$ alle Curven von der gesuchten Art. Es fließt also hieraus die allgemeine Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = \alpha + \beta(xx + yy) + \gamma(3xxy - y^3) + \delta(x^3 - 3xyy) \\ + \varepsilon(xx + yy)^2 + \zeta(xx + yy)(3xxy - y^3) \\ + \eta(xx + yy)(x^3 - 3xyy) + \text{etc.} \end{aligned}$$

und die Linien der dritten Ordnung, die hieher gehören, sind in der Gleichung begriffen:

$$0 = \alpha + \beta xx + \beta yy + \delta x^3 + 3\gamma xxy - 3\delta xyy + \gamma y^3$$

§. 359.

Wenn die Curve vier gleiche Theile AM, EN, BK und FL, Fig. 73, haben soll, so daß jede vier aus dem Mittel-

punkte

punkte C unter gleichen Winkeln gezogene gerade Linien CM, CN, CK und CL einander gleich sind: so setze man den Winkel ACM $= s$, und die gerade Linie CM $= s$, wo denn, weil MCN $=$ NCK $=$ KCL $= 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ ist, die gerade Linie z so durch den Winkel s ausgedruckt werden muß, daß zu den Winkeln s, $\frac{1}{2}\pi + s$, $\pi + s$, $\frac{3}{2}\pi + s$ einerley Werth gehört. Diese Eigenschaft haben nun die Ausdrücke $\sin. 4s$ und $\cos. 4s$; und es wird daher die Gleichung $Z = 0$ eine Curve mit vier solchen gleichen Theilen geben, wenn Z irgend eine rationale Funktion dieser drey Größen, $xx + yy$; $4x^3y - 4xy^3$, und $x^4 - 6xxyy + y^4$ ist. Die allgemeine Gleichung für dergleichen Curven ist demnach

$$0 = \alpha + \beta xx + \beta yy + \gamma x^4 + \delta x^3 y + \varepsilon xxyy - \delta xy^3 + \gamma y^4 + \text{etc.}$$

§. 360.

Auf eine ähnliche Art findet man, daß Z in der Gleichung $Z = 0$, wenn dieselbe eine Curve mit fünf ähnlichen und gleichen Theilen ausdrucken soll, eine Funktion folgender drey Größen:

$$xx + yy;\ 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5;\ x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$$

seyn muß. Ueberhaupt aber muß Z, wenn die durch $Z = 0$ ausgedruckte Curve n gleiche Theile haben soll, eine rationale Funktion von diesen drey Größen:

$$xx + yy;$$

$$nx^{n-1}y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3}y^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{n-5}y^5 - \text{etc.}$$

und

$$x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}y^2 +$$

n

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4} y^4 - \text{ꝛc.}$$

seyn; und wenn einer von diesen beyden letzten Ausdrücken aus der Gleichung wegfällt, so hat die Curve zugleich so viel Durchmesser, als n Einheiten enthält.

§. 361.

Zu dieser doppelten Classe der Curven mit gleichen Theilen, wonach einigen Durchmesser zukommen, andern aber nicht, gehören überhaupt alle algebraische Curven, die zwey oder mehr ähnliche und gleiche Theile haben. Um sich hiervon zu überzeugen, habe eine continuirliche Curve die beyden Theile OAa und OBb, Fig. 75, einander ähnlich und gleich. Man ziehe AB, und beschreibe darüber als über der Grundlinie das gleichschenklige Dreyeck ACB, dessen Winkel C dem Winkel O gleich sey. Da nun die Winkel OAC und OBC einander gleich sind, so sind auch die Theile der Curve CAa und CBb ähnlich und gleich; und wenn man die Winkel BCD, DCE, ꝛc. dem Winkel ACB, und CD = CE = CA = CB macht, so hat die Curve, wegen des Gesetzes der Continuität, auch die Theile Dd, Ee ꝛc. bey diesen geraden Linien ähnlich und gleich den Theilen Aa, Bb. Wofern also das Verhältniß des Winkels ACB zu 360° nicht irrational ist, so wird die Anzahl der gleichen Theile endlich seyn; ist hingegen dieses Verhältniß irrational, so ist dieselbe unendlich groß, und also die Curve keine algebraische mehr. Es gehört aber jene Curve allemal zu den vorhin von uns untersuchten, die keinen Durchmesser haben.

§. 362.

Wenn aber die beyden ähnlichen und gleiche Theile auf entgegengesetzte Seiten der Linien AO und BO, Fig. 76, fallen,

fallen, so daß der Theil AOa dem Theile OBb ähnlich und gleich ist: so ziehe man auf beyden Seiten die geraden Linien AR und BS so, daß OAR = OBS = ½ AOB, und folglich AR der BS parallel werde. Wird nun AB gezogen, und durch den Mittelpunkt C die gerade Linie CV der AR und der BS parallel gelegt, so sind die Theile aA und bB in Rücksicht auf die gerade Linie CV ähnlich und gleich. Wenn also nicht ba = o ist, so wird, weil dem Bogen bB, wenn man von b nach a zu fortgeht, der auf der andern Seite liegende ähnliche und gleiche Bogen aA entspricht, diesem Bogen auch, wenn man von a nach e durch den Raum ae = ba fortgeht, der ähnliche und gleiche Bogen eE, und diesem ferner der Bogen dD entsprechen, und folglich die Curve unendlich viel ähnliche und gleiche Theile haben. Eine solche Curve ist aber keine algebraische.

§. 363.

So verhält es sich, wenn die gerade Linie AB gegen die Parallelen AR und BS eine schiefe Lage hat, oder, welches auf einerley hinausläuft, wenn die Seiten AO und BO des Dreyecks AOB ungleich sind. Ist hingegen AO = BO, so ist auch AB senkrecht auf den Parallelen AR und BS und CV, welche letztere denn zugleich durch O geht. Wenn dieses ist, so fallen die Punkte a und b zusammen; und da die Theile aA und bB nicht nur gleich und ähnlich seyn, sondern auch auf beyden Seiten der CV auf gleiche Art liegen werden: so ist in diesem Falle CV ein Durchmesser, und es gehört demnach die Curve zu den vorhin betrachteten mit einem Durchmesser versehenen Curven. Es giebt folglich keine algebraische Curven mit zwey oder mehr ähnlichen und gleichen Theilen, die nicht in der untersuchten doppelten Classe dieser Curven enthalten wären.

Sechs-